Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Διδακτορική Διατριβή

Ασύμμετρες σύμμορφες θεωρίες πεδίου μέσω ολοκληρώσιμων παραμορφώσεων και D-βράνες

Συγγραφέας: Γεώργιος Παππάς

Επιβλέπων καθηγητής:
Κωνσταντίνος Σφέτσος

Το έργο συγχρηματοδοτείται από την Ελλάδα και την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) μέσω του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση», στο πλαίσιο της Πράξης «Ενίσχυση του ανθρώπινου ερευνητικού δυναμικού μέσω της υλοποίησης διδακτορικής έρευνας – 2ος Κύκλος» (ΜΙΣ-5000432), που υλοποιεί το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ)

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

Επιχειρησιακό Πρόγραμμα
Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού,
Εκπαίδευση και Διά Βίου Μάθηση
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

ΕΣΠΑ
2014-2020
ανάπτυξη - εργασία - αλληλεγγύη

15 Μαΐου 2024

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου Κωνσταντίνο Σφέτσο για την δυνατότητα που μου έδωσε να εργαστώ μαζί του και να έρθω σε επαφή με τον ευρύτερο τομέα των ολοκληρώσιμων παραμορφώσεων. Θα ήθελα να ευχαριστήσω επίσης τον Παντελή Πανόπουλο, Γιώργο Γεωργίου και Κωνσταντίνο Σιάμπο για συζητήσεις που είχαμε με επιστημονικό ενδιαφέρον. Ευχαριστώ ειδικά τον Γεωργίου και τον Πανόπουλο που με στήριξαν με τον τρόπο τους σε δύσκολες στιγμές.

Η συγκεκριμένη διατριβή αποτελεί μέρος ενός πολύ μεγαλύτερου πλαισίου γεγονότων από τα οποία επηρεάστηκε και επηρέασε. Για τον λόγο αυτό, την αφιερώνω στους φίλους μου και ειδικά στον αδελφό μου Θάνο Παππά και στην Κ.Κ.

Περίληψη

Στόχος της παρούσας διατριβής είναι η κατασκευή και μελέτη μιας μεγάλης κλάσης ολοκληρώσιμων δισδιάστατων θεωριών πεδίου οι οποίες παρουσιάζονται ως γενικεύσεις των γνωστών στην βιβλιογραφία λ-προτύπων. Αυτές αποτελούν πολυπαραμετρικές παραμορφώσεις γινομένου N Wess-Zumino-Witten (WZW) προτύπων, ορισμένα με διαφορετικά επίπεδα. Οι τελεστές που απομακρύνουν τις θεωρίες μας από το σύμμορφο σταθερό σημείο συζευγνύουν τα Kac-Moody ρεύματα από γειτονικές άλγεβρες και επάγουν μη τετριμμένες ροές της ΟΕ προς υπέρυθρα σταθερά σημεία. Η διατριβή είναι χωρισμένη σε τρία βασικά μέρη εκ των οποίων τα δύο πρώτα είναι βιβλιογραφικά, όπου παρουσιάζουμε έννοιες και τεχνικές απαραίτητες για την κατανόηση του τρίτου μέρους που αποτελεί το ερευνητικό.

Συγκεκριμένα, το πρώτο μέρος παρουσιάζει τις έννοιες της κλειστής και ανοιχτής χορδής και συνδέει την απαίτηση της σύμμορφης/Weyl συμμετρίας σε κβαντικό επίπεδο με την γεωμετρία του χώρου υποβάθρου. Στην συνέχεια μελετάμε ολοκληρώσιμες θεωρίες πεδίου δίνοντας έμφαση στα μαθηματικά εργαλεία της ολοκληρωσιμότητας και στο χειραλικό πρότυπο, ορισμένο σε χώρο ομάδας και πηλίκου (συμμετρικός). Πέραν των ολοκληρώσιμων προτύπων, ιδιαίτερα σημαντικές στην παρούσα έρευνα είναι και οι σύμμορφες θεωρίες πεδίου (ΣΘΠ). Παρουσιάζουμε το WZW και διαγώνια βαθμωμένο WZW πρότυπο, επικεντρώνοντας στον λαγκραντζιανό φορμαλισμό τους, και περιγράφουμε σύντομα τις ΣΘΠ σε ασύμμετρους χώρους πηλίκου. Τέλος, θεωρούμε ανοιχτές χορδές στα προαναφερθέντα πρότυπα και αναπτύσουμε το κατάλληλο θεωρητικό πλαίσιο για να συμπεριλάβουμε την ύπαρξη συνόρου στην κοσμική τους επιφάνεια με τελικό στόχο τον ορισμό σύμμορφων και ολοκληρώσιμων βρανών σε αυτά.

Στο δεύτερο μέρος παρουσιάζουμε τις λ-παραμορφώσεις σε χώρους ομάδας και χώρους πηλίκου. Αφού θεμελιώσουμε την ολοκληρώσιμη δομή του, και στις δύο περιπτώσεις χώρων, μελετάμε τις ροές της ΟΕ της παραμέτρου παραμόρφωσης υπολογίζοντας την β-συνάρτηση της. Η έκφραση της αποκαλύπτει ότι το πρότυπο παρεμβάλεται μεταξύ του WZW προ-

τύπου στο υπεριώδες και του μη αβελιανού T-δυϊκού προτύπου προς το υπέρυθρο. Τέλος βρίσκουμε τις ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες του προτύπου, οι οποίες αποδεικνύεται ότι διατηρούν την ίδια γεωμετρική εικόνα με τις σύμμορφες, στην περίπτωση του WZW.

Στο τρίτο και τελευταίο μέρος επικεντρωνόμαστε στα γενικευμένα λ-πρότυπα που αποτελούν την βάση της έρευνας μας. Αυτά ρέουν προς υπέρυθρες ΣΘΠ τις οποίες και επιθυμούμε να προσδιορίσουμε. Χρησιμοποιώντας την β-συνάρτηση των παραμέτρων παραμόρφωσης και το κεντρικό φορτίο στα υπέρυθρα σημεία, τα οποία υπολογίζουμε μέσω της συνάρτησης του Zamolodchikov, βρίσκουμε ότι οι σύμμορφες άλγεβρες συμμετρίας των αντίστοιχων ΣΘΠ είναι ευαίσθητες στην επιλογή της διάταξης των επιπέδων. Παρότι η έκφραση του κεντρικού φορτίου συνδέεται άμεσα με την μορφή των συμμετριών, για τις περιπτώσεις $N > 2$ δεν μπορούμε να τις προσδιορίσουμε μονοσήμαντα. Για τον λόγο αυτό επιστρατεύουμε τον λαγκραντζιανό φορμαλισμό των υπέρυθρων ΣΘΠ. Αναβαθμίζοντας σε τοπική, κάθε φορά, μια διαφορετική υποομάδα μετασχηματισμών της $G_L \times G_R$ συμμετρίας κατάλληλα επιλεγμένων N WZW προτύπων συμπεραίνουμε ότι οι επιθυμητές ΣΘΠ χαρακτηρίζονται από ασύμμετρους ολομορφικούς και αντιολομορφικούς τομείς. Παρόλη την ασυμμετρία, τα κεντρικά τους φορτία είναι ίσα, με αποτέλεσμα οι θεωρίες να είναι ελεύθερες από ανωμαλίες. Χρησιμοποιώντας τις συμμετρίες τους, παρατηρούμε ότι εξ΄ αυτών δεν είναι όλες ανεξάρτητες αλλά σχετίζονται μέσω ενός γενικευμένου τελεστή ομοτιμίας. Ορίζοντας την δράση του διαγραμματικά, αντιστοιχίζοντας την λαγκραντζιανή των ΣΘΠ σε πολύγωνα, προσδιορίζουμε με ευκολία το υποσύνολο των ανεξάρτητων ΣΘΠ. Στην συνέχεια μελετάμε D-βράνες εμβαπτισμένες στα πρότυπα ενδιαφέροντος με τρόπο που να διατηρούν την ολοκληρωσιμότητα τους. Αυτό επιτυγχάνεται ορίζοντας κατάλληλες συνοριακές συνθήκες μέσω της γενίκευσης της μεθόδου του συνοριακού μονόδρομου πίνακα και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση σ-προτύπου δόθηκε η γεωμετρική τους ερμηνεία. Αποδεικνύουμε έτσι, ότι όλες οι γνωστές στην βιβλιογραφία γεωμετρίες βρανών που διατηρούν την σύμμορφη συμμετρία γινομένων WZW προτύπων επιβιώνουν στα πρότυπά μας ως ολοκληρώσιμες και διαθέτουν χαρακτηριστικά ανεξάρτητα των παραμέτρων παραμόρφωσης. Τέλος κλείνουμε με την παρουσίαση των συμπερασμάτων και των μελλοντικών ερευνητικών κατευθύνσεων της έρευνας μας.

Extensive synopsis

This thesis provides a better understanding of a large class of two dimensional integrable theories that are constructed as generalizations of the well known lambda models. They appear as multiparametric deformations of products of conformal field theories (CFTs), with the key property that every CFT is assigned with a different level k_i. The operators driving away the models in consideration from the conformal points couple the Kac-Moody currents of adjacent copies of algebras and induce non trivial RG flows towards well defined IR fixed points. Below we present the structure of the thesis at hand, which is organized into three main parts. In the first and second part, which are mainly bibliographic, we introduce the important concepts and formalism necessary for a better understanding of the third part which contains original research results.

In particular, the part one introduces the bosonic sigma models. We study both closed and open strings and describe how the conformality on the worldsheet restricts the dynamics of the target space and D-branes respectively. We then continue with the analysis of classical integrable theories focusing on the mathematical tools of integrability and the principal chiral model (PCM). Both the group and symmetric space cases is discussed in detail, focusing on their integrability structures and RG flows. These models are well known building blocks of string theory solutions with appropriate Ramond-Ramond fields and have played a crucial role in applications of the gauge/gravity duality. Besides integrable models, exact conformal sigma models are of main importance in this thesis. Such theories provide us with consistent string backgrounds in their own right. We study two main examples, the WZW and gauged WZW model, focusing entirely on their lagrangian formulation. A brief overview of the asymmetric cosets is additionally given. Lastly we consider open strings in the PCM and WZW models. A detailed analysis of their reformulation towards the definition of consistent boundary conditions and their geometric realization as D-branes is given. In the case of conformal/integrable theories such boundary conditions preserve their conformality/integrability respectively. As examples we present all the conformal brane geometries for a product of WZW models and the integrable ones for the PCM.

On the second part of this thesis we consider the well known λ-deformations for both the group and symmetric space cases. As before we study their integrable structure and RG flows, which reveal that they interpolate between exactly conformal WZW models in the UV and the non-abelian T-dual of the PCM towards the IR. A notable number of techniques has been developed, which vary from traditional field theory to geometric ones, for the calculations of various physical quantities. Specific cases of the λ-models have been embedded in ten dimensional solutions of type-II supergravity leading to potential generalizations of the gauge/gravity duality. Lastly we give the construction of integrable D-brane configurations. We show that the geometric picture of D-branes in WZW models as twisted conjugacy classes persist in the deformation. We obtain such configurations by applying the integrability techniques of the previous chapter for the PCM.

In the third and last part we construct the generalized λ-models, mentioned in the first paragraph. It is divided into two main chapters. The first chapter is devoted in the analysis of our models at the IR points towards a complete realization of the corresponding CFTs. Using the beta functions of the deformation parameters, we see that our model flow towards 2^{N-2} different IR points and the expression of the central charges, derived using the C-function of Zamolodchikov, reveal that the conformal algebra of the corresponding CFTs depend on the order of the WZW levels. A careful analysis of the central charge for the cases $N > 2$ lead to the conclusion that its expression is not enough for the univocal determination of the conformal algebras. Thus, turning our attention to the lagrangian formulation, we construct gauge invariant actions which, after fixing the gauge, describe the corresponding IR CFTs. The subgroup gauged at each case, is a different, anomaly free, subgroup of the global $G_L \times G_R$ symmetry of N WZW models. This procedure lead to the conclusion that the left and right sector of each of the IR CFTs is based on different products of coset and affine type conformal symmetries. Despite this asymmetry, the left and right central charge are the same and in agreement with the central charge read from the exact in the deformation parameters C-function. Furthermore, using the symmetries, we see that there are CFTs defined at different fixed points which are related by a transformation, the generalized parity transformation. A geometric representation of the CFT lagrangians in terms of polygons, reformulate the parity transformation as a reflection in terms of a specific perpendicular bisector and leads to an easy classification of the inequivalent IR CFTs. In the second chapter we embed integrable brane configurations in the generalized λ-models. To achieve this we generalize the boundary monodromy method applied in the PCM and ordinary λ-deformations in order to find boundary conditions that do not have an analog in the single group valued sigma models. Doing so, we find that the richer structure of our generalized theories reflect on the variety of the integrable conditions. Next, we proceed to the geometrical realization of them as D-branes. Due to the complexity of the fields present in the boundary equations we apply the sigma model approach, a method based on the modification of the corresponding lagrangians, in order to incorporate the boundary effects, and the variation principle. As a result we find that all the conformal brane geometries known in the literature for a product of WZW models survive the generalized deformations. They consist of the well known G-conjugacy classes, twisted G-conjugacy classes by a permutation automorphism (permutation branes) and the newest class known as generalized permutation branes. Subsequently, we study the properties of the aforementioned brane geometries, especially of those embedded in the backgrounds interpolating between the UV and IR fixed points, studied in the previous chapter. Finally, as an example, we considered the lowest dimensional generalized permutation brane embedded in the deformed $SU(2)_{k_1} \times SU(2)_{k_2}$ CFT and we extracted its induced fields.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η παρούσα διατριβή επικεντρώνεται σε δισδιάστατες κβαντικές θεωρίες πεδίου, γνωστές ως σ-πρότυπα τα οποία επιπρόσθετα διαθέτουν την ιδιότητα της ολοκληρωσιμότητας η οποία καθιστά ευκολότερο τον υπολογισμό φυσικών ποσοτήτων. Τα σ-πρότυπα παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά σε τέσσερις διαστάσεις, από τους Gell-Mann και Levy [1], για την φαινομενολογική περιγραφή μεσονίων. Με την πάροδο των ετών η χρήση τους επεκτάθηκε σε όλο το φάσμα της σωματιδιακής φυσικής, συμπεριλαμβανομένης και της θεωρίας χορδών.

Η θεωρία χορδών αντικαθιστά τα σημειακά σωματίδια με μονοδιάστατα γεωμετρικά αντικείμενα, τις χορδές, και περιγράφει την διάδοση τους σε έναν εν γένει καμπυλωμένο χώρο. Ταυτόχρονα, από την οπτική της χορδής περιγράφει μια δισδιάστατη θεωρία πεδίου. Απαιτώντας αυτή να είναι σύμμορφη (ΣΘΠ), δηλαδή αναλλοίωτη κάτω από μετασχηματισμούς κλίμακας, προκύπτει ότι ο χώρος διάδοσης της χορδής ικανοποιεί γενικευμένες εξισώσεις της γενικής θεωρίας σχετικότητας του Einstein. Το 1974 οι Scherk και Schwarz μελέτησαν την κβάντωση της κλειστής χορδής και ανακάλυψαν ότι το φάσμα της περιέχει ένα άμαζο τανυστικό πεδίο ιδιοστροφορμής $s = 2$ [2], ιδιότητες που παραπέμπουν στο βαρυτόνιο. Με την εισαγωγή της υπερσυμμετρίας, η οποία διορθώνει αδυναμίες της μποζονικής χορδής, η γνωστή ως θεωρία υπερχορδών παρέχει την συνεπέστερη μαθηματικά κβαντική περιγραφή όλων των θεμελιωδών δυνάμεων [3, 4]. Ταυτόχρονα, αποδείχθηκε ότι περιέχει θεμελιώδη γεωμετρικά αντικείμενα μεγαλύτερης εν γένει διάστασης από τις χορδές, τις D-βράνες. Αυτές μπορούν να κατανοηθούν με την παραδοχή ότι η θεωρία διαθέτει και ανοιχτές χορδές τα άκρα των οποίων επιδέχονται δυναμικές συνοριακές συνθήκες, γνωστές ως Dirichlet (D) συνοριακές συνθήκες. Από μαθηματικής πλευράς τα άκρα της χορδής σαρώνουν την επιφάνεια της βράνης ως υποπολλαπλότητας του χώρου υποβάθρου. Η δυναμική τους περιγράφεται απο την Dirac-Born-Infeld (DBI) δράση και όπως έδειξε ο Polchinsky αποτελούν πηγές των ηλεκτρικών και μαγνητικών Ramond-Ramond (RR) πεδίων [5].

Στο μεταξύ είχε ήδη αναπτυχθεί από τον Gerard 't Hooft η θεωρία του μεγάλου N ορίου [6], η οποία εφαρμόστηκε στα πλαίσια της κβαντοχρωμοδυναμικής. Όπως απέδειξε, στην περίπτωση που αντικατασταθεί η $SU(3)$ ομάδα συμμετρίας της με την $SU(N)$ και ληφθεί το όριο $N \to \infty$, η θεωρία απλοποιείται δραστικά διότι επιβιώνουν μόνο τα επίπεδα διαγράμματα (επιφάνειες γένους $g = 0$). Αυτό, συνέβαλε σημαντικά στο επιχείρημα ότι διαφορετικές θεωρίες βαθμίδας σχετίζονται με διαφορετικές θεωρίες χορδών. Αρκετά χρόνια μετά η πρόταση αυτή ενισχύθηκε μέσω της συσχέτισης μιας D-διάστατης θεωρίας βαθμίδας και μιας θεωρίας υπερχορδών σε χώρο $(D+1)$-διαστάσεων. Αυτή, όπως αρχικά διατυπώθηκε από τον Maldacena [7] και είναι γνωστή ως AdS/σύμμορφη θεωρία πεδίου (AdS/ΣΘΠ) αντιστοιχία, προτείνει ότι η δυναμική μιας τύπου IIB $AdS_5 \times S_5$ θεωρίας υπερχορδών είναι ισοδύναμη με αυτής της $N = 4$ υπερσυμμετρικής Yang Mills θεωρίας. Το γεγονός ότι οι δεκαδιάστατοι βαθμοί ελευθερίας μπορούν να κωδικοποιηθούν σε μια τετραδιάστατη θεωρία ορισμένη στο σύνορο του AdS_5, προτείνει ότι η δυναμική του εσωτερικού τού μπορεί να προκύψει από μια ολογραφική εικόνα παραγόμενη από την συνοριακή θεωρία [8]. Για τον λόγο αυτό η AdS/ΣΘΠ αντιστοιχία αναφέρεται και ως ολογραφική και εντάσσεται στον γενικότερο δυισμό βαθμίδας/βαρύτητας. Πέραν της παραπάνω ριζοσπαστικής ιδέας, δηλαδή της διαλεκτικής σχέσης εσωτερικού και συνόρου ενός χώρου, η αντιστοιχία προσφέρει επιπρόσθετα την δυνατότητα θεωρητικής μελέτης της περιοχής ισχυρής ζεύξης πέραν των πλαισίων των συμβατικών μεθόδων της ΚΘΠ. Αυτό, διότι συσχετίζει ισχυρώς συζευγμένες θεωρίες βαθμίδας με ασθενώς συζευγμένες θεωρίες χορδών.

Στην αρχική της διατύπωση, οι θεωρίες και των δύο πλευρών της AdS/ΣΘΠ είναι μέγιστα συμμετρικές και ολοκληρώσιμες. Για προφανείς λόγους υπήρξε εκτενής προσπάθεια να επεκταθεί η αντιστοιχία και σε περιπτώσεις με μειωμένη ή και καθόλου υπερσυμμετρία αλλά με την ολοκληρωσιμότητα παρούσα. Σε αυτήν την κατεύθυνση ο χώρος $AdS_5 \times S_5$ αντικαθίσταται με πιο περίπλοκες αλλά ολοκληρώσιμες γεωμετρίες που καθιστούν την μελέτη της δυικότητας δυσκολότερη, αλλά ταυτόχρονα ενδιαφέρουσα εξαιτίας των ιδιοτήτων των αντίστοιχων θεωριών βαθμίδας στο σύνορο.

Τα σ-πρότυπα παρέχουν το κατάλληλο πλαίσιο για την προαναφερθείσα γραμμή έρευνας, διότι ταυτόχρονα ορίζουν δισδιάστατες θεωρίες πεδίου και γεωμετρίες χώρων υποβάθρου. Το πρόβλημα του πώς να παραμορφωθεί ένα σ-πρότυπο με συγκεκριμένη ομάδα συμμετρίας, με τρόπο που να διατηρείται η ολοκληρωσιμότητα, διατυπώθηκε περίπου σαράντα χρόνια πριν.

Αρχικά κατασκευάστηκαν ολοκληρώσιμες παραμορφώσεις του χειραλικού προτύπου για την πιο απλή περίπτωση μη αβελιανής ομάδας συμμετρίας, την $SU(2)$ [9, 10]. Το ίδιο, αποτελεί ένα δισδιάστατο ολοκληρώσιμο ανάλογο της κβαντοχρωμοδυναμικής, εξαιτίας κοινών ιδιοτήτων τους, όπως της ασυμπτωτικά ελεύθερης συμπεριφοράς του. Ταυτόχρονα παρέχει συνεπή υπόβαθρα για την θεωρία χορδών. Στην συνέχεια ορίστηκαν επιπλέον ολοκληρώσιμες παραμορφώσεις, οι οποίες και θα μελετηθούν εκτενώς στο κύριο σώμα της διατριβής, με ενδιαφέρουσες ροές ομάδας επανακανονικοποίησης (ΟΕ) ως προς τις σταθερές ζεύξης. Αρχικά η ολοκληρωσιμότητα αυτών αποδείχθηκε για γεωμετρίες υποβάθρου ομοιομορφικές σε πολλαπλότητες ομάδας, ενώ έπειτα επεκτάθηκε και σε γεωμετρίες χώρου/υπέρ-χώρου πηλίκου, με αποτέλεσμα να ενταχθούν στα πλαίσια της AdS/ ΣΘΠ αντιστοιχίας.

Η θεωρία που θα αποτελέσει την βάση της περαιτέρω έρευνας μας είναι γνωστή στην βιβλιογραφία ως λ-προτύπο. Αυτό παρουσιάζεται ως ολοκληρώσιμη παραμόρφωση του Wess-Zumino-Witten (WZW) προτύπου, το οποίο αποτελεί μια ΣΘΠ. Στόχος της παρούσας διατριβής είναι η κατασκευή και μελέτη καινοτόμων ολοκληρώσιμων θεωριών, στην κατεύθυνση επέκτασης του αριθμού των παραμέτρων παραμόρφωσης αλλά και συμπερίληψης μη τετριμμένων ροών ΟΕ με υπέρυθρα σημεία. Επιπλέον θα αναπτυχθούν και ταξινομηθούν οι συνοριακές συνθήκες κάτω από τις οποίες διατηρείται η ολοκληρωσιμότητα των παραπάνω προτύπων στην περίπτωση της ανοιχτής χορδής. Ταυτόχρονα θα δωθεί η γεωμετρική τους ερμηνεία ως D-βράνες. Συγκεκριμένα η διατριβή αποτελείται από τρία μέρη. Τα δύο πρώτα είναι βιβλιογραφικά, όπου παρουσιάζουμε έννοιες και τεχνικές απαραίτητες για την κατανόηση του τρίτου μέρους που αποτελεί και το ερευνητικό. Πιο συγκεκριμένα, στο πρώτο μέρος, αφού παρουσιάσουμε περιληπτικά σημαντικές έννοιες της κλειστής και ανοιχτής μποζονικής χορδής, θα εισαγάγουμε τον/την αναγνώστη/στρια στις ολοκληρώσιμες και σύμμορφες θεωρίες πεδίου δίνοντας βάση στο χειραλικό και WZW πρότυπο. Στην συνέχεια θα ορίσουμε τις σύμμορφες και ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες και θα αναλύσουμε τους διαφορετικούς τρόπους γεωμετρικής τους ερμηνείας ως D-βράνες. Στο δεύτερο μέρος θα κατασκευάσουμε τα λ-παραμορφωμένα πρότυπα σε χώρους ομοιομορφικούς σε πολλαπλότητες ομάδας και πηλίκου. Αφού θεμελιώσουμε την ολοκληρώσιμη δομή τους, θα υπολογίσουμε τις εξισώσεις ροής ΟΕ της παραμέτρου λ. Στην συνέχεια θα βρούμε τις ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες του προτύπου, οι οποίες αποδεικνύεται ότι διατηρούν την ίδια γεωμετρική εικόνα με τις σύμμορφες, στην περίπτωση του WZW. Συγκεκριμένα θα δούμε ότι η μόνη επίδραση της παραμόρφωσης στις ολοκληρώσιμες βράνες του προτύπου θα είναι η μεταβολή του μεγέθους τους.

Το τρίτο μέρος είναι βασισμένο στις εργασίες μου [189], [201] τις οποίες προς χάριν του/της αναγνώστη/στριας αναγράφουμε στο τέλος. Σε αυτό θα κατασκευάσουμε τα γνωστά ως γενικεύμένα λ-πρότυπα. Αυτά επιδέχονται παραπάνω από μια παραμέτρους παραμόρφωσης και συζευγνύουν με μη τετριμμένο τρόπο αντίστοιχο αριθμό ΣΘΠ. Κατόπιν θα αποδείξουμε την ολοκληρώσιμη δομή τους, και θα μελετήσουμε τις ροές ΟΕ που επάγουν οι τελεστές παραμόρφωσης. Θα δούμε ότι δύο συγκεριμένες οικογένειες των παραπάνω προτύπων παρεμβάλονται μεταξύ δύο ΣΘΠ στο υπεριώδες και υπέρυθρο σημείο. Αναλυτική μελέτη των υπέρυθρων ΣΘΠ θα αποκαλύψει μη τετριμμένες ιδιότητες τους. Αυτές είναι, η εξάρτηση της ποικιλομορφίας τους από τον αριθμό των προτύπων που συζευγνείονται και η ασυμμετρία μεταξύ του ολομορφικού και αντιολομορφικού τομέα τους με το ίδιο όμως κεντρικό φορτίο σε καθένα από αυτούς. Κατόπιν θα εξάγουμε τις συνοριακές συνθήκες που διατηρούν την ολοκληρωσιμότητά τους τις οποίες και θα ερμηνεύσουμε γεωμετρικά. Η μέθοδος στην οποία θα βασιστούμε έχει ήδη παρουσιαστεί στην βιβλιογραφία, αλλά η γενίκευση της θα είναι απαραίτητη για να συμπεριλάβουμε και περιπτώσεις που δεν έχουν ανάλογο στο απλό λ-πρότυπο. Θα δούμε ότι η πλούσια μαθηματική και φυσική δομή των γενικευμένων λ-προτύπων αντανακλά σε μια πληθώρα ολοκληρώσιμων βρανών που επιδέχονται, τις οποίες και θα μελετήσουμε.

- G. Georgiou, G. P. D. Pappas and K. Sfetsos, "Asymmetric CFTs arising at the IR fixed points of RG flows," Nucl. Phys. B **958** (2020), 115138

- G. P. D. Pappas, "Integrable branes in generalized λ-deformations," JHEP **06** (2022), 035

Μέρος **I**

Δισδιάστατα σ-πρότυπα και D-βράνες

Κεφάλαιο 2

Κλειστές χορδές

2.1 Η *Polyakov* δράση

Αρχικά θα θεωρήσουμε μια χορδή εμβαπτισμένη σε έναν D-διάστατο χώρο Minkowski $\mathbb{R}^{1,D-1}$. Καθώς αυτή διαδίδεται, σαρώνει μια $(1+1)$-διάστατη επιφάνεια $\Sigma \subset \mathbb{R}^{1,D-1}$, γνωστή ως κοσμική επιφάνεια, την οποία παραμετροποιούμε με μια χρονοειδή συντεταγμένη τ και μια χωροειδή σ, τις οποίες και συμβολίζουμε ως $\sigma^a = (\tau, \sigma)$, $a = 0, 1$ 2.1. Η δυναμική της χορδής μπορεί να περιγραφτεί απο την Polyakov δράση,

$$S(X, g) = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int_{\Sigma} d^2\sigma \sqrt{-g} g^{ab} \partial_a X^\mu \eta_{\mu\nu} \partial_b X^\nu \, , \tag{2.1}$$

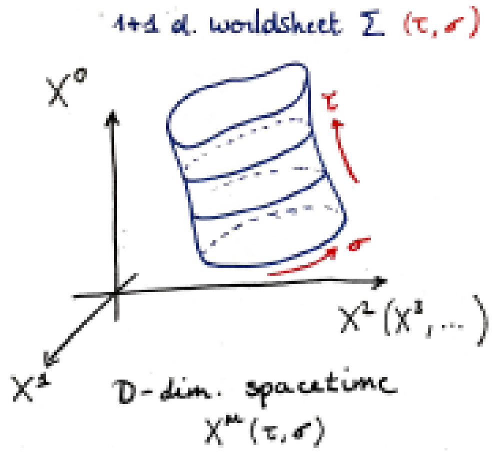
όπου η σταθερά α' σχετίζεται με την τάση της χορδής. Ο όρος g_{ab} ειναι η επαγόμενη μετρική στην επιφάνεια Σ, $\eta_{\mu\nu}$ η μετρική του χωρόχρονου Minkowski και X^μ, $\mu = 0, 1, \ldots D-1$, οι συντεταγμένες που τον παραμετροποιούν. Αν κάποιος αγνοήσει την παραπάνω γεωμετρική εικόνα τότε η δράση (2.1) περιγράφει την δυναμική D βαθμωτών πεδίων X^μ σε ένα δισδιάστατο χώρο.

Η Polyakov δράση απολαμβάνει ένα σύνολο συμμετριών:

• Poincare συμμετρία: Δρα στον χώρο υποβάθρου και ορίζεται ως

$$X^\mu \mapsto \Lambda^\mu_\nu X^\nu + c^\mu, \quad \mu, \nu = 0, \ldots D-1 \, , \tag{2.2}$$

όπου $\Lambda^\mu_\nu \in SO(1, D-1)$ και c^μ ένα σταθερό διάνυσμα.



Σχήμα 2.1: Η κοσμική επιφάνεια Σ που σαρώνει η χορδή, εμβαπτισμένη σε D-διάστατο χώρο

• Διαφορομορφισμοί: Είναι μια τοπική συμμετρία στην επιφάνεια Σ και οριζεται ως

$$\sigma^a \mapsto \tilde{\sigma}^a = \tilde{\sigma}^a(\sigma, \tau), \quad a = 0, 1\,, \tag{2.3}$$

κάτω από την οποία τα πεδία $X^\mu(\sigma)$ και η μετρική $g_{ab}(\sigma)$ μετασχηματίζονται ως βαθμωτά πεδία και ως τανυστής δεύτερης τάξης αντίστοιχα

• Weyl συμμετρία: Είναι χαρακτηριστική της Polyakov δράσης και ορίζεται ως

$$g_{ab}(\sigma) \mapsto \Omega^2(\sigma) g_{ab}(\sigma)\,. \tag{2.4}$$

Αυτή δρα ως μετασχηματισμός κλίμακας. Αυτό σημαίνει ότι για την δράση (2.1) δυο χώροι που συνδέονται με έναν Weyl μετασχηματισμό ειναι φυσικά ισοδύναμοι.

Εκμεταλλευόμενοι τις δύο τελευταίες συμμετρίες και δεδομένου ότι η μετρική g_{ab} έχει τρείς ανεξάρτητες παραμέτρους επιλέγουμε να την εκφράσουμε ως

$$g_{ab} = e^{2\phi}\eta_{ab}\,, \tag{2.5}$$

όπου $\phi = \phi(\tau, \sigma)$ κάποια συνάρτηση της κοσμικής επιφάνειας Σ. Αν στην συνέχεια χρησιμοποιήσουμε και την συμμετρία βαθμίδας (2.4) μπορούμε να θέσουμε $\phi = 0$, δηλαδή να μετασχηματίσουμε την γενική μετρική στην επίπεδη

$$g_{ab} = \eta_{ab}\,. \tag{2.6}$$

Η παραπάνω επιλογή καλείται σύμμορφη βαθμίδα. Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.6) η δράση (2.1) απλοποιείται δραστικά

$$S = -\frac{1}{4\pi a'} \int d^2\sigma \eta^{ab} \partial_a X^\mu \eta_{\mu\nu} \partial_b X^\nu \,, \tag{2.7}$$

η οποία αποτελεί και την πιο απλή δισδιάστατη θεωρία πεδίου, δηλαδή μια θεωρία πεδίου που περιγράφει D ελεύθερα μποζόνια. Η επιλογή βαθμίδας (2.6) εισάγει δεσμούς στα πεδία X^μ, γνωστοί και ως Virassoro δεσμοι

$$T_{ab} = 0\,. \tag{2.8}$$

Απο την σχέση (2.8) είναι προφανές οτι το ίχνος του τανυστή ενέργειας ορμής ειναι μηδέν, $T^a_a = 0$. Επομένως η δράση (2.7) περιγράφει κλασικά μια σύμμορφη θεωρία πεδίου. Στο κβαντικό επίπεδο, η σύμμορφη συμμετρία δεν επιβιώνει καθώς το ίχνος του τανυστή ενέργεια/ορμής (Ε/Ο) είναι διάφορο του μηδενός. Συγκεκριμένα

$$\langle T^a_a \rangle = \frac{c_{\text{ολ.}}}{12} \mathcal{R}\,, \tag{2.9}$$

όπου $\mathcal{R}$ το βαθμωτό πεδίο Ricci της επιφάνειας Σ. Η σχέση (2.9) ειναι γνωστή και ως Weyl ανωμαλία. Ο όρος $c_{\text{ολ}}$ είναι το συνολικό κεντρικό φορτίο της θεωρίας. Σε αυτό, συνεισφέρει το κάθε πεδίο X^μ, $c_{\text{μπ}} = 1$, αλλά και τα γνωστά στην βιβλιογραφία ως φαντάσματα, $c_{\text{φαντ.}} = -26$[1]. Απαιτώντας επομένως, οι διαστάσεις του υποβάθρου (ή διαφορετικά ο αριθμός των μποζονίων) να είναι $D = 26$ επαναφέρουμε την σύμμορφη συμμετρία της δράσης (2.7) σε κβαντικό επίπεδο. Αύτες είναι οι κρίσιμες διαστάσεις της μποζονικής θεωρίας χορδών.

Τέλος μέσω της κβάντωσης μπορουμε να υπολογίσουμε το ενεργειακό φάσμα της χορδής, το οποίο, εκτός απο έμαζες και ταχυονικες διεγερμένες καταστάσεις, περιλαμβάνει και άμαζες οι οποίες μετασχηματίζονται στην 24×24 αναπαράσταση της $SO(24)$. Αυτή ειναί γνωστό ότι ανάγεται σε τρείς μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις:

$$\text{συμμετρική με μηδενικό ίχνος} \oplus \text{αντισυμμετρική} \oplus \text{ίχνος}\,. \tag{2.10}$$

Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης της κάθε αναπαράστασης αντιστοιχούν στο βαρυτόνιο, το Kalb Ramond πεδίο (ή στην γλώσσα της διαφορικής γεωμετρίας, μια 2-μορφή) και στο

[1] Αυτα προκύπτουν στον φορμαλισμό των ολοκληρωμάτων διαδρομής μέσω της μαθηματικής ανάγκης απομόνωσης των ισοδύναμων γεωμετριών.

διαστελόνιο (Dilaton). Τα αντίστοιχα πεδία είναι:

$$G_{\mu\nu}(X), \quad B_{\mu\nu}(X), \quad \Phi(X)\,. \tag{2.11}$$

2.2 Η μποζονική χορδή σε καμπυλωμένους χώρους

Η διάδοση μιας μποζονικής χορδής σε ένα μη τετριμένο χώρο υποβάθρου με μετρική $G_{\mu\nu}$ περιγράφεται από τα μη γραμμικά σ-πρότυπα ορισμένα σε μια δισδιάστατη κοσμική επιφάνεια Σ με μετρική g_{ab} και δράση

$$S(X,g) = \frac{1}{4\pi\alpha'}\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{-g}(G_{\mu\nu}(X)g^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^b + B_{\mu\nu}(X)\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu)\,, \tag{2.12}$$

Το Kalb-Ramond πεδίο $B_{\mu\nu}$ (2-μορφή) είναι το φυσικό ανάλογο του πεδίου Maxwell A_μ (1-μορφή) συζευγμένο στην κοσμική επιφάνεια που σαρώνει η χορδή. Η 3-μορφή H, που ορίζεται ως

$$H = dB\,, \tag{2.13}$$

είναι γνωστή ως στρέψη και ειναι αναλλοίωτη κατω απο μετασχηματισμούς βαθμίδας του πεδίου B, της μορφής

$$B \mapsto B + d\Lambda\,, \tag{2.14}$$

όπου Λ μια 1-μορφή. Επομένως η δράση (2.12) έχει τις παρακάτω συμμετρίες

- $Diff(\Sigma)$: διαφορομορφισμοί στην κοσμική επιφάνεια
- $Diff(\mathcal{M})$: διαφορομορφισμοί στον χώρο υποβάθρου
- $U(1)_B$ συμμετρία βαθμίδας

Τα πεδία $G_{\mu\nu}$ και $B_{\mu\nu}$ μπορούν να αντιστοιχηθούν με τα δύο πρώτα πεδία στην σχέση (2.11). Επομένως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η χορδή διαδίδεται σε ένα υπόβαθρο που παράγει η ίδια. Η κλειστή χορδή έχει μια επιπλέον άμαζη διεγερμένη κατάσταση, το διαστελόνιο. Σύμφωνα με τους Fradkin-Tseytlin [11] ο κατάλληλος όρος που πρέπει να προστεθεί στην δράση (2.12) για να το συμπεριλάβουμε είναι ο

$$S_\Phi = \frac{1}{4\pi}\int d^2\sigma\sqrt{-g}\mathcal{R}\Phi(X)\,, \tag{2.15}$$

όπου $\mathcal{R}$ το βαθμωτό Ricci της κοσμικής επιφάνειας Σ.

Μέχρι και στο κλασικό επίπεδο ο όρος (2.15) δεν σέβεται την Weyl συμμετρία της δράσης

(2.12). Για να την επαναφέρουμε πρέπει να θεωρήσουμε την συνεισφορά κβαντικών φαινομένων στην κοσμική επιφάνεια. Αυτή έχει υπολογιστεί στις [12, 13] και έχει βρεθεί

$$\langle T_a^a \rangle \sim \beta^{\Phi} \sqrt{g} \mathcal{R} + \beta^G_{\mu\nu} \sqrt{g} g^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu + \beta^B_{\mu\nu} \epsilon^{ab} \partial_a X^\mu \partial_b X^\nu \,, \tag{2.16}$$

όπου $\beta^G, \beta^B, \beta^\Phi$ συναρτησοειδή των πεδίων υποβάθρου $G_{\mu\nu}(X), B_{\mu\nu}(X), \Phi(X)$ τα οποία δίνονται από τις εκφράσεις

$$\begin{aligned}
\beta^G_{\mu\nu} &= \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} H^2_{\mu\nu} + 2\nabla_\mu \nabla_\nu \Phi(X) + \mathcal{O}(a'^2) \,, \\
\beta^B_{\mu\nu} &= \nabla_\rho H^\rho_{\mu\nu} - 2(\nabla_\rho \Phi(X)) H^\rho_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a'^2) \,, \\
\beta^\Phi &= \frac{D-26}{48\pi^2} - \frac{a'}{16\pi^2} \left(\mathcal{R} - \frac{1}{12} H^2 + 4\nabla^2 \Phi(X) - 4(\nabla\Phi)^2 \right) + \mathcal{O}(a'^2) \,,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

σε πρώτη τάξη στην σταθερά α'. Απαιτώντας λοιπόν μηδενισμό της (2.16), δηλαδη απαιτώντας η θεωρία να είναι Weyl συμμετρική, συνεπάγεται

$$\beta^G = \beta^B = \beta^\Phi = 0 \,. \tag{2.18}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις της βαρύτητας του Einstein, συζευγμένης με ένα βαθμωτό πεδίο, το διαστελόνιο, και σε μια τύπου θεωρία του Ηλεκτρομαγνητισμού.

Ο Polchinsky έδειξε ότι στις δύο διαστάσεις η σύμμορφη/Weyl συμμετρία είναι ισοδύναμη με την συμμετρία κλίμακας [14]. Αλλά η απόκριση σε αλλαγές της κλίμακας είναι εξ' ορισμού η β-συνάρτηση. Επομένως, οι συντελεστές $\beta^G, \beta^B, \beta^\Phi$ στο ίχνος του τανυστή Ε/Ο πρέπει να σχετίζονται με τις β-συναρτήσεις των σταθερών ζεύξης του σ-προτύπου. Η συσχέτιση αυτή έχει μελετηθεί στην [15]. Η β-συνάρτηση ενός γενικού σ-προτύπου έχει υπολογιστεί στην [16, 17] και έχει βρεθεί σε τάξη ενός βρόγχου

$$\frac{d}{dt}(G_{\mu\nu} + B_{\mu\nu}) = \mathcal{R}^-_{\mu\nu} + \nabla^+_\nu \xi_\mu + \nabla_{[\mu} \zeta_{\nu]}, \quad t = \ln \mu^2 \,, \tag{2.19}$$

όπου $\mathcal{R}^-_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} H^2_{\mu\nu}$ ο τανυστής Ricci με στρέψη και ξ^μ, ζ^ν διαφορομορφισμοί και μετασχηματισμοί βαθμίδας αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 3

Ανοιχτές χορδές

3.1 Ανοιχτές χορδές σε επίπεδο χώρο

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την δυναμική των ανοιχτών χορδών. Η κύρια διαφορά με την περίπτωση των κλειστών, είναι ότι η κοσμική επιφάνεια Σ που διαγράφει η χορδή, έχει σύνορο, $\partial\Sigma \neq 0$, με την χωρική συντεταγμένη της χορδής να παίρνει τιμές στο διάστημα

$$\sigma \in [0, \pi]\,. \tag{3.1}$$

Η κινηματική της χορδής στον χωρο Miknowski περιγράφεται, όπως και προηγουμένως, απο την Polyakov δράση, με την διαφορά ότι η μεταβολή της θα περιέχει και έναν συνοριακό όρο. Πιο συγκεκριμένα, στην σύμμορφη βαθμίδα βρίσκουμε ότι η συνοριακή συνεισφορά είναι

$$\delta S_{\partial\Sigma} = -\frac{1}{4\pi a'}\int_{\partial\Sigma} d\tau \partial_\sigma X^\mu \delta X_\mu|_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}\,. \tag{3.2}$$

Υπάρχουν δύο ειδών συνοριακές συνθήκες που μηδενίζουν τον όρο (3.2):

• Neummann (N) συνοριακές συνθήκες

$$\partial_\sigma X^\mu|_{\partial\Sigma} = 0, \quad \mu = 1, \ldots, D\,. \tag{3.3}$$

• Dirichlet (D) συνοριακές συνθήκες

$$\delta X^\mu = 0 \to \partial_\tau X^\mu = 0, \quad \mu = 1, \ldots, D\,. \tag{3.4}$$

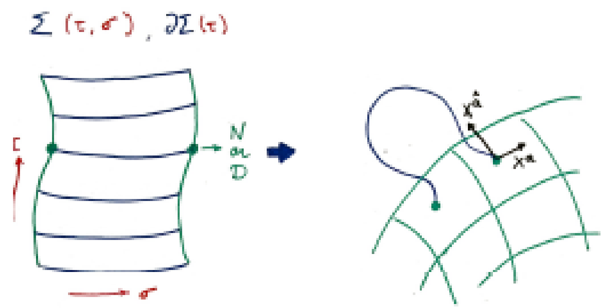
Για τις περιπτώσεις που θα μελετήσουμε ενδιαφέρον έχουν οι συνοριακές συνθήκες:

$$\begin{aligned} &\partial_\sigma X^a = 0, \quad a = 0, \dots p\,, \\ &\partial_\tau X^{\hat{a}}, \quad \hat{a} = p+1, \dots D-1\,. \end{aligned} \tag{3.5}$$

οι γνωστές ως μικτές. Οι Neumann συνθήκες αντιστοιχούν σε χωροχρονικές κατευθύνσεις στις οποίες τα άκρα της χορδής μπορούν να κινούνται ελεύθερα ενώ οι Dirichlet συνθήκες σε κατευθύνσεις που τα άκρα είναι αναγκασμένα να είναι διαρκώς προσκολημένα 3.1. Επομένως οι σ.σ. (3.5) ορίζουν μια $(p+1)$-διάστατη επιφάνεια $\mathcal{Q}$ που σπάει την $SO(1,d-1)$ Lorentz συμμετρία του υποβάθρου στην

$$SO(1,D-1) \to SO(1,p) \times SO(D-p-1)\,. \tag{3.6}$$

Η επιφάνεια $\mathcal{Q}$ είναι γνωστή ως μια Dp-βράνη.



Σχήμα 3.1: (N) και (D) κατευθύνσεις της Dp-βράνης

Η κβάντωση της ανοιχτής χορδής οδηγεί στο ενεργειακό της φάσμα το οποίο περιέχει επιπλέον τις άμαζες καταστάσεις

$$A_a(X), \quad \phi^{\hat{a}}(X)\,. \tag{3.7}$$

Τα πεδία $A_a(X)$ είναι $U(1)$ πεδία βαθμίδας ορισμένα στην βράνη, ενώ τα πεδία $\phi^{\hat{a}}$ ειναι βαθμωτά. Όπως και στην περίπτωση της κλειστής χορδής, τα πεδία (3.7) μπορούν να ειδωθούν ως πεδία υποβάθρου που επηρεάζουν την δυναμική της Dp-βράνης, η οποία περιγράφεται απο την Dirac δράση [18].

3.2 Ανοιχτες χορδές σε καμπύλο χώρο

Όπως στο υποκεφάλαιο 2.2, θα θεωρήσουμε την ανοιχτή χορδή εμβαπτισμένη σε ένα υπόβαθρο που περιέχει τις άμαζες κατάστασεις της κλειστής χορδής $G_{\mu\nu}, B_{\mu\nu}, \Phi(X)$ και επιπλέον θα συζεύξουμε τα άκρα της με ένα $U(1)$ πεδίο βαθμίδας $A_a(X)$ (δηλαδή υποθέτουμε ότι τα άκρα της χορδής είναι φορτισμένα). Η δράση που περιγράφει την δυναμική της παραπάνω χορδής είναι

$$\begin{aligned} S(X,g) = \frac{1}{2\pi a'}\int_\Sigma \sqrt{-g}\partial_a X^\mu (g^{ab}G_{\mu\nu}(X) + \epsilon^{ab}B_{\mu\nu}(X))\partial_b X^\nu \\ + \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma d^2\sigma\sqrt{-g}\Phi(X)\mathcal{R} + \int_{\partial\Sigma} d\tau A_a(X)\frac{dX^a}{d\tau}\,, \end{aligned} \tag{3.8}$$

όπου τώρα τα πεδία X^μ είναι απεικονίσεις από την κοσμική επιφάνεια Σ στον χώρο υποβάθρου $\mathcal{M}$ και αντιστοιχίζουν σημεία του συνόρου $\partial\Sigma$ στην Dp-βράνη. Η μεταβολή της δράσης (3.8) οδηγεί σε συνοριακούς όρους οι όποιοι μηδενίζονται απαιτώντας τα πεδία X^μ να ικανοποιούν συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} &\partial_\tau X^{\hat{a}} = 0 \quad \hat{a} = p+1, \dots D-1\,, \\ &G_{ab}(X)\partial_\sigma X^b|_{\partial\Sigma} = \mathcal{F}_{ab}(X)\partial_\tau X^b|_{\partial\Sigma}, \quad a = 0, \dots p\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Οι **Dirichlet** συνθήκες παραμένουν αμετάβλητες ενώ οι **Nuemann** καλούνται γενικευμένες **Neumann**. Η 2-μορφή $\mathcal{F}_{ab}$ δίνεται από την έκφραση

$$\mathcal{F}_{ab} = B_{ab}(X) + 2\pi\alpha' F_{ab}(X)\,, \tag{3.10}$$

όπου $F_{ab}(X) = \partial_a A_b(X) - \partial_b A_a(X)$ και αντιστοιχεί στο $U(1)$-αναλλοίωτο πεδίο δύναμης. Ο τανυστής ενέργειας ορμής του σ-προτύπου (3.8) σε συντεταγμένες κώνου φωτός και στην σύμμορφη βαθμίδα γράφεται ως

$$T_{\pm\pm} = \frac{1}{\alpha'}\partial_\pm X^\mu G_{\mu\nu}(X)\partial_\pm X^\nu\,. \tag{3.11}$$

Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι οι οι (D), (N) συνθήκες συνεπάγονται

$$T_{++}|_{\partial\Sigma} = T_{--}|_{\partial\Sigma} \to T_{\tau\sigma}|_{\partial\Sigma} = 0\,, \tag{3.12}$$

οι οποίες καλούνται σύμμορφες συνοριακές συνθήκες. Για μια γενική θεωρία πεδίου η

(3.12) συνεπάγεται μηδενική ροή ορμής από το σύνορο. Στην περίπτωση που η θεωρία είναι σύμμορφη η συνθήκη (3.12) είναι απαραίτητη για την διατήρηση της σύμμορφης συμμετρίας μιας θεωρίας πεδίου. Προς χάριν την διατριβής να αναφέρουμε ότι οι σ.σ. (3.9) μπορούν να γραφτούν συμπαγώς και σε συντεταγμένες κώνου φωτός στην μορφή

$$\partial_+ X^\mu = \Omega^\mu{}_\nu \partial_- X^\nu \,. \tag{3.13}$$

Οι (D) κατευθύνσεις τότε ορίζονται από τις -1 ιδιοτιμές του πίνακα Ω ενώ οι (N) από τις υπόλοιπες. Η απαίτηση οι σ.σ. (3.13) να είναι σύμμορφες συνεπάγεται ότι ο Ω είναι ισομετρία του χώρου

$$\Omega^\mu{}_\kappa G_{\mu\nu}(X) \Omega^\nu{}_\rho = G_{\kappa\rho} \,. \tag{3.14}$$

Απαιτώντας η β-συνάρτηση του προτύπου (3.8) να μηδενίζεται σε τάξη ενός βρόγχου συνεπάγεται την ενεργό δράση [19]

$$S_{DBI} = T_p \int_Q d^{p+1} Y e^{-\Phi(Y)} \sqrt{-\det(\hat{G}_{ab}(Y) + \hat{B}_{ab}(Y) + 2\pi\alpha' F_{ab}(Y))} \,, \tag{3.15}$$

η οποία είναι γνωστή ως DBI δράση και περιγράφει την δυναμική της βράνης ως αυτόνομου γεωμετρικού αντικειμένου. Η σταθερά T_p είναι η τάση της βράνης, ενώ Y^α, $a = 0, \ldots, p$ είναι οι συντεταγμένες που παραμετροποιούν την βράνη. Τα $\hat{G}_{ab}$ και $\hat{B}_{ab}$ είναι η επαγόμενη μετρική και το επαγόμενο K-R πεδίο αντίστοιχα στην βράνη

Κεφάλαιο 4

Ολοκληρώσιμες θεωρίες πεδίου

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε ιδιότητες ολοκληρώσιμων σ-προτύπων. Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό της κατά **Liouville** για μηχανικά συστήματα και έπειτα θα επεκταθούμε σε θεωρίες πεδίου. Θα παρουσιάσουμε συγκεκριμένα αλγεβρικά εργαλεία, όπως το ζεύγος **Lax**, τους μονόδρομους αλλά και κλασικούς r-πίνακες, βάσει των οποίων μπορούμε να αποφανθούμε, δεδομένων των εξισώσεων κίνησης ενός συστήματος, αν αυτό είναι ολοκληρώσιμο. Σημαντικές αναφορές για την εισαγωγή του/της αναγνώστη/στριας στα ολοκληρώσιμα συστήματα είναι οι [20], [21], στις οποίες και θα βασιστούμε.

4.1 Κλασικά ολοκληρώσιμα Χαμιλτονιανά συστήματα

Ενα μηχανικό σύστημα περιγράφεται πλήρως από τις γενικευμένες θέσεις q^μ και ορμές p^μ, όπου $\mu = 1, \ldots, D$. Η κατάστασή του αντιστοιχεί σε ένα σημείο στον $2D$ φασικό χώρο. Ταυτόχρονα, η χρονική του εξέλιξη προσδιορίζεται από την Χαμιλτονιανή $H = H(q^\mu, p^\mu)$, ως

$$\dot{q}^\mu = \{H, q^\mu\}, \quad \dot{p}^\mu = \{H, p^\mu\}\,. \tag{4.1}$$

Ένα σύστημα είναι ολοκληρώσιμο κατά **Liouville** , αν υπάρχουν D ανεξάρτητες διατηρήσιμες ποσότητες, F_μ, $\mu = 1, \ldots D$, (ολοκληρώματα κίνησης), οι οποίες είναι σε συνέλιξη, δηλαδή να ισχύει

$$\{F_\mu, F_\nu\} = 0, \quad \forall \mu, \nu = 1, \ldots D\,. \tag{4.2}$$

4.1.1 Ζεύγος Lax και r-πίνακας

Στην πράξη η απόδειξη της ολοκληρωσιμότητας ενός συστήματος συνίσταται στην εύρεση δύο πινάκων L, M, γνωστοί και ως ζεύγος Lax, έτσι ώστε οι εξισώσεις κίνησης να γράφονται στην μορφή [αναφ.]

$$\frac{dL}{dt} = [M, L]\,. \tag{4.3}$$

Από την τελευταία συνάγεται εύκολα ότι οι ποσοτήτες

$$Q_n = \mathrm{Tr}L^n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}\,. \tag{4.4}$$

διατηρούνται. Στο υπόλοιπο της διατριβής θα θεωρήσουμε το ζεύγος L, M ως στοιχεία μιας άλγεβρας $\mathfrak{g}$ σε αναπαράσταση πίνακα, με τα στοιχεία τους να είναι συναρτήσεις του φασικού χώρου.

Η εύρεση του ζεύγους Lax δεν καθιστά την θεωρία αυτόματα ολοκληρώσιμη, αφού πρέπει να δείξουμε επιπλέον, ότι οι διατηρούμενες ποσότητες βρίσκονται σε συνέλιξη. Έχει αποδειχθεί [23] ότι οι ιδιοτιμές του πίνακα L μετατίθονται κατά Poisson αν υπάρχει στοιχείο $r_{12} \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, το οποίο είναι συνάρτηση των συντεταγμένων του φασικού χώρου, έτσι ώστε[1]

$$\{L_1, L_2\} = [r_{12}, L_1] - [r_{21}, L_2]\,, \tag{4.5}$$

όπου $r_{21} = \Pi r_{12}$ και Π ο τελεστής εναλλαγής που δρα στα δύο αντίγραφα $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Υποθέτοντας ότι r_{12} είναι σταθερό και $r_{12} = -r_{21}$, η Ιακωβιανή ταυτότητα για τις αγκύλες (4.5) ισχύει, αν[2]

$$[r_{12}, r_{13}] + [r_{12}, r_{23}] + [r_{13}, r_{23}] = 0\,, \tag{4.6}$$

η οποία είναι γνωστή ως κλασική Yang Baxter εξίσωση (CYBE) .

4.2 Θεωρίες πεδίου και μονόδρομος πίνακας

Είναι απαραίτητη η επέκταση του ορισμού της ολοκληρωσιμότητας σε δισδιάστατες θεωρίες πεδίου. Ανάλογα με τα προηγούμενα θα υποθέσουμε την ύπαρξη δύο πινάκων $\mathcal{L}_\tau, \mathcal{L}_\sigma$ έτσι

[1] Έχουμε εισάγει τον φορμαλισμό $X_1 = X \otimes 1$, $X_2 = 1 \otimes X$

[2] Η σχεση (4.6) ορίζεται στο τριπλο γινόμενο $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$

ώστε οι εξισώσεις Euler Lagrange να μπορούν να γραφτούν στην μορφή Lax

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\sigma(z)}{\partial \tau} - \frac{\partial \mathcal{L}_\tau(z)}{\partial x} = [\mathcal{L}_\tau(z), \mathcal{L}_\sigma(z)] \,. \tag{4.7}$$

Οι παραπάνω πίνακες περιλάμβάνουν και μια επιπλέον παράμετρο, την φασματική παράμετρο $z \in \mathbb{C}$. Σε αυτήν την περίπτωση, η θεωρία πεδίου είναι κλασικά ολοκληρώσιμη και μπορούμε να κατασκευάσουμε τα άπειρα σε αριθμό διατηρούμενα φορτία, ακολουθώντας την διαδικασία της [20]. Σε αυτή, κρίσιμο ρόλο διαδραματίζει ο πίνακας μεταφοράς[3]

$$T(\tau, \sigma, \sigma_0; z) = \mathcal{P} \exp \left(\int_{\sigma_0}^{\sigma} d\sigma' \mathcal{L}_\sigma(\tau, \sigma', \sigma_0; z) \right) \,. \tag{4.8}$$

Η ολοκλήρωση πραγματοποιείται κατά μήκος της χωρικής συντεταγμένης και το σύμβολο $\mathcal{P}(\dots)$ υποδηλώνει την διάταξη διαδρομής. Παραγωγίζοντας την (4.8) βρίσκουμε

$$\partial_\tau T(\tau, \sigma_1, \sigma_0; z) = \mathcal{L}_\tau(\sigma_1; z) T(\tau, \sigma_1, \sigma_0; z) - T(\tau, \sigma_1, \sigma_0; z) \mathcal{L}_\tau(\sigma_0; z) \,. \tag{4.9}$$

Η επιλογή των σ_1, σ_0 εξαρτάται από την ύπαρξη ή όχι συνοριακών συνθηκων. Απουσία συνόρου, δηλαδή για $\sigma \in (-\infty, \infty)$, απαιτούμε συνθήκες ασυμπτωτικού μηδενισμού των πεδίων, και βρίσκουμε τις διατηρούμενες ποσότητες

$$\partial_\tau T^n(\tau, \infty, -\infty; z) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \,. \tag{4.10}$$

Εναλλακτικά, αν η χορδή είναι κλειστή απαιτούμε περιοδικές συνοριακές συνθήκες $\sigma \equiv \sigma + 2\pi$ και η (4.9) γράφεται στην μορφή

$$\partial_\tau T(\tau, z) = [\mathcal{L}(z), T(\tau, z)] \,, \tag{4.11}$$

όπου για χάριν συντομίας παραλείψαμε τα $\sigma_0 = 0, \sigma_1 = 2\pi$. Σε αυτήν την περίπτωση, διατηρείται το ίχνος των δυνάμεων του μονόδρομου πίνακα

$$\partial_\tau \mathcal{T}^n(\tau, z) = 0, \quad \mathcal{T}(\tau, z) = \mathrm{Tr} T(\tau, z) \,. \tag{4.12}$$

Αν η $\mathcal{T}(z)$ είναι αναλυτική κοντά στο $z = 0$, τότε έχει ανάπτυξη σε σειρά Taylor. Με αυτόν τον τρόπο βρίσκουμε ένα άπειρο σύνολο διατηρούμενων φορτίων ως συντελεστές της

[3] Αν τα άκρα ολοκλήρωσης περιέχουν όλο το χωρίο ορισμού του συστήματος τότε ο πίνακας μεταφοράς καλειται μονόδρομος πίνακας.

σειράς

$$\mathcal{T}(\tau,z)=\sum_{n=1}^{\infty}Q_n z^n\,,\quad \partial_\tau Q_n=0\,,\quad \forall n\geq 0\,. \tag{4.13}$$

Επομένως ο πίνακας μεταφοράς αποτελεί τον γεννήτορα των διατηρούμενων φορτίων σε μια ολοκληρώσιμη θεωρία πεδίου.

Λόγω των περιπτώσεων που θα μελετήσουμε, θα ορίσουμε γενικευμένους πίνακες μεταφοράς. Στην πρώτη περίπτωση δρούμε στο ζεύγος Lax με έναν αυτομορφισμό Ω[4]

$$T^{\Omega}(b,a;z)=\mathcal{P}\exp\left(\int_a^b d\sigma\Omega\mathcal{L}_\sigma(\tau,\sigma;z)\right)\,. \tag{4.15}$$

Οι εσωτερικοί αυτομορφισμοί, $Inn(G)$, αντιστοιχούν στους μετασχηματισμούς $x\to fxf^{-1}$, $x\in\mathfrak{g}$, όπου $f\in G$. Αυτές οι περιπτώσεις αντιστοιχούν σε επανορισμό των πεδίων ομάδας και δεν έχουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Αντιθέτως, οι εξωτερικοί αυτομορφισμοί, $Aut(G)/Inn(G)$, οδηγούν σε μη τετριμμένα παραδείγματα.

Στην δεύτερη περίπτωση δρούμε στο ζεύγος Lax με έναν μετασχηματισμό τύπου βαθμίδας

$$\mathcal{L}^g_\pm(z)=g\mathcal{L}_\pm(z)g^{-1}+\partial_\pm g g^{-1}\,, \tag{4.16}$$

με τον πίνακα μεταφοράς να δίνεται σε αυτή την περίπτωση ως

$$T^g(b,a;z)=g(b)T(b,a;z)g^{-1}(a)\,. \tag{4.17}$$

Τέλος συνδυάζουμε τους δύο παραπάνω μετασχηματισμούς ως

$$T^{g\Omega}(b,a;z)=\omega(g(b))T(b,a;z)\omega(g(a)^{-1})\,, \tag{4.18}$$

όπου η απεικόνιση ω ορίζεται ως $\omega(g)=e^{\Omega(X)}=e^{X^a\Omega(T^a)}$.

[4] Ένας αυτομορφισμός είναι μια απεικόνιση από μια άλγεβρα στον εαυτό της, $T'^A=\Omega^{AB}T^B$, που διατηρεί τις σχέσεις μετάθεσης, δηλαδή ισχύει

$$[\Omega(T^a),\Omega(T^b)]=\Omega([T^a,T^b]) \tag{4.14}$$

4.2.1 Φορτία σε συνέλιξη και αγκύλες *Maillet*

Όπως προαναφέραμε για να θεωρείτε ένα σύστημα κλασικά ολοκληρώσιμο πρέπει τα διατηρούμενα φορτία να είναι σε συνέλιξη. Αναλόγως με την (4.5) θεωρούμε τις αγκύλεςPoisson μεταξύ δύο χωρικών συνιστωσών του ζεύγους Lax (το ισοδύναμο του πίνακα L για θεωρίες πεδίου) με φασματικές παραμέτρους z, z' σε δύο διαφορετικά σημεία σ, σ'. Σύμφωνα με το θεώρημα του **Sklyanin** [22] αν μπορούν να γραφτούν στην παρακάτω μορφή[5]

$$\{\mathcal{L}_{1,\sigma}(\sigma,t,z), \mathcal{L}_{2,\sigma}(\sigma',t,z')\} = [r_{12}(z-z'), \mathcal{L}_{1,\sigma}(\sigma,t,z) + \mathcal{L}_{2,\sigma}(\sigma',t,z')]\delta(\sigma-\sigma')\,, \tag{4.19}$$

τότε ο μονόδρομος πίνακας ικανοποιεί την σχέση

$$\{T_1(z), T_2(z')\} = [r_{12}(z-z'), T_1(z)T_2(z')]\,, \tag{4.20}$$

από την οποία συνεπάγεται ότι τα ίχνη των μονόδρομων πινάκων με διαφορετικές φασματικές παραμέτρους είναι σε συνέλιξη

$$\{\mathcal{T}(z), \mathcal{T}(z')\} = 0\,. \tag{4.21}$$

Δεδομένης της (4.13) καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα της συνέλιξης των άπειρων διατηρούμενων φορτίων

$$\{Q_n, Q_m\} = 0, \quad \forall n, m \geq 0\,. \tag{4.22}$$

Οι αγκύλες Poisson (4.19) καλούνται υπερτοπικές εξαιτίας του ότι δεν περιέχουν παραγώγους της δέλτα συνάρτησης. Στην αντίθετη περίπτωση, προς χάριν των προτύπων που θα μελετήσουμε, είναι αρκετό οι ίδιας χρονικής στιγμής αγκύλες να ικανοποιούν την r/s Maillet μορφή

$$\begin{aligned}\{\mathcal{L}_{1,\sigma}(\sigma,z), \mathcal{L}_{2,\sigma}(s',z')\} = ([r_{12}(z,z'), L_{1\sigma}(\sigma,z)] - [r_{21}(z',z), \mathcal{L}_{2\sigma}(\sigma',z')])\delta_{\sigma\sigma'} \\ + s_{12}(z,z')\delta'_{\sigma\sigma'}\,,\end{aligned} \tag{4.23}$$

όπου $s_{12}(z,z') = r_{12}(z,z') + r_{21}(z',z)$ και $r_{12}(z,z')$ πίνακες στην $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ άλγεβρα. Έχει αποδειχθεί στις [24], [25] ότι η (4.23) είναι ικανή σχέση προς εξασφάλιση της συνέλιξης των φορτίων που γεννιούνται απο τον μονόδρομο πίνακα.

Τέλος να αναφέρουμε ότι ο πίνακας $r_{12}(z,z')$ για όλες τις περιπτώσεις που θα παρουσιάσουμε

[5] Εχουμε υποθέσει ότι ο πίνακας r_{12} είναι ανεξάρτητος των πεδίων και ικανοποιεί την σχέση $r_{12}(z-z') = -r_{21}(z'-z)$.

γράφεται στην μορφή

$$r_{12}(z,z') = \frac{C_{12}}{z-z'}\phi^{-1}(z')\,, \tag{4.24}$$

όπου $C_{12} = \sum_A T^A \otimes T^A$ ο τανυστής Casimir και $\phi(z)$ μια μερομορφική συνάρτηση, γνωστή ως συνάρτηση στρέψης. Όπως έχει αποδειχθεί στην [26] η μορφή (4.24), και άρα η ύπαρξη της συνάρτησης στρέψης, εξασφαλίζεται από το γεγονός της γραφής του αντίστοιχου προτύπου ως ένα Gaudin πρότυπο. Ο ρόλος της έχει επισημανθεί στις εργασίες [27], [28] και για την περίπτωση των λ-προτύπων στις [29], [31]. Πρόσφατα αποδείχθηκε ότι διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην τετραδιάστατη Chern-Simons προσέγγιση των ολοκληρώσιμων σ-προτύπων [32], [33], [34] και ότι οι εξισώσεις ροής της ΟΕ μιας κλάσης ολοκληρώσιμων προτύπων, που είναι επανακανονικοποιήσιμα σε τάξη ενός βρόγχου, μπορούν να γραφτούν συναρτήσει της συνάρτησης στρέψης σε απλή μορφή [35].

4.3 Χειραλικό πρότυπο

Το χειραλικό πρότυπο είναι μια δισδιάστατη ολοκληρώσιμη θεωρία πεδίου που ασυμπτωτικά είναι ελεύθερη. Αυτή η αναλογία με την κβαντική χρωμοδυναμική οδήγησε πολλούς ερευνητές σε εκτενή μελέτη του, παραδείγματος χάριν [36–42]. Επιπλέον, περιγράφει μέρος του μποζονικού τομέα συγκεκριμένων λύσεων της τύπου-(II) θεωρίας υπερχορδών και έχει χρησιμοποιηθεί για την παρουσίαση παραδειγμάτων στην AdS/CFT αντιστοιχία. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την δράση του, ορισμένη σε ομάδες πολλαπλότητας και συμμετρικούς χώρους, και θα θεμελιώσουμε την ολοκληρώσιμη δομή του. Ταυτόχρονα θα υπολογίσουμε τις εξισώσεις ροής της ΟΕ και θα επιβεβαιώσουμε ότι η β-συνάρτηση του είναι αρνητική.

4.3.1 Η δράση του προτύπου

Το χειραλικό πρότυπο είναι ένα μη γραμμικό σ-πρότυπο και η δράση του είναι η εξής

$$\begin{aligned} S_{PCM,\kappa^2}(g) &= -\frac{\kappa^2}{\pi}\int_\Sigma d^2\sigma \mathrm{Tr}(g^{-1}\partial_a g, \eta^{ab} g^{-1}\partial_b g) \\ &= -\frac{\kappa^2}{\pi}\int_\Sigma d^2\sigma \mathrm{Tr}(\partial_a g g^{-1}, \eta^{ab}\partial_b g g^{-1})\,. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Τα πεδία g είναι απεικονίσεις από μια δισδιάστατη επιφάνεια Σ σε μια Lie ομάδα G, κ μια σταθερά ζεύξης, η^{ab} η μετρική της επιφάνειας Σ και $\mathrm{Tr}(,)$ η Cartan-Killing μορφή της άλγεβρας $\mathfrak{g}$ της ομάδας G.[6]

Η δράση (4.25) διαθέτει την καθολική συμμετρία $G_L \times G_R$, η οποία ορίζεται ως

$$g \mapsto h_L g, \quad g \mapsto g h_R^{-1} \tag{4.26}$$

όπου h_L, h_R σταθερά στοιχεία της **Lie** ομάδας G. Οι **Maurer-Cartan** μορφές (B′.12) αντιστοιχούν στους γεννήτορες του μετασχηματισμού (4.26). Συγκεκριμένα, η αριστερή 1-μορφή L_a παράγει τον δεξιό μετασχηματισμό και η δεξιά μορφή R_a τον αριστερό, όπου

$$R_a = \partial_a g g^{-1}, \quad L_a = g^{-1}\partial_a g\,, \tag{4.27}$$

Για την εύρεση των εξισώσεων κίνησης του προτύπου παρατηρούμε ότι τα L_a μετασχηματίζονται κάτω από ένα απειροστό γενικό μετασχηματισμό δg ως

$$\delta L_a = \partial_a(g^{-1}\delta g) + [L_a, g^{-1}\delta g]\,. \tag{4.28}$$

Ο μεταθέτης στην παραπάνω σχέση δεν συνεισφέρει στην μεταβολή της δράσης εξαιτίας της αναλλοιώτητας της **Killing** μορφής κάτω από την συζυγή δράση της άλγεβρας. Μερική ολοκλήρωση στον εναπομείνοντα όρο οδηγεί στο τελικό αποτέλεσμα

$$\begin{aligned} \delta S_{PCM;\kappa^2}(g) &= \frac{\kappa^2}{\pi}\int d^2\sigma\,\mathrm{Tr}(g^{-1}\delta g, \partial_a L^a) \\ &= \frac{\kappa^2}{\pi}\int d^2\sigma\,\mathrm{Tr}(\delta g g^{-1}, \partial_a R^a)\,, \end{aligned} \tag{4.29}$$

Οι εξισώσεις κίνησης επομένως του χειραλικού προτύπου είναι οι

$$\partial_a L^a = 0 \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \partial_a R^a = 0\,. \tag{4.30}$$

Ακολουθώντας την μέθοδο της **Noether** για ένα από τα πεδία R_a, L_a, βρίσκουμε ότι ο τανυστής ενέργειας/ορμής του προτύπου, επεκφρασμένος σε συντεταγμένες κώνου φωτός, γράφεται στην απλή μορφή

$$T_{\pm\pm} = \kappa^2\mathrm{Tr}(L_\pm, L_\pm), \quad T_{\pm\mp} = 0 \tag{4.31}$$

και προφανώς έχει μηδενικό ίχνος. Η θεωρία επομένως είναι κλασικά σύμμορφη. Παρακάτω

[6] Ορισμοί και συμβάσεις παραθέτονται στα παραρτήματα Α, Β

θα δούμε ότι κβαντικά, σε τάξη ενός βρόγχου, η σύμμορφη εικόνα δεν επιβιώνει.

Τέλος μέσω του κανονικού φορμαλισμού, που θα αναπτυχθεί στην περίπτωση του λ-προτύπου, βρίσκουμε ότι οι αγκύλες Poisson των αριστερών Maurer Cartan μορφών είναι

$$\begin{aligned}
\left\{L_\tau^A(\sigma), L_\tau^B(\sigma')\right\} &= -\frac{2\pi}{\kappa^2} f^{ABC} L_\tau^C(\sigma)\delta(\sigma-\sigma')\,, \\
\left\{L_\tau^A(\sigma), L_\sigma^B(\sigma')\right\} &= \frac{2\pi}{\kappa^2}\left(-f^{ABC} L_\tau^C(\sigma)\delta(\sigma-\sigma') + \delta^{AB}\delta'(\sigma-\sigma')\right)\,, \\
\left\{L_\tau^A(\sigma), L_\sigma^B(\sigma')\right\} &= 0\,,
\end{aligned} \tag{4.32}$$

και των δεξιών

$$\begin{aligned}
\left\{R_\tau^A(\sigma), R_\tau^B(\sigma')\right\} &= \frac{2\pi}{\kappa^2} f^{ABC} R_\tau^C(\sigma)\delta(\sigma-\sigma')\,, \\
\left\{R_\tau^A(\sigma), R_\sigma^B(\sigma')\right\} &= \frac{2\pi}{\kappa^2}\left(f^{ABC} R_\tau^C(\sigma)\delta(\sigma-\sigma') + \delta^{AB}\delta'(\sigma-\sigma')\right)\,, \\
\left\{R_\tau^A(\sigma), R_\sigma^B(\sigma')\right\} &= 0\,.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Η δράση του χειραλικού προτύπου μπορεί να γραφτεί στην οικεία μορφή (2.12). Παραμετροποιώντας την ομάδα G με τις συντεταγμένες X^μ, $\mu = 1, \ldots, \dim(G)$ και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (Β΄.14) βρίσκουμε ότι η (4.25) γράφεται ως εξής

$$\begin{aligned}
S_{PCM,\kappa^2}(X) &= \frac{\kappa^2}{\pi}\int_\Sigma L_\mu^A L_\nu^A \partial_a X^\mu \eta^{ab}\partial_\nu X^\nu \\
&= \frac{\kappa^2}{\pi}\int_\Sigma R_\mu^A R_\nu^A \partial_a X^\mu \eta^{ab}\partial_\nu X^\nu\,.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Γνωρίζουμε ότι τα L_μ^A (ισοδύναμα τα R_μ^A) αποτελούν τα vielbeins της ομάδας πολλαπλότητας G, δηλαδή ικανοποιούν την σχέση

$$L_\mu^A L_\nu^A = G_{\mu\nu}(X)\,, \tag{4.35}$$

με $G_{\mu\nu}(X)$ την μετρική της πολλαπλότητας. Η (4.35) εμφανίζεται ως μέρος του υποβάθρου μιας θεωρίας υπερχορδών. Συγκεκριμένα, θεωρώντας την λύση $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ της IIB υπερβαρύτητας με κατάλληλα RR πεδία [43–45] το υπόβαθρο του χειραλικού προτύπου είναι το S^3 μέρος για $G = SU(2)$.

4.3.2 Ολοκληρώσιμη δομή του χειραλικού προτύπου

Οι Maurer-Cartan μορφές αποδεικνύονται βολικές για την απόδειξη της ολοκληρωσιμότητας του χειραλικού προτύπου. Σε συντεταγμένες κώνου φωτός οι πρωτοβάθμιες εξισώσεις κίνησης (4.30) γράφονται ως

$$\partial_+ L_- + \partial_- L_+ = 0\,. \tag{4.36}$$

Ταυτόχρονα τα $L_\pm$ ικανοποιούν εκ κατασκευής την Maurer-Cartan ταυτότητα (γνωστή και ως συνθήκη επιπεδότητας)

$$\partial_+ L_- - \partial_- L_+ = -[L_+, L_-]\,. \tag{4.37}$$

Προσθαφαιρώντας τις (4.36), (4.37) βρίσκουμε τις παρακάτω εξισώσεις[7]

$$\partial_\mp L_\pm = \pm\frac{1}{2}[L_+, L_-]\,. \tag{4.39}$$

Για τους πίνακες

$$\mathcal{L}_\pm(z) = \frac{1}{z \mp 1} L_\pm\,, \tag{4.40}$$

αποδεικνύεται εύκολα ότι οι (4.36), (4.37) κωδικοποιούνται στην εξίσωση Lax

$$\partial_+ \mathcal{L}_-(z) - \partial_+ \mathcal{L}_-(z) = [\mathcal{L}_+(z), \mathcal{L}_-(z)]\,. \tag{4.41}$$

Σύμφωνα με την (4.8), στην περίπτωση μιας $\mathbb{R} \times S^1$ γεωμετρίας της επιφάνειας Σ, ο μονόδρομος πίνακας δίνεται ως

$$T(2\pi, 0; z) = \mathcal{P}\exp\left(\int_0^{2\pi} d\sigma' \frac{1}{1-z^2}(L_\sigma + z L_\tau)\right)\,, \tag{4.42}$$

βάσει του οποίου μπορούμε να κατασκευάσουμε τα άπειρα διατηρούμενα φορτία, τα οποία πρέπει επιπλέον να είναι σε συνέλιξη.

[7] Ισοδύναμα ισχύει

$$\partial_\mp R_\pm = \mp\frac{1}{2}[R_+, R_-] \tag{4.38}$$

4.3.3 Τοπικά και μη τοπικά φορτία

Το χειραλικό πρότυπο έχει δύο ειδών άπειρα διατηρούμενα φορτία [46]. Τα πρώτα αντιστοιχούν στην επέκταση των $G_L \times G_R$ φορτίων στην μεγαλύτερη άλγβερα των μη τοπικών Yangian φορτίων, $Y(\mathfrak{g}_L) \times Y(\mathfrak{g}_R)$ [47, 48]. Τα δεύτερα αντιστοιχούν στα άπειρα ανώτερης τάξης τοπικά φορτία με ιδιοστροφορμή s [49].

• Μη τοπικά φορτία

Αναπτύσσοντας τον πίνακα (4.42) σε σειρά βρίσκουμε την άπειρη οικογένεια διατηρούμενων φορτίων. Συγκεκριμένα βρίσκουμε

$$\begin{aligned} T(\tau;z) = 1 &+ \frac{1}{z}\int_0^{2\pi} d\sigma L_\tau(\tau,\sigma) \\ &+ \frac{1}{z^2}\left(\int_0^{2\pi} d\sigma L_\sigma(\tau,\sigma) + \int_0^{2\pi} d\sigma \int_0^{\sigma} d\sigma' L_\tau(\tau,\sigma) L_\tau(\tau,\sigma')\right) \\ &+ \mathcal{O}\left(\frac{1}{z^3}\right). \end{aligned} \tag{4.43}$$

Τα φορτία τάξης μηδενικής και πρώτης είναι

$$\begin{aligned} Q_0(\tau) &= \int_0^{2\pi} d\sigma L_\tau(\tau,\sigma)\,, \\ Q_1(\tau) &= \int_0^{2\pi} d\sigma L_\sigma(\tau,\sigma) + \int_0^{2\pi} d\sigma \int_0^{\sigma} d\sigma' L_\tau(\tau,\sigma) L_\tau(\tau,\sigma')\,. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Το Q_0 είναι το διατηρούμενο φορτίο κατά Noether που αντιστοιχεί στην G_R καθολική συμμετρία του χειραλικού προτύπου, ενώ το Q_1 είναι το πρώτο μη τοπικό φορτίο. Ισοδύναμα, αν είχαμε εκφράσει τον μονόδρομο πίνακα συναρτήσει των δεξιών μορφών το μηδενικό θα αντιστοιχούσε στην G_L καθολική συμμετρία. Εναλλακτικά τα μη τοπικά φορτία μπορούν να εξαχθούν με την επαγωγική διαδικασία όπως αυτή αναπτύχθηκε στην εργασία [46]. Επιπλέον έχει αποδειχθεί ότι η χωρική συνιστώσα του ζεύγους Lax (4.40) ικανοποιεί τις Poisson αγκύλες (4.23) με την συνάρτηση στρέψης να δίνεται από

$$\phi(z) = \frac{1-z^2}{z^2}\,, \tag{4.45}$$

αποδεικνύοντας ότι το χειραλικό πρότυπο είναι ολοκληρώσιμο.

• Τοπικά φορτία

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης (4.39) βρίσκουμε ότι οι ποσότητες $\mathrm{Tr}(L_-^n)$ και

$\mathrm{Tr}(L_+^n)$ είναι χειραλικές και αντιχειραλικές. Συγκεκριμένα

$$\partial_\pm \mathrm{Tr}(L_\mp^n) = 0\,. \tag{4.46}$$

Η παραπάνω κατασκευή μπορεί να γενικευτεί ορίζοντας τον τελεστή Casimir τάξης m

$$\mathcal{C}_m = d_{A_1 \dots A_m} T^{A_1} \dots T^{A_m}\,, \tag{4.47}$$

όπου $d_{A_1 \dots A_m}$ καθολικά συμμετρικός τανυστής που ικανοποιεί την σχέση αναλλοιώτητας

$$d_{C(A_1 \dots A_{m-1}} f_{A_m)BC} = 0\,, \tag{4.48}$$

έτσι ώστε ο $\mathcal{C}_m$ να μετατίθεται με όλους τους γεννήτορες της άλγβερας.[8] Είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι η συνθήκη (4.48) εξασφαλίζει τον νόμο διατήρησης

$$\partial_\mp (d_{A_1 \dots A_m} L_\pm^{A_1} \dots L_\pm^{A_m}) = 0\,. \tag{4.49}$$

Τα αντίστοιχα διατηρούμενα φορτία είναι

$$q_{\pm s} = \int d\sigma d_{A_1 \dots A_m} L_\pm^{A_1} \dots , L_\pm^{A_m} \tag{4.50}$$

με τον κάτω δείκτη να συμβολίζει τις μονάδες της ιδιοστροφορμής $s = m - 1$. Για μια εκτενέστερη ανάλυση τους παραπέμπουμε την αναγνώστρια στην εργασία [46]. Η παραπάνω ανάλυση για το $N = 1$ υπερσυμμετρικό χειραλικό πρότυπο έχει αναπτυχθεί στην [53].

4.3.4 Η β-συνάρτηση

Η εξάρτηση της σταθεράς ζεύξης κ^2 σε μεταβολές της ενεργειακής κλίμακας μ περιγράφεται από την β-συνάρτηση της θεωρίας η οποία ορίζεται ως

$$\beta_{\kappa^2} = \frac{d\kappa^2}{d \ln \mu^2}\,. \tag{4.51}$$

Για τον υπολογισμό της θα εφαρμόσουμε την μέθοδο υποβάθρου [54]. Εναλλακτικά, μπορούμε να την υπολογίσουμε γεωμετρικά, χρησιμοποιώντας την (2.19).

Στην μέθοδο υποβάθρου ενδιαφερόμαστε για την συμπεριφορά μικρών διακυμάνσεων γύρω

[8] Για τον αριθμό των ανεξάρτητων συμμετρικών τανυστών που μπορούν να οριστούν σε μια άλγεβρα $\mathfrak{g}$ παραπέμπουμε στην [52]

από μια λύση της θεωρίας. Αρχικά χωρίζουμε τα πεδία $\phi(x)$ ως

$$\phi(x) = \phi^{(0)}(x) + \delta\phi(x)\,, \tag{4.52}$$

όπου $\phi^{(0)}(x)$ υποδηλώνει μια λύση (πεδίο υποβάθρου) και $\delta\phi(x)$ τις διακυμάνσεις γύρω από αυτή. Αντικαθιστώντας την (4.52) στις εξισώσεις κίνησης βρίσκουμε τον τελεστή $\hat{\mathcal{D}}$ που διέπει την δυναμική των $\delta\phi(x)$. Μετά από μια στροφή Wick και ένα μετασχηματισμό Fourier στον χώρο των ορμών βρίσκουμε ότι η ενεργός δράση δίνεται ως

$$-\mathcal{L}_{\varepsilon\nu} = \mathcal{L}^{(0)}(\phi^{(0)}) + \int^{\mu} \frac{d^2p}{2\pi} \ln(\det\hat{\mathcal{D}})^{-1/2}\,, \tag{4.53}$$

όπου στο δεξί μέλος η $\mathcal{L}^{(0)}$ είναι η Λαγκραντζιανή υπολογισμένη στο πεδίο υποβάθρου και ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στην συνεισφορά όλων των διαγραμμάτων ενός βρόγχου. Για τον υπολογισμό της β-συνάρτησης ενδιαφερόμαστε μόνο για τους λογαριθμικά αποκλίνοντες όρους στο ολοκλήρωμα. Μετά από επανακανονικοποιήσεις του κινητικού όρου και απαιτώντας η άθροιση της δενδροειδούς και ενός βρόγχου συνεισφοράς να είναι ανεξάρτητη της ενεργειακής κλίμακας μ καταλήγουμε στην β-συνάρτηση των σταθερών ζεύξης της θεωρίας. Για το χειραλικό πρότυπο βρίσκουμε, σε τάξη ενός βρόγχου, ότι

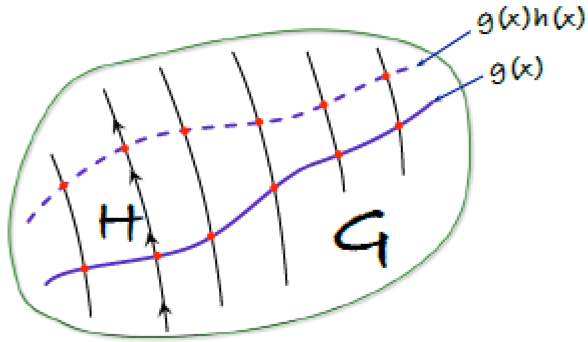
$$\beta_{\kappa^2} = \frac{c_2(G)}{4}\,, \tag{4.54}$$

όπου $c_2(G)$ είναι ο τετραγωνικός Casimir της συζυγούς αναπαράστασης της άλγερβρας $\mathfrak{g}$. Δεδομένης της αντιστοίχισης της σταθεράς κ^2 με την $1/a'$ της θεωρίας χορδών βρίσκουμε ότι η (4.54) είναι αρνητική και το χειραλικό πρότυπο είναι ασυμπτωτικά ελεύθερο.

4.4 Χειραλικό πρότυπο σε συμμετρικούς χώρους

4.4.1 Κατασκευή του προτύπου

Έστω δύο πεδία g, g', τα οποία διαφέρουν κατά την δεξιά δράση υποομάδας $H \subset G$, δηλαδή $g' = gh$. Αν για μια θεωρία είναι φυσικά ισοδύναμα, τότε αυτή είναι ορισμένη σε (δεξιό) χώρο πηλίκου G/H, βλέπε σχήμα 4.1. Για να κατασκευάσουμε το χειραλικό πρότυπο σε χώρο πηλίκου, θα αναβαθμίσουμε την δράση του έτσι ώστε να είναι συμμετρική κάτω από



Σχήμα 4.1: Τα σημεία της συνεχούς μπλέ γραμμής διαφέρουν με τα σημεία της διακεκομμένης κατα την δεξιά δράση της H. Για ένα χώρο πηλίκου αυτά ταυτίζονται, δηλαδη ανήκουν στην ίδια κλάση συζυγίας

τον μετασχηματισμό

$$g(\sigma_+,\sigma_-) \mapsto g(\sigma_+,\sigma_-)h(\sigma_+,\sigma_-), \quad h(\sigma_+,\sigma_-) \in H\,. \tag{4.55}$$

Εισάγοντας πεδία βαθμίδας $B_\pm \in \mathfrak{h}$ και απαιτώντας να μετασχηματίζονται όπως τα $L_\pm$ κάτω από την (4.55), βρίσκουμε ότι οι ποσότητες

$$\hat{L}_\pm = g^{-1}\nabla_\pm g, \quad \nabla_\pm = \partial_\pm - B_\pm\,, \tag{4.56}$$

μετασχηματίζονται στην συζυγή αναπαράσταση της H, δηλαδή

$$\hat{L}_\pm \to h^{-1}\hat{L}_\pm h\,, \tag{4.57}$$

Με αυτόν τον τρόπο, η δράση

$$S = -\frac{\kappa^2}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(\hat{L}_+,\hat{L}_-)\,, \tag{4.58}$$

είναι αναλλοίωτη κάτω απο τον μετασχηματισμό βαθμίδας (4.55).

Στην συνέχεια εφαρμόζουμε ένα $\mathbb{Z}_2$ διαχωρισμό της άλγεβρας $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \oplus \mathfrak{g}^{(1)}$ όπου $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{h}$. Στο επίπεδο των γεννητόρων αυτός κατανοείται ως, $\mathfrak{g} = \{T^A\} = \{T^a, T^\alpha\}$ όπου T^A οι γεννήτορες της άλγβερας $\mathfrak{g}$, T^a της άλγεβρας $\mathfrak{g}^{(0)}$ και T^α του υποσυνόλου $\mathfrak{g}^{(1)}$. Ολοκληρώνοντας τα πεδία βαθμίδας, τα οποία υπενθυμίζουμε ότι ανήκουν στην $\mathfrak{g}^{(0)}$, βρίσκουμε

$$B_\pm = (L_\pm)_{\mathfrak{g}^{(0)}} = L^a_\pm T^a, \quad a = 1,\dots \dim(H)\,. \tag{4.59}$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στην (4.58) βρίσκουμε ότι η ενεργός δράση γράφεται στην μορφή

$$
\begin{aligned}
S_{G/H} &= -\frac{\kappa^2}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(L_+, L_-)_{\mathfrak{g}^{(1)}} \\
&= -\frac{\kappa^2}{\pi}\int_\Sigma L_+^\alpha L_-^\alpha
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

4.4.2 Ολοκληρώσιμη δομή

Για τον ορισμό των συμμετρικών χώρων θα ακολουθήσουμε τις αρκετά παιδαγωγικές σημειώσεις [56]. Ένας συμμετρικός χώρος είναι μια ειδική περίπτωση χώρου πηλίκου. Πιο συγκεκριμένα χαρακτηρίζεται απο τις σχέσεις μετάθεσης που ικανοποιούν οι γεννήτορες της υποάλγεβρας $\mathfrak{h}$ με τους υπόλοιπους γεννήτορες της άλγεβρας $\mathfrak{g}$. Δεδομενου ότι η $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}^{(0)}$ είναι υποάλγεβρα, εξ' ορισμού ο μεταθέτης δυο στοιχείων της είναι πάλι στοιχείο της. Σχηματικά

$$
[\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}^{(0)}] \subset \mathfrak{g}^{(0)} \,. \tag{4.61}
$$

Συναρτήσει των σταθερών δομής της άλγεβρας η (4.61) είναι ισοδύναμη με $f_{ab\gamma} = 0$. Η αντισυμμετρικότητα στις σταθερές δομής συνεπάγεται $f_{a\beta c} = 0$ δηλαδή

$$
[\mathfrak{g}^{(0)}, \mathfrak{g}^{(1)}] \subset \mathfrak{g}^{(1)} \,. \tag{4.62}
$$

Όσον αφορά τον μεταθέτη $[\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}]$, δεν υπάρχει κανένας περιορισμός εφόσον οι σταθερές δομής $f_{\alpha\beta c}$ είναι μη-μηδενικές. Στην περίπτωση που οι δεύτερες μηδενίζονται, ο διαχωρισμός $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \oplus \mathfrak{g}^{(1)}$ καλείται συμμετρικός χώρος και οι εξισώσεις κίνησης του προτύπου (4.58) ως προς τα πεδία g είναι[9]

$$
\begin{aligned}
&\partial_\pm J_\mp^{(1)} + [B_\pm, J_\mp^{(1)}] = 0 \,, \\
&\partial_+ B_- - \partial_- B_+ + [B_+, B_-] + [J_+^{(1)}, J_-^{(1)}] = 0 \,.
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

Σε αυτή την περίπτωση η κλασική ολοκληρωσιμότητα αποδεικνύεται για το ζεύγος

$$
\mathcal{L}_\pm(z) = B_\pm + z^{\pm 1} J_\pm^{(1)} \,, \tag{4.64}
$$

[9]Η πρώτη εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή των ανώτερης τάξης διατηρούμενων τοπικών φορτίων σε συμμετρικούς χώρους [57]

βάσει του οποίου οι εξισώσεις (4.63) γράφονται στην μορφή Lax . Τέλος υπάρχει μια επιπλέον περίπτωση ολοκληρώσιμων χώρων πηλίκου. Αυτοί οι χώροι περιγράφουν συνεπείς θεωρίες υπερχορδών στον φορμαλισμό Green-Schwartz (G-S) [58], όπου η υπερσυμμετρία δεν είναι στην κοσμική επιφάνεια αλλά στον χώρο υποβάθρου. Τα πεδία σε αυτήν την περίπτωση ορίζονται σε υπερπολλαπλότητες, οι οποίες είναι γνωστές ως ημι-συμμετρικοί χώροι [59] πηλίκου. Τα σ-πρότυπα ορισμένα σε αυτούς τους χώρους αποδεικνύεται ότι είναι ολοκληρώσιμα [60]

Κεφάλαιο 5

$2D$ σύμμορφες θεωρίες πέδιου

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επικεντρωθούμε σε δισδιάστατες σύμμορφες θεωρίες πεδίου. Θα ξεκινήσουμε με μια σύντομη εισαγωγή των γενικών χαρακτηριστικών τους [61–63] και θα συνεχίσουμε με την θεμελίωση του WZW προτύπου [64] το οποίο περιγράφει μια ΣΘΠ ορισμένη σε μια πολλαπλότητα ομάδας G. Η βάθμωση της συζυγούς δράσης μιας υποομάδας $H \subset G$ παρέχει τον Λαγκραντζιανό φορμαλισμό των ΣΘΠ σε χώρους πηλίκου G/H [72–74]. Τέλος, θα δούμε ότι διαφορετικοί τρόποι βάθμωσης ενός γινομένου WZW προτύπων, γνωστοί ως ασύμμετροι, παράγουν ΣΘΠ με μη τετριμμένες ιδιότητες.

5.1 Εισαγωγικά

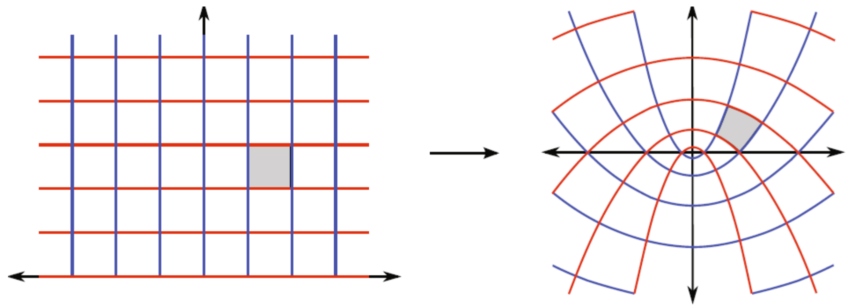
5.1.1 Σύμμορφοι μετασχηματισμοί

Έστω d-διάστατος επίπεδος χώρος με μετρική g_{ab}. Μετασχηματισμοί συντεταγμένων, $x \mapsto x' = f(x)$, για τους οποίους ισχύει

$$g_{ab}\frac{\partial x'^a}{\partial x^c}\frac{\partial x'^b}{\partial x^d} = \Lambda(x) g_{cd}\,, \tag{5.1}$$

καλούνται σύμμορφοι μετασχηματισμοί, βλέπε σχήμα 5.1. Υπολογίζοντας την (5.1) για απειροστούς μετασχηματισμούς $x'^a = x^a + \epsilon^a + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ βρίσκουμε ότι

$$\partial_a \epsilon_b + \partial_b \epsilon_a = \frac{2}{d}(\partial^c \epsilon_c) g_{ab} \tag{5.2}$$



Σχήμα 5.1: Σύμμορφοι μετασχηματισμοί σε δύο διαστάσεις

Θεωρώντας την περίπτωση ευκλείδιου δισδιάστατου χώρου η συνθήκη (5.2) γράφεται ως

$$\partial_0 \epsilon_0 = \partial_1 \epsilon_1, \quad \partial_0 \epsilon_1 = -\partial_1 \epsilon_0 \,, \tag{5.3}$$

που είναι οι εξισώσεις των Cauchy-Riemman. Ορίζοντας τις μιγαδικές συναρτήσεις $\epsilon = \epsilon_0 + i\epsilon_1$ και $\bar{\epsilon} = \epsilon_0 - i\epsilon_1$ οι (5.3) επιβάλουν ότι $\epsilon = \epsilon(z)$ και $\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}(\bar{z})$ με $z = x_0 + ix_1$ και $\bar{z} = x_0 - ix_1$. Συνεπώς, οι ολομορφικές/αντιολομορφικές συναρτήσεις αποτελούν τους γεννήτορες των σύμμορφων μετασχηματισμών οι οποίοι σε διαφορική μορφή γράφονται ως

$$L_n = -z^{n+1}\partial_z, \quad \bar{L}_n = -\bar{z}^{n+1}\partial_{\bar{z}}, \quad n \in \mathbb{Z} \tag{5.4}$$

και αποδεικνύεται ότι ικανοποιούν δύο αντίγραφα της γνωστής άλγεβρας De-Witt

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} \,, \\ [\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m-n)\bar{L}_{m+n} \,, \\ [L_m, \bar{L}_n] &= 0 \,. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Οι γεννήτορες (5.4) δεν είναι καλώς ορισμένοι παντού στην σφαίρα Riemann $\mathbb{C} \times \infty$, για κάθε τιμή του n. Οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί που είναι καθολικά ορισμένοι παράγονται από τους

$$L_{-1} \,, \quad L_0 \,, \quad L_{+1} \,. \tag{5.6}$$

Η άλγεβρα (5.5) επιδέχεται μια κεντρική επέκταση, $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathbb{C}$, με τρόπο που να σέβεται την αντισυμμετρικότητα των Lie αγκυλών και την Ιακωβιανή ταυτότητα. Χωρίς να υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες, η κεντρική επέκταση της άλγεβρας De Witt είναι η γνωστή ως άλγεβρα

Virassoro με σχέσεις μετάθεσης

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}\,, \tag{5.7}$$

(αντίστοιχη σχέση μετάθεσης ισχύει και για τους αντιολομορφικούς γεννήτορες) όπου c το επονομαζόμενο κεντρικό φορτίο.

5.2 Σύμμορφα σ-πρότυπα

5.2.1 WZW-πρότυπο

Το WZW-πρότυπο είναι η θεωρία των απεικονίσεων $g : \Sigma \to G$ και περιγράφεται από την δράση

$$S_{WZW,k}(g) = -\frac{k}{8\pi}\int_\Sigma d^2\sigma \mathrm{Tr}(g^{-1}\partial_a g, \eta^{ab} g^{-1}\partial_b g) + \frac{1}{4\pi}\int_M H\,, \tag{5.8}$$

όπου $\mathrm{Tr}(,)$ είναι η Killing μορφή της άλγεβρας $\mathfrak{g}$, η^{ab} η μετρική της δισδιάστατης επιφάνειας Σ και M μια τρισδιάστατη πολλαπλότητα της οποίας το σύνορο είναι η εικόνα του Σ, $\partial M = g(\Sigma)$. Ο πρώτος όρος στην (5.8) είναι η δράση του χειραλικού προτύπου την οποία εφεξής θα συμβολίζουμε με $S_{\text{χιν},k}(g)$. Ο δεύτερος όρος είναι ο Wess-Zumino όρος, $S_{WZ,k}(g)$, και ορίζεται ως

$$H = \frac{k}{3}\mathrm{Tr}(\tilde{g}^{-1}d\tilde{g} \wedge \tilde{g}^{-1}d\tilde{g} \wedge \tilde{g}^{-1}d\tilde{g})\,. \tag{5.9}$$

Ως $\tilde{g}$ θεωρούμε μια επέκταση του g, με τρόπο που $\tilde{g}|_{\partial M = \Sigma} = g$. Αυτή μπορεί να οριστεί όταν η δεύτερη ομοιοτοπική ομάδα της Lie ομάδας G, $\pi_2(G)$, είναι μηδέν, κάτι που ισχύει για συμπαγείς συνδεδεμένες Lie ομάδες. Η δράση (5.8) εξαρτάται επιπλέον από την επιλογή του χωρίου M. Θα πρέπει να απαιτήσουμε η φυσική που περιγράφει να είναι ανεξάρτητη του τρόπου με τον οποίο επεκτείνουμε το πεδίο g στο εσωτερικό της επιφάνειας Σ.

Αρχικά ελέγχουμε ότι ο WZ όρος είναι ανεξάρτητος κάτω απο μικρές διαταραχές $\delta\tilde{g}$:

$$\begin{aligned}
\delta S_{WZ} &= \frac{k}{4\pi}\int_M \mathrm{Tr}((\tilde{g}^{-1}d\delta\tilde{g} - \tilde{g}^{-1}\delta\tilde{g}\tilde{g}^{-1}d\tilde{g}) \wedge \tilde{g}^{-1}d\tilde{g} \wedge \tilde{g}^{-1}d\tilde{g}) \\
&= \frac{k}{4\pi}\int_M d\mathrm{Tr}(\tilde{g}^{-1}\delta\tilde{g}, \tilde{g}^{-1}d\tilde{g} \wedge \tilde{g}^{-1}d\tilde{g}) \\
&= \frac{k}{4\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(g^{-1}\delta g, g^{-1}dg \wedge g^{-1}dg) \\
&= \frac{k}{4\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(g^{-1}\delta g, d(g^{-1}dg))\,.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

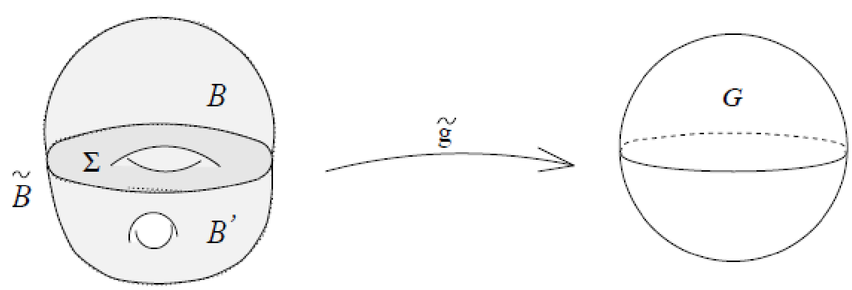
Επομένως αν η μεταβολή του $\tilde{g}$ μηδενίζεται στο σύνορο Σ ο WZ όρος είναι αναλλοίωτος. Μένει να ελέγξουμε την συμπεριφορά του κάτω απο τοπολογικά διαφορετικά χωρία M. Διαλέγοντας ένα χωρίο M' με το ίδιο σύνορο και απαιτώντας η φυσική που περιγράφουν οι δράσεις (5.8) να είναι ισοδύναμες, βρίσκουμε ότι [65]

$$\Delta\Gamma = \frac{1}{4\pi}\int_{M-M'} H \in 2\pi\mathbb{Z}\,, \tag{5.11}$$

όπου $M - M'$ είναι ομοιοτοπικά ισοδύναμο με την σφαίρα S^3, βλέπε σχήμα 5.2. Για την περίπτωση ομάδων που περιέχουν την $SU(2)$ ως υποομάδα βρίσκουμε $\Delta\Gamma = 2\pi k$ [65], το οποίο οδηγεί στην κβάντωση του k

$$k \in \mathbb{Z}\,, \tag{5.12}$$

ενώ για ομάδες που δεν περιέχουν την $SU(2)$ ο υπολογισμός πρέπει να γίνει ανά περίπτωση. Η παραπάνω κβάντωση είναι αντίστοιχη με την κβάντωση Dirac του μαγνητικού φορτίου.



Σχήμα 5.2: $\tilde{g}(M - M')$

Χρησιμοποιώντας την (5.10) βρίσκουμε ότι για έναν γενικό απειροστό μετασχηματισμό των πεδίων $g \to g + \delta g$ ο WZ όρος δίνει

$$\begin{aligned} \delta S_{WZ,k} &= \frac{k}{4\pi} \int_\Sigma d^2\sigma \mathrm{Tr}(g^{-1}\delta g, \epsilon^{ab}\partial_a(g^{-1}\partial_a g)) \\ &= -\frac{k}{4\pi} \int_\Sigma d^2\sigma \mathrm{Tr}(\delta g g^{-1}, \epsilon^{ab}\partial_a(\partial_a g g^{-1}))\,. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Αντίστοιχα η μεταβολή του κινητικού όρου ισούται με

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{κιν},k} &= \frac{k}{4\pi} \int_\Sigma \mathrm{Tr}(g^{-1}\delta g, \partial_a(g^{-1}\partial^a g)) \\ &= \frac{k}{4\pi} \int_\Sigma \mathrm{Tr}(\delta g g^{-1}, \partial_a(\partial^a g g^{-1}))\,. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Συνδυάζοντας τις (5.13), (5.14) βρίσκουμε την έκφραση

$$\begin{aligned} \delta S_{WZW,k} &= \frac{k}{4\pi} \int_\Sigma \mathrm{Tr}(g^{-1}\delta g, \partial_a(g^{-1}\partial^a g) + \epsilon^{ab}\partial_a(g^{-1}\partial_b g)) \\ &= \frac{k}{4\pi} \int_\Sigma \mathrm{Tr}(\delta g g^{-1}, \partial_a(\partial^a g g^{-1}) - \epsilon^{ab}\partial_a(\partial_b g g^{-1}))\,, \end{aligned} \tag{5.15}$$

η οποία γραμμένη σε συντεταγμένες κώνου φωτός συνεπάγεται την αντιχειραλικότητα ή χειραλικότητα των $J_+ = k\partial_+ g g^{-1}$ και $J_- = -kg^{-1}\partial_- g$ αντίστοιχα, δηλαδή

$$\partial_- J_+ = 0 \quad \text{ή} \quad \partial_+ J_- = 0\,. \tag{5.16}$$

Το WZW πρότυπο διαθέτει την απειροδιάστατη συμμετρία $G_L(\sigma_+) \times G_R(\sigma_-)$, που ορίζεται ως

$$g \mapsto k_L^{-1}(\sigma_+) g k_R(\sigma_-), \quad k_L, k_R \in G\,. \tag{5.17}$$

Χρησιμοποιώντας την Polyakov-Weigmann ταυτότητα:

$$S_{WZW,k}(gf) = S_{WZW,k}(g) + S_{WZW,k}(f) - \frac{k}{\pi} \int_\Sigma \mathrm{Tr}(g^{-1}\partial_- g, \partial_+ f f^{-1})\,, \tag{5.18}$$

βρίσκουμε ότι οι γεννήτορες της συμμετρίας (5.17) είναι τα χειραλικά ρεύματα $J_\pm$. Στην κβαντική θεωρία, οι τρόποι ταλάντωσης Laurent των ρευμάτων $J_\pm^A$ με $A = 1, \ldots, \dim(G)$, J_m^A, ικανοποιούν την Kac-Moody άλγεβρα $\hat{\mathfrak{g}}_k$ με κεντρική επέκταση το επίπεδο k του WZW προτύπου

$$[J_m^A, J_n^B] = if_{ABC} J_{m+n}^C + km\delta^{AB}\delta_{m+n,0}\,. \tag{5.19}$$

Ο τανυστής ενέργειας/ορμής δίνεται συναρτήσει των ρευμάτων ως

$$
\begin{aligned}
T_{\pm\pm} &= \frac{1}{2k}\mathrm{Tr}(J_{\pm}, J_{\pm})\,, \\
T_{+-} &= T_{-+} = 0\,,
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

με αποτέλεσμα το ίχνος του να μηδενίζεται και οι συνιστώσες του να είναι ολομορφικά διατηρούμενες. Δεδομένου ότι τα ρεύματα ικανοποιούν την Kac-Moody άλγεβρα βρίσκουμε οτι στο κβαντικό επίπεδο οι τρόποι ταλάντωσης Laurent του τανυστή ενέργειας/ορμής ικανοποιούν την άλγεβρα Virassorro (5.7) με

$$
c = \frac{2k \dim \mathfrak{g}}{2k + c_G}\,, \tag{5.21}
$$

όπου c_G ο Casimir της συζυγούς αναπαράστασης $f_c^{ab} f_d^{bc} = c_G \delta^{ad}$. Για τους σκοπούς της διατριβής δεν θα επεκταθούμε περεταίρω στην κβαντική ανάλυση του WZW προτύπου αλλά παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη/στρια στην βιβλιογραφία [65–68].

Η δράση του WZW προτύπου μπορεί να γραφτεί στην οικεία μορφή των μη γραμμικών σ-προτύπων (2.12). Ο κινητικός όρος έχει βρεθεί στην (4.34) και η 3-μορφή H δίνεται ως

$$
\begin{aligned}
H(X) &= -\frac{ik}{24\pi}\mathrm{Tr}(T^A, [T^B, T^C]) L^A \wedge L^B \wedge L^C \\
&= \frac{k}{24\pi} f_{ABC} L^A_\mu L^B_\nu L^C_\rho dX^\mu \wedge dX^\nu \wedge dX^\rho\,.
\end{aligned}
\tag{5.22}
$$

Δεδομένου ότι είναι κλειστή, $dH = 0$, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι είναι και ακριβής

$$
H(X) = dB(X), \quad B(X) = B_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu\,, \tag{5.23}
$$

με $B(X)$ μια 2-μορφή. Η σχέση (5.23) ισχύει μόνο τοπικά. Επιλέγοντας μια 2-μορφή η δράση του WZW προτύπου στο σύστημα συντεταγμένων X^μ γράφεται στην μορφή[1]

$$
S_{WZW,k}(X) = \frac{k}{2\pi}\int_\Sigma d^2\sigma (G_{\mu\nu}(X)\eta^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^b + B_{\mu\nu}(X)\epsilon^{ab}\partial_a X^\mu \partial_b X^\nu)\,, \tag{5.24}
$$

και περιγράφει μια κλειστή χορδή που διαδίδεται σε ένα υπόβαθρο με μετρική $G_{\mu\nu}(X)$ και στρέψη $H_{\mu\nu\rho}(X)$, σε αντίθεση με του χειραλικού που χαρακτηρίζεται μόνο απο την μετρική. Παρακάτω θα υπολογίσουμε τα πεδία υποβάθρου του WZW προτύπου για $G = SU(2)$.

[1] Για τον υπολογισμό του WZ όρο χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα Stokes $\int_M H = \int_\Sigma B$.

Διαλέγουμε την παραμετροποίηση των στοιχείων ομάδας

$$g(\psi,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\psi + i\cos\theta\sin\psi & \sin\psi\sin\theta e^{i\phi} \\ -\sin\psi\sin\theta e^{-i\phi} & \cos\psi - i\cos\theta\sin\psi \end{pmatrix}, \tag{5.25}$$

με τις συντεταγμένες (ψ,θ,ϕ) να ανήκουν στα διαστήματα $\psi \in [0,\pi]$, $\theta \in [0,\pi]$, $\phi \in [0,2\pi]$. Υπολογίζοντας τους πίνακες L^A_μ και χρησιμοποιώντας την σχέση (4.35) βρίσκουμε την μετρική του χώρου

$$ds^2 = \frac{k}{2\pi}(d\psi^2 + \sin^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)) \tag{5.26}$$

που είναι η μετρική της σφαίρας S^3. Στην παραμετροποίηση (5.25) η σφαίρα νοείται ως η συγκόληση S^2 σφαιρών κατά μήκος του διαστήματος ψ. Χρησιμοποιώντας την (5.22) βρίσκουμε ότι η 3-μορφή δίνεται ως

$$H = \frac{k}{\pi}\sin^2\psi\sin\theta d\psi \wedge d\theta \wedge d\phi \tag{5.27}$$

Μια επιλογή βαθμίδας για το Kalb-Ramond πεδίο είναι η

$$B = \frac{k}{2\pi}(\psi - \cos(\psi)\sin(\psi))\sin(\theta)d\theta \wedge d\phi \tag{5.28}$$

Επομένως για την περίπτωση $G = SU(2)$ η δράση (5.24) γράφεται σε συντεταγμένες κώνου φωτός ως εξής

$$\begin{aligned} S_{WZW,k}(\psi,\theta,\phi) = \frac{k}{2\pi}\int_\Sigma d^2\sigma(&\partial_+\psi\partial_-\psi + \sin^2(\psi)(\partial_+\theta\partial_-\theta + \sin^2(\theta)\partial_+\phi\partial_-\phi) \\ &+ (\psi - \cos(\psi)\sin(\psi))(\partial_+\theta\partial_-\phi - \partial_-\theta\partial_+\phi)) \end{aligned} \tag{5.29}$$

5.2.2 β-συνάρτηση

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι λόγω της γεωμετρίας του χειραλικού προτύπου χωρίς στρέψη η βήτα συνάρτηση σε τάξη ενός βρόγχου είναι διάφορη του μηδενός. Συγκεκριμένα, είναι ανάλογη του τανυστή Ricci ο οποίος για πολλαπλότητες ομάδας είναι ανάλογος του τετραγωνικού Casimir .

Στην εργασία [64] ο Witten πρόσθεσε στο χειραλικό πρότυπο τον πλήρως αντισυμμετρικό

WZ όρο (5.9) με μια πολλαπλασιαστική σταθερά a:

$$S_k(g) = -\frac{k}{8\pi}\int_\Sigma d^2\sigma \mathrm{Tr}(g^{-1}\partial_a g, \eta^{ab} g^{-1}\partial_b g) + \frac{ka}{4\pi}\int_M H \tag{5.30}$$

και έδειξε ότι για να είναι κβαντικά σύμμορφο πρέπει $a = 1$. Οι εξισώσεις κίνησης του πρότυπου (5.30) είναι

$$(1+a)\partial_+ L_- + (1-a)\partial_- L_+ = 0\,, \tag{5.31}$$

ή ισοδύναμα

$$(1+a)\partial_- R_+ + (1-a)\partial_+ R_- = 0\,. \tag{5.32}$$

Είναι προφανές ότι για $a = 1$ βρίσκουμε την χειραλικότητα των γεννητόρων της χαρακτηριστικής συμμετρίας του WZW προτύπου (5.17).[2]

5.3 Αναλλοίωτες ΣΘΠ κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας

Σημαντική είναι η κατασκευή ΣΘΠ, βάση του WZW προτύπου, αναλλοίωτων κάτω από μετασχηματισμούς βαθμίδας. Προς αυτή την κατεύθυνση θεωρούμε την δράση [70],

$$\begin{aligned} S_k(g, A^L, A^R) = S_k(g) &+ \frac{k}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(J_+, A^L_-) - \mathrm{Tr}(J_-, A^R_+) + \mathrm{Tr}(A^L_-, DA^R_+) \\ &- \frac{k}{2\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A^L_+, A^L_-) + \mathrm{Tr}(A^R_+ . A^R_-)\,, \end{aligned} \tag{5.34}$$

όπου εισαγάγαμε τα πεδία $A^L_\pm$, $A^R_\pm$ τα οποία εν γένει ανήκουν σε άλγεβρες διαφορετικών υποομάδων H_L, H_R της G. Κάτω από τον μετασχηματισμό

$$g \mapsto h_L^{-1}(\sigma_+, \sigma_-) g h_R(\sigma_+, \sigma_-) \tag{5.35}$$

και απαιτώντας

$$A^R_\pm = h_R^{-1} A^R_\pm h_R - h_R^{-1}\partial_\pm h_R, \quad A^L_\pm = h_L^{-1} A^L_\pm h_L - h_L^{-1}\partial_\pm h_L\,, \tag{5.36}$$

[2]Παρόλο που το πρότυπο (5.30) δεν είναι σύμμορφο είναι ολοκληρώσιμο, με το ζεύγος Lax να δίνεται ως

$$\mathcal{J}_\pm = \frac{z}{z \mp 1}(1 \mp a) L_\pm\,. \tag{5.33}$$

Είναι προφανές ότι παρεμβάλεται μεταξύ του Χειραλικού για $a = 0$ και του WZW για $a = 1$, και είναι γνωστό ως το Χειραλικό-WZ πρότυπο. Για τα άπειρα διατηρούμενα φορτία, τοπικά και μη τοπικά, παραπέμπουμε στην εργασία [69] η δράση (5.34) μετασχηματίζεται ως

$$\begin{aligned}\Delta S = S_{WZ}(h_L^{-1}) - S_{WZ}(h_R) - \frac{k}{2\pi}\int \mathrm{Tr}(A_+^R, \partial_- h_R h_R^{-1}) - \mathrm{Tr}(A_+^L, \partial_- h_L h_L^{-1}) \\ - \frac{k}{2\pi}\int \mathrm{Tr}(A_-^L, \partial_+ h_L h_L^{-1}) - \mathrm{Tr}(A_-^R, \partial_+ h_R h_R^{-1})\end{aligned} \tag{5.37}$$

Ο παραπάνω όρος μηδενίζεται μόνο υπό προυποθέσεις, τις οποίες και θα μελετήσουμε παρακάτω.

5.3.1 Αναλλοιώτητα βαθμίδας

Αρχικά θεωρούμε την περίπτωση $h_L = h_R = h \in H$ και απαιτούμε τον μετασχηματισμό

$$g \mapsto \epsilon_L(h^{-1}) g \epsilon_R(h), \quad h = h(\sigma_+, \sigma_-) \in H\,, \tag{5.38}$$

να αποτελεί συμμετρία της WZW δράσης. Τα $\epsilon_{L,R}$ είναι διαφορετικοί ομοιομορφισμοί ομάδας και αποτελούν εμβαπτίσεις της άλγεβρας $\mathfrak{h}$ στην άλγεβρα $\mathfrak{g}$. Σε αυτήν την περίπτωση, οι συνθήκες μηδενισμού του όρου (5.37), γνωστου στην βιβλιογραφία και ως ανωμαλίας [71], είναι

$$\mathrm{Tr}(\epsilon_L(T^a), \epsilon_L(T^b)) = \mathrm{Tr}(\epsilon_R(T^a), \epsilon_R(T^b))\,, \tag{5.39}$$

όπου T^a με $a = 1, \ldots \dim H$, οι γεννήτορες της άλγεβρας $\mathfrak{h}$. Οι WZ όροι στην (5.37) ακυρώνονται χρησιμοποιώντας την (5.39) και την ιδιότητα του ομοιομορφισμού ομάδας. Επομένως η αναλλοίωτη δράση κάτω απο τον μετασχηματισμό βαθμίδας (5.36),(5.38) γράφεται ως εξής[3]

$$\begin{aligned}S_k(g, \epsilon_{L,R}(A)) = S_k(g) + \frac{k}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(J_+, \epsilon_L(A_-)) - \mathrm{Tr}(J_-, \epsilon_R(A_+)) \\ + \mathrm{Tr}(\epsilon_L(A_-), D_g \epsilon_R(A_+)) - \mathrm{Tr}(\epsilon_R(A_+), \epsilon_R(A_-))\,.\end{aligned} \tag{5.40}$$

5.3.2 Διαγώνια βαθμίδα

Η πιο γνωστή και μελετημένη συμμετρία βαθμίδας είναι η διαγώνια ή διανυσματική βαθμίδα, όπου οι ϵ_L, ϵ_R εμβαπτίσεις της άλγβερας $\mathfrak{h}$ συμπίπτουν. Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε

[3] Ο τελευταίος όρος στην (5.40) μπορεί να γραφτεί και ως $\mathrm{Tr}(\epsilon_L(A_+), \epsilon_L(A_-))$ δεδομένης της σχέσης (5.39).

να ολοκληρώσουμε τα πεδία βαθμίδας μέσω των εξισώσεων κίνησης τους, οι οποίες είναι αλγεβρικές εξισώσεις

$$A_+ = (1 - D_g)^{-1} J_+ , \quad A_- = (1 - D_g^T)^{-1} J_- , \quad A_\pm \in \mathfrak{h} \, , \tag{5.41}$$

και καταλήγουμε στην ενεργό δράση η οποία δίνεται ως

$$S_k(g) = S_k(g) - \frac{k}{\pi} \int_\Sigma \mathrm{Tr}(J_- , (1 - D_g)^{-1} J_+)_\mathfrak{h} \, . \tag{5.42}$$

Σε αυτό το σημείο να επισημάνουμε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει για το όριο των μεγάλων k, αφού η ολοκλήρωση των πεδίων στο ολοκλήρωμα δρόμου παράγει $1/k$ διορθώσεις [75–77]. Επιπλέον προκύπτει το διαστελόνιο

$$e^{-2\Phi} = e^{-2\Phi_0} \det(1 - D_g^T) \, . \tag{5.43}$$

Δεδομένης της συμμετρίας βαθμίδας και της διάστασης της υποομάδας H που αναβαθμίζουμε σε τοπική, οι βαθμοί ελευθερίας του υποβάθρου του πρότυπου (5.42) είναι $\dim G - \dim H$. Ενδιαφέροντα παραδείγματα της (5.42) είναι τα $SU(2)/U(1)$ και $SL(2\mathbb{R})/U(1)$ των οποίων οι γεωμετρίες περιγράφονται στις [78, 79] και στις [80, 81].

Η (5.40), για την περίπτωση $\epsilon_L = \epsilon_R$, γράφεται σε μορφή όπου η συμμετρία βαθμίδας είναι προφανής. Παραμετροποιώντας τα πεδία $A_\pm \in \mathfrak{h}$ με τα στοιχεία ομάδας $h_\pm \in H$ ως

$$A_\pm = \partial_\pm h_\pm h_\pm^{-1} \tag{5.44}$$

και χρησιμοποιώντας την Polyakov-Weigmann ταυτότητα η δράση (5.40) γράφεται ως

$$S_k(g, h_\pm) = S_k(\tilde{g}) - S_k(\tilde{h}) \, , \tag{5.45}$$

όπου $\tilde{g} = h_-^{-1} g h_+$ και $\tilde{h} = h_-^{-1} h_+$. Είναι προφανές ότι οι μετασχηματισμοί βαθμίδας, με την παραμετροποίηση (5.44), δίνονται ως

$$g \mapsto L^{-1} g L , \quad h_\pm \mapsto L h_\pm , \quad h = h(\sigma_+, \sigma_-) \in H \, , \tag{5.46}$$

με αποτέλεσμα τα στοιχεία $\tilde{g}, \tilde{h}$ να παραμένουν αναλλοίωτα. Η δράση (5.45) περιγράφει μια σύμμορφη θεωρία πεδίου G/H [72–74] με τανυστή ενέργειας/ορμής

$$T^{G/H} = T^G - T^H \, , \tag{5.47}$$

του οποίου οι τρόποι ταλάντωσης Laurent ικανοποιούν την Virassoro άλγβερα με κεντρικό φορτίο[4]

$$c^{G/H} = \frac{2k \dim G}{2k + c_G} - \frac{2k_H \dim H}{2k_H + c_H}\,. \tag{5.48}$$

Τέλος να αναφέρουμε δύο διαφορετικές επεκτάσεις της διαγώνιας βαθμίδας. Για την περίπτωση όπου η H ειναί αβελιανή και $\epsilon_L = -\epsilon_R$ με ϵ_L τον ταυτοτικό τελεστή, η βαθμίδα συμμετρίας καλείται συμμετρία αξονικής βαθμίδας [82–84], ενώ η περίπτωση όπου $\epsilon_R = \Omega\epsilon_L$, όπου Ω ένας αυτομορφισμός της Lie άλγεβρας που διατηρεί την μετρική, η βαθμίδα καλείται ασσύμμετρη βαθμίδα [85].

5.3.3 Ασύμμετρες βαθμώσεις

Παρακάτω παρουσιάζουμε περιληπτικά τις ΣΘΠ σε ασύμμετρους χώρους πηλίκου [86].[5]Θα υποθέσουμε ότι οι προηγούμενες ομάδες G και H γράφονται ως γινόμενα $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ και $H = H_1 \times H_2 \times \cdots \times H_r$. Στο κάθε WZW πρότυπο αντιστοιχίζουμε ένα διαφορετικό επίπεδο k_i, τα οποία θα οργανώσουμε σε ένα διάνυσμα $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Στόχος μας είναι η κατασκευή μιας δράσης που συζευγνύει τα n WZW πρότυπα με τρόπο αναλλοίωτο κάτω από τον μετασχηματισμό

$$g \mapsto \epsilon_L(h^{-1}) g \epsilon_R(h), \quad g \in G\,,\, h \in H\,. \tag{5.49}$$

όπου $g = (g_1, g_2, \ldots g_n)$ και $h = (h_1, h_2, \ldots h_r)$. Ο κάθε ομοιομορφισμός ϵ_L, ϵ_R είναι ένας πίνακας $n \times r$ με στοιχεία ϵ^{si} που ορίζονται ως $\epsilon^{si} : H_s \to G_i$ με $s = 1, \ldots, r$ και $i = 1, \ldots, n$. Η αναλλοίωτη δράση κάτω απο τον μετασχηματισμό (5.49) δίνεται ως

$$S^{G/H} = \sum_{i=1}^{n} S_{WZW,k_i}(g_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{s=1}^{r} S^{si}\,, \tag{5.50}$$

με

$$\begin{aligned} S^{si} = \frac{k_i}{2I_i\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}_i\Big(&\epsilon_L(A^s_-)\partial_+ g_i g_i^{-1} - \epsilon_R(A^s_+) g_i^{-1}\partial_- g_i + \epsilon_L(A^s_-) D_{g_i}\epsilon_R(A^s_+) \\ &- \frac{1}{2}\epsilon_L(A^s_-)\epsilon_L(A^s_+) - \frac{1}{2}\epsilon_R(A^s_-)\epsilon_R(A^s_+)\Big)\,, \end{aligned} \tag{5.51}$$

[4] $k_H = x_H k$ όπου x_H είναι ο δείκτης εμβάπτισης της άλγβερας $\mathfrak{h}$ στην $\mathfrak{g}$ και δίνεται στην (5.54).
[5] Η ιδέα της ασύμμετρης βάθμωσης ενός γινομένου WZW προτύπων παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στην [87].

όπου I_i ο δείκτης Dynkin, δες παράρτημα B, και τα πεδία βαθμίδας απαιτούμε να μετασχηματίζονται ως

$$A_{\pm}^{s} \mapsto h_s^{-1}(A_{\pm}^{s} - \partial_{\pm})h_s\,, \quad s = 1, \ldots, r\,. \tag{5.52}$$

Η συνθήκη μηδενισμού της ανωμαλίας της (5.50) κάτω από τους μετασχηματισμούς (5.49), (5.52) γράφεται ως

$$x_L k = x_R k \tag{5.53}$$

και αποτελεί γενίκευση της (5.39). Τα x_L, x_R είναι $s \times i$ πίνακες που τα στοιχεία τους είναι οι δείκτες εμβάπτισης της εκάστοτε άλγεβρας $\mathfrak{h}_s$ στην άλγβερα $\mathfrak{g}_i$ και δίνονται από την έκφραση

$$x^{si} = \frac{I_s}{I_i}\frac{\mathrm{Tr}_i(R_i\epsilon^{si}(X), R_i\epsilon^{si}(Y))}{\mathrm{Tr}_s(R_s(X), R_s(Y))}, \quad X, Y \in \mathfrak{h}_s\,, \tag{5.54}$$

με R_i, R_s συγκεκριμένες αναπαράστασεις της $\mathfrak{g}_i$ και $\mathfrak{h}_s$ αντίστοιχα. Στην περίπτωση που ισχύει η (5.54) η δράση (5.50) περιγράφει πρότυπα ορισμένα σε ασύμμετρους χώρους πηλίκου. Το υπόβαθρο Nappi-Witten [88] και το πρότυπο GMM [89, 90] μπορούν να περιγραφούν μέσω αυτού του φορμαλισμού.

Συγκεκριμένα τα στοιχεία του προτύπου GMM είναι $G = G_1 \times G_2$ και H μια κοινή τους υποομάδα. Για να το περιγράψουμε στον παραπάνω φορμαλισμό θα πρεπει να προσδιορίσουμε την δράση (5.49). Ο ϵ_L ομοιομορφισμός εμβαπτίζει την H στην G_2 ενώ ο ϵ_R την H στην G_1. Συγκεκριμένα

$$\epsilon_L = \mathbb{1} \times \epsilon_{12}, \quad \epsilon_R = \epsilon_{11} \times \mathbb{1}\,. \tag{5.55}$$

Χρησιμοποιώντας την (5.55) μπορούμε να προσδιορίσουμε την δράση του προτύπου με την συνθήκη μηδενισμού της ανωμαλίας (5.54) να γράφεται ως

$$k_1 x^{11} = k_2 x^{22} = k\,. \tag{5.56}$$

Εκτενής ανάλυση του GMM προτύπου [86] έδειξε ότι αποτελεί μια ΣΘΠ με χαρακτηριστική συμμετρία την

$$\left(\frac{G_{k_1}}{H_k} \times G_{k_2}\right)_L \otimes \left(\frac{G_{k_2}}{H_k} \times G_{k_1}\right)_R\,, \tag{5.57}$$

και ο τανυστής ενέργειας/ορμής του επιδέχεται την κατασκευή GKO

$$\begin{aligned} T(z) &= T_{k_1}^{G_1} + T_{k_2}^{G_2} - T_{x_2 k_2}^{H} \\ \bar{T}(\bar{z}) &= \bar{T}_{k_1}^{G_1} + \bar{T}_{k_2}^{G_2} - \bar{T}_{x_1 k_1}^{H}\,, \end{aligned} \tag{5.58}$$

με τα $T_{k_1}^{G_1}$ και $\bar{T}_{k_2}^{G_2}$ να γράφονται συναρτήσει των ρευμάτων που ικανοποιούν τις Kac-Moody άλγβερες στην (5.57). Εξαιτίας της σχέσης (5.56) το κεντρικό φορτίο του ολομορφικού και αντιολομορφικού τομέα είναι το ίδιο. Τέλος να αναφέρουμε ότι για την περίπτωση που $G_1 = G_2 = SU(2)$ και $H = U(1)$ το εν λόγω πρότυπο περιγράφει μια κλάση $T^{p,q}$ υποβάθρων [91].

Κεφάλαιο 6

D-βράνες σε σ-πρότυπα

6.1 Σύμμορφες συνοριακές συνθήκες

Έως τώρα η ανάλυση μας περιορίστηκε σε σ-πρότυπα με την δισδιάστατη επιφάνεια Σ χωρίς σύνορο. Από την οπτική της χορδής μια τέτοια επιφάνεια σαρώνεται όταν είναι κλειστή. Στην αντίθετη περίπτωση, δηλαδή όταν είναι ανοιχτή, με την χωρική της συντεταγμένη να ανήκει στο διάστημα $\sigma \in [0, \pi]$, η δισδιάστατη επιφάνεια που σαρώνεται έχει σύνορο $\partial\Sigma \neq 0$ και η δυναμική της εξαρτάται απο τις συνοριακές συνθήκες (σ.σ.) που θα επιβάλουμε.

Η ομάδα συμμετρίας που χαρακτηρίζει μια σύμμορφη θεωρία πεδίου είναι δύο αντίγραφα της Virassoro άλγεβρας. Στην περίπτωση που ο χώρος έχει σύνορο, οι συνοριακές συνθήκες που επιβάλουμε οδηγούν στην μείωση ή και μη διατήρηση της, όπως στην περίπτωση (3.6). Είναι σημαντικό οι συνοριακές συνθήκες που διαλέγουμε να διατηρούν μια αρκετά μεγάλη υποομάδα της αρχικής ομάδας συμμετρίας έτσι ώστε η σύμμορφη συμμετρία να διατηρείται. Αυτό εξασφαλίζεται από τις συνθήκες

$$T_{++}|_{\partial\Sigma} = T_{--}|_{\partial\Sigma}\,, \tag{6.1}$$

όπου $|_{\partial\Sigma}$ υποδηλώνει ότι τα πεδία είναι υπολογισμένα στο σύνορο της επιφάνειας Σ. Οι σ.σ. (6.1) καλούνται σύμμορφες και μειώνουν την αρχική ομάδα συμμετρίας, $\mathbf{Virr}_c \oplus \mathbf{Virr}_{\bar{c}}$ σε ένα αντίγραφο. Η (6.1), για μια γενική θεωρία πεδίου, είναι ισοδύναμη με την απαίτηση μηδενικής ροής ορμής από το σύνορο, $T_{++}|_{\partial\Sigma} = T_{--}|_{\partial\Sigma} \rightarrow T_{\tau\sigma}|_{\partial\Sigma} = 0$.

6.2 D-βράνες στο WZW πρότυπο

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση μας με την θεώρηση συνόρου στο WZW πρότυπο. Οι σύμμορφες βράνες που θα μελετήσουμε μπορούν να κατασκευαστούν με την μέθοδο των συνοριακών καταστάσεων [65, 92–99]. Για τους σκοπούς της διατριβής όμως, θα παρουσιάσουμε την γεωμετρική τους περιγραφή. Συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε δύο τρόπους πλήρους προσδιορισμού της βράνης. Τον αλγεβρικό, όπου θα επιλύσουμε τις συνοριακές συνθήκες αναγνωρίζοντας τις (D) και (N) συνοριακές συνθήκες για γενική ομάδα G και την προσέγγιση σ-προτύπου, όπου θα υποθέσουμε μια γεωμετρία για την βράνη και θα βρούμε τις συνοριακές συνθήκες στις οποίες αυτή αντιστοιχεί.

Αρχικά θα μελετήσουμε τις μέγιστα συμμετρικές βράνες για το WZW πρότυπο,[1] οι οποίες είναι οι γνωστές κλάσεις συζυγίας της ομάδας G. Έπειτα θα περιγράψουμε τις βράνες εναλλαγής και γενικευμένες βράνες εναλλαγής σε ένα γινόμενο $G_k \times G_k$ και $G_{k_1} \times G_{k_2}$ ΣΘΠ αντίστοιχα. Οι πρώτες είναι μέγιστα συμμετρικές, εφόσον διατηρούν την υποομάδα που ορίζεται από τους μετασχηματισμούς

$$(g_1, g_2)|_{\partial\Sigma} \mapsto (k_1 g_1\,, g_2 k_1^{-1}), \quad (g_1, g_2)|_{\partial\Sigma} \mapsto (g_1 k_2^{-1}\,, k_2 g_2)|_{\partial\Sigma}\,, \tag{6.2}$$

στο σύνορο. Οι δεύτερες δεν αποτελούν μέγιστα συμμετρικές βράνες, αλλά διατηρούν την συμμετρία

$$(g_1, g_2)|_{\partial\Sigma} \mapsto (k g_1 k^{-1}, k g_2 k^{-1})|_{\partial\Sigma}\,. \tag{6.3}$$

του προτύπου, με αποτέλεσμα τα δύο αντίγραφα της $\hat{\mathfrak{g}}_{k_1} \oplus \hat{\mathfrak{g}}_{k_2}$ άλγερβας να μειώνονται στην $\hat{\mathfrak{g}}_{k_1+k_2}$ στο σύνορο.

6.2.1 Επίλυση των συνοριακών συνθηκών

Για την επίλυση των συνοριακών συνθηκών θα ακολουθήσουμε τις εργασίες [100–104]. Έχουμε δείξει παραπάνω ότι η δυναμική του WZW προτύπου προσδιορίζεται από τα χειραλικά ρεύματα $J_\pm$. Επομένως είναι φυσικό να υποθέσουμε συνοριακές συνθήκες της μορφής

$$J_+ = \Omega(J_-) \tag{6.4}$$

[1] Καλούνται μέγιστα συμμετρικές διότι πέρα από το ένα αντίγραφο της Virrasoro άλγβερας διατηρούν και ένα αντίγραφο της $\hat{\mathfrak{g}}_k$ άλγεβρας.

όπου Ω ένας γραμμικός αντιστρέψιμος πίνακας $\Omega : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ του οποίου τα στοιχεία ορίζονται ως $\Omega(T^a) = \Omega^a_b T^b$. Δεδομένης της κατασκευής Sugawara του τανυστή ενέργεια/ορμής και της απαίτησης (6.1), βρίσκουμε $\Omega^T \Omega = \mathbb{1}$. Δεν είναι υποχρεωτικό για την διατήρηση της σύμμορφης συμμετρίας του προτύπου, αλλά απαιτούμε επιπλέον οι συνθήκες (6.4) να διατηρούν την άλγεβρα $\hat{\mathfrak{g}}_k$. Σε αυτήν την περίπτωση ο πίνακας Ω είναι ένας αυτομορφισμός της άλγεβρας,

$$[\Omega(T^A), \Omega(T^B)] = \Omega([T^A, T^B])\,, \tag{6.5}$$

δηλαδή διατηρεί τις σταθερές δομής της, f^{ABC}. Οι συνοριακές συνθήκες (6.4) είναι ορισμένες στην άλγεβρα της ομάδας G. Για να τις επεκτείνουμε σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας παρατηρούμε ότι γράφονται ως

$$\partial_+ g = \Omega(g)(\partial_- g)\,, \tag{6.6}$$

όπου $\Omega(g)(X) = -\Omega(g^{-1}X)g$ με $X \in T_g G$. Όπως προαναφέραμε στο υποκεφάλαιο 3.2 οι (D), (N) κατευθύνσεις προσδιορίζονται απο τις ιδιοτιμές και τα ιδιοανύσματα του πίνακα $\Omega(g)$. Συγκεκριμένα, οι (D) αντιστοιχούν στα ιδιοανύσματα με ιδιοτιμή -1 ενώ οι (N) στα υπόλοιπα. Αναλυτική μελέτη της λύσης της (6.6), που βασίζεται στον διαχωρισμό της στον χώρο παράλληλο και κάθετο στην βράνη, καταλήγει σε βράνες που περιγράφονται από τις στραμμένες κλάσεις συζυγίας της ομάδας G

$$\mathcal{C}^\omega_f = \{\omega(h) f h^{-1} | \forall h \in G\}\,, \tag{6.7}$$

όπου f είναι ένα σταθερό στοιχείο του Cartan τόρου, $\mathcal{T}(G)$.

Οι συνοριακές συνθήκες (6.4) γράφονται στην οικεία μορφή (3.13), παραμετροποιώντας τα στοιχεία ομάδας g με τις συντεταγμένες X^μ. Σε αυτή την περίπτωση οι (6.6) γράφονται ως

$$\partial_+ X^\mu = \Omega(X)^\mu{}_\nu \partial_- X^\nu\,, \tag{6.8}$$

όπου $\Omega(X)^\mu_\nu = -(R^{-1}\Omega L)^\mu_\nu$. Αλλάζοντας στις κανονικές συντεταγμένες (τ, σ) και λαμβάνοντας υπόψη τον διαχωρισμό σε χώρο κάθετο και παράλληλο στην βράνη οι (6.8) παίρνουν την μορφή

$$\begin{aligned}
(\mathbb{1} + \Omega(X))\partial_\sigma X^{||} &= (\mathbb{1} - \Omega(X))\partial_\tau X^{||}\,,\\
(\mathbb{1} + \Omega(X))\partial_\sigma X^{\perp} &= (\mathbb{1} - \Omega(X))\partial_\tau X^{\perp}\,.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

Σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση $\Omega(X)^{\perp} = -\mathbb{1}$ και καταλήγουμε στις (D) συνοριακές συνθήκες

$$\partial_\tau X^{\perp} = 0 \tag{6.10}$$

Στρέφοντας την προσοχή μας προς τις συντεταγμένες παράλληλες στις κλάσεις συζυγίας, παρατηρούμε ότι ο πίνακας $(1+\Omega(X))^{||}$ είναι αντιστρέψιμος και βρίσκουμε ότι οι (N) συνοριακές συνθήκες είναι της μορφής

$$\partial_\sigma X^{||} = \frac{1-\Omega(X)}{1+\Omega(X)}\partial_\tau X^{||}\,, \tag{6.11}$$

από όπου προσδιορίζουμε την 2-μορφή στο εσωτερικό της D-βράνης.

Ως παράδειγμα θα παρουσιάσουμε τις σχέσεις (6.9), (6.11) για $\Omega = \mathbb{1}$ και για την $G = SU(2)$, όπου ο χώρος υποβάθρου είναι ο S^3. Διαλέγουμε την παραμετροποίηση (5.25). Σε αυτήν την περίπτωση βρίσκουμε

$$\Omega(X) = R^{-1}L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos 2\psi & -\sin\theta\sin 2\psi \\ 0 & \sin 2\psi\csc\theta & -\cos 2\psi \end{pmatrix} \tag{6.12}$$

Από την μορφή του πίνακα συμπερένουμε ότι έχουμε πάντα μια D κατεύθυνση κατά μήκος της ψ συντεταγμένης, σε συμφωνία με την γεωμετρία (6.7) για $\Omega = \mathbb{1}$.[2] Διαφορετικά, οι D-βράνες που περιγράφονται από τον πίνακα (6.12) είναι ομόκεντρες S^2 σφαίρες γύρω από σταθερά σημεία στην ψ-συντεταγμένη (κλάσεις συζυγίας της $SU(2)$) με επαγόμενη μετρική

$$d\hat{s}^2 = \frac{k}{2\pi}\sin^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad \psi = \text{σταθ}\,. \tag{6.14}$$

Τέλος χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.11), (6.12) και την μετρική (6.14) μπορούμε να εξάγουμε την 2-μορφή

$$\omega = -\frac{k}{4\pi}\sin 2\psi\sin\theta d\theta\wedge d\phi\,. \tag{6.15}$$

Γνωρίζοντας τα πεδία (6.14), (6.15) μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια των παραπάνω

[2]Από την εξίσωση (6.7) και χρησιμοποιώντας την παραμετροποίηση (5.25) βρίσκουμε ότι κάθε σημείο της βράνης ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathrm{Tr}(g|_{\partial\Sigma}) = \mathrm{Tr}(f) = 2\cos(\psi) = \text{σταθ}. \tag{6.13}$$

βρανών χρησιμοποιώντας την DBI δράση (3.15)

$$S_{DBI}(\psi) = \int_{\mathcal{C}\psi} \sqrt{\det(\hat{g} + \hat{\omega})} = 2k \sin\psi\,. \tag{6.16}$$

Από την σχέση (6.16) συμπεραίνουμε ότι η ενέργεια ελαχιστοποιείται για $\psi = 0, \pi$, δηλαδή για τις σημειακές βράνες. Παρακάτω θα αποδείξουμε ότι υπάρχουν επιπλέον σημεία όπου μπορούν να οριστούν σταθερές βράνες μεγαλύτερης διάστασης.

6.2.2 Προσσέγγιση σ-προτύπου

Σε αυτό το σημείο θα αναλύσουμε την προσέγγιση του σ-προτύπου για τον προσδιορισμό της γεωμετρίας των D-βρανών [102,105–107], η οποία βασίζεται στην αντίστροφη διαδικασία σε σχέση με την αλγεβρική που παρουσιάσαμε προηγουμένως. Θα επικεντρωθούμε στην περίπτωση που ο πίνακας Ω δρα τετριμμένα, ενώ η μη τετριμμένη περίπτωση έχει συμπεριληφθεί στα παραρτήματα. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι η γεωμετρία $\mathcal{C}_f^{\omega=1} \equiv \mathcal{C}_f$ με την κατάλληλη 2-μορφή, η οποία θα προσδιοριστεί από απαιτήσεις μαθηματικής συνέπειας της δράσης παρουσία συνόρου, αντιστοιχεί στις σ.σ. (6.4). Επιπλέον θα βρούμε την μειωμένη χαρακτηριστική συμμετρία του WZW προτύπου και τέλος θα δείξουμε ότι λόγω τοπολογικών επιχειρημάτων οι επιτρεπτές θέσεις των D-βρανών είναι κβαντισμένες.

Στην περίπτωση που η επιφάνεια Σ έχει σύνορο, ο WZ όρος δεν μπορεί να οριστεί, δεδομένου ότι δεν υπάρχει χώρος M με σύνορο το Σ όταν το τελευταίο έχει σύνορο. Για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα επεκτείνουμε τον χάρτη g σε ένα $\tilde{g}$ που ορίζεται ως

$$\tilde{g} : \Sigma' = \Sigma \cup D \to G\,, \tag{6.17}$$

με D μοναδιαίο δίσκο έτσι ώστε $\partial\Sigma' = 0$ και $\tilde{g}(D) \subset \mathcal{C}_f$. Ισχύει ότι $\partial D = -\partial\Sigma$ (το πρόσημο υποδεικνύει την φορά διαγραφής της καμπύλης). Ταυτόχρονα, η δράση πρέπει να είναι αναλλοίωτη κάτω από συνεχείς παραμορφώσεις του δίσκου μέσα στην κλάση συζυγίας, εφόσον έχουμε απαιτήσει συνοριακές συνθήκες. Για να το πετύχουμε αυτό η WZW δράση τροποποιείται με την προσθήκη ενός επιπλέον όρου επί του δίσκου D

$$S_k = \frac{1}{\pi}\int_\Sigma L_k(g) + \frac{1}{\pi}\int_M H_{WZ} - \frac{1}{\pi}\int_D \omega\,. \tag{6.18}$$

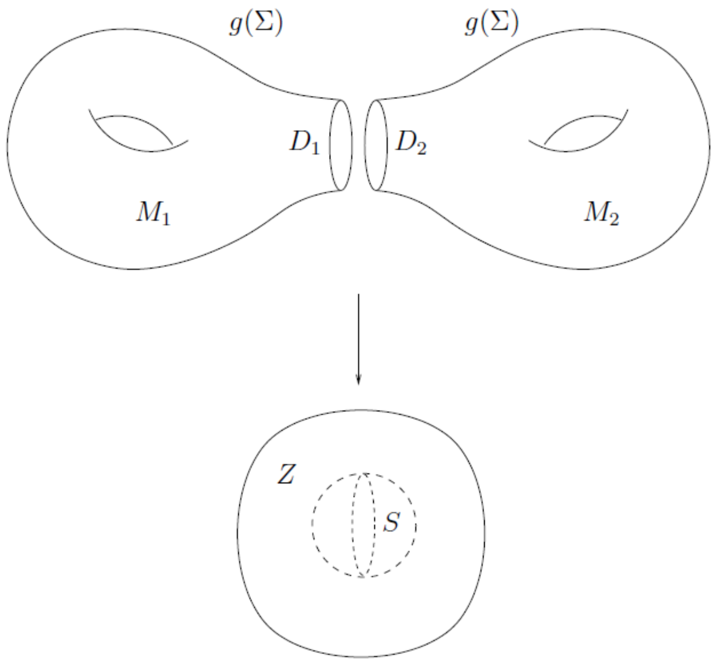
Ο χώρος M έχει σύνορο την κλειστή επιφάνεια Σ', $\partial M = \Sigma'$, και η 2-μορφή ω ορίζεται στην βράνη και ικανοποιεί την σχέση [108]

$$H|_{\mathcal{C}_f} = d\omega\,. \tag{6.19}$$

Για να οριστεί ο WZ όρος θα πρέπει να επεκτείνουμε το $\tilde{g}$ σε $\tilde{g}' : M \to G$ ετσι ώστε $\tilde{g}'|_{\partial M} = \tilde{g}$, με αποτέλεσμα η δράση (6.18) να εξαρτάται απο διαφορετικές επιλογές του εσωτερικού χωρίου που καταλήγουν στο ίδιο σύνορο. Η διαφορά των δράσεων δύο τέτοιων χώρων M_1, M_2 δίνεται από [65, 100, 102, 110]

$$\Delta S = \frac{1}{\pi}\int_Z H_{WZ} - \frac{1}{\pi}\int_S \omega\,, \tag{6.20}$$

όπου $Z = M_1 - M_2$ με $\partial Z = S = D_1 - D_2$ και $\tilde{g}(S) \subset \mathcal{C}_f$, βλ. σχήμα 6.1.



Σχήμα 6.1: Συγκόληση των χώρων M_1 και M_2 κατά μήκος του $g(\Sigma)$ και των D_1 και D_2 κατά μήκος του $g(\partial\Sigma)$.

Όπως και στην περίπτωση του WZW προτύπου χωρίς σύνορο, για να είναι το ολοκλήρωμα διαδρομής καλά ορισμένο πρέπει η (6.20) να είναι ανάλογη του $2\pi\mathbb{Z}$. Αυτή η τοπολογική απαίτηση οδηγεί στην κβάντωση των στοιχείων f άρα και των θέσεων των σταθερών βρανών που δεν εκφυλίζονται σε σημειακές. Συγκεκριμένα, για την περίπτωση της $G = SU(2)$ βρίσκουμε k τέτοιες βράνες στα σημεία [65]

$$f_n = \exp\left(i\psi_n T_3\right), \quad \psi_n = \frac{n\pi}{k}, \quad n = 0, \ldots, k\,, \tag{6.21}$$

εκ των οποίων δύο είναι μηδενικής διάστασης και οι υπόλοιπες $k-1$ είναι S^2-σφαίρες.

Για τον προσδιορισμό της 2-μορφής ω θα χρησιμοποιήσουμε την συνθήκη (6.19) και την γεωμετρία των βρανών που μελετάμαι. Δεδομένης της Polyakov-Weigmann (5.18) ταυτότητας βρίσκουμε ότι [102, 105, 107]

$$\omega = k\mathrm{Tr}(h^{-1}dh \wedge fh^{-1}dhf^{-1})\,, \tag{6.22}$$

η οποία ισοδύναμα γράφεται και ως

$$\omega = k\mathrm{Tr}(g^{-1}dg \wedge (D_g - 1)(D_g + 1)^{-1}g^{-1}dg)\,, \tag{6.23}$$

που συμφωνεί με την 2-μορφή που ορίζεται από τις συνοριακές συνθήκες (6.11).

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το WZW πρότυπο διαθέτει την χειραλική συμμετρία (5.17) με γεννήτορες τα ρεύματα $J_\pm$. Παρουσία των βρανών $\mathcal{C}_f$ διατηρείται στο σύνορο η διαγώνια υποομάδα της, δηλαδή η

$$g \mapsto k_L(\sigma_+)gk_R^{-1}(\sigma_-) \quad \text{με} \quad k_L(\tau)|_{\partial\Sigma} = k_R(\tau)|_{\partial\Sigma}\,. \tag{6.24}$$

Προς απόδειξη της παραπάνω πρότασης, αρχικά παρατηρούμε ότι οι βράνες $\mathcal{C}_f$ παραμένουν αναλλοίωτες κάτω απο τον μετασχηματισμό (6.24):

$$hfh^{-1} \to khfh^{-1}k^{-1} = h'fh'^{-1} \tag{6.25}$$

με $h' = kh$. Η μεταβολή των δύο πρώτων όρων της δράσης (6.18) κάτω από τον μετασχηματισμό (6.24) ισούται με

$$\frac{k}{\pi}\int_D \mathrm{Tr}(k^{-1}dk, D_g k^{-1}dk - g^{-1}dg - dgg^{-1}) \tag{6.26}$$

και ακυρώνεται από την μεταβολή του τρίτου, με αποτέλεσμα η (6.18) να παραμένει αναλλοίωτη.

Τέλος θα βρούμε τις συνοριακές συνθήκες που ικανοποιούν οι βράνες $\mathcal{C}_f$. Μεταβάλλοντας τον κινητικό όρο στην (6.18) βρισκουμε έναν εσωτερικό και έναν συνοριακό όρο

$$\delta S_{\text{κιν.}} = \delta\int_\Sigma L_k(g) = \delta S_{\text{κιν.}}|_\Sigma + \frac{k}{\pi}\int_{\partial\Sigma}\mathrm{Tr}(g^{-1}\delta g, \mathrm{Tr}(g^{-1}\partial_\sigma g))\,. \tag{6.27}$$

Δεδομένης της γεωμετρίας των κλάσεων συζυγίας βρίσκουμε ότι στο σύνορο ισχύουν οι σχέσεις

$$\begin{aligned} g^{-1}\delta g|_{\partial\Sigma} &= (D_g^T - 1)\delta h h^{-1}\,, \\ \delta g g^{-1}|_{\partial\Sigma} &= (1 - D_g)\delta h h^{-1}\,, \end{aligned} \tag{6.28}$$

με αποτέλεσμα η (6.27) να γράφεται ως

$$\delta S_{\text{κιν.}} = \delta S_{\text{κιν.}}|_{\Sigma} + \frac{k}{\pi}\int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta h h^{-1}, \partial_\sigma g g^{-1} - g^{-1}\partial_\sigma g))\,. \tag{6.29}$$

Μεταβάλλοντας τον WZ όρο βρίσκουμε δύο ολοκληρώματα, ένα επί του Σ και ένα επί του D, ενώ μεταβάλλοντας τον τρίτο όρο της δράσης καταλήγουμε στην έκφραση

$$\begin{aligned} \delta S_\omega &= \delta S_\omega|_D - \frac{k}{\pi}\int_{\partial D} \mathrm{Tr}(\delta h h^{-1}, (D_g - D_g^T)\partial_\tau h h^{-1}) \\ &= \delta S_\omega|_D + \frac{k}{\pi}\int_{\partial D} \mathrm{Tr}(\delta h h^{-1}, \partial_\tau g g^{-1} + g^{-1}\partial_\tau g)\,. \end{aligned} \tag{6.30}$$

Συλλέγοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, βρίσκουμε ότι η συνολική συνοριακή συνεισφορά ισούται με[3]

$$\delta S_k|_{\partial\Sigma} = \frac{k}{\pi}\int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta h h^{-1}, \partial_+ g g^{-1} + g^{-1}\partial_- g)\,. \tag{6.31}$$

Είναι προφανές ότι ο μηδενισμός της οδηγεί στις γνωστές σύμμορφες συνοριακές συνθήκες (6.4), αποδεικνύοντας ότι οι κλάσεις συζυγίας με την 2-μορφή (6.22) ορίζουν βράνες που αποτελούν λύση τους.

6.3 Βράνες εναλλαγής

6.3.1 Συμμετρίες και συνοριακές συνθήκες

Προηγουμένως μελετήσαμε τις σύμμορφες βράνες στο WZW πρότυπο. Βρήκαμε ότι περιγράφονται από τις κλάσεις συζυγίας της εκάστοτε ομάδας με μια καλώς ορισμένη 2-μορφή στο εσωτερικό τους. Η προφανής επέκταση της προηγούμενης γεωμετρίας βρανών σε ένα γινομένο WZW προτύπων $G_k \times G_k$ είναι η

$$(g_1, g_2)|_{\partial\Sigma} = (\mathcal{C}_{f_1}, \mathcal{C}_{f_2})\,, \tag{6.32}$$

[3]Οι όροι στο εσωτερικό της δισδιάτατης επιφάνειας δίνουν τις εξισώσεις κίνησης του WZW προτύπου ενώ αυτοί επί του δίσκου αλληλοακυρώνονται.

την οποία χάριν απλότητας θα την συμβολίζουμε με $\mathcal{C}_{f_1f_2}$. Η γεωμετρία (6.32) διατηρεί ένα αντίγραφο της κάθε Kac-Moody άλγεβρας $\hat{\mathfrak{g}}_k$ στο σύνορο, και η μειωμένη συμμετρία του προτύπου παρουσία των βρανών $\mathcal{C}_{f_1f_2}$ είναι η

$$(g_1, g_2)|_{\partial\Sigma} \mapsto (k_1 g_1 k_1^{-1}, k_2 g_2 k_2^{-1})\,. \tag{6.33}$$

Οι συνοριακές συνθήκες που περιγράφουν την γεωμετρία (6.32) είναι οι

$$J_{1+}|_{\partial\Sigma} = J_{1-}|_{\partial\Sigma}\,, \quad J_{2+}|_{\partial\Sigma} = J_{2-}|_{\partial\Sigma}\,. \tag{6.34}$$

Μια διαφορετική κλάση βρανών που μπορεί να οριστεί στο συγκεκριμένο πρότυπο είναι οι βράνες εναλλαγής [103, 113, 114][4]

$$(g_1, g_2)|_{\partial\Sigma} = \{h_1 f_1 h_2^{-1}, h_2 f_1 h_1^{-1} | \forall h_1, h_2 \in G\}\,, \tag{6.35}$$

τις οποίες χάριν απλότητας θα συμβολίζουμε με $\mathcal{C}^{\pi}{}_{f_1f_2}$. Η γεωμετρία (6.35) διατηρεί στο σύνορο την υποομάδα που παράγεται από τον μετασχηματισμό

$$(g_1, g_2)|_{\partial\Sigma} \mapsto (k_1 g_1 k_2^{-1}, k_2 g_2 k_1^{-1}) \tag{6.36}$$

και αντιστοιχεί σε συνοριακές συνθήκες που ταυτίζουν τους γεννήτορες των μετασχηματισμών $G_1(\sigma_+)|_L \times G_2(\sigma_-)|_R$ με τους $G_2(\sigma_-)|_L \times G_1(\sigma_-)|_R$, δηλαδή

$$J_{1+}|_{\partial\Sigma} = J_{2-}|_{\partial\Sigma}\,, \quad J_{2+}|_{\partial\Sigma} = J_{1-}|_{\partial\Sigma}\,. \tag{6.37}$$

Προς απόδειξη της παραπάνω πρότασης θα πρέπει, όπως προηγουμένως, να βρούμε κατάλληλη 2-μορφή που να ικανοποιεί την σχέση (6.19) για την γεωμετρία (6.35). Ένας απλός υπολογισμός δίνει

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2} H_{WZ}(g_i)|_{\mathcal{C}^{\pi}{}_{f_1f_2}} &= \sum_{i=1}^{2} H(h_i) + H(h_i^{-1}) + kd\mathrm{Tr}(h_i^{-1}dh_i \wedge f_i h_{i+1}^{-1} dh_{i+1} f_i^{-1}) \\
&= k\sum_{i+1}^{2} d\mathrm{Tr}(h_i^{-1}dh_i \wedge f_i h_{i+1}^{-1} dh_{i+1} f_i^{-1})\,,
\end{aligned} \tag{6.38}$$

[4]Οι βράνες εναλλαγής μελετήθηκαν αλγεβρικά με την μέθοδο των συνοριακών καταστάσεων στην [112].

όπου ο δείκτης i ορίζεται ως $i = i + 2$. Συνεπώς η επαγόμενη μορφή στο εσωτερικό των βρανών να είναι η [113]

$$\omega = k \sum_{i+1}^{2} \mathrm{Tr}(h_i^{-1} dh_i \wedge f_i h_{i+1}^{-1} dh_{i+1} f_i^{-1})\,. \tag{6.39}$$

Τώρα είμαστε σε θέση να βρούμε τις σ.σ. (6.37). Μεταβάλλοντας τον κινητικό όρο της δράσης του προτύπου και χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες

$$\begin{aligned} g_i^{-1}\delta g_i|_{\partial\Sigma} &= D_i^T \delta h_i h_i^{-1} - \delta h_{i+1} h_{i+1}^{-1}\,, \\ \delta g_i g_i^{-1}|_{\partial\Sigma} &= \delta h_i h_i^{-1} - D_i \delta h_{i+1} h_{i+1}^{-1}\,, \quad i = 1, 2\,, \end{aligned} \tag{6.40}$$

βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{κιν.}}|_{\partial\Sigma} = &\frac{k}{\pi}\int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta h_1 h_1^{-1}, \partial_\sigma g_1 g_1^{-1} - g_2^{-1}\partial_\sigma g_2) \\ &+ \frac{k}{\pi}\int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta h_2 h_2^{-1}, \partial_\sigma g_2 g_2^{-1} - g_1^{-1}\partial_\sigma g_1)\,. \end{aligned} \tag{6.41}$$

Μεταβάλλοντας την 2-μορφή (6.39) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \delta S_\omega|_{\partial D} &= \frac{k}{\pi}\int_{\partial D} \mathrm{Tr}(\delta h_1 h_1^{-1}, (D_2^T - D_1)\partial_\tau h_2 h_2^{-1}) + \mathrm{Tr}(\delta h_2 h_2^{-1}, (D_1^T - D_2)\partial_\tau h_1 h_1^{-1}) \\ &= \frac{k}{\pi}\int_{\partial D} \mathrm{Tr}(\delta h_1 h_1^{-1}, \partial_\tau g_1 g_1^{-1} + g_2^{-1}\partial_\tau g_2) + \mathrm{Tr}(\delta h_2 h_2^{-1}, \partial_\tau g_2 g_2^{-1} + g_1^{-1}\partial_\tau g_1) \end{aligned} \tag{6.42}$$

Τέλος, συνδυάζοντας τις (6.41), (6.42) καταλήγουμε στην συνολική συνοριακή συνεισφορά η οποία είναι η

$$\delta S|_{\partial\Sigma} = \frac{k}{\pi}\int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta h_1 h_1^{-1}, \partial_+ g_1 g_1^{-1} + g_2^{-1}\partial_- g_2) + \mathrm{Tr}(\delta h_2 h_2^{-1}, \partial_+ g_2 g_2^{-1} + g_1^{-1}\partial_- g_1)\,. \tag{6.43}$$

Είναι προφανές ότι ο μηδενισμός της οδηγεί στις σ.σ. (6.37) που αναμέναμε.

6.3.2 Βράνες εναλλαγής στο $SU(2)_k \times SU(2)_k$ πρότυπο

Για γενική πολλαπλότητα ομάδας G οι βράνες εναλλαγής είναι $(d_G + d_{\mathcal{C}_f})$-διάστατες υποπολλαπλότητες, όπου d_G και $d_{\mathcal{C}_f}$ υποδηλώνουν την διάσταση της ομάδας και των κλάσεων συζυγίας αντίστοιχα. Για συγκεκριμένες τιμές των στοιχείων f_1, f_2 έχουν χαμηλότερη διάσταση. Συγκεκριμένα για $f_1 = f_2^{-1}$ ισχυεί $g_1|_{\partial\Sigma} = g_2^{-1}|_{\partial\Sigma}$ στο σύνορο με αποτέλεσμα η βράνη να είναι d_G-διάστατη.

Στην περίπτωση του $SU(2)_k \times SU(2)_k$ WZW προτύπου ο χώρος υποβάθρου ειναι $S^3 \times S^3$ και είναι εξαδιάστατος. Όλα τα σημεία της βράνης ικανοποιούν την σχέση $\mathrm{Tr}(g_1 g_2) = \mathrm{Tr}(f_1 f_2) =$ σταθ. Επιλέγοντας συγκεκριμένη παραμετροποίηση των στοιχείων ομάδας βρισκουμε ότι η προηγούμενη σχέση δίνει για τα σημεία της βράνης [113]

$$\mathrm{Tr}(g_1 g_2) = \cos\theta_1 \cos\theta_2 \cos(\tilde{\phi}_1 + \tilde{\phi}_2) - \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos(\phi_1 + \phi_2) = \sigma\tau\alpha\vartheta\,. \qquad (6.44)$$

Επομένως, για $f_1 \neq f_2^{-1}$ η βράνες εναλλαγής είναι πενταδιάστατες και είναι τοπολογικά ισοδύναμες με την πολλαπλότητα $S^2 \times S^3$. Για $f_1 = f_2^{-1}$ η παραπάνω εξίσωση οδηγεί στις συνθήκες

$$\tilde{\phi}_1 = -\tilde{\phi}_2, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \phi_2 = \phi_1 \pm \pi \qquad (6.45)$$

και η βράνη είναι η S^3-σφαίρα εμβαπτισμένη με τρόπο διαγώνιο και συμμετρκό μεταξύ των δύο $SU(2)$ ομάδων.

6.4 Γενικευμένες βράνες εναλλαγής

Στην περίπτωση ενός $G_{k_1} \times G_{k_2}$ προτύπου οι βράνες εναλλαγής δεν ορίζονται. Πιο συγκεκριμένα, λόγω των διαφορετικών επιπέδων $k_1 \neq k_2$ η 3-μορφή, H_{WZ}, του προτύπου υπολογισμένη στην βράνη (6.35) δεν ικανοποιεί την (6.38). Παρακάτω θα παρουσιάσουμε γενικεύσεις των βρανών (6.35), συνεπείς με την περίπτωση των άνισων επιπέδων [115].

Σε αυτή την κατεύθυνση θεωρούμε την παρακάτω γεωμετρία

$$\mathcal{D}_f^{\pi} = \left\{ \left((h_1 f h_2^{-1})^{k_2'}, (h_2 f h_1^{-1})^{k_1'} \right) = \left({v_1}^{k_1'}, {v_2}^{k_2'} \right) |\forall\, h_1\,,\, h_2 \in G \right\}\,, \qquad (6.46)$$

με $k_i' = k_i/\rho$ όπου $\rho = \mathrm{MK\Delta}(k_1, k_2)$, και $f \in \mathcal{T}(G)$ σταθερό στοιχείο της ομάδας. Προφανώς για την περίπτωση των ίσων επιπέδων $k_1 = k_2$ η γεωμετρία (6.46) καταλήγει στην (6.35). Η εξίσωση (6.46) περιγράφει τις γενικευμένες βράνες εναλλαγής. Η διάσταση τους είναι $(d_G + d_{\mathcal{C}_f})$. Για την περίπτωση $f = e$, όπου e το ταυτοτικό στοιχείο της ομάδας, βρίσκουμε την πιο απλή γεωμετρία

$$\mathcal{D}_e^{\pi} = \left\{ \left(v^{k_2'}, v^{-k_1'} \right) | \, \forall \, v = h_1 h_2^{-1} \in G \right\} , \tag{6.47}$$

και η διάσταση των αντίστοιχων βρανών είναι d_G. Εισαγάγαμε τις δυνάμεις k_i' διότι θέλουμε να βρούμε μια 2-μορφή που να αποτελεί λύση της εξίσωσης (6.19). Όπως αποδείχθηκε στην [115] αυτή δίνεται από

$$\begin{aligned}
\omega = & \frac{k_1' k_2'}{k} \left(\mathrm{Tr}(h_1^{-1} dh_1 \wedge f h_2^{-1} dh_2 f^{-1}) + \mathrm{Tr}(h_2^{-1} dh_2 \wedge f h_1^{-1} dh_1 f^{-1}) \right) \\
& + k_1 \sum_{i=1}^{k_2'-1} (k_2' - i) \mathrm{Tr}(g^i g^{-1} dg g^{-i} \wedge g^{-1} dg)|_{g = h_1 f h_2^{-1}} \\
& + k_2 \sum_{i=1}^{k_1'-1} (k_1' - i) \mathrm{Tr}(g^i g^{-1} dg g^{-i} \wedge g^{-1} dg)|_{g = h_2 f h_1^{-1}} .
\end{aligned} \tag{6.48}$$

Παρακάτω θα δείξουμε ότι οι συνοριακές συνθήκες στις οποίες αντιστοιχεί η γεωμετρία (6.46), συσχετίζουν τον διαγώνιο συνδυασμό των γεννητόρων της κάθε Kac-Moody συμμετρίας. Ο διαγώνιος όμως συνδυασμός τους δεν ικανοποιεί την συνθήκη (6.1). Επομένως φαινομενικά οι γενικευμένες βράνες δεν διατηρούν την σύμμορφη συμμετρία του προτύπου. Παρ΄ όλ΄ αυτά στην εργασία [115] αποδείχθηκε ότι για $G = SU(2)$ αποτελούν λύσεις της DBI δράσης, αποδεικνύοντας έτσι ότι είναι σύμμορφες.[5]

Δεδομένης της γεωμετρίας (6.46) και της επαγόμενης 2-μορφής (6.48) μπορούμε να βρούμε τις συνοριακές συνθήκες στις οποίες αντιστοιχούν. Αυτές υπολογίστηκαν στην [114] και βρέθηκαν

$$k_1 J_{1+} + k_2 J_{2+}|_{\partial\Sigma} = -k_1 J_{1-} - k_2 J_{2-}|_{\partial\Sigma} , \tag{6.49}$$

σε συμφωνία με την συμμετρία (6.3).

Τέλος θα αναλύσουμε την κβάντωση των στοιχείων f στην (6.46). Όπως έχουμε αναφέρει στην περίπτωση του WZW προτύπου, ο WZ όρος εισάγει ασάφειες τοπολογικής φύσεως, οι οποίες για να μην έχουν επίδραση στην θεωρία θα πρέπει να ισχύει

$$\int_{S^3} H_{WZ} - \int_{S^2} \omega_{WZ} \in 2\pi\mathbb{Z} , \tag{6.50}$$

ή διαφορετικά θα πρέπει το πεδίο $F = B - \omega$, με B το Kalb-Ramond πεδίο, να έχει

[5] Για γενική ομάδα αποδείχθηκε στην [116]. Επίσης, έχουν κατασκευαστεί με την μέθοδο των συνοριακών καταστάσεων στην [117].

κβαντισμένη ροή μέσα από οποιαδήποτε S^2-σφαίρα εμβαπτισμένης στην εκάστη βράνη [109]. Στην περίπτωση μας, η βράνη περιγράφεται από μια εμβάπτιση του γινομένου $G \times \mathcal{C}(f^2)$ στον χώρο $G \times G$ ως ακολούθως

$$G \times \mathcal{C}(f^2) \ni (g, c) \mapsto (g^{k_2'}, (cg^{-1})^{k_1'}) \in \mathcal{D}^{\pi}(f)\,. \tag{6.51}$$

Δεδομένου ότι ο μη τετριμμένος 2-κύκλος προέρχεται μόνο από την κλάση συζυγίας μπορούμε να περιοριστούμε στην υποπολλαπλότητα $\{e\} \times \mathcal{C}(f^2)$ της οποίας η εικόνα στο γινόμενο $G \times G$ είναι η $\{e\} \times \mathcal{C}(f^{2k_1'})$. Η 2-μορφή (6.48) ισούται τότε με την 2-μορφή στις κλάσεις συζυγίας για ένα G_{k_2} πρότυπο. Επομένως συμπεραίνουμε ότι οι επιτρεπτές γενικευμένες βράνες είναι ίδιες σε αριθμό με τις μέγιστα συμμετρικές κλάσεις συζυγίας για ένα G_κ πρότυπο, όπου $\kappa = \text{ΕΚΠ}(k_1, k_2) = \rho k_1' k_2'$. Προφανώς η ίδια ανάλυση ισχύει και για τις βράνες εναλλαγής, για τις οποίες βρίσκουμε ότι είναι ίδιες σε αριθμό με τις κλάσεις συζυγίας σε ένα G_k πρότυπο.

6.5 Ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες

Όπως έχουμε δει, στην περίπτωση σύμμορφων θεωριών πεδίου είναι εφικτός ο ορισμός συνοριακών συνθηκών που οδηγούν σε συνεπή υπόβαθρα της θεωρίας χορδών. Η απαίτηση είναι ο ολομορφικός και αντιολομορφικός τομέας του τανυστή ενέργειας/ορμής να ταυτίζονται στο σύνορο. Στην περίπτωση ενός γενικού σ-προτύπου η εύρεση συνεπών συνοριακών συνθηκών με την θεωρία χορδών είναι δυσκολότερη. Παρακάτω περιγράφουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να προσεγγίσουμε το συγκεκριμένο πρόβλημα για ολοκληρώσιμα πρότυπα. Η μέθοδος βασίζεται στις εργασίες [118, 119] και εφαρμόστηκε σε διάφορα παραδείγματα ολοκληρώσιμων θεωριών όπως οι Toda θεωρίες πεδίου [120], το Green-Schwartz σ-πρότυπο [121], το χειραλικό πρότυπο [122], το $O(N)$ σ-πρότυπο [123, 124] και τις ανοιχτές αλυσίδες ιδιοστροφορμής [125, 126].

Στην περίπτωση ενός σ-προτύπου ορισμένου σε μια επιφάνεια Σ με σύνορο, ο μονόδρομος πίνακας (4.8) δεν παράγει διατηρούμενα φορτία. Για τον λόγο αυτό θα τον τροποποιήσουμε κατάλληλα. Ο καινούργιος πίνακας, γνωστός ως συνοριακός μονόδρομος πίνακας $T_b(z)$, γεννά υπό συνθήκες άπειρο αριθμό μη τοπικών διατηρούμενων φορτίων.

Στηριζόμενοι στην μέθοδο των ειδώλων θεωρούμε ένα αντίγραφο της θεωρίας στο πεπερασμένο διάστημα ορισμού της και δρούμε σε αυτό με τον τελεστή ανάκλασης $R : \sigma \to$

$2\pi - \sigma$.[6] Ο συνοριακός μονόδρομος πίνακας ορίζεται ως το γινόμενο του πίνακα μεταφοράς στο διάστημα $\sigma \in [0, \pi]$ με τον ίδιο στην ανακλώμενη περιοχή. Επομένως

$$T_b(z) = T_R^{\Omega}(2\pi, \pi; z) T(\pi, 0; z) \,. \tag{6.52}$$

Ο πίνακας μεταφοράς στην ανακλώμενη περιοχή ορίζεται απο τις ανακλώμενες τιμές του ζεύγους Lax (θα γίνουμε πιο συγκεκριμένοι παρακάτω). Προς χάριν της γενικότητας έχουμε χρησιμοποιήσει τις ανακλώμενες τιμές του γενικευμένου πίνακα μεταφοράς (4.15) στον ορισμό (6.52). Όπως και στην περίπτωση της κλειστής χορδής απαιτούμε ο πίνακας (6.52) να γεννά άπειρο σύνολο διατηρούμενων φορτίων, δηλαδή η χρονική παράγωγος του να γράφεται στην μορφή [7]

$$\partial_\tau T_b(z) = [T_b(z), N(z)] \,, \tag{6.53}$$

για κάποιο πίνακα $N(z)$. Για την ώρα θα υποθέσουμε ότι η δράση της ανακλάσης στον πίνακα μεταφοράς είναι ισοδύναμη με τον αρχικό πίνακα με μετασχηματισμένη φασματική παράμετρο $z_R = f(z)$. Δηλαδή θα υποθέσουμε την ταυτότητα[8]

$$T_R(2\pi, \pi; z) = T(0, \pi; z_R) \,. \tag{6.54}$$

Χρησιμοποιώντας την (6.54) και την σχέση (4.9) βρίσκουμε ότι η χρονική παράγωγος του μονόδρομου πίνακα είναι[9]

$$\begin{aligned} \partial_\tau T_b =& [T^{\Omega}(0, \pi; z_R) \mathcal{L}_\tau^{\Omega}(\pi; z_R) - \mathcal{L}_\tau^{\Omega}(0; z_R) T^{\Omega}(0, \pi; z_R)] T(\pi, 0; z) \\ &+ T^{\Omega}(0, \pi; z_R)[T(\pi, 0; z)\mathcal{L}_\tau(0; z) - \mathcal{L}_\tau(\pi; z) T(\pi, 0; z)] \,. \end{aligned} \tag{6.55}$$

Για την επιλογή $N(z) = \mathcal{L}_\tau(\tau, 0, z_R)$ και απαιτώντας τις συνοριακές συνθήκες

$$\mathcal{L}_\tau(\tau, 0(\pi); z)|_{\partial\Sigma} = \Omega \mathcal{L}_\tau(\tau, 0(\pi); z_R)|_{\partial\Sigma} \tag{6.56}$$

και στα δύο άκρα της χορδής, η σχέση (6.53) ικανοποιείται με αποτέλεσμα οι (6.56) να διατηρούν την ολοκληρωσιμότητα του προτύπου.

Τέλος αναφέρουμε ότι μπορούμε να συμπεριλάβουμε γενικότερους μετασχηματισμούς στον πίνακα μεταφοράς στην ανακλώμενη περιοχή, δεδομένου ότι μπορούμε να βρούμε κατάλληλες

[6] Παρακάτω θα ορίσουμε πιο περίπλοκες δράσεις του τελεστή R.
[7] Θυμίζουμε ότι στην περίπτωση αυτή δυνάμεις του ίχνους του πίνακα $T_b(z)$ διατηρούνται.
[8] Αρκετά από τα μοντέλα που θα μελετήσουμε ικανοποιούν την ταυτότητα (6.54).
[9] Χάριν απλότητας ορίσαμε $T^{\Omega}(z) = \Omega T(z)$

συνοριακές συνθήκες και τον πίνακα $N(z)$ έτσι ωστε η (6.53) να ισχύει. Λόγου χάρη μπορούμε να κατασκευάσουμε τον μονόδρομο πίνακα [183]

$$\begin{aligned} T_b(z) &= T^{g\Omega}(2\pi,\pi;\tilde{\lambda},\tilde{z})T(\pi,0;\lambda,z) \\ &= \omega(g(0))T(0,\pi;\{\tilde{\lambda}_R\},\tilde{z}_R)\omega(g(\pi)^{-1})T(\pi,0;\{\lambda\},z)\,, \end{aligned} \tag{6.57}$$

όπου $\{\lambda\} = (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_N)$ συλλογή κάποιων παραμέτρων, $\{\tilde{\lambda}_R\}$ συνάρτηση των παραμέτρων αυτών και έχουμε συμπεριλάβει και έναν μετασχηματισμό βαθμίδας όπως στην (4.18). Οι ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες σε αυτή την περίπτωση είναι οι

$$\mathcal{L}_\tau(\tau,0(\pi);\{\lambda\},z)|_{\partial\Sigma} = \Omega(g\mathcal{L}_\tau(\tau,0(\pi);\{\lambda_R\},z_R)g^{-1} + \partial_\tau g g^{-1})|_{\partial\Sigma}\,. \tag{6.58}$$

6.5.1 Ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες στο χειραλικό πρότυπο

Παρακάτω θα εφαρμόσουμε την μέθοδο εύρεσης ολοκληρώσιμων συνοριακών συνθηκών στο χειραλικό πρότυπο. Στην περίπτωση αυτή ο τελεστής της ανάκλασης ορίζεται ως $R:\sigma\to 2\pi-\sigma$, με αποτέλεσμα τα πεδία L_τ, L_σ στην (4.27) να μετασχηματίζονται ως

$$L_\tau(\sigma)\to L^R_\tau(\sigma) = L_\tau(2\pi-\sigma), \quad L_\sigma(\sigma)\to L^R_\sigma(\sigma) = -L_\sigma(2\pi-\sigma)\,. \tag{6.59}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.59) και τον ορισμό του ανακλώμενου πίνακα (4.42) βρίσκουμε ότι

$$T^\Omega_R(2\pi,\pi;z) = T^\Omega(0,\pi;-z)\,. \tag{6.60}$$

Από τις σχέσεις (6.55), (6.56) συμπεραίνουμε ότι για να διατηρείται ο μονόδρομος πίνακας πρέπει να απαιτήσουμε τις συνοριακές συνθήκες

$$\mathcal{L}_\tau(z)|_{\partial\Sigma} = \Omega\mathcal{L}_\tau(-z)|_{\partial\Sigma}\,, \tag{6.61}$$

οι οποίες, βάση του ορισμού (4.40), είναι ισοδύναμες με τις

$$L_+|_{\partial\Sigma} = \Omega L_-|_{\partial\Sigma}\,, \quad \Omega^2 = \mathbb{1}\,. \tag{6.62}$$

Ο πίνακας Ω είναι μοναδιακός λόγω αυτοσυνέπειας της (6.61). Επομένως, χωρίζοντας την άλγεβρα $\mathfrak{g}$ ως $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+\oplus\mathfrak{g}_-$, με τους δύο υπόχωρους να αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές $+1$ και

-1 του πίνακα Ω, βρίσκουμε ότι οι συνθήκες (6.62) γράφονται ως

$$\begin{aligned} L_\sigma^a &= 0\,, \quad a \in \mathfrak{g}_+\,, \\ L_\tau^{\hat{a}} &= 0\,, \quad \hat{a} \in \mathfrak{g}_-\,, \end{aligned} \tag{6.63}$$

εκ των οποίων οι πρώτες ορίζουν τις Neumann κατευθύνσεις ενώ οι δεύτερες τις Dirichlet.

Όπως έχουμε αναφέρει στην περίπτωση των ΣΘΠ με σύνορο, κατάλληλες συνοριακές συνθήκες μειώνουν τις αρχικές συμμετρίες τους, αλλά διατηρούν ένα ικανοποιητικό αριθμό τους έτσι ώστε η θεωρία να παραμένει σύμμορφη. Αντίστοιχα, αναμένουμε οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στις ολοκληρώσιμες θεωρίες, να διατηρούν ικανό μέρος των άπειρων τοπικών και μη τοπικών φορτίων έτσι ώστε αυτές να παραμένουν ολοκληρώσιμες. Στην περίπτωση του χειραλικού προτύπου χωρίς σύνορο τα φορτία παρουσιάστηκαν στο υποκεφάλαιο 4.3.3. Το υποσύνολο των μη τοπικών Yangian φορτίων που διατηρείται κάτω από τις ολοκληρώσιμες σ.σ. (6.62) παρουσιάστηκε στην εργασία [122]. Τα τοπικά διατηρούμενα φορτία που επιβιώνουν υπό την παρουσία των ίδιων σ.σ. είναι ακριβώς τα μισά [127, 128], δηλαδή

$$q_s^+ = q_s + q_{-s} \quad \text{ή} \quad q_s^- = q_s - q_{-s}\,. \tag{6.64}$$

Στην ίδια εργασία υπήρξε επίσης η προσπάθεια να συνδεθούν με την διατήρηση της κβαντικής ολοκληρωσιμότητας, δηλαδή της παραγοντοποίησης του S-πίνακα.

Μέρος **II**

Ολοκληρώσιμες παραμορφώσεις και D-βράνες

6.6 Ολοκληρώσιμες παραμορφώσεις

Σημαντικά παραδείγματα ολοκληρώσιμων παραμορφώσεων αποτελούν η η/Yang-Baxter - παραμόρφωση του Χειραλικού προτύπου [132–135], η λ-παραμόρφωση του WZW προτύπου [136–138] και οι $T\bar{T}$-παραμορφώσεις [139, 140]. Ο τελεστής παραμόρφωσης του η-προτύπου $\mathcal{R} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ ικανοποιεί την Yang-Baxter (Y-B) ή την τροποποιημένη Y-B εξίσωση, ενώ το λ-πρότυπο για μικρές τιμές της παραμέτρου παραμόρφωσης περιγράφει το WZW διαταραγμένο από τον διγραμμικό τελεστή των $\hat{\mathfrak{g}}_k$ ρευμάτων, $J_+^A J_-^A$. Τα δύο πρότυπα, αν και φαινομενικά διαφορετικά, σχετίζονται με την γνωστή στην βιβλιογραφία Poisson-Lie δυϊκότητα [141–144][10].

Σε αυτό το κεφάλαιο θα επικεντρωθούμε στις λ-παραμορφώσεις. Για την κατασκευή τους θα ακολουθήσουμε την διαδικασία της βάθμωσης, που επιτρέπει την σύζευξη δυο θεωριών, στην περίπτωση μας μιας σύμμορφης και μιας ολοκληρώσιμης. Η συγκεκριμένη διαδικασία παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στην εργασία [136]. Θα βρούμε τις εξισώσεις ροής της ΟΕ για την σταθερά ζεύξης λ και θα δείξουμε ότι το πρότυπο παρεμβάλεται μεταξύ του WZW προτύπου στο υπεριώδες, $\lambda = 0$, και του μη αβελιανού T-δυικού προτύπου στο υπέρυθρο, $\lambda \to 1$. Ενώ αρχικά η ολοκληρωσιμότητα του προτύπου αποδείχτηκε για την περίπτωση χώρων υποβάθρου ομοιομορφικών σε πολλαπλότητες ομάδας στην συνέχεια επεκτάθηκε και στην περίπτωση συμμετρικών χώρων [137], με σκοπό την παραμόρφωση υπερχορδών που διατηρούν την ολοκληρωσιμότητα. Και στις δύο περιπτώσεις θα εξάγουμε το ζεύγος Lax και θα αναφερθούμε περιληπτικά στην ολοκληρώσιμη δομή τους. Τέλος θα παρουσιάσουμε γενικεύσεις του λ προτύπου οι οποίες βασίζονται σε ολοκληρώσιμα πρότυπα με φυσικό και μαθηματικό ενδιαφέρον.

6.7 λ-παραμορφώσεις σε πολλαπλότητες ομάδας

6.7.1 Κατασκευή της δράσης

Αρχικά θεωρούμε μια θεωρία με $2\dim G$ βαθμούς ελευθερίας που περιγράφεται από την δράση

$$S_{k,\kappa^2}(g,\tilde{g}) = S_{WZW,k}(g) + S_{PCM,\kappa^2}(\tilde{g}) \tag{6.65}$$

[10] Για την εισαγωγή του/της αναγνώστη/στριας στον φορμαλισμό της παραπέμπουμε στις [145, 146] και στις πόλυ χρήσιμες σημειώσεις [149]

και έχει την καθολική $G_L \times G_R$ συμμετρία η οποία ορίζεται ως

$$g \mapsto h_L g h_R^{-1}, \quad \tilde{g} \mapsto k_L \tilde{g} k_R^{-1} . \tag{6.66}$$

Θα μειώσουμε τους συνολικούς βαθμούς ελευθερίας της (6.65) σε $\dim G$, αναβαθμίζοντας την υποομάδα

$$g \mapsto h^{-1} g h, \quad \tilde{g} \mapsto h^{-1} \tilde{g} , \tag{6.67}$$

της συμμετρίας (6.66) σε τοπική. Στα προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάσαμε τις αντίστοιχες τοπικά συμμετρικές δράσεις κάτω απο τους μετασχηματισμούς (6.67), προς χάριν όμως της ευκολίας του/της αναγνώστη/στριας τις ξαναγράφουμε εδώ

$$\begin{aligned} S_k^{G/G}(g, A_\pm) &= S_{WZW,k}(g) + \frac{k}{\pi} \int \mathrm{Tr}(A_- J_+ - A_+ J_- + A_- D_g A_+ - A_+ A_-) , \\ S_{\kappa^2}^{G/G}(g, A_\pm) &= -\frac{\kappa^2}{\pi} \int_\Sigma \mathrm{Tr}(g^{-1}\partial_+ g - A_+, g^{-1}\partial_- g - A_-) , \end{aligned} \tag{6.68}$$

με τα πεδία $A_\pm$ να μετασχηματίζονται ως

$$A_\pm \mapsto h^{-1} A_\pm h - h^{-1} \partial_\pm h . \tag{6.69}$$

Επιλέγοντας την βαθμίδα $\tilde{g} = \mathbb{1}$, δηλαδή μηδενίζοντας τους $\dim G$ βαθμούς ελευθερίας του χειραλικού προτύπου, καταλήγουμε στην δράση

$$S_{k,\lambda}(g, A_\pm) = S_{WZW,k}(g) + \frac{k}{\pi} \int \mathrm{Tr}(A_- J_+ - A_+ J_- + A_-(D_g - \lambda^{-1}\mathbb{1})A_+) , \tag{6.70}$$

όπου ορίσαμε την παράμετρο παραμόρφωσης[11]

$$\lambda = \frac{k}{k+\kappa^2} , \quad \lambda \in [0,1] . \tag{6.71}$$

Δεδομένου ότι τα πεδία εμφανίζονται τετραγωνικά στο ολοκληρωμα διαδρομής είναι απλό να ολοκληρωθούν δίνοντας τις αλγεβρικές εξισώσεις

$$A_+ = \lambda(1 - \lambda D_g)^{-1} J_+, \quad A_- = -\lambda(1 - \lambda D_g^T)^{-1} J_- . \tag{6.72}$$

[11] Αυτή η περίπτωση είναι γνωστή ως το ισοτροπικό λ-πρότυπο. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε επιπλέον περιπτώσεις που είναι ολοκληρώσιμες

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εξισώσεις στην (6.70) καταλήγουμε στην ενεργό δράση του λ-προτύπου [136][12]

$$S_{k,\lambda}(g) = S_{WZW,k}(g) - \frac{k}{\pi}\int \mathrm{Tr}(J_+, (\lambda^{-1} - D_g^T)^{-1} J_-)\,, \tag{6.73}$$

η οποία συνοδεύεται και από το διαστελόνιο που προκύπτει μέσω της ολοκλήρωσης των πεδίων $A_\pm$

$$e^{-2\Phi_\lambda} = e^{-2\Phi_0}\,\det(\lambda^{-1} - D_g^T)\,. \tag{6.74}$$

Από τη παραπάνω σχέση είναι προφανές ότι το λ-πρότυπο αποτελεί παραμόρφωση του WZW προτύπου ($\lambda = 0$). Η δράση (6.73) έχει την διακριτή συμμετρία [150]

$$g \to g^{-1}, \quad \lambda \to \lambda^{-1}, \quad k \to -k, \quad \lambda \in \mathbb{R}^+\,, \tag{6.75}$$

με την έννοια ότι

$$S_{-k;\lambda^{-1}}(g^{-1}) = S_{k;\lambda}(g)\,. \tag{6.76}$$

Οπως έδειξαν οι συγγραφείς στην ίδια εργασία, αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσδιοριστεί σε ικανοποιητικό βαθμό η β-συνάρτηση του προτύπου.

Τέλος να αναφέρουμε ότι ο τανυστής ενέργειας/ορμής του προτύπου γράφεται συναρτήσει των πεδίων $A_\pm$ στην απλή μορφή

$$T_{\pm\pm} = k\frac{(1-\lambda^2)}{\lambda^2}\mathrm{Tr}(A_\pm, A_\pm)\,. \tag{6.77}$$

6.7.2 Το λ-πρότυπο ως σ-πρότυπο

Για να γράψουμε το λ-πρότυπο στην μορφή (2.12) θα παραμετροποιήσουμε όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις τα στοιχεία ομάδας G με τις συντεταγμένες X^μ. Τα πεδία υποβάθρου που αναμένουμε να βρούμε θα εμφανίζονται ως παραμορφώσεις των αντίστοιχων του WZW προτύπου.

Διακρίνοντας το συμμετρικό και αντισυμμετρικό μέρος του λ-εξαρτώμενου όρου στην (6.73) και επιλέγοντας το συμμετρικό, βρίσκουμε ότι η μετρική του πρότυπου είναι η

$$ds^2_\lambda = \frac{k}{2\pi} L^A_\mu (\mathbb{1} + \lambda(D_g - \lambda\mathbb{1})^{-1} + \lambda(D_g^T - \lambda\mathbb{1})^{-1})_{AB} L^B_\nu dX^\mu dX^\nu\,, \tag{6.78}$$

[12] Η σχέση (6.73) ισχύει για μεγάλες τιμές του k. Για κβαντικές διορθώσεις σε παραπάνω τάξη παραπέμπουμε στις πρόσφατες εργασίες [156, 157].

η οποία περιγράφει ένα γενικό χώρο και όχι μια πολλαπλότητα ομάδας όπως στην περίπτωση $\lambda \to 0$. Από την σχέση (6.78) βρίσκουμε τα **veilbein** πεδία [136]

$$e_L^A = (1-\lambda^2)^{1/2}(D_g^T - \lambda \mathbb{1})L^A, \quad e_R^A = (1-\lambda^2)^{1/2}(D_g - \lambda \mathbb{1})L^A\,, \tag{6.79}$$

τα οποία σχετίζονται μέσω του ορθογώνιου μετασχηματισμό

$$\Lambda = \frac{D_g - \lambda \mathbb{1}}{\mathbb{1} - \lambda D_g}\,. \tag{6.80}$$

Αντίστοιχα, θεωρώντας το αντισυμμετρικό μέρος του όρου στην (6.78) βρίσκουμε ότι το **Kalb-Ramond** πεδίο δίνεται απο την έκφραση

$$B_\lambda(X) = B_0(X) + \frac{k\lambda}{2\pi}L^A((D_g - \lambda \mathbb{1})^{-1} - (D_g^T - \lambda \mathbb{1})^{-1})_{AB}L^B dX^\mu \wedge dX^\nu\,, \tag{6.81}$$

όπου το $B_0(X)$ αναπαριστά μια επιλογή για το KB πεδίο του WZW προτύπου. Το διαστελόνιο δίνεται στην σχέση (6.74). Επομένως το λ-παραμορφωμένο πρότυπο χαρακτηρίζεται από τα πεδία υποβάθρου

$$\{G_{\mu\nu}(\lambda, X), B_{\mu\nu}(\lambda, X), \Phi(\lambda, X)\}\,, \tag{6.82}$$

τα οποία για $\lambda = 0$ καταλήγουν στα αντίστοιχα του WZW προτύπου.

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, επιλέγοντας $G = SU(2)$ και την παραμετροποίηση (5.25) βρίσκουμε ότι τα πεδία (6.78), (6.81) και (6.74) γράφονται ως

$$\begin{aligned} ds_\lambda^2 &= 2k\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}d\psi^2 + \frac{1-\lambda}{\Delta}ds^2(S^2)\right)\,, \\ H_\lambda &= 4k\frac{2\lambda\Delta + (1-\lambda^2)^2}{\Delta^2}Vol(S^3)\,, \\ e^{-2\Phi_\lambda} &= e^{-2\Phi_0}\Delta\,, \end{aligned} \tag{6.83}$$

όπου $\Delta = 1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos 2\psi$ η συνάρτηση που προκύπτει απο την ορίζουσα στην (6.74), ενώ από την μορφή της μετρικής συμπεραίνουμε ότι η λ-παραμόρφωση διατηρεί τις ισομετρίες της S^2 σφαίρας.

Τέλος να αναφέρουμε ότι τα παραπάνω πεδία υποβάθρου του λ-προτύπου εμβαπτίστηκαν σε ένα δεκαδιάστατο υπόβαθρο με κατάλληλα RR-πεδία, για την περίπτωση των ομάδων $G = SU(2), SL(2,\mathbb{R})$ [151]. Ως τέτοια, αποτελούν την λ-παραμόρφωση της ήδης γνωστής λύσης $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ τύπου-IIB υπερβαρύτητας [152], ενώ στο όριο $\lambda \to 1$ δίνουν τα αντίστοιχα πεδία της T-δυικής $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ υπερβαρύτητας [153, 154]. Βέβαια, όπως έδειξαν οι συγγραφείς, τα Ramond πεδία, σε αυτή την περίπτωση, είναι μιγαδικά γεγονός που πρέπει να ερμηνευθεί στα πλαίσια της τύπου $II^\star$ [155].

6.7.3 Τα όρια $\lambda = 0$ και $\lambda = 1$ της θεωρίας

Όπως αναφέραμε προηγουμένως για $\lambda = 0$ βρίσκουμε το WZW πρότυπο για την Lie ομάδα G. Θεωρώντας την παράμετρο παραμόρφωσης μικρή $\lambda \to 0$, η δράση (6.70) περιγράφει το WZW πρότυπο διαταραγμένο από τον διγραμμικό τελεστή $J_+^A J_-^A$,

$$S_{k,\lambda}(g) = S_{WZW,k}(g) + \frac{k\lambda}{\pi}\int \mathrm{Tr}(J_+, J_-) + \mathcal{O}(\lambda^2)\,. \tag{6.84}$$

Οι δύο πρώτοι όροι στην (6.84) περιγράφουν το μη-αβελιανό μποζονικοποιημένο Thirring πρότυπο [158], του οποίου η β-συνάρτηση έχει υπολογιστεί μέχρι πρώτη τάξη στην σταθερά k και έχει βρεθεί [159]

$$\beta_\lambda = \frac{d\lambda}{dt} = -\frac{c_G\lambda^2}{2k(1+\lambda^2)}\,, \tag{6.85}$$

όπου $t = \ln\mu^2$ και μ η ενέργεια κατωφλίου. Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραπάνω έκφραση είναι ακριβής ως προς την παράμετρο λ και έχει την συμμετρία (6.75).

Το όριο $\lambda \to 1$ θελει μεγαλύτερη προσοχή αφού για $\lambda = 1$ η θεωρία δεν είναι καλώς ορισμένη, δεδομένου ότι δεν ορίζεται ο αντίστροφος του πίνακα $(1 - D_g^T)$. Συγκεκριμένα για $\lambda = 1$ βρίσκουμε το G/G WZW πρότυπο, επομένως οι βαθμοί ελευθερίας μειώνονται κατά $\dim G$. Για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα θα αναπτύξουμε το στοιχείο ομάδας g γύρω από το ταυτοτικό [136][13]

$$g = \mathbb{1} + \frac{\kappa^2}{k}v + \mathcal{O}(k^{-2})\,, \tag{6.86}$$

όπου $v \in \mathfrak{g}$ και θα θεωρήσουμε ότι $k \to \infty$. Βρίσκουμε επομένως ότι

$$L_- = \frac{\kappa^2}{k}\partial_- v, \quad R_+ = \frac{\kappa^2}{k}\partial_+ v, \quad D_g = \mathbb{1} + \frac{\kappa^2}{k}ad_v\,, \tag{6.87}$$

όπου ad_v είναι η συζυγής δράση της άλγεβρας στα στοιχεία της άλγεβρας, $ad_v X = [v, X]$

[13] Θεωρούμε ότι κάθε στοιχείο της ομάδας μπορεί να προσεγγιστεί από το ταυτοτικό.

με $X \in \mathfrak{g}$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (6.87) η G/G WZW δράση δίνει[14]

$$S^{G/G}(g, A_\pm) \to \frac{-\kappa^2}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(v, F_{+-})\,. \tag{6.88}$$

Προσθέτοντας την συνεισφορά απο το χειραλικό πρότυπο

$$S_{PCM,\kappa^2}(\tilde{g}=1, A_\pm) = -\frac{\kappa^2}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A_+, A_-)\,, \tag{6.89}$$

στην (6.88) και ολοκληρώνοντας τα πεδία $A_\pm$ βρίσκουμε

$$S = \frac{-\kappa^2}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(\partial_+ v, (1+ad_v)^{-1}\partial_- v)\,, \tag{6.90}$$

που είναι η μη αβελιανή T-δυική θεωρία του χειραλικού προτύπου [153].

6.7.4 Ζεύγος *Lax* και ολοκληρώσιμη δομή

Όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια θα δείξουμε ότι οι εξισώσεις κίνησης του λ-προτύπου είναι ισοδύναμες με την εξίσωση επιπεδότητας για ένα ζεύγος πινάκων, το ζεύγος Lax. Αποδεικνύεται ότι είναι απλούστερο να εκφράσουμε τις εξισώσεις κίνησης του προτύπου συναρτήσει των πεδίων $A_\pm$ [137].

Μεταβάλλοντας την δράση (6.70) ως προς τα πεδία g βρίσκουμε δύο ισοδύναμες δευτεροβάθμιες εξισώσεις κίνησης[15]

$$\begin{aligned} \nabla_+(g^{-1}\nabla_- g) &= F_{+-}\,, \\ \nabla_-(\nabla_+ g g^{-1}) &= F_{+-}\,, \end{aligned} \tag{6.91}$$

όπου η συναλλοίωτη παράγωγος όριζεται ως $\nabla_\pm = \partial_\pm - [A_\pm,]$ και F_{+-} είναι το πεδίο δύναμης, $F_{+-} = \partial_+ A_- - \partial_- A_+ - [A_+, A_-]$. Οι (6.72) μπορούν να γραφτούν στην μορφή

$$\nabla_+ g g^{-1} = (\lambda^{-1}-1)A_+, \quad g^{-1}\nabla_- g = -(\lambda^{-1}-1)A_-\,, \tag{6.92}$$

Αντικαθιστώντας τις (6.92) στις (6.91) βρίσκουμε τις πρωτοβάθμιες εξίσωσεις για τα πεδία

[14] Αγνοήσαμε τους όρους ανώτερης τάξης σε $1/k$

[15] Η ισοδυναμία είναι προφανής χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$[\nabla_+, \nabla_-]g = [g, F_{+-}]$$

$A_\pm$

$$\partial_\pm A_\mp = \pm\frac{1}{1+\lambda}[A_+, A_-]\,, \tag{6.93}$$

οι οποίες γράφονται και ως

$$\begin{aligned} &\partial_+ A_- + \partial_- A_+ = 0\,,\\ &\partial_+ A_- - \partial_- A_+ = \frac{2}{1+\lambda}[A_+, A_-]\,. \end{aligned} \tag{6.94}$$

Οι (6.93) ή ισοδύναμα οι (6.94) αντιστοιχούν στην εξίσωση Lax για το ζεύγος πινάκων

$$\mathcal{L}_\pm(z) = \frac{2z}{1+\lambda}\frac{A_\pm}{z\mp 1}\,. \tag{6.95}$$

Όπως είδαμε στο υποκεφάλαιο 4.2.1, η ύπαρξη του ζεύγους Lax συνεπάγεται την διατήρηση άπειρων φορτίων που γεννιούνται απο τον αντίστοιχο μονόδρομο πίνακα. Οι αγκύλες Maillet οι οποίες εξασφαλίζουν τα άπειρα φορία να μετατίθενται κατά Poisson και εξασφαλίζουν την κλασική ολοκληρωσιμότητα του λ-προτύπου έχουν παρουσιαστεί στις εργασίες [28–30], με την συνάρτηση στρέψης να δίνεται ως

$$\phi_\lambda^{-1}(z) = -e^2\frac{1+x+z^2(1-x)}{1-z^2}\,, \tag{6.96}$$

όπου

$$x = \frac{1+\lambda^2}{2\lambda}, \quad e = \frac{2\lambda}{\sqrt{k(1-\lambda)(1+\lambda)^3}}\,. \tag{6.97}$$

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσει κανείς ότι οι παραπάνω εκφράσεις είναι αναλλοίωτες κάτω απο την διακριτή συμμετρία (6.75). Η έκφραση των μη τοπικών ολοκληρωμάτων κίνησης, πέραν του αναπτύγματος του μονόδρομου πίνακα, μπορεί ευκολα να βρεθεί μέσω της παρατήρησης, ότι οι εξισώσεις κίνησης του λ-προτύπου επεκφρασμένες ως προς τα πεδία $A_\pm$ είναι ίδιες με του χειραλικού. Επομένως βάση της επαγωγικής μεθόδου της εργασίας [46] βρίσκουμε ότι δίνονται από τις εκφράσεις (4.44), με την αντικατάσταση $L_\pm \to \frac{2}{1+\lambda}A_\pm$. Αντίστοιχη επιχειρηματολογία ισχύει και για τα τοπικά φορτία.

6.7.5 β-συνάρτηση

Χρησιμοποιώντας την ομοιότητα των εξισώσεων κίνησης του χειραλικού προτύπου (4.39) με τις εξισώσεις του λ-προτύπου (6.93) μπορούμε να εφαρμόσουμε την μέθοδο πεδίου υποβάθρου, η οποία έχει περιγραφεί στο κεφάλαιο 4.3.4 , για τον υπολογισμό της εξίσωσης ροής της ΟΕ της παραμέτρου λ. Ο υπολογισμός της έχει παρουσιαστεί στην εργασία [71] και έχει βρεθεί σε τάξη ενός βρόγχου ως προς την σταθερά k

$$\beta_\lambda = -\frac{c_G \lambda^2}{2k(1+\lambda)}\,. \tag{6.98}$$

Το γεγονός ότι η έκφραση της είναι ίδια με την (6.85) αποτελεί ένδειξη ότι η δράση (6.73) είναι η επαναθροισμένη μορφή του Thirring προτύπου αν θεωρήσουμε όλες τις διαταρακτικές συνεισφορές ως προς την παράμετρο λ.

Η έκφραση (6.98) συμφωνεί με αυτήν στην [150], όπου οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν την (2.19) για τον υπολογισμό της, ενώ έχει υπολογιστεί και στην [160] με την μέθοδο του αναπτύγματος ελεύθερων πεδίων. Επιπλέον στην [150] αποδείχθηκε ότι η τοπολογική φύση της σταθεράς k παραμένει αναλλοίωτη στο επίπεδο ενός βρόγχου γεγονός που αναμένενται να ισχύει σε κάθε τάξη της θεωρίας διαταραχών.

Η λύση της (6.98) είναι η

$$\lambda - \frac{1}{\lambda} + \ln\lambda^2 = -\frac{c_G}{2k}(t-t_0)\,, \tag{6.99}$$

όπου t_0 σταθερά ολοκλήρωσης. Στο υπεριώδες σημείο για $t \to \infty$ ή $\lambda \to 0$, το λ-πρότυπο καταλήγει στο WZW πρότυπο. Προς το υπέρυθρο για $t \to t_0$ η παράμετρος τείνει προς το σημείο $\lambda = 1$ όπου το σ-πρότυπο είναι το μη-αβελιανό T-δυικό του χειραλικού προτύπου[16].

6.7.6 Χαμιλτονιανός φορμαλισμός

Παρακάτω θα αναπτύξουμε τον χαμιλτονιανό φορμαλισμό του λ-προτύπου με στόχο την εύρεση της παραμορφωμένης άλγεβρας του, δηλαδή της άλγεβρας που ικανοποιούν τα πεδία $A_\pm$. Θα ακολουθήσουμε την εργασία [137], ενώ ως μέθοδος εφαρμόστηκε πρώτη φορά στο G και G/H WZW πρότυπο στην [162].

Παραμετροποιώντας την ομάδα G με τις συντεταγμένες X^μ, $\mu = 1, \ldots, \dim(G)$ βρίσκουμε

[16] Στο όριο $\lambda \to 1$ ή $\kappa \to 0$ ισχύει ότι

$$\lambda = 1 + \frac{\kappa^2}{k} + \ldots\,, \tag{6.100}$$

και η (6.98) δίνει την (4.54)

ότι η (6.70) γράφεται στην μορφή

$$\mathcal{L}[X,A] = \frac{k}{2\pi}(R^a_\mu R^a_\nu \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu - R^a_\mu R^a_\nu X'^\mu X'^\nu + 2b_{\mu\nu}\dot{X}^\mu X'^\nu + 2iA^a_- R^a_\mu(\dot{X}^\mu + X'^\mu) \\ - 2iA^a_+ L^a_\mu(\dot{X}^\mu - X'^\mu) + 2A^a_+ D^{ba} A^b_- - 2\lambda^{-1} A^a_+ \delta^{ab} A^b_-)\,, \tag{6.101}$$

Οι συζυγείς ορμές των συντεταγμένων X^μ είναι

$$\Pi_\mu = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot{x}^\mu} = \frac{k}{\pi}(R^a_\mu R^a_\nu \dot{X}^\nu + b_{\mu\nu} X'^\nu + iA^a_- R^a_\mu - iA^a_+ L^a_\mu)\,, \tag{6.102}$$

ενώ των πεδίων $A_\pm$, $P_\pm$, μηδενίζονται, γεγονός που επιβάλει στον φασικό χώρο της θεωρίας τους επονομαζόμενους πρωτογενείς δεσμούς

$$\phi_1 = P_+ \approx 0, \quad \phi_2 = P_- \approx 0\,. \tag{6.103}$$

Το σύμβολο $\approx$ υποδηλώνει ότι η ισότητα ισχύει μόνο στην επιφάνεια που ορίζεται από τους δεσμούς και όχι σε όλο τον φασικό χώρο. Οι αγκύλες Poisson που ικανοποιούν οι συζυγείς ορμές με τις αντίστοιχες συντεταγμένες είναι

$$\begin{aligned} \{X^\mu(\sigma), \Pi_\nu(\sigma')\} &= \delta^\mu_\nu \delta(\sigma - \sigma') \\ \{P^a_\pm(\sigma), A^b_\mp(\sigma')\} &= \delta^a_b \delta(\sigma - \sigma')\,. \end{aligned} \tag{6.104}$$

Δεδομένης της (6.103) θα εφαρμόσουμε την θεωρία του Dirac για συστήματα με δεσμούς. Αρχικά θα υπολογίσουμε την χαμιλτονιανή του συστήματος και θα προσθέσουμε σε αυτή ένα γενικό γραμμικό συνδυασμό των πρωτογενών δεσμών. Μετά από μια σειρά πράξεων βρίσκουμε

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} + c_+ P_+ + c_- P_-\,, \tag{6.105}$$

όπου

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \frac{k}{4\pi}\Big(&\mathcal{J}_+{}^a \mathcal{J}_+{}^a + \mathcal{J}_-{}^a \mathcal{J}_-{}^a + 4i(A^a_+ \mathcal{J}_-{}^a - A^a_- \mathcal{J}_+{}^a) - \\ &2(A^a_+ - A^a_-)(A^a_+ - A^a_-) + 4A^a_+(\lambda^{-1}\delta_{ab} - \delta_{ab})A^b_-\Big)\,. \end{aligned} \tag{6.106}$$

Τα πεδία $\mathcal{J}_\pm$ ορίζονται ως ίδιες συναρτήσεις του φασικού χώρου με τα ρεύματα του WZW προτύπου $J_\pm$ [162]. Συγκεκριμένα

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_+^a &= R^{\mu a}\Big(\frac{\pi}{k}\Pi_\mu - \beta_{\mu\nu}X'^\nu\Big) + R_\mu^a X'^\mu = R_\mu^a(\dot{X}^\mu + X'^\mu) + iA_-^a - iD^{ab}A_+^b\,,\\
\mathcal{J}_-^a &= L^{\mu a}\Big(\frac{\pi}{k}\Pi_\mu - \beta_{\mu\nu}X'^\nu\Big) - L_\mu^a X'^\mu = L_\mu^a(\dot{X}^\mu - X'^\mu) - iA_+^a + iD^{ba}A_-^b
\end{aligned}
\tag{6.107}
$$

και ικανοποιούν εξ' ορισμού δύο αντίγραφα της Kac-Moody άλγεβρας $\hat{\mathfrak{g}}_k$

$$
\begin{aligned}
&\big\{\mathcal{J}_\pm^A(\sigma), \mathcal{J}_\pm^B(\sigma')\big\} = \pm\frac{2\pi}{k}f^{ABC}J_\pm^C\delta(\sigma-\sigma') \pm \frac{2\pi}{k}\delta^{AB}\delta'(\sigma-\sigma')\\
&\big\{\mathcal{J}_+^A(\sigma), \mathcal{J}_-^B(\sigma')\big\} = 0\,.
\end{aligned}
\tag{6.108}
$$

Εκτός από τους πρωτογενείς δεσμούς ϕ_1, ϕ_2 υπάρχουν περαιτέρω συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται, όπως η χρονική τους παράγωγος να μηδενίζεται

$$
\dot{\phi}_i = \big\{H', \phi_i\big\} \approx 0\,. \tag{6.109}
$$

Για την χαμιλτονιανή (6.106) βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
\phi_3 &= \{P_+, \mathcal{H}'\} = 4(-A_-^a + \lambda_{ab}^{-1}A_+^b - i\mathcal{J}_+^a) \approx 0\,,\\
\phi_4 &= \{P_-, \mathcal{H}'\} = 4(A_+^a - \lambda_{ab}^{-1}A_-^b + i\mathcal{J}_-^a) \approx 0\,,
\end{aligned}
\tag{6.110}
$$

οι οποίοι με την σειρά τους πρέπει να ελέγξουμε αν παράγουν επιπλέον δεσμούς. Υπολογίζοντας τον μεταθέτη τους με την Χαμιλτονιανή βρίσκουμε ότι δεν προκύπτουν καινούργιοι. Επομένως καταλήγουμε ότι το σύστημα περιγράφεται απο την Χαμιλτονιανή (7.26) με τους συνολικά τέσσερις δεσμούς

$$
\begin{aligned}
\phi_1 &= P_+ \approx 0, \quad \phi_2 = P_- \approx 0\,,\\
\phi_3 &= A_-^a - \lambda_{ab}^{-1}A_+^b + i\mathcal{J}_+^a \approx 0\,,\\
\phi_4 &= A_+^a - \lambda_{ab}^{-1}A_-^b + i\mathcal{J}_-^a \approx 0\,.
\end{aligned}
\tag{6.111}
$$

Υπολογίζοντας τώρα τον αντίστροφο του πίνακα $C_{ij} = \{\phi_i, \phi_j\}$, $\forall i,j = 1,2,3,4$ συμπεραίνουμε ότι όλοι είναι δεύτερης τάξης, δηλαδή μπορούμε να τους επιβάλλουμε στον φασικό χώρο της θεωρίας, μειώνοντας την διάστασή του, αρκεί να αντικαταστήσουμε τις Poisson αγκύλες με τις Dirac [17]

$$\{F,G\}_D = \{F,G\} - \{F,\phi_i\}C^{-1}_{ij}\{\phi_j,G\}\,. \tag{6.112}$$

Δεδομένης όμως της μορφής του C^{-1}_{ij} [137] οι (6.108) παραμένουν αναλλοίωτες. Χρησιμοποιώντας λοιπόν την $\hat{\mathfrak{g}}_k$ άλγεβρα των $\mathcal{J}_\pm$ και τους δεσμούς ϕ_3,ϕ_4 βρίσκουμε ότι τα πεδία $A_\pm$ ικανοποιούν στον μειωμένο φασικό χώρο την άλγεβρα

$$\begin{aligned}
\left\{A^A_\pm, A^B_\pm\right\}_D &= ie^2(\lambda) f^{ABC}((1+2x)A^C_\pm - A^C_\mp)\delta(\sigma-\sigma') \pm 2e^2(\lambda)\delta^{AB}\delta'(\sigma-\sigma')\,,\\
\left\{A^A_+, A^B_-\right\}_D &= ie^2(\lambda) f^{ABC}(A^C_+ + A^C_-)\delta(\sigma-\sigma')\,,
\end{aligned} \tag{6.113}$$

όπου οι εκφράσεις $x(\lambda), e(\lambda)$ δίνονται στην (6.97).

6.8 λ-παραμορφωμένος χώρος πηλίκου

6.8.1 Κατασκευή της δράσης

Παρακάτω θα κατασκευάσουμε τις λ-παραμορφώσεις χώρων πηλίκου [138,151,163]. Αρχικά προσθέτουμε στο WZW πρότυπο το χειραλικό ορισμένο σε χώρο G/H (4.58)

$$S(g,\tilde{g},B_\pm) = S_{WZW,k}(g) + S_{PCM,\kappa^2}(\tilde{g},B_\pm)\,. \tag{6.114}$$

Η δράση (6.114) έχει $2\dim G - \dim H$ βαθμούς ελευθερίας. Επεκτείνοντας την καθολική συμμετρία (6.67) σε τοπική μπορούμε πάλι να επιλέξουμε την βαθμίδα $\tilde{g} = \mathbb{1}$ και να μειώσουμε τους βαθμούς ελευθερίας της θεωρίας σε $\dim(G-H)$. Αν ολοκληρώσουμε και τα πεδία $B_\pm \in \mathfrak{h}$ βρίσκουμε ότι η τελική δράση παίρνει την μορφή

$$S_{k,\kappa^2}(g,A_\pm) = S^{G/G}_k(g,A_\pm) - \frac{\kappa^2}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A_+,A_-)_{\mathfrak{g}^{(1)}}\,. \tag{6.115}$$

Χρησιμοποιώντας τον τελεστή $\mathcal{R}$ που ορίζεται ως

$$\mathcal{R}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \oplus \lambda^{-1}\mathfrak{g}^{(1)}\,, \tag{6.116}$$

[17] Οι Dirac αγκύλες είναι οι επαγόμενες αγκύλες Poisson στον μειωμένο φασικό χώρο

με $g^{(0)} = \mathfrak{h}$, μπορούμε να γράψουμε την (6.115) στην μορφή

$$S_{k,\lambda}(g, A_\pm) = S_{WZW,k}(g) + \frac{k}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A_- J_+ - A_+ J_- - A_-(\mathcal{R} - D_g)A_+)\,. \tag{6.117}$$

Η δράση (6.117) έχει μια εναπομείνασα H-συμμετρία βαθμίδας που κληρονόμησε από το G/H χειραλικό πρότυπο και η οποία ορίζεται ως

$$g \to h^{-1}gh\,, \quad A_\pm^{(0)} \to h^{-1}(\partial_\pm - \partial_\pm)h, \quad A_\pm^{(1)} \to h^{-1}A_\pm^{(1)}h\,. \tag{6.118}$$

Τέλος ολοκληρώνοντας τα πεδία $A_\pm$ βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} A_+ &= (\mathcal{R} - D_g)^{-1}J_+\,, \\ A_- &= -(\mathcal{R} - D_g^T)^{-1}J_-\,, \end{aligned} \tag{6.119}$$

που είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} &(\nabla_+ g g^{-1})^{(0)} = 0, \quad (g^{-1}\nabla g)^{(0)} = 0\,, \\ &(\nabla_+ g g^{-1})^{(1)} = (\lambda^{-1} - 1)A_+^{(1)}, \quad (g^{-1}\nabla_- g)^{(1)} = -(\lambda^{-1} - 1)A_-^{(1)}\,. \end{aligned} \tag{6.120}$$

Αντικαθιστώντας τις (6.119) στην (6.117) βρίσκουμε την παρακάτω ενεργό δράση για μεγάλες τιμές του k

$$S_{k,\lambda}(g) = S_{WZW,k}(g) - \frac{k}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(J_+, (\mathcal{R} - D_g^T)^{-1}J_-)\,, \tag{6.121}$$

συνοδευόμενη από το διαστελόνιο

$$e^{2\Phi} = e^{2\Phi_0}\det(\mathcal{R} - D_g^T)\,. \tag{6.122}$$

Τα πεδία υποβάθρου του προτύπου (6.121) για τις περιπτώσεις $\frac{SU(2)}{U(1)}$ και $\frac{SL(2,\mathbb{R})}{SO(1,1)}$ έχουν εμβαπτιστεί σε δεκαδιάστατα υπόβαθρα με κατάλληλα RR πεδία, και αντιπροσωπεύουν την λ παραμόρφωση μέρους του τύπου IIB υποβάθρου $AdS_2 \times S^2 \times T^6$. Σε αυτή την περίπτωση τα RR πεδία είναι πραγματικά [151]. Στις εργασίες [164–166] οι συγγραφείς θεώρησαν το λ-πρότυπο στον Green-Schwarz φορμαλισμό για τα υπόβαθρα $AdS_2 \times S^2$, $AdS_3 \times S^3$, $AdS_n \times S^n$ και έδειξαν ότι το διαστελόνιο έχει μια επιπλέον συνεισφορά από την φερμιονική ορίζουσα, που προκύπτει από την ολοκλήρωση των φερμιονικών βαθμών ελευθερίας, και βρήκαν διαφορετικά RR πεδία. Η περίπτωση της λ-$AdS_5 \times S^5$ υπερχορδής έχει μελετηθεί και στον φορμαλισμό ιδιοστροφορμής (pure spinor formalism [167]) στην εργασία [168].

Τέλος να αναφέρουμε ότι σε όλα τα παραπάνω δεκαδιάστατα υπόβαθρα η λ-παραμόρφωση δρα στον συμπαγή χώρο της σφαίρας αλλά και στον μη-συμπαγή AdS. Στην εργασία [169] κατασκευάστηκαν για πρώτη φορά παραμορφωμένα υπόβαθρα με τον AdS χώρο αναλλοίωτο.

6.8.2 Ζεύγος Lax και ολοκληρώσιμη δομή

Το λ-πρότυπο κληρονομεί την ολοκληρωσιμότητα του αντίστοιχου χειραλικού προτύπου. Επομένως, για το εν λόγω πρότυπο, ο χώρος πρέπει να είναι συμμετρικός, ορισμός που δόθηκε στο κεφάλαιο 4.4.2. Σε αυτή την περίπτωση, οι εξισώσεις κίνησης του γράφονται στην μορφή[18]

$$\begin{aligned}
&\partial_\pm A_\mp^{(1)} + [A_\pm^{(1)}, A_\mp^{(0)}] = 0\,,\\
&\partial_+ A_-^{(0)} - \partial_- A_+^{(0)} + [A_+^{(0)}, A_-^{(0)}] + \lambda^{-1}[A_+^{(1)}, A_-^{(1)}] = 0\,,
\end{aligned} \tag{6.124}$$

και το ζεύγος Lax δίνεται ως

$$L_\pm(z) = A_\pm^{(0)} + z^{\pm 1}\lambda^{-1/2}A_\pm^{(1)}\,, \quad z \in \mathbb{C}\,. \tag{6.125}$$

Στις εργασίες [28, 29] αποδείχθηκε ότι ο r_{12} πίνακας του προτύπου επιδέχεται περιγραφή μέσω της συνάρτησης στρέψης, με

$$r_{12}^H(z,z') = -\frac{2z^2}{z^2 - z'^2}\phi_\lambda^{-1}(z')\,, \quad r_{12}^{G/H}(z,z') = -\frac{2zz'}{z^2 - z'^2}\phi_\lambda^{-1}(z')\,, \tag{6.126}$$

και

$$\phi_\lambda(z) = -\frac{kz^2(\lambda - \lambda^{-1})}{(z^2 - \lambda)(z^2 - \lambda^{-1})}\,. \tag{6.127}$$

Τέλος, όπως και στην περίπτωση του χειραλικού προτύπου, η πρώτη εξίσωση στην (6.124) οδηγεί στις εξισώσεις διατήρησης των άπειρων τοπικών φορτίων ανώτερης τάξης.

---

[18] Αν θεωρήσουμε διαφορετικές παραμέτρους παραμόρφωσης στην υποομάδα και στον χώρο πηλίκου οι εξισώσεις κίνησης του προτύπου είναι οι [176]

$$\begin{aligned}
&\partial_\pm A_\mp^{(0)} = \pm(1+\lambda_H)^{-1}\left([A_+^{(0)}, A_-^{(0)}] + \frac{\lambda_H}{\lambda_{G/H}}[A_+^{(1)}, A_-^{(1)}]\right),\\
&\partial_\pm A_\mp^{(1)} = \frac{1}{\lambda_H(1-\lambda_{G/H}^2)}\left((\lambda_{G/H}^2 - \lambda_H)[A_\mp^{(1)}, A_\pm^{(0)}] + \lambda_{G/H}(1-\lambda_H)[A_\pm^{(1)}, A_\mp^{(0)}]\right).
\end{aligned} \tag{6.123}$$

Προφανώς για $\lambda_H = 1$ και $\lambda_{G/H} = \lambda$ βρίσκουμε τις (6.124).

6.9 Γενικεύσεις του λ-προτύπου

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε γενικεύσεις του λ-προτύπου (ορισμένο σε $\dim G$-διάστατη πολλαπλότητα: ο λόγος που το επισημαίνουμε είναι ότι σε επόμενα κεφάλαια θα αναφερόμαστε σε παραμορφωμένα πρότυπα $n \dim G$ διάστασης ως γενικευμένα λ-πρότυπα)

Η γενίκευση επιτυγχάνεται προσθέτοντας στο WZW πρότυπο ένα παραμορφωμένο χειραλικό, που περιγράφεται από την δράση

$$\tilde{S}_{PCM}(f) = -\frac{1}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(f^{-1}\partial_+ f, \Theta f^{-1}\partial_- f)\,, \tag{6.128}$$

όπου Θ ένας ενδομορφισμός της άλγεβρας $\mathfrak{g}$ που όριζεται ως $\mathrm{Tr}(\Theta T^a) = \Theta^{ab}T^b$. Η δράση (6.128), σε σύγκριση με την $\Theta = \mathbb{1}$ περίπτωση έχει μειωμένη καθολική συμμετρία, $f \to hf$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία με το απλό λ καταλήγουμε στην δράση

$$S_{k,\Lambda}(g) = S_{WZW,k}(g) - \frac{k}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(J_+, (\Lambda - D_g^T)^{-1}J_-)\,, \tag{6.129}$$

όπου τώρα

$$\Lambda = \mathbb{1} + k^{-1}\Theta\,. \tag{6.130}$$

Η ολοκληρωσιμότητα του παραμορφωμένου χειραλικού (6.128) έχει αποδειχθεί μόνο για συγκεκριμένες επιλογές του πίνακα Θ και της ομάδας G. Το λ-πρότυπο προκύπτει από την σχέση (6.130) και κληρονομεί την ολοκληρωσιμότητα του αντίστοιχου χειραλικού. Παρακάτω παρουσιάζουμε τις περιπτώσεις των πινάκων Λ για τους οποίους η (6.129) είναι ολοκληρώσιμη.

• Το XXY λ-πρότυπο κατασκευάζεται από το ανισοτροπικό χειραλικό με

$$\Theta = \mathrm{diag}[\beta, \beta, \alpha]\,. \tag{6.131}$$

Χρησιμοποιώντας την (6.130) βρίσκουμε ότι ο πίνακας Λ δίνεται στην μορφή

$$\Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1^{-1}, \lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}]\,, \tag{6.132}$$

με $\lambda_1 = k\beta/k\beta + 1$ και $\lambda_2 = k\alpha/k\alpha + 1$. Η ολοκληρωσιμότητα του XXY -λ, επομένως και του αντίστοιχου χειραλικού, έχει αποδειχθεί μόνο για την περίπτωση όπου $G = SU(2)$ με το ζεύγος Lax να δίνεται ως [177, 178]

$$L_{\pm} = \sum_{i=1}^{3} w_a(v \pm z) A^a_{\pm} T^a, \quad z \in \mathbb{C}, \quad \mathfrak{su}(2) = \{T^a\}, \tag{6.133}$$

όπου

$$w_1 = w_2 = \sqrt{\frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{1 - \lambda_2^2}} \frac{1}{\lambda_1 \sinh(z)}, \quad w_3 = \sqrt{\frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{1 - \lambda_1^2}} \frac{1}{\lambda \tanh(z)}, \tag{6.134}$$

και

$$\cosh^2(v) = \frac{(1 - \lambda_1)(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\lambda_1(1 - \lambda_2)}. \tag{6.135}$$

• Το XYZ λ-πρότυπο περιγράφεται από τον πίνακα Λ

$$\Lambda = \text{diag}[\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}] \tag{6.136}$$

και το αντιστοιχο χειραλικό είναι το πλήρως ανισοτροπικό. Η ολοκληρωσιμότητα του αποδείχθηκε στην εργασία [176] για $G = SU(2)$ ενώ η β-συνάρτηση των παραμέτρων έχει υπολογιστεί στην [179].

• Η τελευταία γενίκευση του λ προτύπου κατασκευάζεται χρησιμοποιώντας την Yang Baxter ή η-παραμόρφωση του χειραλικού προτύπου με τον πίνακα Θ να δίνεται ως

$$\Theta = a^{-1}(1 - \eta \mathcal{R}), \tag{6.137}$$

όπου $\mathcal{R}$ αποτελεί λύση της τροποποιημένης Yang-Baxter εξίσωσης

$$[\mathcal{R}a, \mathcal{R}b] - \mathcal{R}([\mathcal{R}a, b] + [a, \mathcal{R}b]) = -c^2[a, b], \tag{6.138}$$

με $a, b \in \mathfrak{g}$ και $c^2 \in \{-1, 0, 1\}$[19]. Η ολοκληρώσιμότητα του λ-Yang-Baxter προτύπου ισχύει για γενικό G και αποδείχθηκε πρώτη φορά στην εργασία [141] με το ζεύγος Lax να δίνεται ως

$$\mathcal{L}_{\pm} = (\alpha_{\pm}(z) \pm \eta \mathcal{R})(1 \pm \eta \mathcal{R})^{-1} A_{\pm}, \tag{6.139}$$

με

$$a_{\pm}(z) = a + \sqrt{a^2 + \eta^2} \frac{z \pm 1}{z \mp 1}. \tag{6.140}$$

[19] Γενικεύσεις του Yang-Baxter χειραλικού έχουν παρουσιαστεί στις εργασίες [180–182]. Στην πρώτη το πρότυπο είναι γνωστό ως bi-Yang Baxter ενώ στις υπόλοιπες οι συγγραφείς προσθέτουν και έναν WZ όρο.

Κεφάλαιο 7

Ολοκληρώσιμες βράνες στο παραμορφωμένο λ-πρότυπο

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε την μέθοδο του συνοριακού μονόδρομου πίνακα για τις περιπτώσεις των λ-παραμορφωμένων G-και G/H-προτύπων και θα βρούμε τις ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες. Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας και τους δύο τρόπους που αναπτύχθηκαν στο κεφάλαιο 6, θα προσδιορίσουμε πλήρως τις αντίστοιχες βράνες, δηλαδή την γεωμετρία τους και την επαγόμενη 2-μορφή στο εσωτερικό τους. Μελέτη αυτών θα αποκαλύψει ιδιότητες, ανεξάρτητες της παραμέτρου παραμόρφωσης. Τα παραπάνω, παρουσιάστηκαν στις πρόσφατες εργασίες [183,184], ενώ η προσέγγιση σ-προτύπου αναπτύχθηκε στην [201].

7.1 Ολοκληρώσιμες βράνες σε λ-πρότυπα

7.1.1 Ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες

Αρχικά θα βρούμε τις ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες για το λ-πρότυπο. Χρησιμοποιώντας το ζεύγος Lax (6.95) βρίσκουμε ότι ο πίνακας μεταφοράς γράφεται στην μορφή

$$T(b,a;z) = \mathcal{P}\exp\left(\int_a^b d\sigma \frac{2z}{1+\lambda}\frac{1}{z^2-1}\left((A_+ + A_-) + z(A_+ - A_-)\right)\right) . \tag{7.1}$$

Ορίζοντας τον τελεστή ανάκλασης

$$R : \sigma \to 2\pi - \sigma, \quad g \to g^{-1} , \tag{7.2}$$

βρίσκουμε ότι τα πεδία $A_\pm$ μετασχηματίζονται ως

$$A_\pm \to A^R_\pm(\sigma) = A_\mp(2\pi - \sigma)\,, \tag{7.3}$$

με αποτέλεσμα ο ανακλώμενος πίνακας μεταφοράς $T_R(z)$ να ικανοποιεί την σχέση

$$T_R(2\pi, \pi; z) = T(0, \pi; -z)\,. \tag{7.4}$$

Συλλέγοντας τα παραπάνω αποτελέσματα και απαιτώντας η χρονική παράγωγος του μονόδρομου πίνακα να ικανοποιεί την [146], βρίσκουμε ότι οι ολοκληρώσιμες συνθήκες για το λ-πρότυπο είναι οι [183]

$$A_+ = \Omega A_-\,, \quad \Omega^2 = \mathbb{1}\,. \tag{7.5}$$

Χρησιμοποιώντας την μορφή του τανυστή ενέργειας/ορμής (6.77) και απαιτώντας οι (7.5) να ικανοποιούν την συνθήκη (6.1) βρίσκουμε επιπλέον ότι $\Omega^T\Omega = \mathbb{1}$. Εκφράζοντας τα πεδία $A_\pm$ συναρτήσει των ρευμάτων $J_\pm$, οι (7.5) γράφονται στην μορφή

$$(1 - \lambda D)J_+|_{\partial\Sigma} = -\Omega(1 - \lambda D^T)J_-|_{\partial\Sigma}\,. \tag{7.6}$$

Στο όριο $\lambda \to 0$ οι (7.6) καταλήγουν στις

$$J_+ = \Omega J_- \tag{7.7}$$

και το λ-πρότυπο περιγράφει το WZW πρότυπο όπως αναμένεται. Οι (7.7) είναι οι γνωστές μέγιστα συμμετρικές συνοριακές συνθήκες με λύσεις τις βράνες (6.7). Παρακάτω θα δείξουμε, επιλύοντας τις (7.5), ότι αυτή η γεωμετρική εικόνα των βρανών επιβιώνει της παραμόρφωσης.

7.1.2 Ολοκληρώσιμες βράνες

Η μεθοδολογία που θα ακολουθήσουμε για την επίλυση των (7.5) ή (7.6) έχει παρουσιαστεί στο υποκεφάλαιο 6.2.1 για το WZW πρότυπο και έχει αναπτυχθεί αναλυτικά στην εργασία [183]. Χωρίς να υπεισέλθουμε σε λεπτομέρειες, αυτές γράφονται στην μορφή

$$J_+ = \Omega_\lambda(g)J_-\,, \tag{7.8}$$

με τον πίνακα $\Omega_\lambda(g)$ να δίνεται ως

$$\Omega_\lambda(g) = \mathcal{O}_g \Omega \mathcal{O}_g^T\,, \quad \mathcal{O}_g = (\mathbb{1} - \lambda D_g)^{-1} \tag{7.9}$$

και επιδέχονται ως λύσεις βράνες, των οποίων η γεωμετρία είναι ίδια με αυτή των σύμμορφων βρανών στο WZW πρότυπο. Όπως και στην περίπτωση του υποκεφαλαίου 6.2.1 μπορούμε να επιλέξουμε συντεταγμένες για τα στοιχεία ομάδας g και να εξάγουμε την 2-μορφή ω χρησιμοποιώντας την σχέση (6.11) με τον πίνακα $\Omega(X)$ να ορίζεται ως

$$\Omega_\lambda(X) = R^{-1}\mathcal{O}_g^{-1}\Omega\mathcal{O}_g^T L\,. \tag{7.10}$$

Παρακάτω παρουσιάζουμε τα επαγόμενα πεδία των ολοκληρώσιμων βρανών για την περίπτωση της $G = SU(2)$. Τα πεδία υποβάθρου για το λ-πρότυπο έχουν εξαχθεί στην (6.83), αλλά τα ξαναγράφουμε εδώ για ευκολία του αναγνώστη

$$\begin{aligned} ds^2_\lambda &= 2k\left(\frac{1+\lambda}{1-\lambda}d\psi^2 + \frac{1-\lambda}{\Delta}ds^2(S^2)\right)\,, \\ H_\lambda &= 4k\frac{2\lambda\Delta + (1-\lambda^2)^2}{\Delta^2}Vol(S^3)\,, \\ e^{-2\Phi_\lambda} &= e^{-2\Phi_0}\Delta\,. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι στην παραπάνω παραμετροποίηση ο πίνακας (7.10) για $\Omega = \mathbb{1}$ γράφεται στην μορφή [183]

$$\Omega_\lambda(X) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\lambda-(1+\lambda^2)\cos 2\psi}{\Delta} & -\frac{(1-\lambda^2)}{\Delta}\sin\theta\sin 2\psi \\ 0 & \frac{1-\lambda^2}{\Delta}\sin 2\psi\csc\theta & \frac{2\lambda-(1+\lambda^2)\cos 2\psi}{\Delta} \end{pmatrix}\,. \tag{7.12}$$

Για $\lambda = 0$ βρίσκουμε τον πίνακα (6.12). Επίσης παρατηρούμε ότι η Dirichlet-κατεύθυνση παραμένει αναλλοίωτη, επομένως η εξίσωση των σύμμορφων βρανών στο WZW όριο $\psi =$ σταθ. επιβιώνει της παραμόρφωσης, σε συνέπεια με την προηγούμενη ανάλυση. Η επαγόμενη μετρική στην βράνη είναι η

$$d\hat{s}^2_\lambda = 2k\frac{1-\lambda}{\Delta}ds^2(S^2) \tag{7.13}$$

και από τον πίνακα (7.12) μπορούμε να διαβάσουμε την 2-μορφή

$$\omega_\lambda = \frac{k}{\Delta}(1-\lambda)^2 Vol(S^2)\,. \tag{7.14}$$

Από την σχέση (7.13) είναι εμφανές ότι η λ-παραμόρφωση δεν αλλάζει την τοπολογία των σύμμορφων βρανών, απλά μεταβάλει το μέγεθος τους.

Χρησιμοποιώντας τα πεδία (7.13), (7.14) μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια των ολοκληρώσιμων βρανών

$$S_{DBI} = T \int_{\mathcal{C}_f} e^{-\Phi} \sqrt{-\det(G+\omega)} = 4\pi k(1-\lambda) e^{-\Phi_0} T \sin(\psi)\,. \tag{7.15}$$

Όπως και στην περίπτωση του WZW προτύπου η δράση (7.15) ελαχιστοποείται για τις σημειακές βράνες στις θέσεις $\psi = 0, \pi$. Όπως έχουμε αναφέρει όροι τύπου WZ εισάγουν ασάφειες τοπολογικής φύσεως, οι οποίες για να μην έχουν επίδραση στην φυσική της θεωρίας θα πρέπει να είναι ανάλογες του $2\pi\mathbb{Z}$. Αντικαθιστώντας το H_λ (7.11) και το ω_λ (7.14) στην (6.20) βρίσκουμε ότι [183]

$$\psi_n = \frac{n\pi}{k}, \quad n = 0, \ldots, k\,. \tag{7.16}$$

Παρατηρούμε ότι η κβάντωση των επιτρεπτών θέσεων των ολοκληρώσιμων βρανών είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου παραμόρφωσης λ. Αυτό ήταν αναμενόμενο και λογικά συνεπές διότι η τοπολογική της φύση είναι ασύμβατη με την συνεχή μεταβολή της παραμέτρου λ. Συνεπώς το λ-παραμορφωμένο $SU(2)$ πρότυπο επιδέχεται $k+1$ ολοκληρώσιμες βράνες που περιγράφονται από τις κλάσεις συζυγίας της ομάδας γύρω από τα σημεία (7.16).

7.1.3 Ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες στο λ-πρότυπο σε συμμετρικούς χώρους

Παρακάτω παρουσιάζουμε τις ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες στο λ G/H-πρότυπο. Δεν θα επεκταθούμε σε παραδείγματα αλλά ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στην εργασία [184].

Είναι εύκολο να επιβεβαιωθεί ότι για τον τελεστή ανάκλασης (7.2) και το ζεύγος Lax (6.115), η χρονική του συνιστώσα πρέπει να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\mathcal{L}_\tau(z)|_{\partial\Sigma} = \Omega \mathcal{L}_\tau(z^{-1})|_{\partial\Sigma}\,, \tag{7.17}$$

προς διατήρηση της ολοκληρωσιμότητας του προτύπου. Αντικαθιστώντας τα πεδία Lax συναρτήσει των πεδίων $A_\pm$ και συγκρίνοντας τις εκφράσεις ίδιας τάξης ως προς τις δυνάμεις της παραμέτρου z βρίσκουμε τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες

$$
\begin{aligned}
\mathcal{O}(z): &\quad A_+^{(1)}|_{\partial\Sigma} = \Omega A_-^{(1)}|_{\partial\Sigma}\,,\\
\mathcal{O}(z^{-1}): &\quad A_-^{(1)}|_{\partial\Sigma} = \Omega A_+^{(1)}|_{\partial\Sigma}\,,\\
\mathcal{O}(z^{0}): &\quad A_\tau^{(0)}|_{\partial\Sigma} = \Omega A_\tau^{(0)}|_{\partial\Sigma}\,.
\end{aligned}
\tag{7.18}
$$

Να σημειώσουμε ότι ο αυτομορφισμός Ω σέβεται τον διαχωρισμό της άλγεβρας $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \oplus \mathfrak{g}^{(1)}$. Επιπλέον για λόγους συνέπειας $\Omega(\mathfrak{g}^{(0)}) = \mathbb{1}$ (εκτός και αν $A_\tau^{(0)} = 0$) και $\Omega^2(\mathfrak{g}^{(1)}) = \mathbb{1}$. Δεδομένου των παραπάνω συνθηκών για τον πίνακα Ω οι ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες του λ G/H-προτύπου είναι οι [184]

$$
A_+^{(1)} = \Omega A_-^{(1)}\,. \tag{7.19}
$$

Αν επιλέξουμε συγκεκριμένη ομάδα G και υποομάδα H τότε μπορούμε να χωρίσουμε τις εξισώσεις (7.19) σε $(D),(N)$ κατευθύνσεις και να προσδιορίσουμε πλήρως τα στοιχεία της βράνης.

7.2 Προσέγγιση σ-προτύπου

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα αναπτύξουμε την μεθοδολογία του υποκεφαλαίου 6.2.2 για τα παραπάνω ολοκληρώσιμα πρότυπα η οποία παρουσιάστηκε στην εργασία [201]. Συγκεκριμένα θα δείξουμε ότι η γεωμετρία βρανών

$$
\mathcal{C}_\omega(f) = \{\omega(h) f h^{-1} | \forall h \in G\}\,, \tag{7.20}
$$

με κατάλληλη 2-μορφή αποτελεί λύση των ολοκληρώσιμων συνοριακών συνθηκών (7.5) και (7.19).

Η ενεργός δράση του λ G- και G/H-προτύπου μπορεί να γραφτεί συμπαγώς ως

$$
S_{k;\lambda} = S_k(g) - \frac{k}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(\partial_+ g g^{-1}, (\mathcal{P} - D^T)^{-1} g^{-1}\partial_- g)\,, \tag{7.21}
$$

όπου ο τελεστής $\mathcal{P}$ ορίζεται ως

$$
\mathcal{P} = \begin{cases} \lambda^{-1}, & \text{χώρος ομάδας}\, G \\ \mathcal{P}^{(0)} + \lambda^{-1}\mathcal{P}^{(1)}, & \text{συμμετρικός χώρος}\, G/H \end{cases} \tag{7.22}
$$

και $\mathcal{P}^{(i)}$ δηλώνει τους προβολικούς τελεστές στον $\mathbb{Z}_2$ διαχωρισμό της άλγεβρας $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \oplus \mathfrak{g}^{(1)}$. Η δράση (7.21) μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$S_{k,\lambda} = \int_\Sigma L_{k,\lambda}(g) + \int_M H_{k,\lambda}(g)\,, \tag{7.23}$$

όπου ο χώρος M ορίζεται έτσι ώστε $\partial M = \Sigma$ και[1]

$$\begin{aligned} L_{k,\lambda} &= -\frac{k}{8\pi}\mathrm{Tr}(g^{-1}\partial_\mu g, g^{-1}\partial^\mu g) + \frac{k}{4\pi}\mathrm{Tr}(\partial^\mu g g^{-1}, (\mathcal{P} - D^T)^{-1} g^{-1}\partial_\mu g)\,, \\ H_{k,\lambda}(g) &= \frac{k}{4\pi}(H_{WZ}(g) - d\mathrm{Tr}(dgg^{-1} \wedge (\mathcal{P} - D^T)^{-1} g^{-1} dg))\,. \end{aligned} \tag{7.24}$$

Στην περίπτωση της ανοιχτής χορδής, η δράση (7.23) τροποποιείται, έτσι ώστε να ληφθεί υπόψιν η ύπαρξη $\partial\Sigma \neq 0$. Όπως και στην περίπτωση του WZW προτύπου γράφεται στην μορφή

$$S_{k,\lambda} = \int_\Sigma L_{k,\lambda} + \int_{M'} H_{k,\lambda} - \int_D \omega_{k,\lambda}\,, \tag{7.25}$$

όπου D υπόχωρος της βράνης που γεμίζει το κενό της επιφάνειας Σ και M' επέκταση του M έτσι ώστε $\partial M' = \Sigma \cup D$. Για λόγους ανεξαρτησίας της δράσης (7.25) από συνεχείς παραμορφώσεις του δίσκου πρέπει

$$H_{k,\lambda}|_{\text{βράνη}} = d\omega_{k,\lambda}\,. \tag{7.26}$$

Θεωρώντας την γεωμετρία (7.20) μπορούμε να προσδιορίσουμε την επαγόμενη 2-μορφή $\omega_{k,\lambda}$ στο εσωτερικό της. Δεδομένης της 3-μορφής στην (7.24) και της συνθήκης (7.26) βρίσκουμε ότι

$$\omega_{k,\lambda}(h) = \frac{k}{4\pi}(\omega_{WZ}(h) - \mathrm{Tr}(dgg^{-1} \wedge (\mathcal{P} - D^T) g^{-1} dg)|_{\mathcal{C}_f^\omega})\,, \tag{7.27}$$

όπου

$$\omega_{WZ}(f) = \mathrm{tr}(h^{-1}dh, \Omega^T f h^{-1} dh f^{-1}) \quad \Omega^T\Omega = \mathbb{1}\,, \tag{7.28}$$

και $|_{\mathcal{C}_f^\omega}$ υποδηλώνει ποσότητες υπολογισμένες στις στραμμένες κλάσεις συζυγίας, δηλαδή αντικαθιστούμε τα στοιχεία ομάδας g με τις συνοριακές τους τιμές $g|_{\partial\Sigma} = \omega(h^{-1})fh$. Σε αυτό το σημείο να επισημάνουμε ότι μπορούμε να προσθέσουμε στην (7.27) μια ακριβή δύο μορφή $F = dA$ η οποία εν γένει μπορεί να εξαρτάται απο την παράμετρο λ αλλά μαζί με την (7.20) δεν θα αποτελούν λύση των επιθυμητών συνοριακών συνθηκών.

Γνωρίζοντας την γεωμετρία των βράνων (7.20) και την επαγόμενη 2-μορφή στο εσωτερικό

[1] Για τις χωροχρονικές συμβάσεις παραπέμπουμε στο παράρτημα A

τους (7.27) μπορούμε να βρούμε τις σ.σ. στις οποίες αντιστοιχούν. Μεταβάλλοντας τον κινητικό όρο της (7.23) βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Sigma} \delta L_{k;\lambda} &= \frac{k}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} (\mathrm{Tr}(g^{-1}\delta g, g^{-1}\partial_\sigma g) - \mathrm{Tr}(\delta g g^{-1}, (\mathcal{P} - D^T)^{-1} g^{-1}\partial_\sigma g) \\
&\quad + \mathrm{Tr}(g^{-1}\delta g, (\mathcal{P} - D)^{-1})\partial_\sigma g g^{-1}) \\
&= \frac{k}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} (\mathrm{Tr}(g^{-1}\delta g, g^{-1}\partial_\sigma g) - \mathrm{Tr}(\delta g g^{-1}, A^L_\sigma) + \mathrm{Tr}(g^{-1}\delta g, A^R_\sigma))\,,
\end{aligned} \tag{7.29}
$$

όπου προς χάριν ευκολίας ορίσαμε τα πεδία

$$
A^L_\mu = -(\mathcal{P} - D^T)^{-1} g^{-1}\partial_\mu g, \quad A^R_\mu = (\mathcal{P} - D)^{-1}\partial_\mu g g^{-1}, \quad \mu = \tau, \sigma\,. \tag{7.30}
$$

Χρησιμοποιώντας τώρα τις ταυτότητες (Γ′.4) η (7.29) μπορεί να γραφτεί ως

$$
\int_{\partial\Sigma} \delta L_{k;\lambda} = \frac{k}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta h h^{-1}, \partial_\sigma g g^{-1} - \Omega g^{-1}\partial_\sigma g - (1 - \Omega D^T) A^L_\sigma + (D - \Omega) A^R_\sigma)\,. \tag{7.31}
$$

Ακολουθώντας τα ίδια βήματα βρίσκουμε ότι

$$
\int_{\partial D} \delta\omega_{k;\lambda} = -\frac{k}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta h h^{-1}, \partial_\tau g g^{-1} + (D - \Omega) A^R_\tau + \Omega g^{-1}\partial_\tau g + (1 - \Omega D^T) A^L_\tau)\,. \tag{7.32}
$$

Συνδυάζοντας τις (7.31), (7.32) βρίσκουμε ότι η συνολική συνεισφορά στην μεταβολή της δράσης (7.25) από το σύνορο είναι η

$$
\delta S|_{\partial\Sigma} = \frac{k}{2\pi} \int_{\partial\Sigma} \mathrm{tr}(\delta h h^{-1}, \nabla_+ g g^{-1} + \Omega g^{-1}\nabla_- g + (1 - \Omega)(A_+ + A_-))\,. \tag{7.33}
$$

Χρησιμοποιώντας τις (6.92) βρίσκουμε ότι στην περίπτωση του λ G-προτύπου η (7.33) γράφεται ως

$$
\delta S|_{\partial\Sigma} = \frac{k}{2\pi} \int_{\partial\Sigma} \mathrm{tr}(\delta h h^{-1}, (\lambda^{-1} - \Omega) A_+ - (\lambda^{-1}\Omega - 1) A_-)\,, \tag{7.34}
$$

Επομένως, οι βράνες (6.55) με την 2-μορφή (7.27) αποτελούν λύση των συνοριακών συνθηκών[2]

$$
(\lambda^{-1} - \Omega) A_+|_{\partial\Sigma} = (\lambda^{-1}\Omega - 1) A_-|_{\partial\Sigma}\,. \tag{7.35}
$$

[2] Οι (7.35), δεδομένης της ιδιότητας $\Omega^T\Omega = \mathbb{1}$ συνεπάγονται την συνθήκη μηδενικής ροής ορμής στο σύνορο.

Γνωρίζουμε από την προηγούμενη ανάλυση ότι η γεωμετρία (6.55) για να αποτελεί ολοκληρώσιμη γεωμετρία πρέπει ο πίνακας Ω να είναι μοναδιακός. Σε αυτή την περίπτωση οι συνοριακές συνθήκες (7.35) συνεπάγονται τις ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες (7.5).

Στην περίπτωση του λ G/H-προτύπου χωρίζουμε τον συνοριακό όρο (7.33) στις $\mathfrak{g}_{(0)}$ και $\mathfrak{g}_{(1)}$ συνιστώσες. Βάση των εξισώσεων (6.120) και του $\mathbb{Z}_2$ διαχωρισμού του πίνακα Ω η (7.33) γράφεται ως

$$\delta S|_{\partial\Sigma} = \frac{k}{2\pi}\int_{\partial\Sigma} \mathrm{tr}(\delta h h^{-1}, (1-\Omega)A_\tau)_{(0)} + \mathrm{tr}(\delta h h^{-1}, (\lambda^{-1}-\Omega)A_+ - (\lambda^{-1}\Omega - 1)A_-)_{(1)} . \tag{7.36}$$

Ο μηδενισμός του οδηγεί στις συνοριακές συνθήκες

$$A_\tau^{(0)}|_{\partial\Sigma} = \Omega A_\tau^{(0)}|_{\partial\Sigma} , \quad (\lambda^{-1}-\Omega)A_+^{(1)}|_{\partial\Sigma} = (\lambda^{-1}\Omega - 1)A_-^{(1)}|_{\partial\Sigma} . \tag{7.37}$$

Απαιτώντας επιπλέον $\Omega^2(\mathfrak{g}^{(1)}) = \mathbb{1}$ βρίσκουμε

$$\Omega(\mathfrak{g}^{(0)}) = \mathbb{1} \text{ ή } A_\tau^{(0)} = 0 \qquad \text{και} \qquad A_+^{(1)} = \Omega A_-^{(1)} , \tag{7.38}$$

που είναι ακριβώς οι ολοκληρώσιμες σ.σ. που παρουσιάσαμε με τον μέθοδο του μονόδρομου πίνακα.

Σε αυτό το σημείο επισημαίνουμε ότι η συνθήκη της μοναδιακότητας του πίνακα Ω είναι ισοδύναμη με την απαίτηση οι σ.σ. (7.35), (7.36) γραμμένες συναρτήσει των $A_\pm$ είναι ανεξάρτητες της παραμέτρου λ. Δεν καταφέραμε όμως να συνδέσουμε την ανεξαρτησία αυτή, με την διατήρηση της ολοκληρωσιμότητας.

Τέλος θα κλείσουμε με την συνθήκη κβάντωσης των θέσεων των επιτρεπτών βρανών, την οποία θα εξάγουμε για γενική Lie ομάδα G. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (7.24), (7.27) βρίσκουμε ότι η (6.20) ισούται με την τιμή της στο WZW όριο, επομένως οι επιτρεπτές θέσεις των κλασεων συζυγίας είναι ανεξάρτητες της παραμόρφωσης. Διαφορετικά, η ροή της 2-μορφής $F = B_{k,\lambda} - \omega_{k,\lambda}$, με $H_{k,\lambda} = dB_{k,\lambda}$, μέσα από την S^2 σφάιρα ή η 1-μορφή A, με $F = dA$, που συζευγνύεται στα άκρα της χορδής, είναι ανεξάρτητη της παραμέτρου παραμόρφωσης.

Μέρος **III**

Γενικευμένα λ-παραμορφωμένα πρότυπα και ολοκληρώσιμες βράνες

Κεφάλαιο 8

Γενικευμένα λ-παραμορφωμένα πρότυπα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κατασκευάσουμε γενικεύσεις των λ παραμορφώσεων του κεφαλαίου 6.6. Προς αυτή την κατεύθυνση θα θεωρήσουμε αρχικά σύμμορφες θεωρίες πεδίου της μορφής γινομένου WZW προτύπων

$$G_{k_1} \times G_{k_2} \times \cdots \times G_{k_N} \tag{8.1}$$

και χώρων πηλίκου

$$(G_{k_1} \times G_{k_2} \times \cdots \times G_{k_N})/G_{k_{\text{ολ.}}}\,, \quad k_{\text{ολ.}} = \sum_{i=1}^{N} k_i\,. \tag{8.2}$$

Η παραμόρφωση του αθροίσματος των WZW προτύπων θα βασιστεί στην ασύμμετρη βάθμωση τους (δες υποκεφάλαιο 5.3.3) και όχι στην διαγώνια του κάθε στοιχείου ομάδας g_i όπως στο σύνηθες λ-πρότυπο. Αυτό θα οδηγήσει σε διαταρακτικούς τελεστές που συζευγνύουν τα Kac-Moody ρεύματα από διαφορετικές άλγεβρες. Θα δούμε ότι στην περίπτωση των ίσων επιπέδων $k_1 = k_2 = \cdots = k_N$ τα παραμορφωμένα πρότυπα μας διαθέτουν β-συναρτήσεις των σταθερών ζεύξης και ανώμαλες διαστάσεις των διαταραχτικών τελεστών ίδιες με των αντίστοιχων συνήθων λ παραμορφώσεων. Στην περίπτωση όμως των άνισων επιπέδων, μια φαινομενικά μικρή αλλαγή, οδηγούμαστε σε θεωρίες με πλήρως διαφορετικά χαρακτηριστικά. Αναλυτικός υπολογισμός των β-συναρτήσεων, θα αποκαλύψει ότι οι ροές της ΟΕ των σταθερών ζεύξης αποκτούν μη τετριμμένα σταθερά σημεία στις χαμηλές ε-νέργειες. Συγκεκριμένα η παραμόρφωση της ΣΘΠ στον χώρο πηλίκου ρέει προς μια στην υπέρυθρη περιοχή της ίδιας μορφής (κάτω από έναν κατάλληλο επαναορισμό των επιπέδων), ενώ το άθροισμα των N WZW προτύπων ρέει προς υπέρυθρες ΣΘΠ, οι οποίες χαρακτηρίζονται από μη συμμετρικούς ολομορφικούς και αντιολομορφικούς τομείς με το ίδιο όμως κεντρικό φορτίο, $c_L = c_R$. Η τελευταία πρόταση θα μας απασχολήσει στο επόμενο κεφάλαιο.

8.1 Η περίπτωση των ίσων επιπέδων

8.1.1 Κατασκευή της δράσης

Θα ξεκινήσουμε με την πιο απλή περίπτωση δύο WZW προτύπων με το ίδιο επίπεδο k. Η δράση του προτύπου είναι η

$$S_{WZW,k}(g_1, g_2) = S_{WZW,k}(g_1) + S_{WZW,k}(g_2)\,. \tag{8.3}$$

Σύμφωνα με την (5.51) και απλοποιώντας τον φορμαλισμό του αντίστοιχου κεφαλαίου, η τοπικά συμμετρική επέκταση της (8.3) κάτω από τον μετασχηματισμό

$$H : (g_1, g_2) \mapsto (h^{-1} g_1 f, f^{-1} g_2 h)\,, \tag{8.4}$$

είναι η

$$\begin{aligned} S(g_1, g_2, A_{1\pm}, A_{2\pm}) &= S_{WZW,k}(g_1) + S_{WZW,k}(g_2) \\ &+ \frac{k}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A_{1-}J_{1+} - A_{2+}J_{1-} + A_{1-}D_1A_{2+}) \\ &+ \frac{k}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A_{2-}J_{2+} - A_{1+}J_{2-} + A_{2-}D_2A_{1+}) \\ &- \frac{k}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A_{1+}, A_{1-}) - \frac{k}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A_{2+}, A_{2-})\,, \end{aligned} \tag{8.5}$$

όπου $A_{1\pm} \in \mathfrak{g}, A_{2\pm} \in \mathfrak{g}$. Ακολουθώντας την διαδικασία του υποκεφαλαίου 6.7.1 , προσθέτουμε στην (8.5) δύο χειραλικά πρότυπα με στοιχεία ομάδας $\hat{g}_1, \hat{g}_2$, αναλλοίωτα κάτω απο τον μετασχηματισμό

$$(\hat{g}_1, \hat{g}_2) \mapsto (\hat{g}_1 f, \hat{g}_2 k)\,. \tag{8.6}$$

Η συνολική δράση έχει $2\dim(G)$ πλεονασματικούς βαθμούς ελευθερίας οι οποίοι μπορούν να ακυρωθούν θέτοντας $\hat{g}_1 = \hat{g}_2 = \mathbb{1}$. Επομένως η συνεισφορά από τα χειραλικά πρότυπα είναι η

$$-\frac{\kappa_1^2}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A_{1+}, A_{1-}), \quad -\frac{\kappa_2^2}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A_{2+}, A_{2-})\,, \tag{8.7}$$

με αποτέλεσμα η συνολική δράση να γράφεται ως [185, 186]

$$
\begin{aligned}
S_{k;\lambda_1,\lambda_2} = S_{WZW,k}(g_1) + S_{WZW,k}(g_2) \\
&+ \frac{k}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A_{1-}J_{1+} - A_{2+}J_{1-} + A_{1-}D_1A_{2+}) \\
&+ \frac{k}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A_{2-}J_{2+} - A_{1+}J_{2-} + A_{1-}D_2A_{2+}) \\
&- \frac{k\lambda_1^{-1}}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A_{1+}, A_{1-}) - \frac{k\lambda_2^{-1}}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A_{2+}, A_{2-})\,,
\end{aligned}
\tag{8.8}
$$

Ολοκληρώνοντας τα πεδία $A_{1\pm}$, $A_{2\pm}$ βρίσκουμε τις αλγεβρικές εξισώσεις

$$
\nabla_+ g_i g_i^{-1} = (\lambda_i^{-1} - 1)A_{i+}, \quad g_i^{-1}\nabla_- g_i = -(\lambda_{i+1}^{-1} - 1)A_{i+1-}, \quad i = 1, 2, \tag{8.9}
$$

όπου ο δείκτης i ορίζεται $i + 2 \equiv i$ (δηλαδή κυκλικός με βήμα δύο) και η συναλλοίωτη παράγωγος ως $\nabla_\pm g_i = \partial_\pm g_i - A_{i\pm}g_i + g_iA_{i+1\pm}$. Οι (8.9) είναι ισοδύναμες με τις

$$
\begin{aligned}
A_{1+} &= \lambda_1(\mathbb{1} - \lambda_1\lambda_2 D_1 D_2)^{-1}(J_{1+} + \lambda_2 D_1 J_{2+})\,, \\
A_{1-} &= -\lambda_1(\mathbb{1} - \lambda_1\lambda_2 D_2^T D_1^T)^{-1}(J_{2-} + \lambda_2 D_2^T J_{1-})\,, \\
A_{2+} &= \lambda_2(\mathbb{1} - \lambda_1\lambda_2 D_2 D_1)^{-1}(J_{2+} + \lambda_1 D_2 J_{1+})\,, \\
A_{2-} &= -\lambda_2(\mathbb{1} - \lambda_1\lambda_2 D_1^T D_2^T)^{-1}(J_{1-} + \lambda_1 D_1^T J_{2-})\,,
\end{aligned}
\tag{8.10}
$$

και αντικαθιστώντας αυτές στην (8.8) καταλήγουμε στην ενεργό δράση του διπλά λ-παραμορφωμένου προτύπου με ίσα επίπεδα

$$
\begin{aligned}
S_{k;\lambda_1,\lambda_2} = S_{WZW,k}(g_1) + S_{WZW,k}(g_2) - \\
- \frac{k}{\pi}\int_\Sigma d^2\sigma \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} J_{1+} & J_{2+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_2\mathcal{O}_{21}D_2^T & \lambda_1\mathcal{O}_{21} \\ \lambda_2\mathcal{O}_{12} & \lambda_1\lambda_2\mathcal{O}_{12}D_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{1-} \\ J_{2-} \end{pmatrix}\right].
\end{aligned}
\tag{8.11}
$$

Για μικρές τιμές των παραμέτρων παραμόρφωσης $\lambda_i << 1$, $i = 1, 2$ η (8.11) αναπαριστά δύο WZW πρότυπα διαταραγμένα από διγραμμικούς τελεστές, δηλαδή $J^A_{1+}J^A_{2-}$ και $J^A_{2+}J^A_{1-}$, δηλαδή

$$
S_{k;\lambda_1,\lambda_2} = S_{WZW,k}(g_1) + S_{WZW,k}(g_2) - \frac{k}{\pi}\int_\Sigma \lambda_1 \mathrm{Tr}(J_{1+}, J_{2-}) + \lambda_2 \mathrm{Tr}(J_{2+}, J_{1-}) + \ldots\,. \tag{8.12}
$$

Παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με το απλό λ-πρότυπο οι διαταραχτικοί τελεστές συζευγνύουν πεδία που ανήκουν σε διαφορετικές άλγεβρες, γεγονός που προκύπτει από την ασύμμετρη βάθμωση (8.4) για την κατασκευή της (8.8).

Τέλος να σημειώσουμε ότι η παραπάνω διαδικασία μπορεί εύκολα να γενικευτεί στην περίπτωση N WZW προτύπων. Σε αυτήν την περίπτωση η υποομάδα H, που αναβαθμίζεται σε τοπική, ορίζεται ως

$$H : (g_1, \dots g_i, \dots, g_N) \mapsto (k_1 g_1 k_2^{-1}, \dots k_i g_i k_{i+1}^{-1}, \dots, k_N g_N k_1^{-1})\,. \tag{8.13}$$

Προσθέτοντας N χειραλικά πρότυπα κατάλληλα βαθμωμένα, καταλήγουμε στην πολλαπλά λ-παραμορφωμένη δράση [186]

$$\begin{aligned} S_{k;\lambda_1,\dots\lambda_N} = \sum_{i=1}^{N} \Big(& S_{WZW,k}(g_i) + \frac{k}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A_{i-}J_{i+} - A_{i+1+}J_{i-} + A_{i-}D_i A_{i+1+}) \\ & - \frac{k\lambda_i^{-1}}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A_{i+}, A_{i-})\Big)\,, \end{aligned} \tag{8.14}$$

όπου ο δείκτης i ορίζεται ως $i + N \equiv i$. Η μη διαταρακτική συμμετρία της (8.14) είναι η

$$k \to -k, \quad \lambda_i \to \lambda_i^{-1}, \quad g_i \to g_{i+1}^{-1}\,, \tag{8.15}$$

και ο τανυστής ενέργειας/ορμής γράφεται σε απλή μορφή ως

$$T_{\pm\pm} = k\sum_{i=1}^{N} \frac{1-\lambda_i^2}{\lambda_i^2}\mathrm{Tr}(A_{i\pm}, A_{i\pm})\,. \tag{8.16}$$

8.1.2 Εξισώσεις κίνησης και ζεύγος *Lax*

Μεταβάλλοντας την δράση (8.8) ως προς τα πεδία g_1, g_2 βρίσκουμε τις εξισώσεις κίνησης

$$\nabla_-(\nabla_+ g_1 g_1^{-1}) = F_{+-}^{(1)}, \quad \nabla_-(\nabla_+ g_2 g_2^{-1}) = F_{+-}^{(2)}\,, \tag{8.17}$$

οι οποίες είναι ισοδύναμες με τις

$$\nabla_-(g_1^{-1}\nabla_+ g_1) = F_{+-}^{(2)}, \quad \nabla_-(g_2^{-1}\nabla_+ g_2) = F_{+-}^{(1)}\,, \tag{8.18}$$

όπου $F^{(i)}_{+-} = \partial_+ A_{i-} - \partial_+ A_{i-} - [A_{i+}, A_{i-}]$. Αντικαθιστώντας τις (8.9) στις (8.17) και (8.18) βρίσκουμε τις αποσυζευγμένες πρωτοβάθμιες διαφορικές εξισώσεις για τα $A_{1\pm}$, $A_{2\pm}$

$$\begin{aligned} &\partial_+ A_{i-} - \lambda_i^{-1}\partial_- A_{i+} = \lambda_i^{-1}[A_{i+}, A_{i-}]\,, \\ &\lambda_i^{-1}\partial_+ A_{i-} - \partial_- A_{i+} = \lambda_i^{-1}[A_{i+}, A_{i-}]\,, \end{aligned} \tag{8.19}$$

οι οποίες είναι ισοδύναμες με την εξίσωση επιπεδότητας για τα ζεύγη Lax [185, 186]

$$\mathcal{L}_{i\pm}(z_i) = \frac{z_i}{z_i \mp 1}\frac{2}{1+\lambda_i}A_{i\pm}, \quad i = 1,2\,. \tag{8.20}$$

8.1.3 β-συνάρτηση του προτύπου

Όπως είδαμε προηγουμένως, οι τελεστές $J^A_{1+}J^A_{2-}$, $J^A_{2+}J^A_{1-}$ διαταράσουν την $G_k \times G_k$ ΣΘΠ με αποτέλεσμα οι παράμετροι λ_1, λ_2 να αποκτούν εξάρτηση από την ενεργειακή κλίμακα. Οι αντίστοιχες β-συναρτήσεις έχουν υπολογιστεί με μεθόδους θεωρίας διαταραχών στην εργασία [187], όπου βάσει των συναρτήσεων συσχέτισης των Kac-Moody ρευμάτων $J_{1\pm}$, $J_{2\pm}$ και της μορφής των διαταραχτικών τελεστών, αποδείχθηκαν ίδιες με δύο ανεξάρτητων λ προτύπων, δηλαδή

$$\beta_{\lambda_i} = \frac{d\lambda_i}{d\ln\mu^2} = -\frac{c_G\lambda_i^2}{2k(1+\lambda_i^2)}, \quad i = 1,2\,. \tag{8.21}$$

Οι παραπάνω εκφράσεις είναι υπολογισμένες σε πρώτη τάξη ως προς τις δυνάμεις του $1/k$ και είναι ακριβείς στις παραμέτρους παραμόρφωσης.

Στην ίδια εργασία, οι συγγραφείς παρουσίασαν δύο επιπλέον τρόπους για την εξαγωγή των (8.21). Την μέθοδο υποβάθρου και την γεωμετρική, την οποία εφάρμοσαν για την περίπτωση ($\lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 0$). Το γεγονός ότι οι (8.21) είναι ίδιες με τις β-συναρτήσεις δύο ανεξάρτητων λ-προτύπων θα επιβεβαιωθεί και από το γεγονός ότι στο επίπεδο της χαμιλτονιανής τα δύο πρότυπα είναι κανονικά ισοδύναμα [186].

Οι β-συναρτήσεις (8.21) περιγράφουν ροές από το υπεριώδες σημείο $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$, όπου η σύμμορφη θεωρία πεδίου είναι το άθροισμα δύο WZW προτύπων, προς το υπέρυθρο $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, 1)$. Αντίστοιχα με το λ-πρότυπο στο υπέρυθρο σημείο η θεωρία χάνει $2\dim(G)$ βαθμούς ελευθερίας, και πρέπει να θεωρήσουμε το όριο

$$k \to \infty, \quad \mathcal{G} = g_1 g_2 = \mathbb{1} + \frac{iv}{k}\,, \tag{8.22}$$

με $v \in \mathfrak{g}$, για να τους επανακτήσουμε. Σε αυτήν την περίπτωση η δράση (8.11) γράφεται ως [186]

$$
\begin{aligned}
S_{\kappa_1^2,\kappa_2^2}(v,g) = -\frac{1}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(&\kappa_2^2 g^{-1}\partial_+ g g^{-1}\partial_- g \\
&+ (i\partial_+ v - \kappa_2^2 g^{-1}\partial_+ g)((k_1^2+k_2^2)\mathbb{1} + ad_v)^{-1}(i\partial_- v + k_2^2 g^{-1}\partial_- g))\,,
\end{aligned}
\tag{8.23}
$$

η οποία αποδεικνύεται ότι είναι η μη-αβελιανή T-δυική θεωρία δυο αλληλεπιδρώντων χειραλικών προτύπων, τα οποία κάτω από ένα επαναπροσδιορισμό των στοιχείων ομάδας καταλήγουν σε δύο ανεξάρτητα.

8.2 Η περίπτωση των άνισων επιπέδων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την γενίκευση της (8.14) στην περίπτωση των άνισων επιπέδων [188, 189]. Αυτή δίνεται ως

$$
\begin{aligned}
S_{\{k_i\};\{\lambda_i\}} = \sum_{i=1}^{N}\Big(&S_{WZW,k_i}(g_i) + \frac{k_i}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A_{i-}J_{i+} - A_{i+1+}J_{i-} + A_{i-}D_i A_{i+1+}) \\
&- \frac{k^{(i)}\lambda_i^{-1}}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(A_{i+},A_{i-})\Big)\,,
\end{aligned}
\tag{8.24}
$$

όπου $k^{(i)} = \sqrt{k_i k_{i-1}}$. Μεταβάλλοντας την (8.24) ως προς τα πεδία $A_{i\pm}$ βρίσκουμε τις αλγερβικές εξισώσεις

$$
\begin{aligned}
\nabla_+ g_i g_i^{-1} &= \Big(\lambda_i^{-1}\lambda_0^{(i)} - 1\Big)A_{i+}\,, \\
-g_{i-1}^{-1}\nabla_- g_{i-1} &= \Big(\lambda_{i+1}^{-1}(\lambda_0^{(i)})^{-1} - 1\Big)A_{i-}\,,
\end{aligned}
\tag{8.25}
$$

με $i = 1, \ldots, N$ και υπενθυμίζουμε ότι ο δεικτης i ορίζεται $i = i + N$. Οι σταθερές $\lambda_0^{(i)}$ ορίζονται ως $\lambda_0^{(i)} = \sqrt{\frac{k_{i-1}}{k_i}}$, οι οποίες δεν είναι όλες ανεξάρτητες δεδομένου ότι $\prod_{i=1}^N \lambda_0^{(i)} = 1$. Στην περίπτωση των ίσων επιπέδων ισχύει ότι $\lambda_0^{(i)} = 1$, $\forall i = 1, \ldots, N$.

Λύνοντας τις εξισώσεις (8.25) βρίσκουμε τα πεδία $A_{i\pm}$ συναρτήσει των στοιχείων ομάδας

g_i και αντικαθιστώντας αυτά στην (8.24) βρίσκουμε την ενεργό δράση

$$
\begin{aligned}
S_{\{k_i\};\{\lambda_i\}} &= \frac{k_1}{12\pi}\int \mathrm{tr}(g_1^{-1}dg_1)^3 + \frac{k_1}{\pi}\int d^2\sigma \mathrm{Tr}\bigg(\frac{1}{2}J_+^{(1)}D_1\frac{\mathbb{1}+\hat{D}_1^T\hat{D}_n^T\ldots\hat{D}_2^T}{\mathbb{1}-\hat{D}_1^T\hat{D}_n^T\ldots\hat{D}_2^T}J_-^{(1)} \\
&+\sum_{i=2}^{n} J_+^{(i)}(\lambda_0^{(i)})^{-1}\lambda_i\hat{D}_{i-1}^T\ldots\hat{D}_2^T(\mathbb{1}-\hat{D}_1^T\hat{D}_n^T\ldots\hat{D}_2^T)^{-1}J_-^{(1)}\bigg) + (\text{κυκλ. } 1,2,\ldots,n)\,,
\end{aligned}
\tag{8.26}
$$

όπου

$$
\hat{D}_i = (\lambda_0^{(i)})^{-1}\lambda_i^T D_i\,,\quad (D_i)_{ab} = \mathrm{Tr}(t_a g_i t_b g_i^{-1})\,,\quad i=1,2,\ldots,n\,, \tag{8.27}
$$

Στο όριο $\lambda_i << 1$ η θεωρία περιγράφει N WZW πρότυπα σε άνισα επίπεδα δαταραγμένα απο διγραμμικούς τελεστές των Kac-Moody ρευμάτων $J_{i\pm}$. Συγκεκριμένα βρίσκουμε

$$
S = \sum_{i=1}^{n} S_{k_i}(g_i) + \sum_{i=1}^{n} k^{(i+1)}\int d^2\sigma\lambda_{i+1}\mathrm{Tr}(J_+^{(i+1)}, J_-^{(i)}) + \mathcal{O}(\lambda^2)\,. \tag{8.28}
$$

Για την περίπτωση $N=2$ οι (8.25) γράφονται ως

$$
\begin{aligned}
\nabla_+ g_1 g_1^{-1} &= (\lambda_0^{-1}\lambda_1^{-1}-1)A_{1+}, \quad g_2^{-1}\nabla_- g_2 = -(\lambda_0\lambda_1^{-1}-1)A_{1-}, \\
\nabla_+ g_2 g_2^{-1} &= (\lambda_0\lambda_2^{-1}-1)A_{2+}, \quad g_1^{-1}\nabla_- g_1 = -(\lambda_0^{-1}\lambda_2^{-1}-1)A_{2-}\,,
\end{aligned}
\tag{8.29}
$$

οι οποίες είναι ισοδύναμες με τις

$$
\begin{aligned}
A_{1+} &= \lambda_1(\mathbb{1}-\lambda_1\lambda_2 D_1 D_2)^{-1}(\lambda_0 J_{1+} + \lambda_2 D_1 J_{2+})\,, \\
A_{1-} &= -\lambda_1(\mathbb{1}-\lambda_1\lambda_2 D_2^T D_1^T)^{-1}(\lambda_0^{-1} J_{2-} + \lambda_2 D_2^T J_{1-})\,, \\
A_{2+} &= \lambda_2(\mathbb{1}-\lambda_1\lambda_2 D_2 D_1)^{-1}(\lambda_0^{-1} J_{2+} + \lambda_1 D_2 J_{1+})\,, \\
A_{2-} &= -\lambda_2(\mathbb{1}-\lambda_1\lambda_2 D_1^T D_2^T)^{-1}(\lambda_0 J_{1-} + \lambda_1 D_1^T J_{2-})\,,
\end{aligned}
\tag{8.30}
$$

και η ενεργός δράση (8.26) γράφεται στην μορφή

$$
\begin{aligned}
S_{k_1,k_2;\lambda_1,\lambda_2} &= S_{WZW,k_1}(g_1) + S_{WZW,k_2}(g_2) - \\
&-\frac{1}{\pi}\int_\Sigma d^2\sigma \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} J_{1+} & J_{2+}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1\lambda_1\lambda_2\mathcal{O}_{21}D_2^T & k_2\lambda_0\lambda_1\mathcal{O}_{21} \\ k_1\lambda_0^{-1}\lambda_2\mathcal{O}_{12} & k_2\lambda_1\lambda_2\mathcal{O}_{12}D_1^T\end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_{1-} \\ J_{2-}\end{pmatrix}\right]\,,
\end{aligned}
\tag{8.31}
$$

με $\lambda_0 = \sqrt{k_1/k_2}$. Αυτή διαθέτει την μη διαταρακτική συμμετρία

$$
k_1 \to -k_2,\quad k_2 \to -k_1,\quad \lambda_1 \to \lambda_2^{-1} \quad \lambda_2 \to \lambda_1^{-1},\quad g_1 \to g_2^{-1},\quad g_2 \to g_1^{-1}\,, \tag{8.32}
$$

και στο όριο $\lambda_1, \lambda_2 << 1$ γράφεται στην μορφή

$$S_{k_1,k_2;\lambda_1,\lambda_2} = S_{k_1}(g_1) + S_{k_2}(g_2) - \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\pi} \int d^2\sigma \lambda_1 \mathrm{Tr}(J_{1+}, J_{2-}) + \lambda_2 \mathrm{Tr}(J_{2+}, J_{1-}) + \ldots \tag{8.33}$$

Τέλος, στην περίπτωση $(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda, 0)$, η οποία θα χρησιμοποιηθεί για την παρουσίαση παραδειγμάτων ολοκληρώσιμων βρανών, η (8.31) γράφεται στην απλή μορφή

$$S_{k_1,k_2;\lambda} = S_{\mathrm{WZW},k_1}(g_1) + S_{\mathrm{WZW},k_2}(g_2) - \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\pi} \lambda^{-1} \int d^2\sigma \mathrm{Tr}(J_{1+}, J_{2-}) \,. \tag{8.34}$$

8.2.1 Εξισώσεις κίνησης και ζεύγος Lax

Όπως και στην περίπτωση των ίσων επιπέδων, οι εξισώσεις κίνησης του προτύπου που μελετάμε μπορούν να γραφτούν ως $2N$ ανεξάρτητες πρωτοβάθμιες διαφορικές εξισώσεις

$$\begin{aligned} \partial_- A_{i+} &= -\frac{1 - (\lambda_0^{(i)})^{-1} \lambda_i}{1 - \lambda_i^2} \left[A_{i+}, A_{i-} \right] , \\ \partial_+ A_{i-} &= \frac{1 - \lambda_0^{(i)} \lambda_i}{1 - \lambda_i^2} \left[A_{i+}, A_{i-} \right] . \end{aligned} \tag{8.35}$$

Είναι εύκολο να δείξει κάποιος ότι οι (8.35) είναι ισοδύναμες με την εξίσωση επιπεδότητας για τα N Lax ζεύγη [188, 189]

$$\mathcal{L}_{i\pm} = \frac{2z}{z \mp 1} \tilde{A}_{i\pm}, \quad \tilde{A}_{i+} = \frac{1 - \lambda_0^{(i)} \lambda_i}{1 - \lambda_i^2} A_{i+}, \quad A_{i-} = \frac{1 - (\lambda_0^{(i)})^{-1} \lambda_i}{1 - \lambda_i^2} A_{i-}, \quad z \in \mathbb{C} \,. \tag{8.36}$$

Οι αγκύλες Maillet οι οποίες εξασφαλίζουν τα άπειρα φορία του προτύπου μας, να μετατίθενται κατά Poisson, έχουν παρουσιαστεί στην εργασία [31].

8.2.2 Χαμιλτονιανός Φορμαλισμός

Σε αυτό το σημείο θα εφαρμόσουμε τον χαμιλτονιανό φορμαλισμό, που παρουσιάσαμε στην περίπτωση του λ-πρότυπου, για την δράση (8.24) με $N = 2$. Στόχος είναι να υπολογίσουμε τις Poisson αγκύλες των πεδίων $A_{1\pm}, A_{2\pm}$, οι οποίες αποτελούν την παραμορφωμένη άλγβερα του προτύπου.

Παραμετροποιώντας τα στοιχεία ομάδας ως $g_1 = g_1(X_1)$ και $g_2 = g_2(X_2)$ βρίσκουμε ότι η αντίστοιχη δράση γράφεται στην μορφή

$$
\begin{aligned}
S_{k_1,k_2;\lambda_1,\lambda_2} = \frac{k_1}{4\pi}\int d^2\sigma\Big(\frac{1}{2}R^a_{1\mu}R^a_{1\nu}(\dot{x_1}^\mu\dot{x_1}^\nu - x_1'^\mu x_1'^\nu) + \lambda^{(1)}_{\mu\nu}\dot{x_1}^\mu x_1'^\nu\Big)+ \\
+\frac{k_2}{4\pi}\int d^2\sigma\Big(\frac{1}{2}R^a_{2\mu}R^a_{2\nu}(\dot{x_2}^\mu\dot{x_2}^\nu - x_2'^\mu x_2'^\nu) + \lambda^{(2)}_{\mu\nu}\dot{x_2}^\mu x_2'^\nu\Big)+ \\
+\frac{k_1}{4\pi}\int d^2\sigma\Big(2iA^a_-R^a_{1\mu}(\dot{x_1}^\mu + x_1'^\mu) - 2iB^a_+L^a_{1\mu}(\dot{x_1}^\mu - x_1'^\mu) + 4B^a_+D^{ba}_1A^b_-\Big) \\
+\frac{k_2}{4\pi}\int d^2\sigma\Big(2iB^a_-R^a_{2\mu}(\dot{x_2}^\mu + x_2'^\mu) - 2iA^a_+L^a_{2\mu}(\dot{x_2}^\mu - x_2'^\mu) + 4A^a_+D^{ba}_1B^b_-\Big) \\
-\frac{\sqrt{k_1k_2}}{\pi}\int d^2\sigma \mathrm{Tr}\{B^a_+(\lambda_2^{-1})^{ab}B^b_- + A^a_+(\lambda_1^{-1})^{ab}A^b_-\}\,.
\end{aligned}
\tag{8.37}
$$

Οι συζυγείς ορμές στις μεταβλητές του παραμετρικού χώρου είναι

$$
\begin{aligned}
\pi^{(1)}_\mu &= \frac{k_1}{4\pi}(R^a_{1\mu}R^a_{1\nu}\dot{X}^\nu + \lambda^{(1)}_{\mu\nu}X'^\nu + 2iA^a_-R^a_{1\mu} - 2iB^a_+L^a_{1\mu})\,, \\
\pi^{(2)}_\mu &= \frac{k_2}{4\pi}(R^a_{2\mu}R^a_{2\nu}\dot{X}^\nu + \lambda^{(2)}_{\mu\nu}X'^\nu + 2iB^a_-R^a_{1\mu} - 2iA^a_+L^a_{1\mu})\,, \\
P_\pm &= \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{A_\pm}} = 0, \quad Q_\pm = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{B_\pm}} = 0\,.
\end{aligned}
\tag{8.38}
$$

Όπως και στην περίπτωση του λ-προτύπου ορίζουμε συναρτήσει των παραμέτρων του φασικού χώρου δύο ζεύγη πεδίων $\mathcal{J}_{1\pm}$ και $\mathcal{J}_{2\pm}$ που ικανοποιούν δύο αντίγραφα της $\hat{\mathfrak{g}}_{k_1}\oplus\hat{\mathfrak{g}}_{k_2}$ Kac-Moody άλγεβρας. Μετά από απλή αλλά χρονοβόρα άλγβερα βρίσκουμε ότι η χαμιλτονιανή πυκνότητα του προτύπου δίνεται ως

$$
\mathcal{H}' = \mathcal{H} + a_+P_+ + a_-P_- + b_+Q_+ + b_-Q_- \tag{8.39}
$$

με

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H} = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{2}k_i\Big(\mathcal{J}^A_{i+}\mathcal{J}^A_{i+} + \mathcal{J}^A_{i-}\mathcal{J}^A_{i-} + 4i(A^A_{i+1+}\mathcal{J}^A_{i-} - A^A_{i-}\mathcal{J}^A_{i+}) - \\
2(A^A_{i+} - A^A_{i-})(A^A_{i+} - A^A_{i-}) + 4A^A_{i+}(\lambda_i^{-1}\delta_{AB} - \delta_{AB})A^B_{i-}\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{8.40}
$$

Ακολουθώντας την προσέγγιση του Dirac για συστήματα με δεσμούς βρίσκουμε τους δευτερογενείς δεσμούς

$$
\begin{aligned}
\left\{P_{+}^{A}, H\right\} &= 0 \Rightarrow i\mathcal{J}_{2-}^{A} - A_{1+}^{A} + \lambda_0(\lambda_1^{-1})^{AB} A_{1-}^{B} = 0\,, \\
\left\{P_{-}^{A}, H\right\} &= 0 \Rightarrow i\mathcal{J}_{1+}^{A} + A_{1-}^{A} - \lambda_0^{-1}(\lambda_1^{-1})^{BA} A_{1+}^{B} = 0\,, \\
\left\{Q_{+}^{A}, H\right\} &= 0 \Rightarrow i\mathcal{J}_{1-}^{A} - A_{2+}^{A} + \lambda_0^{-1}(\lambda_2^{-1})^{AB} A_{2-}^{B} = 0\,, \\
\left\{Q_{-}^{A}, H\right\} &= 0 \Rightarrow i\mathcal{J}_{2+}^{A} + A_{2-}^{A} - \lambda_0(\lambda_2^{-1})^{BA} A_{2+}^{B} = 0\,,
\end{aligned}
\tag{8.41}
$$

ενώ πρωτογενείς και δευτερογενείς αποδεικνύεται ότι είναι δεύτερης τάξης, που σημαίνει ότι μπορούμε να τους επιβάλουμε στον φασικό χώρο της θεωρίας μειώνοντας την διάσταση του, αλλά με το κόστος ότι θα πρέπει να αντικατασταθούν οι αγκύλες Poisson με τις Dirac (6.112). Βρίσκουμε ότι η χαμιλτονιανή, στον μειωμένο φασικό χώρο δίνεται ως [189]

$$
H = \frac{1}{4\pi}\int d\sigma \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{k_{i+1}(1-\lambda_i^2)}{\lambda_i^2}\mathrm{Tr}(A_{i+}, A_{i+}) + \frac{k_i(1-\lambda_i^2)}{\lambda_i^2}\mathrm{Tr}(A_{i-}, A_{i-})\right). \tag{8.42}
$$

Δεδομένου ότι τα πεδία $A_{1\pm}$, $A_{2\pm}$ μετατίθενται κατά Poisson, είναι προφανές ότι για $k_1 = k_2$ η Χαμιλτονιανή (8.42) είναι κανονικά ισοδύναμη με την Χαμιλτονιανή δύο ανεξάρτητων λ-προτύπων με παραμέτρους λ_1, λ_2. Η σχέση που ορίζει την ισοδυναμία είναι η

$$
A_{i\pm} = \tilde{A}_{i\pm} \quad i = 1, 2\,, \tag{8.43}
$$

με $A_{i\pm} = A_{i\pm}(g_1, g_2; \lambda_1, \lambda_2)$ τα πεδία του διπλού λ-προτύπου και $\tilde{A}_{i\pm} = \tilde{A}_{i\pm}(\tilde{g}_i; \lambda_i)$ τα πεδία των δύο λ-προτύπων [186]. Η (8.43) ορίζει μια μη τοπική σχέση μεταξύ των g_1, g_2 και $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2$ όπως είθισται μεταξύ κανονικά ισοδύναμων θεωριών.

Τέλος υπολογίζοντας τις Dirac αγκύλες των $A_{i\pm}$, $i = 1, 2$ βρίσκουμε τις παρακάτω ανεξάρτητες άλγεβρες [1] [189]:

$$
\begin{aligned}
\left\{A_{1+}^{A}, A_{1+}^{B}\right\}_D &= i\frac{\tilde{e}_1^2(1+\lambda_0)}{k_2} f^{ABC}\left((1+\rho_1)A_{1-}^{C} - (1-\rho_1+2x_1(1+\rho_1))A_{1+}^{C}\right)\delta_{\sigma\sigma'} + \frac{2e_1^2}{k_2}\delta^{AB}\delta'_{\sigma\sigma'}\,, \\
\left\{A_{1-}^{A}, A_{1-}^{B}\right\}_D &= i\frac{\tilde{e}_1^2(1+\lambda_0^{-1})}{k_1} f^{ABC}\left((1-\rho_1)A_{1+}^{C} - (1+\rho_1+2x_1(1-\rho_1))A_{1-}^{C}\right)\delta_{\sigma\sigma'} - \frac{2e_1^2}{k_1}\delta^{AB}\delta'_{\sigma\sigma'}\,, \\
\left\{A_{1+}^{A}, A_{1-}^{B}\right\}_D &= i\tilde{e}_1^2 f^{ABC}\left(\frac{1}{k_1}(1+\rho_1)A_{1+}^{C} + \frac{1}{k_2}(1-\rho_1)A_{1-}^{C}\right)\delta(\sigma-\sigma')\,,
\end{aligned}
\tag{8.44}
$$

[1] Ανεξάρτητες εννοούμε ότι $\left\{A_{1a}, A_{2b}\right\}_D = 0$ με $a, b = \pm$.

και

$$\left\{A^A_{2+},A^B_{2+}\right\}_D = i\frac{\tilde{e}_2^2(1+\lambda_0^{-1})}{k_1}f^{ABC}\left((1-\rho_2)A^C_{2-}-(1+\rho_2+2x_2(1-\rho_2))A^C_{2+}\right)\delta_{\sigma\sigma'}+\frac{2e_2^2}{k_1}\delta^{AB}\delta'_{\sigma\sigma'}\,,$$
$$\left\{A^A_{2-},A^B_{2-}\right\}_D = i\frac{\tilde{e}_2^2(1+\lambda_0)}{k_2}f^{ABC}\left((1+\rho_2)A^C_{2+}-(1-\rho_2+2x_2(1+\rho_2))A^C_{2-}\right)\delta_{\sigma\sigma'}-\frac{2e_2^2}{k_2}\delta^{AB}\delta'_{\sigma\sigma'}\,,$$
$$\left\{A^A_{2+},A^B_{2-}\right\}_D = i\tilde{e}_2^2 f^{ABC}\left(\frac{1}{k_2}(1-\rho_2)A^C_{2+}+\frac{1}{k_1}(1+\rho_2)A^C_{2-}\right)\delta(\sigma-\sigma')\,, \tag{8.45}$$

με

$$x_i=\frac{1+\lambda_i^2}{2\lambda_i},\quad \rho_i=\frac{(1-\lambda_0)(1+\lambda_i)}{(1+\lambda_0)(1-\lambda_i)},\quad \tilde{e}_i^2=\frac{e_i^2}{\lambda_i+1},\quad e_i^2=\frac{\lambda_i^2}{\lambda_i^2-1}\,. \tag{8.46}$$

Παρόμοιες διπαραμετρικές άλγεβρες βρέθηκαν στην εργασία [190], μόνο με τεχνικές θεωρίας πεδίου.

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν τρείς ενδιαφέρουσες περίπτωσεις της παραπάνω άλγερβρας:
• Για ίσα επίπεδα, $k_1=k_2\to\lambda_0=1$, βρίσκουμε δύο αντίγραφα της άλγβερας του λ-προτύπου (6.113) με παραμέτρους λ_1,λ_2.
• Για $(\lambda_1,\lambda_2)\to(0,0)$ βρίσκουμε δύο αντίγραφα της $\hat{\mathfrak{g}}_{k_1}\oplus\hat{\mathfrak{g}}_{k_2}$ άλγεβρας.
• Για $(\lambda_1,\lambda_2)\to(\lambda_0,\lambda_0)$ βρίσκουμε ότι

$$\left\{A^A_{1+}(\sigma),A^B_{1+}(\sigma')\right\}=\frac{2\pi i}{k_2-k_1}f^{ABC}\Big((1+\lambda_0^2)A^C_{1+}-\lambda_0^2A^c_{1-}\Big)\delta_{\sigma\sigma'}+\frac{2\pi\lambda_0^2}{k_1-k_2}\delta^{AB}\delta'_{\sigma\sigma'}\,,$$
$$\left\{A^A_{1-}(\sigma),A^B_{1-}(\sigma')\right\}=\frac{2\pi i}{k_2-k_1}f^{ABC}A^C_{1-}\delta_{\sigma\sigma'}+\frac{2\pi}{k_2-k_1}\delta^{AB}\delta'_{\sigma\sigma'}\,,$$
$$\left\{A^A_{1+}(\sigma),A^B_{1-}(\sigma')\right\}=\frac{2\pi i}{k_2-k_1}f^{ABC}A^C_{+}\delta_{\sigma\sigma'}\,. \tag{8.47}$$

και

$$\left\{A^A_{2+}(\sigma),A^B_{2+}(\sigma')\right\}=\frac{2\pi i}{k_2-k_1}f^{ABC}A^C_{2+}\delta_{\sigma\sigma'}-\frac{2\pi}{k_2-k_1}\delta^{AB}\delta'_{\sigma\sigma'}\,,$$
$$\left\{A^A_{2-}(\sigma),A^B_{2-}(\sigma')\right\}=\frac{2\pi i}{k_2-k_1}f^{ABC}\Big((1+\lambda_0^2)A^C_{2-}-\lambda_0^2A^C_{2+}\Big)\delta_{\sigma\sigma'}-\frac{2\pi\lambda_0^2}{k_1-k_2}\delta^{AB}\delta'_{\sigma\sigma'}\,,$$
$$\left\{A^A_{2+}(\sigma),A^B_{2-}(\sigma')\right\}=\frac{2\pi i}{k_2-k_1}f^{ABC}A^C_{2-}\delta_{\sigma\sigma'}\,. \tag{8.48}$$

Επομένως τα πεδία A_{2+}, A_{1-} ικανοποιούν δύο αντίγραφα της $\hat{\mathfrak{g}}_{k_2-k_1}$ άλγεβρας.

8.3 λ-παραμόρφωση της ΣΘΠ σε χώρο πηλίκου

Παρακάτω θα κατασκευάσουμε και θα μελετήσουμε την λ-παραμόρφωση της ΣΘΠ σε χώρο πηλίκου $G_{k_1} \times G_{k_2}/G_{k_1+k_2}$. Η εργασία που θα ακολουθήσουμε είναι η [191], ενώ η περίπτωση $k_1 = k_2$ παρουσιάστηκε για πρώτη φορά στην [151] ως γενίκευση του λ G/H-προτύπου. Σε αντίθεση με το τελευταίο θα δούμε ότι η β-συνάρτηση για $k_1 \neq k_2$ αποκτά υπέρυθρα σημεία στα οποία ορίζεται μια ΣΘΠ σε διαγώνιο χώρο πηλίκου.

Ήδη από τις εργασίες [192–194] είχε αναφερθεί ότι η διαταραχή της $G_{k_1} \times G_{k_2}/G_{k_1+k_2}$ ΣΘΠ με τελεστές σύμμορφης διάστασης

$$\Delta_{k_1,k_2} = 1 - \frac{c_G}{2(k_1+k_2)+c_G}\,, \tag{8.49}$$

επάγει μια ολοκληρώσιμη ροή που καταλήγει σε υπέρυθρες ΣΘΠ της προαναφερθείσας μορφής.

8.3.1 Κατασκευή της ενεργούς δράσης

Θα ξεκινήσουμε με δύο WZW πρότυπα $G_{k_1} \times G_{k_2}$ και ένα χειραλικό ορισμένο σε χώρο πηλίκου, $G \times G/G$.[2] Εισάγοντας δύο κατάλληλα ζεύγη πεδίων βαθμίδας $A_{1\pm}$, $A_{2\pm}$, επεκτείνουμε την συμμετρία

$$(g_1, g_2) \mapsto (h_1^{-1} g_1 h_1\,,\, h_2^{-1} g_2 h_2), \quad (\hat{g}_1, \hat{g}_2) \mapsto (h_1^{-1}\hat{g}_1, h_2^{-1}\hat{g}_2)\,, \tag{8.51}$$

σε τοπική, με αποτέλεσμα η τελική θεωρία να έχει $\dim G$ βαθμούς ελευθερίας. Για να εκμηδενίσουμε τους $2\dim G$ πλεονασματικούς βαθμούς επιλέγουμε την βαθμίδα $\hat{g}_1 = \hat{g}_2 = \mathbb{1}$, και η συνεισφορά από το χειραλικό πρότυπο είναι η

$$S^{G\times G/G}_{PCM,\kappa^2} = \frac{-2\kappa^2}{\pi}\int_\Sigma d^2\sigma \mathrm{Tr}(\mathcal{B}_+, \mathcal{B}_-), \quad \mathcal{B}_\pm = \frac{1}{2}(A_{1\pm} - A_{2\pm})\,. \tag{8.52}$$

[2] Η δράση του $G \times G/G$ χειραλικού προτύπου είναι η

$$S^{G\times G/G}_{PCM,\kappa^2} = -\frac{\kappa^2}{\pi}\sum_{i=1}^{2}\int_\Sigma d^2\sigma \mathrm{Tr}(\hat{g}_i^{-1}\partial_+\hat{g}_i - B_+, \hat{g}_i^{-1}\partial_-\hat{g}_i - B_-) \tag{8.50}$$

Η συνολική δράση επομένως γράφεται στην μορφή [191]

$$S=\sum_{i=1}^{2}S^{G/G}_{WZW,k_i}(g_i,A_{i\pm})-k\frac{\lambda^{-1}-1}{\pi}\int_\Sigma d^2\sigma\mathrm{Tr}(\mathcal{B}_+,\mathcal{B}_-)\,, \tag{8.53}$$

όπου ορίσαμε τις παραμέτρους

$$\lambda=\frac{k}{k+2\kappa^2},\quad k=k_1+k_2,\quad s_i=\frac{k_i}{k},\quad i=1,2\,. \tag{8.54}$$

Μεταβάλλοντας την (8.53) ως προς τα πεδία $A_{1\pm},A_{2\pm}$ βρίσκουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}&s_1\nabla_+g_1g_1^{-1}=\frac{1}{2}(\lambda^{-1}-1)\mathcal{B}_+,\quad s_2\nabla_+g_2g_2^{-1}=-\frac{1}{2}(\lambda^{-1}-1)\mathcal{B}_+,\\&s_1g_1^{-1}\nabla_-g_1=-\frac{1}{2}(\lambda^{-1}-1)\mathcal{B}_-,\quad s_2g_2^{-1}\nabla_-g_2=\frac{1}{2}(\lambda^{-1}-1)\mathcal{B}_-\,,\end{aligned} \tag{8.55}$$

που είναι ισοδύναμες με τις

$$\begin{aligned}A_+^{(1)}&=\Lambda_{21}^{-1}((1-\lambda)(s_1J_+^{(1)}+s_2J_+^{(2)})-4s_1s_2\lambda(D_2-1)J_+^{(1)}),\\A_+^{(2)}&=\Lambda_{12}^{-1}((1-\lambda)(s_1J_+^{(1)}+s_2J_+^{(2)})-4s_1s_2\lambda(D_1-1)J_+^{(2)}),\\A_-^{(1)}&=-\Lambda_{12}^{-T}((1-\lambda)(s_1J_-^{(1)}+s_2J_-^{(2)})-4s_1s_2\lambda(D_2^T-1)J_-^{(1)}),\\A_-^{(2)}&=-\Lambda_{21}^{-T}((1-\lambda)(s_1J_-^{(1)}+s_2J_-^{(2)})-4s_1s_2\lambda(D_1^T-1)J_-^{(2)}),\end{aligned} \tag{8.56}$$

όπου

$$\Lambda_{12}=4\lambda s_1s_2(D_1-1)(D_2-1)+(\lambda-1)(s_1D_1+s_2D_2-1)\,. \tag{8.57}$$

Οι (8.55) συνεπάγονται τις

$$s_1\nabla_+g_1g_1^{-1}+s_2\nabla_+g_2g_2^{-1}=0,\quad s_1g_1^{-1}\nabla_-g_1+s_2g_2^{-1}\nabla_-g_2=0\,, \tag{8.58}$$

που αντιστοιχούν στην εναπομείνασα συμμετρία βαθμίδας της δράσης (8.53)

$$(g_1,g_2)\mapsto(L^{-1}g_1L,L^{-1}g_2L),\quad L=L(\sigma_+,\sigma_-)\in G\,. \tag{8.59}$$

Αντικαθιστώντας τις (8.56) στην (8.53) βρίσκουμε ότι η ενεργός δράση δίνεται ως

$$
\begin{aligned}
S_{k_1,k_2,\lambda} &= S_{WZW,k_1}(g_1) + S_{WZW,k_2}(g_2) - \\
&- \frac{k_1}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}\left[J_+^{(1)}\Lambda_{12}^{-T}\left((1-\lambda)(s_1 J_-^{(1)} + s_2 J_-^{(2)}) - 4s_1 s_2\lambda(D_2^T - 1)J_-^{(1)}\right)\right] \\
&- \frac{k_2}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}\left[J_+^{(2)}\Lambda_{21}^{-T}\left((1-\lambda)(s_1 J_-^{(1)} + s_2 J_-^{(2)}) - 4s_1 s_2\lambda(D_1^T - 1)J_-^{(2)}\right)\right],
\end{aligned}
\tag{8.60}
$$

η οποία για $\lambda = 0$ περιγράφει μια $G_{k_1} \times G_{k_2}/G_{k_1+k_2}$ ΣΘΠ με δράση

$$
\begin{aligned}
S^{G\times G/G} &= S_{k_1}(g_1) + S_{k_2}(g_2) \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(k_1 J_{1+} + k_2 J_{2+}, (k\mathbb{1} - k_1 D_1^T - k_2 D_2^T)^{-1}(k_1 J_{1-} + k_2 J_{2-}))\,.
\end{aligned}
\tag{8.61}
$$

Είναι σημαντικό να αναγνωρίσουμε τον τελεστή που διαταράσει την ΣΘΠ και επάγει ροές της ΟΕ. Μετά από μια σειρά πράξεων βρίσκουμε ότι για μικρές τιμές της παραμόρφωσης η (8.60) γράφεται ως [191]

$$
S_{k_1,k_2;\lambda} = S^{G\times G/G} - 4\lambda\frac{k}{\pi}\int_\Sigma \mathrm{Tr}(\Psi_+, \Psi_-) + \dots\,,
\tag{8.62}
$$

όπου

$$
\begin{aligned}
\Psi_+ &= \frac{1}{2}(s_1\nabla^{(0)}g_1 g_1^{-1} - s_2\nabla^{(0)}g_2 g_2^{-1})\,, \\
\Psi_- &= -\frac{1}{2}(s_1 g^{-1}\nabla^{(0)}g_1 - s_2 g_2^{-1}\nabla^{(0)}g_2)\,.
\end{aligned}
\tag{8.63}
$$

Όπως έδειξαν οι συγγραφείς στις [174,175] τα πεδία (8.63) είναι χειραλικά και αντιχειραλικά και αποτελούν τα μη αβελιανά παραφερμιόνια, γενικεύσεις των αντίστοιχων αβελιανών στην περίπτωση του λ-παραμορφωμένου $SU(2)/U(1)$ προτύπου [136].

8.3.2 Εξισώσεις κίνησης και ζεύγος Lax

Οι εξισώσεις κίνησης του προτύπου (8.60) είναι ισοδύναμες με την εξίσωση επιπεδότητας για το ζεύγος Lax [191]

$$
\mathcal{L}_\pm = \mathcal{A}_\pm + (a + z^{\pm 1}\sqrt{a^2+\beta})\mathcal{B}_\pm, \quad z \in \mathbb{C},
\tag{8.64}
$$

όπου οι συντελεστές δίνονται ως

$$\alpha = -\frac{(s_1 - s_2)(1-\lambda)}{1-\lambda(1-8s_1s_2)}, \quad \beta = \frac{1+\lambda-2\lambda^2(1-4s_1s_2)}{\lambda(1-\lambda(1-8s_1s_2))}, \tag{8.65}$$

και

$$\mathcal{A}_\pm = \frac{1}{2}(A_{1\pm} + A_{2\pm})\,. \tag{8.66}$$

Για ίσα επίπεδα $k_1 = k_2$ το ζεύγος (8.64) είναι ίδιο με της λ-παραμορφώμενης G/H θεωρίας.

8.3.3 β-συνάρτηση

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε τις εξισώσεις των ροών της ΟΕ για την παράμετρο λ, δηλαδή την απόκριση της σε μια απειροστή μεταβολή της ενεργειακής κλίμακας $t = \ln\mu^2$. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο υποβάθρου [191], βρίσκουμε ότι η β-συνάρτηση υπολογισμένη σε όλες τις τάξεις της παραμέτρου παραμόρφωσης, δίνεται ως

$$\beta_\lambda = -\frac{c_G\lambda(1-\lambda_1^{-1}\lambda)(1-\lambda_2^{-1}\lambda)(1-\lambda_3^{-1}\lambda)}{2(k_1+k_2)(1-\lambda_f^{-1}\lambda)^2}\,, \tag{8.67}$$

όπου

$$\lambda_1 = \frac{1}{s_2 - 3s_1}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{s_1 - 3s_2}, \quad \lambda_3 = \frac{1}{(s_1-s_2)^2}\,. \tag{8.68}$$

Η (8.67) έχει τέσσερα σταθερά σημεία όπου μηδενίζεται, τα $\lambda = 0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Για $\lambda \to 0$ το πρότυπο μας περιγράφει την ΣΘΠ σε χώρο πηλίκου, στην οποία αναφερθήκαμε προηγουμένως, διαταραγμένη από τον διγραμμικό τελεστή παραφερμιονίων, $\Psi_+^A\Psi_-^A$. Για τα υπόλοιπα σταθερά σημεία θα θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $k_1 > k_2$. Σε αυτή την περίπτωση, η τιμή λ_1 είναι αρνητική και ο διγραμμικός τελεστής επάγει ροές από το υπεριώδες $\lambda = 0$ προς το υπέρυθρο σημείο $\lambda = \lambda_1$, όπου βρίσκουμε πάλι μια ΣΘΠ σε χώρο πηλίκου της μορφής $G_{k_1-k_2} \times G_{k_2}/G_{k_1}$.[3] Σχηματικά η ροή της ΟΕ είναι η

$$\frac{G_{k_1} \times G_{k_2}}{G_{k_1+k_2}} \implies \frac{G_{k_1-k_2} \times G_{k_2}}{G_{k_1}}\,. \tag{8.69}$$

Στο όριο $\lambda = \lambda_2$ βρίσκουμε ότι η ΣΘΠ είναι μη-μοναδιακή ενώ το σταθερό σημείο $\lambda = \lambda_3$ είναι μεγαλύτερο της μονάδας επομένως θεωρείται μη φυσικό.

[3] Η υπέρυθρη ΣΘΠ αναγνωρίζεται μέσω του μετασχηματισμού $(g_1, g_2) \to (g_1, g = g_1g_2)$.

Κεφάλαιο 9

Ασύμμετρες σύμμορφες θεωρίες πεδίου στα υπέρυθρα σημεία ολοκληρώσιμων προτύπων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις ιδιότητες μη τετριμμένων υπέρυθρων ΣΘΠ, που προκύπτουν στα πλαίσια του προτύπου (8.24). Αρχικά, θα εξάγουμε την β-συνάρτηση του και θα βρούμε τα σημεία μηδενισμού της. Στην συνέχεια, ο υπολογισμός των κεντρικών φορτίων μέσω της C-συνάρτησης του Zamolodhcikov, θα αποκαλύψει ότι το πρότυπο ρέει προς μια πληθώρα ΣΘΠ ανάλογα την διάταξη των επιπέδων. Επιλέγοντας κάθε φορά διαφορετικές τύπου βαθμώσεις αθροίσματος WZW προτύπων, θα αποδείξουμε ότι αυτές χαρακτηρίζονται από ασύμμετρους ολομορφικούς και αντιολομορφικούς τομείς αλλά με το ίδιο κεντρικό φορτίο. Τέλος χρησιμοποιώντας μια διακριτή συμμετρία της (8.24) και την αντίστοιχη διαγραμματική της απεικόνιση θα ταξινομήσουμε τις ανεξάρτητες ΣΘΠ. Τα παραπάνω αποτελέσματα έχουν παρουσιαστεί στην εργασία [189].

9.1 β-συνάρτηση και καινούργια υπέρυθρα σημεία

Στις εργασίες [190, 195] είχε παρατηρηθεί ότι ΣΘΠ διαταραγμένες από διγραμμικούς τελεστές ρευμάτων, που ικανοποιούν Kac-Moody άλγεβρες με άνισα επίπεδα $k_L \neq k_R$, αποκτούν υπέρυθρα σημεία. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τεχνικές θεωρίας διαταραχών, οι συγγραφείς υπολόγισαν την β-συνάρτηση του προτύπου

$$S_{k_L,k_R;\lambda} = S_{WZW,k_L} + S_{WZW,k_R} - \frac{\lambda}{\pi}\int d^2\sigma J^A \bar{J}^A\,, \tag{9.1}$$

και την βρήκαν

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{c_G}{\sqrt{k_L k_R}} \frac{\lambda(\lambda-\lambda_0)(\lambda-\lambda_0^{-1})}{(1-\lambda^2)^2}, \quad \lambda_0 = \sqrt{\frac{k_L}{k_R}}\,. \tag{9.2}$$

Είναι προφανές ότι αυτή μηδενίζεται στα σημεία $\lambda = 0$, $\lambda = \lambda_0$ και $\lambda = \lambda_0^{-1}$. Το πρώτο είναι στο υπεριώδες, όπου η (9.1) περιγράφει μια $G_{k_L} \times G_{k_R}$ ΣΘΠ, ενώ τα άλλα δύο προκύπτουν στην περίπτωση $k_L \neq k_R$ και απαιτούν λεπτομερέστερη μελέτη. Υποθέτοντας ότι $k_L < k_R$ το $\lambda = \lambda_0 < 1$ είναι υπέρυθρο ευσταθές σημείο ενώ το $\lambda = \lambda_0^{-1} > 1$ είναι ευσταθές στο υπεριώδες. Μεταξύ των δύο σταθερών σημείων η θεωρία περνάει από το $\lambda = 1$ που αποτελεί πόλο για την β-συνάρτηση (9.2), επομένως θεωρούμε την περιοχή $\lambda > 1$, και άρα το $\lambda = \lambda_0^{-1}$, ως μη φυσική.

Για $(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda, 0)$ η (8.31) ταυτίζεται με την (9.1), επομένως οι β-συναρτήσεις τους είναι ίδιες. Το ίδιο αποτέλεσμα έχει βρεθεί και γεωμετρικά στην εργασία [188]. Σε αυτήν την περίπτωση, η αναγνώριση της υπέρυθρης ΣΘΠ είναι απλή. Θέτωντας $\lambda = \lambda_0$ και χρησιμοποιώντας την **Polyakov-Weigmann** ταυτότητα, βρίσκουμε την δράση

$$\begin{aligned} S &= S_{WZW,k_1}(g_1) + S_{WZW,k_2}(g_2) - \frac{k_2}{\pi}\int d^2\sigma\,\mathrm{Tr}(J_{1+}, J_{2-}) \\ &= S_{WZW,k_1}(g_2 g_1) + S_{WZW,k_2-k_1}(g_2)\,. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Επομένως το πρότυπο μας παρεμβάλεται μεταξύ δύο **WZW** προτύπων και η ροή σχηματικά είναι η

$$G_{k_1} \times G_{k_2} \Longrightarrow G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}\,. \tag{9.4}$$

Το αποτέλεσμα είναι συνεπές με το **C**-θεώρημα, που θα παρουσιαστεί παρακάτω, δεδομένου ότι το κεντρικό φορτίο στο υπέρυθρο είναι μικρότερο απο το υπεριώδες.

Στην περίπτωση που δεν έχουμε μηδενίσει καμία παράμετρο, η αναγνώριση των υπέρυθρων ΣΘΠ είναι πιο περίπλοκη, πόσο δε μάλλον για γενικό N. Αυτό θα μας απασχολήσει σε επόμενα υποκεφάλαια. Δεδομένης της μορφής του διαταρακτικού τελεστή στην (8.31), οι β-συναρτήσεις των παραμέτρων είναι ανεξάρτητες και δίνονται ως [189]

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\frac{c_G}{2k^{(i)}} \frac{\lambda_i^2(\lambda_i - \lambda_0^{(i)})(\lambda_i - (\lambda_0^{(i)})^{-1})}{(1-\lambda_i^2)^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, N\,. \tag{9.5}$$

Στο υπεριώδες $\lambda_i = 0$, $\forall i = 1, \ldots, N$ η ΣΘΠ είναι ένα γινόμενο $G_{k_1} \times \cdots \times G_{k_N}$ **WZW** προτύπων. Το υπέρυθρο σημείο, στο οποίο τείνει η θεωρία, είναι ευαίσθητο στην επιλογή της διάταξης των επιπέδων. Συγκεκριμένα, $\lambda_i = \lambda_0^{(i)}$ αν $k_i > k_{i-1}$ ή $\lambda_i = (\lambda_0^{(i)})^{-1}$ στην αντίθετη περίπτωση. Για $N = 2$, το υπέρυθρο σημείο είναι ένα, το $(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_0, \lambda_0)$, και η ροή ΟΕ της θεωρίας σχηματικά είναι η [188]

$$G_{k_1} \times G_{k_2} \Longrightarrow \frac{G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2-k_1} \tag{9.6}$$

Για $N > 2$ υπάρχει μια πληθώρα διαφορετικών υπέρυθρων σημείων στα οποία τείνει η θεωρία. Οπως θα δούμε παρακάτω μια διαφορετική ΣΘΠ ορίζεται σε καθένα.

Στο πρότυπο που μελετάμε, εκτός της β-συνάρτησης, έχουν υπολογιστεί επιπλέον οι ανώμαλες διαστάσεις και οι συναρτήσεις συσχέτισης των Kac-Moody ρευμάτων. Στις [161, 196] χρησιμοποιήθηκε θεωρία διαταραχών γύρω από το σύμμορφο συμείο της ροής της ΟΕ ενώ στην [197], οι συγγραφείς χρησιμοποίησαν την γεωμετρία του χώρου των σταθερών ζεύξης και την γνώση της ενεργού δράσης σε όλες τις τάξεις βρόγχων των παραμέτρων παραμόρφωσης.

9.2 Ταξινόμηση των υπέρυθρων ΣΘΠ

Όπως αναφέραμε τα σταθερά σημεία στο υπέρυθρο είναι ευαίσθητα στην επιλογή της διάταξης των WZW επιπέδων. Εξαιτίας όμως της μορφής τους, διαφορετικές διατάξεις μη γειτονικών επιπέδων αντιστοιχούν στο ίδιο υπέρυθρο σημείο[1] και στην ίδια ροή από το υπεριώδες. Επομένως θα ταξινομήσουμε τα διαφορετικά υπέρυθρα σημεία, και άρα τις διαφορετικές ΣΘΠ, συναρτήσει των διαφορετικών τιμών των παραμέτρων παραμόρφωσης (αν $\lambda_i = \lambda_0^{(i)}$ ή $\lambda_i = (\lambda_0^{(i)})^{-1}$). Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε το k_1 ως το μικρότερο επίπεδο. Επομένως κάθε υπέρυθρο σημείο θα γράφεται ως $((\lambda_0^{(1)})^{-1}, \lambda_0^{(2)}, \dots)$ εφόσον $k_N > k_1$ και $k_2 > k_1$. Για δεδομένο N έχουμε $(N-1)!$ διαφορετικές διατάξεις των επιπέδων που αντιστοιχούν σε 2^{N-2} διαφορετικά υπέρυθρα σημεία, άρα και ΣΘΠ.[2] Για να απλοποιήσουμε την γραφή τους θα χρησιμοποιήσουμε τον παρακάτω συμβολισμό:

Θα αντιστοιχήσουμε σε κάθε $\lambda_0^{(i)}$ ένα βέλος με κατεύθυνση προς τα πάνω στην θέση i και σε κάθε $(\lambda_0^{(j)})^{-1}$ ένα βέλος στην θέση j με κατεύθυνση προς τα κάτω. Επιπλέον, δεδομένης της σταθερής κατεύθυνσης των πρώτων δύο βελών (το πρώτο έχει κατεύθυνση προς τα

[1] Οι διατάξεις $k_1 < k_3 < k_2 < k_4$ και $k_1 < k_3 < k_4 < k_2$ αντιστοίχουν στο ίδιο υπέρυθρο σημείο $((\lambda_0^{(1)})^{-1}, \lambda_0^{(2)}, (\lambda_0^{(3)})^{-1}, \lambda_0^{(4)})$

[2] Παρακάτω θα δούμε ότι οι ανεξάρτητες ΣΘΠ είναι ακόμα λιγότερες εξαιτίας της συμμετρίας (9.64)

πάνω και το δεύτερο προς τα κάτω) για οποιαδήποτε διάταξη επιπέδων θα τα αγνοήσουμε.

Επομένως για $N = 3$ έχουμε δύο διαφορετικές ΣΘΠ στα υπέρυθρα σημεία $((\lambda_0^{(1)})^{-1}, \lambda_0^{(2)}, \lambda_0^{(3)}) = (\uparrow)$ και $((\lambda_0^{(1)})^{-1}, \lambda_0^{(2)}, (\lambda_0^{(3)})^{-1}) = (\downarrow)$. Για $N = 4$ έχουμε τα τέσσερα διαφορετικά σημεία

$$\begin{aligned}
(\uparrow, \uparrow) &= ((\lambda_0^{(1)})^{-1}, \lambda_0^{(2)}, \lambda_0^{(3)}, \lambda_0^{(4)})\,, \\
(\downarrow, \uparrow) &= ((\lambda_0^{(1)})^{-1}, \lambda_0^{(2)}, (\lambda_0^{(3)})^{-1}, \lambda_0^{(4)})\,, \\
(\uparrow, \downarrow) &= ((\lambda_0^{(1)})^{-1}, \lambda_0^{(2)}, \lambda_0^{(3)}, (\lambda_0^{(4)})^{-1})\,, \\
(\downarrow, \downarrow) &= ((\lambda_0^{(1)})^{-1}, \lambda_0^{(2)}, (\lambda_0^{(3)})^{-1}, (\lambda_0^{(4)})^{-1})\,,
\end{aligned} \tag{9.7}$$

ενώ για $N = 2$ το υπέρυθρο σημείο $(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_0, \lambda_0)$ θα το συμβολίζουμε με (0). Στα επόμενα υποκεφάλαια θα αναλύσουμε τις παραπάνω διαφορετικές ΣΘΠ.

9.3 C-συνάρτηση

Στην θεωρητική φυσική ειδικά στην κβαντική θεωρία πεδίου το C-θεώρημα του Zamolodchikov αναφέρει ότι για κάθε επανακανονικοποιήσιμη δισδιάστατη θεωρία πεδίου υπάρχει συνάρτηση $C(g, \mu)$, όπου $g = (g_1, g_2, \dots)$ η συλλογή των σταθερών ζεύξης της θεωρίας και μ η κλίμακα ενέργειας, η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1) Μειώνεται μοτονικά κάτω από μετασχηματισμούς της ΟΕ

2) Στα σύμμορφα σημεία g^* είναι σταθερή και ίση με το κεντρικό φορτίο των ΣΘΠ, $C(g^*, \mu) = c_{\text{cft}}$

Μια κομψή ερμηνεία της C-συνάρτησης σχετίζεται με την πληροφορία που χάνεται για τις μικρής κλίμακας (μεγάλες ενέργειες) συναρτήσεις συσχέτισης και με το γεγονός ότι η ροή απο το υπεριώδες προς το υπέρυθρο είναι μη αντιστρέψιμη.

Όπως απέδειξε ο Zamolodhcikov στην εργασία [199], ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{dC}{dt} = \beta^i \partial_i C = 24 G_{ij} \beta^i \beta^j\,, \tag{9.8}$$

όπου β^i οι β-συναρτήσεις των g_i και G_{ij} η μετρική στον χώρο των σταθερών ζεύξης.

Η έκφραση της C-συνάρτησης για το πρότυπο (8.24) έχει υπολογιστεί αναλυτικά στην εργασία [198] και δίνεται ως[3] [4]

$$C(\lambda_1,\ldots,\lambda_N;\lambda_0^{(1)},\ldots,\lambda_0^{(n)}) = N\dim G - \frac{c_G \dim G}{2}\sum_{i=1}^{N} F(k_i,\lambda_i)\,, \qquad (9.9)$$

όπου

$$F(k_i,\lambda_i) = \frac{1}{k_i} + \lambda_i^3 \frac{4-\lambda_i(3-\lambda_i^2)(\lambda_0^{(i)} + (\lambda_0^{(i)})^{-1})}{k^{(i)}(1-\lambda_i^2)^3}\,, \quad i = 1,2,\ldots,N\,. \qquad (9.10)$$

Σύμφωνα με όσα έχουμε αναφέρει η τιμή της (9.9) στα σύμμορφα σημεία δίνει το κεντρικό φορτίο της αντίστοιχης ΣΘΠ για μεγάλες τιμές των επιπέδων k_i. Για παράδειγμα, στο υπεριώδες $(\lambda_1,\ldots,\lambda_N) = (0,\ldots,0)$ βρίσκουμε ότι

$$C(0,\ldots,0;\lambda_0^{(1)},\ldots,\lambda_0^{(N)}) = N\dim G - \frac{c_G \dim G}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{k_i}\,, \qquad (9.11)$$

όπου η θεωρία είναι μια $G_{k_1}\times G_{k_2}\times\cdots\times G_{k_N}$ ΣΘΠ και το κεντρικό της φορτίο σε τάξη $1/k$ ισούται με την (9.11).[5]. Χρησιμοποιώντας την (9.10) θα υπολογίσουμε τα κεντρικά φορτία στα υπέρυθρα σημεία για $N = 2,3,4$, τα οποία και παρουσιάζουμε στον πίνακα 9.1 Υποθέτοντας ότι οι συμμετρίες των ΣΘΠ που αναζητούμε θα είναι της μορφής χειραλικών Kac-Moody συμμετριών και συμμετριών διαγώνιου χώρου πηλίκου χρησιμοποιούμε τον παρακάτω κανόνα αντιστοίχισης:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{k_i}-\text{όρος} \quad \Longrightarrow \quad G_{k_i}-\text{Kac-Moody συμμετρία}\,,\\
&\left(\frac{1}{k_i}+\frac{1}{k_j}-\frac{1}{k_i+k_j}\right)-\text{όρος} \quad \Longrightarrow \quad \frac{G_{k_i}\times G_{k_j}}{G_{k_i+k_j}}-\text{συμμετρία χώρου πηλίκου}\,.
\end{aligned}$$

Βάση του παραπάνω κανόνα είναι προφανές ότι η ΣΘΠ στο υπέρυθρο σημείο (0) χαρακτηρίζεται απο την συμμετρία

$$\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}}\times G_{k_2-k_1}\,, \qquad (9.13)$$

[3]Έχει υπολογιστεί για την περίπτωση $N = 2$. Η επέκταση του αποτελέσματος για γενικό N είναι προφανής δεδομένης της ανεξαρτησίας των παραμέτρων παραμόρφωσης.

[4]Στην εργασία [200] οι συγγραφείς υπολόγισαν την Weyl ανωμαλία του προτύπου και έδειξαν ότι είναι ακριβώς η C-συνάρτηση του Zamolodhcikov .

[5]Το κεντρικό φορτίο μιας G_K ΣΘΠ για μεγάλο k γράφεται

$$c = \frac{2k\dim(G)}{2k+c_G} = \dim(G) - \frac{c_G \dim G}{2k} + \ldots \qquad (9.12)$$

N	Υπερ. σημείο	$\sum_{i=1}^{n} F(k_i,\lambda_i)\big\vert_{\mathrm{IR}}$
2	(0)	$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2-k_1}-\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_2-k_1}$
3	$(\uparrow)$	$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_3-k_1}-\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_2-k_1}+\frac{1}{k_3-k_2}$
	$(\downarrow)$	$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2-k_1}-\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_3-k_1}+\frac{1}{k_2-k_3}$
4	$(\uparrow,\uparrow)$	$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_4-k_1}-\frac{1}{k_4}+\frac{1}{k_2-k_1}+\frac{1}{k_3-k_2}+\frac{1}{k_4-k_3}$
	$(\downarrow,\uparrow)$	$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_4-k_1}-\frac{1}{k_4}+\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_2-k_3}-\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_2-k_1}+\frac{1}{k_4-k_3}$
	$(\uparrow,\downarrow)$	$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_4-k_1}+\frac{1}{k_3-k_4}-\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_2-k_1}+\frac{1}{k_3-k_2}$
	$(\downarrow,\downarrow)$	$\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2-k_1}-\frac{1}{k_2}+\frac{1}{k_4-k_1}+\frac{1}{k_3-k_4}+\frac{1}{k_2-k_3}$

Πίνακας 9.1: Ο όρος τάξης $1/k$ του κεντρικού φορτίου στα υπέρυθρα σημεία για $N=2,3,4$.

όπως βρέθηκε και στην εργασία [188]. Οπως θα δούμε παρακάτω η γραφή (9.13) είναι παραπλανητική για τις θεωρίες που μελετάμε, διότι κάποιος/κάποια μπορεί να θεωρήσει ότι αυτή προκύπτει από ένα γινόμενο $G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}$ διαγώνια βαθμωμένο, δηλαδή συμμετρικό κάτω από τον μετασχηματισμό

$$(g_1,g_2)\mapsto (hg_1h^{-1},hg_2h^{-1}),\quad h=h(\sigma_+,\sigma_-)\in G \tag{9.14}$$

και ένα WZW πρότυπο, $G_{k_2-k_1}$. Επιπλέον τα επιχειρήματα βασισμένα στο κεντρικό φορτίο δεν προσδιορίζουν μονοσήμαντα τις συμμετρίες των ΣΘΠ για $N>2$. Για παράδειγμα στο υπέρυθρο σημείο $(\uparrow)$, μόνο βάση του κεντρικού φορτίου, βρίσκουμε την ΣΘΠ

$$\frac{G_{k_1}\times G_{k_3-k_1}}{G_{k_3}}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_3-k_2}\,, \tag{9.15}$$

ή την ΣΘΠ

$$\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_3-k_2}}{G_{k_3}}\times G_{k_3-k_1}\,. \tag{9.16}$$

Παρακάτω παρουσιάζουμε την μεθοδολογία αναγνώρισης των σύμμορφων συμμετρίων στα υπέρυθρα σημεία.

9.4 Αναγνώριση των υπέρυθρων ΣΘΠ

9.4.1 Συμμετρίες $Kac - Moody$

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα προσδιορίσουμε το υποσύνολο του χειραλικού (Χ) και αντιχειραλικού (Α) τομέα των υπέρυθρων ΣΘΠ του οποίου οι γεννήτορες ικανοποιούν Kac-Moody άλγεβρες.

Αρχικά θεωρούμε την περίπτωση $N = 2$ και κατόπιν θα επεκταθούμε για $N > 3$. Θα αποδειχθεί ότι είναι πιο εύκολο φορμαλιστικά, να μελετήσουμε την δράση πριν ολοκληρώσουμε τα πεδία $A_\pm, B_\pm$.[6]

Η δράση (8.24) για $N = 2$ και υπολογισμένη στο $(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_0, \lambda_0)$ γράφεται ως

$$\begin{aligned} S = S_{k_1}(g_1) + S_{k_2}(g_2) + \frac{k_1}{\pi}\int d^2\sigma\, \mathrm{Tr}(A_-\partial_+ g_1 g_1^{-1} - B_+ g_1^{-1}\partial_- g_1 + A_- g_1 B_+ g_1^{-1}) \\ + \frac{k_2}{\pi}\int d^2\sigma \mathrm{Tr}(B_-\partial_+ g_2 g_2^{-1} - A_+ g_2^{-1}\partial_- g_2 + B_- g_2 A_+ g_2^{-1} - A_+A_- - B_+B_-)\,. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Παραμετροποιώντας τα πεδία $A_\pm, B_\pm \in \mathfrak{g}$ με στοιχεία ομάδας $a_\pm, b_\pm \in G$

$$A_\pm = \partial_\pm a_\pm a_\pm^{-1}\,, \quad B_\pm = \partial_\pm b_\pm b_\pm^{-1} \tag{9.18}$$

και χρησιμοποιώντας την Polyakov-Weigmann ταυτότητα βρίσκουμε ότι η (9.17) γράφεται στην μορφή[7]

$$\begin{aligned} S = S_{k_1}(a_-^{-1} g_1 b_+) + S_{k_2}(b_-^{-1} g_2 a_+) - S_{k_2}(a_-^{-1} a_+) - S_{k_2}(b_-^{-1} b_+) \\ + S_{k_2-k_1}(a_-^{-1}) + S_{k_2-k_1}(b_+)\,. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η (9.20) δίνεται ως άθροισμα ανεξάρτητων WZW όρων, επομένως η σύμμορφη συμμετρία της διατηρείται σε κβαντικό επίπεδο, σε συμφωνία με τον μηδενισμό της β-συνάρτησης της.

---

[6] Θέσαμε $A_{1\pm} = A_\pm$ και $A_{2\pm} = B_\pm$

[7] Χρησιμοποιώντας την P-W ταυτότητα η (8.24) για $N = 2$ γράφεται ως

$$\begin{aligned} S = S_{k_1}(a_-^{-1} g_1 b_+) + S_{k_2}(b_-^{-1} g_2 a_+) - S_{\lambda_0\lambda_1^{-1}}(a_-^{-1} a_+) - S_{\lambda_0\lambda_2^{-1}}(b_-^{-1} b_+) \\ + S_{k_2\lambda_0\lambda_1^{-1}-k_1}(a_-^{-1}) + S_{k_2\lambda_0\lambda_2^{-1}-k_1}(b_+) + S_{k_2(\lambda_0\lambda_1^{-1}-1)}(a_+) + S_{k_2(\lambda_0\lambda_2^{-1}-1)}(b_-)\,. \end{aligned} \tag{9.19}$$

Για τον προσδιορισμό της χειραλικής συμμετρίας της (9.20) μετασχηματίζουμε τα πεδία ως ακολούθως

$$\begin{aligned} (g_1, g_2) &\mapsto (h_1^{-1} g_1 h_2, h_2^{-1} g_2 h_1)\,, \\ (a_\pm, b_\pm) &\mapsto (h_1^{-1} a_\pm, h_2^{-1} b_\pm)\,, \end{aligned} \tag{9.21}$$

με $h_1, h_2 \in G$. Η (9.20) κάτω από την (9.21) μετασχηματίζεται απειροστά ως

$$\delta S = \frac{k_2 - k_1}{\pi} \int d^2\sigma \mathrm{Tr}(A_- \partial_+ \epsilon_1 + B_+ \partial_- \epsilon_2)\,, \tag{9.22}$$

όπου $h_1 = e^{\epsilon_1^A T^A}$ και $h_2 = e^{\epsilon_2^A T^A}$. Απαιτώντας τα h_1, h_2 να είναι χειραλικές συναρτήσεις, δηλαδή

$$h_1 = h_1(\sigma_-), \quad h_2 = h_2(\sigma_+)\,, \tag{9.23}$$

βρίσκουμε ότι η (9.21) αποτελεί συμμετρία της (9.17), ή της (9.20), με γεννήτορες τα πεδία A_+, B_-. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις κίνησης τους (8.35)

$$\partial_+ A_- = \frac{1 - \lambda_1 \lambda_0^{-1}}{1 - \lambda_1^2} [A_+, A_-], \quad \partial_- B_+ = \frac{1 - \lambda_2 \lambda_0^{-1}}{1 - \lambda_2^2} [B_+, B_-]\,, \tag{9.24}$$

βρίσκουμε ότι στο υπέρυθρο σημείο (λ_0, λ_0) είναι χειραλικά και αντιχειραλικά πεδία, α-ντίστοιχα, τα οποία βάση των αγκύλων Poisson (8.44), (8.45), υπολογισμένων στο ίδιο σταθερό σημείο, ικανοποιούν δύο αντίγραφα της Kac-Moody άλγεβρας με κεντρική επέκταση $k_2 - k_1$

$$\begin{aligned} \left\{A_-^A(\sigma), A_-^B(\sigma')\right\} &= \frac{i}{k_2 - k_1} f^{ABC} A_-^C \delta(\sigma - \sigma') + \frac{1}{k_2 - k_1} \delta^{AB} \delta'(\sigma - \sigma')\,, \\ \left\{B_+^A(\sigma), B_+^B(\sigma')\right\} &= \frac{i}{k_2 - k_1} f^{ABC} B_+^C \delta(\sigma - \sigma') - \frac{1}{k_2 - k_1} \delta^{AB} \delta'(\sigma - \sigma')\,, \\ \left\{A_+^A, B_-^B\right\} &= 0\,. \end{aligned} \tag{9.25}$$

Βάση των παραπάνω δείξαμε ότι η υπέρυθρη ΣΘΠ (9.20) διαθέτει την Kac-Moody συμμετρία

$$\boxed{\left(G_{k_2 - k_1}\right)_L \times \left(G_{k_2 - k_1}\right)_R}\,. \tag{9.26}$$

Η πραπάνω ανάλυση μπορεί να γενικευτεί εύκολα στην περίπτωση για γενικό N. Ας θεωρήσουμε την παρακάτω διάταξη των επιπέδων του WZW προτύπου

$$k_1 < k_2 < \cdots < k_N \,. \tag{9.27}$$

Σε αυτή την περίπτωση το υπέρυθρο σημείο δίνεται ως

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N) = ((\lambda_0^{(1)})^{-1}, \lambda_0^{(2)}, \ldots, \lambda_0^{(N)}) \,, \tag{9.28}$$

και η δράση (8.24) παίρνει την μορφή

$$\begin{aligned} S = &\sum_{i=1}^{N} S_{k_i}((a_-^{(i)})^{-1} g_i a_+^{(i+1)}) - S_{k_N}((a_-^{(1)})^{-1} a_+^{(1)}) - \sum_{i=2}^{N} S_{k_i}((a_-^{(i)})^{-1} a_+^{(i)}) + \\ &+ S_{k_N - k_1}((a_-^{(1)})^{-1}) + \sum_{i=2}^{n} S_{k_i - k_{i-1}}(a_+^{(i)}) \,, \end{aligned} \tag{9.29}$$

όπου παραμετροποιήσαμε τα πεδία $A_{i\pm} \in \mathfrak{g}$ ως $A_{i\pm} = \partial_\pm a_{i\pm} (a_{i\pm})^{-1}$ και χρησιμοποιήσαμε την Polyakov-Weigmann ταυτότητα. Όπως και προηγουμένως, βρίσκουμε ότι κάτω από τον μετασχηματισμό

$$g_i \to h_i^{-1} g_i h_{i+1} , \quad a_{i\pm} \to h_i^{-1} a_{i\pm} \quad i = 1, \ldots, N \,, \tag{9.30}$$

η απειροστή μεταβολή της δράσης (9.29) είναι η

$$\delta S = \frac{k_N - k_1}{\pi} \int d^2\sigma \, \mathrm{Tr} A_{1-} \partial_+ \epsilon_1 + \sum_{i=2}^{N} \frac{k_i - k_{i-1}}{\pi} \int d^2\sigma \, \mathrm{Tr} A_{i+} \partial_- \epsilon_i \,, \tag{9.31}$$

που υποδηλώνει ότι η συμμετρία (9.30) με

$$h_1 = h_1(\sigma_+) , \quad h_i = h_i(\sigma_-) , \quad i = 2, \ldots, N \,, \tag{9.32}$$

γεννιέται από τα πεδία A_{1-} και A_{i+}, $i = 2, \ldots, N$, τα όποία, εφαρμόζοντας τον χαμιλτονιανό φορμαλισμό, βρίσκουμε ότι ικανοποιούν N αντίγραφα της Kac-Moody άλγεβρας με κεντρικές επεκτάσεις $k_N - k_1$ και $k_i - k_{i-1}$ αντίστοιχα. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η Kac-Moody συμμετρία της (9.29) είναι η

$$\boxed{\left(G_{k_2 - k_1} \times \cdots \times G_{k_N - k_{N-1}}\right)_L \times \left(G_{k_N - k_1}\right)_R} \,. \tag{9.33}$$

Αν κάνουμε μία μικρή αλλαγή στην διάταξη (9.27), δηλαδή διαλέξουμε $k_i < k_{i-1}$, το σύμμορφο σημείο είναι το

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots, \lambda_n) = ((\lambda_0^{(1)})^{-1}, \lambda_0^{(2)}, \ldots, (\lambda_0^{(i)})^{-1}, \ldots, \lambda_0^{(n)})\,. \tag{9.34}$$

Κάτω από τον ίδιο μετασχηματισμό (9.30) βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\delta S = \frac{k_n - k_1}{\pi} \int d^2\sigma \, \mathrm{Tr} A_-^{(1)} \partial_+ \epsilon_1 + \frac{k_{i-1} - k_i}{\pi} \int d^2\sigma \, \mathrm{Tr} A_-^{(i)} \partial_+ \epsilon_i + \\ + \sum_{\substack{j=2, \\ j\neq i}}^{n} (k_j - k_{j-1}) \int d^2\sigma \, \mathrm{Tr} A_+^{(i)} \partial_- \epsilon_i\end{aligned} \tag{9.35}$$

και βασισμένοι στην ίδια επιχειρηματολογία, καταλήγουμε ότι η Kac-Moody συμμετρία της ΣΘΠ στο σταθερό σημείο (9.34) είναι η

$$\boxed{\left(G_{k_2-k_1} \times \cdots \times \hat{G}_{k_i-k_{i-1}} \times \cdots \times G_{k_n-k_{n-1}}\right)_L \times \left(G_{k_n-k_1} \times G_{k_{i-1}-k_i}\right)_R}\,. \tag{9.36}$$

Το σύμβολο ˆ στο $G_{k_i-k_{i-1}}$ υποδηλώνει ότι αυτός ο όρος λείπει από το γινόμενο του αριστερού (αντιχειραλικού) τομέα. Στην πραγματικότητα εμφανίζεται στον δεξιό (χειραλικό) τομέα με τα επίπεδα αντεστραμμένα σε σχέση με την (9.33) έτσι ώστε η διαφορά τους να είναι θετικώς ορισμένη.

Βάση της παραπάνω ανάλυσης είναι εύκολο να προσδιορίσουμε τις Kac-Moody συμμετρίες του χειραλικού (Χ) και αντιχειραλικού (Α) τομέα των υπέρυθρων ΣΘΠ για $N = 2, 3, 4$ [189], τις οποίες παρουσιάζουμε στον παρακάτω πίνακα

Υπερ. Σημ.	K-M συμμετρίες
(0)	$\left(G_{k_2-k_1}\right)_L \times \left(G_{k_2-k_1}\right)_R$
$(\uparrow)$	$\left(G_{k_2-k_1} \times G_{k_3-k_2}\right)_L \times \left(G_{k_3-k_1}\right)_R$
$(\downarrow)$	$\left(G_{k_2-k_1}\right)_L \times \left(G_{k_3-k_1} \times G_{k_2-k_3}\right)_R$
$(\uparrow,\uparrow)$	$\left(G_{k_2-k_1} \times G_{k_3-k_2} \times G_{k_4-k_3}\right)_L \times \left(G_{k_4-k_1}\right)_R$
$(\downarrow,\uparrow)$	$\left(G_{k_2-k_1} \times G_{k_4-k_3}\right)_L \times \left(G_{k_4-k_1} \times G_{k_2-k_3}\right)_R$
$(\uparrow,\downarrow)$	$\left(G_{k_2-k_1} \times G_{k_3-k_2}\right)_L \times \left(G_{k_4-k_1} \times G_{k_3-k_4}\right)_R$
$(\downarrow,\downarrow)$	$\left(G_{k_2-k_1}\right)_L \times \left(G_{k_2-k_3} \times G_{k_3-k_4} \times G_{k_4-k_1}\right)_R$

Πίνακας 9.2: Kac-Moody συμμετρίες του χειραλικού και αντιχειραλικού τομέα των ΣΘΠ στα υπέρυθρα σημεία για $N = 2, 3, 4$

Μπορούμε ήδη να παρατηρήσουμε την ασυμμετρία μεταξυ των τομέων (X) και (A) για $N > 2$ με το κεντρικό φορτίο σε κάθε περίπτωση να συμφωνεί με μέρος αυτού που υπολογίστηκε από την C-συνάρτηση. Η προέλευση των εναπομείναντων όρων θα κατανοηθεί παρακάτω, όπως και η ασυμμετρία μεταξύ χειραλικού και αντιχειραλικού τομέα.

9.4.2 Συνολική σύμμορφη συμμετρία

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αναπτύξουμε την μεθοδολογία αναγνώρισης της συνολικής συμμετρίας των υπέρυθρων ΣΘΠ [189]. Όπως και προηγουμένως θα ξεκινήσουμε με την $N = 2$ περίπτωση και μετά θα επεκταθούμε σε μεγαλύτερα N. Θα κατασκευάσουμε κατάλληλα βαθμωμένες ΣΘΠ οι οποίες μετά από συγκεριμένες επιλογές βαθμίδας θα περιγράφουν τις επιθυμητές υπέρυθρες θεωρίες πεδίου.

• $N = 2$ περίπτωση:

Θα ξεκινήσουμε με την (9.17). Ολοκληρώνοντας τα πεδία $B_\pm$ βρίσκουμε την δράση[8]

$$S = S_{k_1}(g', A_\pm) + S_{k_2-k_1}(g_2) - \frac{k_2 - k_1}{\pi} \int d^2\sigma\, \mathrm{Tr}(A_+ g_2^{-1} \partial_- g_2 - A_+ A_-)\,, \qquad (9.37)$$

όπου $S(g', A_\pm)$ υποδηλώνει την δράση του διαγώνια βαθμωμένου WZW προτύπου και $g' = g_1 g_2$ (δες υποκεφάλαιο 5.3.2). Παραμετροποιώντας τα πεδία $A_\pm$ με τα στοιχεία ομάδας $a_\pm \in G$ και χρησιμοποιώντας την P-W ταυτότητα βρίσκουμε ότι η (9.37) μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$S = S_{k_1}(a_-^{-1} g' a_+) + S_{k_2-k_1}(g_2 a_+) + S_{k_2-k_1}(a_-^{-1}) - S_{k_2}(a_-^{-1} a_+)\,. \qquad (9.38)$$

Θέλουμε να αναγνωρίσουμε την (9.38) ως μια δράση που διαθέτει την Kac-Moody συμμετρία $(G_{k_2-k_1})_L \times (G_{k_2-k_1})_R$ και το κεντρικό φορτίο που δίνεται στον πίνακα 9.1.

Προς αυτή την κατεύθυνση θεωρούμε το γινόμενο WZW προτύπων $G = G_{k_1} \times G_{k_2-k_1} \times G_{k_2-k_1}$

$$S = S_{k_1}(g_1) + S_{k_2-k_1}(g_2) + S_{k_2-k_1}(g_3)\,. \qquad (9.39)$$

Θα βαθμώσουμε την υποομάδα $H \subset G_L \times G_R$ που παράγεται από τους μετασχηματισμούς

$$H : (g_1, g_2, g_3) \mapsto (h^{-1} g_1 h\,, g_2 h,\, h^{-1} g_3)\,, \qquad (9.40)$$

[8] Η ολοκλήρωση των πεδίων $B_\pm$ δεν παράγει το διαστελόνιο.

δηλαδή θα αναβαθμίσουμε την (9.40) σε τοπική συμμετρία, $h = h(\sigma_+, \sigma_-)$. Η επιθυμητή δράση δίνεται ως

$$\begin{aligned} S^{G/H} =& S_{k_1}(g_1, \mathcal{A}_\pm) + S_{k_2-k_1}(g_2) + S_{k_2-k_1}(g_3) \\ &+ \frac{k_2-k_1}{\pi}\int_\Sigma d^2\sigma \, \mathrm{Tr}(\mathcal{A}_-, J_{3+}) - \mathrm{Tr}(\mathcal{A}_+, J_{2-}) \\ &- \frac{k_2-k_1}{\pi}\int_\Sigma d^2\sigma \, \mathrm{Tr}(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_-)\,, \end{aligned} \tag{9.41}$$

με τα πεδία $\mathcal{A}_\pm$ να μετασχηματίζονται κάτω από την (9.40) ως

$$\mathcal{A}_\pm \mapsto h^{-1}(\mathcal{A}_\pm - \partial_\pm)h\,. \tag{9.42}$$

Όπως και σε προηγούμενα κεφάλαια η (9.41) μπορεί να γραφτεί σε μορφή συμμετρικά προφανή κάτω από την (9.40) και (9.42), χρησιμοποιώντας την P-W ταυτότητα και παραμετροποιώντας τα πεδία $\mathcal{A}_\pm$ με τα στοιχεία $\alpha_\pm \in G$, δηλαδή

$$S^{G/H} = S_{k_1}(\alpha_-^{-1} g_1 \alpha_+) + S_{k_2-k_1}(g_2 \alpha_+) + S_{k_2-k_1}(\alpha_-^{-1} g_3) - S_{k_2}(\alpha_-^{-1}\alpha_+)\,. \tag{9.43}$$

Όπως είναι προφανές η συμμετρία χώρου πηλίκου της (9.43) δεν προκύπτει από την διαγώνια δράση της G στο γινόμενο $G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}$ αλλά από την (9.40). Επιπλέον απολαμβάνει την χειραλική συμμετρία

$$(g_2, g_3) \mapsto (k_L^{-1}(\sigma_+) g_2\,,\, g_3 k_R(\sigma_-))\,, \tag{9.44}$$

Η (9.43) έχει $\dim G$ πλεονασματικούς βαθμούς ελευθερίας τους οποίους μπορούμε να εκμηδενίσουμε επιλέγοντας την βαθμίδα $g_2 = \mathbb{1}$ ή $g_3 = \mathbb{1}$.[9] Επιλέγοντας την $g_3 = \mathbb{1}$ είναι προφανές ότι η (9.43) καταλήγει στην (9.38). Επομένως η σύμμορφη συμμετρία της (9.43) ή της (9.38), αφού οι δύο σχετίζονται με μια επιλογή βαθμίδας, είναι η

$$\left(\frac{G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2-k_1}\right)_L \otimes \left(\frac{G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2-k_1}\right)_R\,. \tag{9.45}$$

Τέλος να αναφέρουμε ότι αν είχαμε διαλέξει την βαθμίδα $g_2 = \mathbb{1}$ τότε η προκύπτουσα δράση θα ήταν ίδια με αυτήν που προκύπτει από την (9.29), αν είχαμε ολοκληρώσει τα $B_\pm$ αντί για τα $A_\pm$.

• $N = 3$ περίπτωση:

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε τρία επίπεδα k_1, k_2, k_3. Υποθέτοντας το k_1 μικρότερο, η

[9] Δεν μπορούμε να θέσουμε $g_1 = \mathbb{1}$ εξαιτίας της διαγώνιας βάθμωσής του $g_1' \mapsto h^{-1} g_1' h$.

θεωρία ρέει σε δύο διαφορετικά υπέρυθρα σημεία, $(\uparrow), (\downarrow)$.

Η ΣΘΠ στο $(\uparrow)$ δίνεται από την (8.24) για $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = ((\lambda_0^{(1)})^{-1}, \lambda_0^{(2)}, \lambda_0^{(3)})$. Ὀλοκληρώνοντας τα $(A_{2\pm}, A_{3\pm})$ βρίσκουμε την δράση

$$
\begin{aligned}
S = & S_{k_1}(g_1', A_\pm) + S_{k_2-k_1}(g_2') + S_{k_3-k_2}(g_3) \\
& - \frac{k_2-k_1}{\pi}\int d^2\sigma \, \mathrm{Tr}\big(A_+, J_{2-}'\big) - \frac{k_3-k_2}{\pi}\int d^2\sigma \, \mathrm{Tr}\big(A_+, J_{3-}\big) \\
& - \frac{k_3-k_1}{\pi}\int d^2\sigma \, \mathrm{Tr}(A_+A_-)\,,
\end{aligned}
\tag{9.46}
$$

όπου $g_1' = g_1g_2g_3$, $g_2' = g_2g_3$ και χρησιμοποιώντας την P-W ταυτότητα με την κατάλληλη παραμετροποίηση των $A_\pm$ βρίσκουμε ότι αυτή γράφεται στην μορφή

$$
S = S_{k_1}(a_-^{-1}g_1'a_+) + S_{k_2-k_1}(g_2'a_+) + S_{k_3-k_2}(g_3a_+) - S_{k_3}(a_-^{-1}a_+) + S_{k_3-k_1}(a_-^{-1})\,. \tag{9.47}
$$

Στην ίδια λογική με προηγουμένως, θεωρώντας το γινόμενο WZW προτύπων $G = G_{k_1} \times G_{k_2-k_1} \times G_{k_3-k_2} \times G_{k_3-k_1}$ και αναβαθμίζοντας την συμμετρία

$$
H : (g_1, g_2, g_3) \mapsto (h^{-1}g_1h\,,\, g_2h\,,\, g_3h\,,\, h^{-1}g_4)\,, \tag{9.48}
$$

σε τοπική βρίσκουμε την δράση

$$
\begin{aligned}
S_{G/H} = & S_{k_1}(g_1, \mathcal{A}_\pm) + S_{k_2-k_1}(g_2) + S_{k_3-k_2}(g_3) + S_{k_3-k_1}(g_4) \\
& - \frac{k_2-k_1}{\pi}\int d^2\sigma \, \mathrm{Tr}\big(\mathcal{A}_+, J_{2-}\big) - \frac{k_3-k_2}{\pi}\int d^2\sigma \, \mathrm{Tr}\big(\mathcal{A}_+, J_{3-}\big) \\
& + \frac{k_3-k_1}{\pi}\int d^2\sigma \, \mathrm{Tr}\big(\mathcal{A}_-, J_{4+}\big) - \frac{k_3-k_1}{\pi}\int d^2\sigma \, \mathrm{Tr}\big(\mathcal{A}_+, \mathcal{A}_-\big) \\
= & S_{k_1}(\alpha_-^{-1}{g'}_1\alpha_+) + S_{k_2-k_1}(g_2\alpha_+) + S_{k_3-k_2}(g_3\alpha_+) \\
& \quad + S_{k_3-k_1}(\alpha_-^{-1}g_4) - S_{k_3}(\alpha_-^{-1}\alpha_+)\,.
\end{aligned}
\tag{9.49}
$$

Οι συμμετρίες της (9.49) είναι η εκ κατασκευής τοπική συμμετρία (9.48), συνοδευόμενη με τον μετασχηματισμό $a_\pm \mapsto h^{-1}a_\pm$, και η χειραλική συμμετρία

$$
(g_2, g_3, g_4) \mapsto (k_L^{-1}(\sigma_+)g_2\,,\, \tilde{k}_L^{-1}(\sigma_+)g_3\,,\, g_4k_R(\sigma_-))\,. \tag{9.50}
$$

Είναι προφανές ότι η υπέρυθρη ΣΘΠ (9.46) είναι η (9.49) για $g_4 = \mathbb{1}$. Επομένως η σύμμορφη συμμετρία της (9.46) είναι η

$$\left(\frac{G_{k_1}\times G_{k_3-k_1}}{G_{k_3}}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_3-k_2}\right)_L\otimes\left(\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_3-k_2}}{G_{k_3}}\times G_{k_3-k_1}\right)_R. \quad (9.51)$$

Η ασυμμετρία μεταξύ του χειραλικού και αντιχειραλικού τομέα της (9.51) οφείλεται στην ασύμμετρη βάθμωση (9.48). Παρόλα αυτά τα κεντρικά φορτία των δύο τομέων είναι ίσα, $c_L = c_R$, και για μεγάλες τιμές των επιπέδων συμφωνούν με την αντίστοιχη τιμή στον πίνακα 9.1. Όπως και προηγουμένως η επιλογή βαθμίδας $g_3 = \mathbb{1}$ καταλήγει στην ίδια δράση (9.46), ολοκληρώνοντας στην (8.24) τα πεδία $(A_{1\pm}, A_{2\pm})$.

Θεωρώντας το υπέρυθρο σημείο $(\downarrow)$, αντικαθιστούμε στην (8.24) τις τιμές των παραμέτρων με $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = ((\lambda_0^{(1)})^{-1}, \lambda_0^{(2)}, (\lambda_0^{(3)})^{-1})$ και ολοκληρώνουμε τα ζεύγη πεδίων $(A_{1\pm}, A_{2\pm})$ ή $(A_{2\pm}, A_{2\pm})$. Βρίσκουμε ότι η τελική μορφή της δράσης είναι ίση με την G/H ΣΘΠ με $G = G_{k_1}\times G_{k_3-k_1}\times G_{k_2-k_3}\times G_{k_2-k_1}$ και

$$H : (g_1, g_2, g_3, g_4) \mapsto (h^{-1}g_1h\,,\, h^{-1}g_2\,,\, h^{-1}g_3\,,\, g_4h)\,. \quad (9.52)$$

Επομένως η σύμμορφη συμμετρία του υπέρυθρου πρότυπου είναι η

$$\left(\frac{G_{k_1}\times G_{k_3-k_1}\times G_{k_2-k_3}}{G_{k_2}}\times G_{k_2-k_1}\right)_L\otimes\left(\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}}\times G_{k_2-k_3}\times G_{k_3-k_1}\right)_R. \quad (9.53)$$

Για την ευκολία του αναγνώστη παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα για $N = 3$ στον πίνακα 9.3

Υπερ. Σημ.	Χειραλικός τομέας	Αντιχειραλικός τομέας
$(\uparrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_3-k_1}}{G_{k_3}}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_3-k_2}$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_3-k_2}}{G_{k_3}}\times G_{k_3-k_1}$
$(\downarrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_3-k_1}\times G_{k_2-k_3}}{G_{k_2}}\times G_{k_2-k_1}$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}}\times G_{k_3-k_1}\times G_{k_2-k_3}$

Πίνακας 9.3: Σύμμορφη συμμετρία για τις υπέρυθρες ΣΘΠ με $N = 3$.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι οι ΣΘΠ στα υπέρυθρα σημεία δεν είναι ανεξάρτητες. Σχετίζονται με τον τελεστή ομοτιμίας και την εναλλαγή των επιπέδων $k_2 \leftrightarrow k_3$. Σε αυτό το σημείο θα επανέλθουμε παρακάτω όπου θα ταξινομήσουμε τις ανεξάρτητες ΣΘΠ.

• <u>$N = 4$ περίπτωση</u>

Για την $N=4$ περίπτωση έχουμε τέσσερα διαφορετικά υπέρυθρα σημεία και σε κάθε σημείο ορίζεται μια ΣΘΠ στην οποία τείνει το πρότυπο που μελετάμε. Στον πίνακα 9.4 παρουσιάζουμε τις σύμμορφες συμμετρίες της κάθε ΣΘΠ, ενώ θα παρουσιάσουμε αναλυτικά τις συμμετρίες της ΣΘΠ στο σταθερό σημείο $(\downarrow,\uparrow)$.

Υπερ. Σημ.	Χειραλικός τομέας	Αντιχειραλικός τομέας
$(\uparrow,\uparrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_4-k_1}}{G_{k_4}}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_3-k_2}\times G_{k_4-k_3}$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_3-k_2}\times G_{k_4-k_3}}{G_{k_4}}\times G_{k_4-k_1}$
$(\downarrow,\uparrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_4-k_1}}{G_{k_4}}\times\frac{G_{k_3}\times G_{k_2-k_3}}{G_{k_2}}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_4-k_3}$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}}\times\frac{G_{k_3}\times G_{k_4-k_3}}{G_{k_4}}\times G_{k_4-k_1}\times G_{k_2-k_3}$
$(\uparrow,\downarrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_4-k_1}\times G_{k_3-k_4}}{G_{k_3}}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_3-k_2}$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_3-k_2}}{G_{k_3}}\times G_{k_4-k_1}\times G_{k_3-k_4}$
$(\downarrow,\downarrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_4-k_1}\times G_{k_3-k_4}\times G_{k_2-k_3}}{G_{k_2}}\times G_{k_2-k_1}$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}}\times G_{k_4-k_1}\times G_{k_3-k_4}\times G_{k_2-k_3}$

Πίνακας 9.4: Σύμμορφη συμμετρία για τις υπέρυθρες ΣΘΠ με $N=4$.

Η δράση στο υπέρυθρο σημείο $(\downarrow,\uparrow)$ δίνεται από την έκφραση

$$\begin{aligned}S=&S_{k_1}(a_{1-}^{-1}g_1a_{2+})+S_{k_2}(a_{2-}^{-1}g_2a_{3+})+S_{k_3}(a_{3-}^{-1}g_3a_{4+})+S_{k_4}(a_{4-}^{-1}g_4a_{1+})\\&-S_{k_4}(a_{1-}^{-1}a_{1+})-S_{k_2}(a_{2-}^{-1}a_{2+})-S_{k_2}(a_{3-}^{-1}a_{3+})-S_{k_4}(a_{4-}^{-1}a_{4+})\\&+S_{k_4-k_1}(a_{1-}^{-1})+S_{k_2-k_1}(a_{2+})+S_{k_2-k_3}(a_{3-}^{-1})+S_{k_4-k_3}(a_{4+})\,,\end{aligned}\tag{9.54}$$

Ολοκληρώνοντας τα $(a_{2\pm},a_{4\pm})$ καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση

$$\begin{aligned}S=&S_{k_1}(a_{1-}^{-1}g_1'a_{3+})+S_{k_2-k_1}(g_2a_{3+})+S_{k_3}(a_{3-}^{-1}g_3'a_{1+})+S_{k_4-k_3}(g_4a_{1+})\\&+S_{k_4-k_1}(a_{1-}^{-1})+S_{k_2-k_3}(a_{3-}^{-1})-S_{k_4}(a_{1-}^{-1}a_{1+})-S_{k_2}(a_{3-}^{-1}a_{3+})\,,\end{aligned}\tag{9.55}$$

όπου $g_1'=g_1g_2$ και $g_3'=g_3g_4$. Η δράση (9.55) σχετίζεται με μια επιλογή βαθμίδας μιας G/H ΣΘΠ με $G=G_{k_1}\times G_{k_3}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_2-k_3}\times G_{k_4-k_3}\times G_{k_4-k_1}$ και

$$H:(g_1,g_2,g_3,g_4,g_5,g_6)\mapsto(h_1^{-1}g_1h_2\,,\,h_2^{-1}g_2h_1\,,\,g_3h_2\,,\,h_2^{-1}g_4\,,\,g_5h_1\,,\,h_1^{-1}g_6)\,,\tag{9.56}$$

η οποία έχει την σύμμορφη συμμετρία που παρουσιάζεται στον πίνακα 9.4.

9.5 Σύμμορφη συμμετρία για γενικό N

Παρακάτω παρουσιάζουμε κανόνες για τις υπέρυθρες ΣΘΠ για γενικό N οι οποίοι απορρέουν από τον φορμαλισμό που αναπτύξαμε προηγουμένως.

Θεωρούμε την βασική διάταξη $k_1 < k_2 < \cdots < k_N$. Η Kac-Moody συμμετρία της δίνεται στην (9.33). Η συνολική σύμμορφη συμμετρία της είναι η

$$\begin{aligned} &\left(\frac{G_{k_1} \times G_{k_N - k_1}}{G_{k_N}} \times G_{k_2 - k_1} \times \cdots \times G_{k_{N-1} - k_{N-2}} \times G_{k_N - k_{N-1}}\right)_L \otimes \\ &\left(\frac{G_{k_1} \times G_{k_2 - k_1} \times \cdots \times G_{k_{N-1} - k_{N-2}} \times G_{k_N - k_{N-1}}}{G_{k_N}} \times G_{k_N - k_1}\right)_R . \end{aligned} \tag{9.57}$$

Η μικρή αλλαγή στα επίπεδα $k_i < k_{i-1}$ για $i = 2, 3, \ldots, N-1$ οδήγησε σε μια ΣΘΠ με την Kac-Moody συμμετρία (9.36) και με συνολική σύμμορφη συμμετρία της είναι

$$\begin{aligned} &\left(\frac{G_{k_1} \times G_{k_N - k_1}}{G_{k_N}} \times \frac{G_{k_i} \times G_{k_{i-1} - k_i}}{G_{k_{i-1}}} \times G_{k_2 - k_1} \times \cdots \times \cdots \times G_{k_N - k_{n-1}}\right)_L \otimes \\ &\left(\frac{G_{k_1} \times G_{k_2 - k_1} \times \cdots \times G_{k_{i-1} - k_{i-2}}}{G_{k_{i-1}}} \times \frac{G_{k_i} \times G_{k_{i+1} - k_i} \times \cdots \times G_{k_N - k_{N-1}}}{G_{k_N}} \times G_{k_{i-1} - k_i} \times G_{k_N - k_1}\right)_R , \end{aligned} \tag{9.58}$$

Να επισημάνουμε ότι οι περιπτώσεις $i = 1, N$ δεν έχουν συμπεριληφθεί. Η $i = 1$ διότι το k_1 έχει θεωρηθεί το μικρότερο επίπεδο, ενώ η περίπτωση $i = N$ διότι δεν ακολουθεί το ίδιο μοτίβο με την (9.58). Συγκεκριμένα η σύμμορφη συμμετρία της δίνεται ως

$$\begin{aligned} &\left(\frac{G_{k_1} \times G_{k_N - k_1} \times G_{k_{N-1} - k_N}}{G_{k_{N-1}}} \times G_{k_2 - k_1} \times \cdots \times G_{k_{N-2} - k_{N-3}} \times G_{k_{N-1} - k_{N-2}}\right)_L \otimes \\ &\left(\frac{G_{k_1} \times G_{k_2 - k_1} \times \cdots \times G_{k_{N-2} - k_{N-3}} \times G_{k_{N-1} - k_{N-2}}}{G_{k_{N-1}}} \times G_{k_{N-1} - k_N} \times G_{k_N - k_1}\right)_R . \end{aligned} \tag{9.59}$$

Τώρα είμαστε σε θέση να παρουσιάσουμε τους κανόνες για την εύρεση της σύμμορφης συμμετρίας των ΣΘΠ σε οποιοδήποτε υπέρυθρο σημείο. Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο σταθερό σημείο. Για κάθε $\lambda_0^{(i)}$ ή $\uparrow$ στην θέση i, γράφουμε μια Kac-Moody άλγεβρα στον χειραλικό τομέα και στον αντιχειραλικό μια συμμετρία χώρου πηλίκου. Ενώ για κάθε $(\lambda_0^{(i)})^{-1}$ ή $\downarrow$, το αντίστροφο. Συγκεριμένα

$$\begin{aligned} \uparrow_i-\text{όρος} \quad &\Longrightarrow \quad \left(G_{k_i-k_{i-1}}\right)_L \otimes \left(\frac{G_{k_{i-1}} \times G_{k_i-k_{i-1}}}{G_{k_i}}\right)_R, \\ \downarrow_i-\text{όρος} \quad &\Longrightarrow \quad \left(\frac{G_{k_i} \times G_{k_{i-1}-k_i}}{G_{k_{i-1}}}\right)_L \otimes \left(G_{k_{i-1}-k_i}\right)_R . \end{aligned} \tag{9.60}$$

Δοσμένης μιας διάταξης από βέλη η συμμετρία της ΣΘΠ στο υπέρυθρο δίνεται από γινόμενα των όρων στην (9.60). Αυτό είναι αληθές εκτός και αν τα γειτονικά βέλη έχουν την ίδια κατεύθυνση.[10] Σε αυτή την περίπτωση

$$\begin{aligned} (\uparrow_i, \uparrow_{i+1}) \quad &\Longrightarrow \quad \left(G_{k_i-k_{i-1}} \times G_{k_{i+1}-k_i}\right)_L \otimes \left(\frac{G_{k_{i-1}} \times G_{k_i-k_{i-1}} \times G_{k_{i+1}-k_i}}{G_{k_{i+1}}}\right)_R, \\ (\downarrow_i, \downarrow_{i+1}) \quad &\Longrightarrow \quad \left(\frac{G_{k_{i+1}} \times G_{k_i-k_{i+1}} \times G_{k_{i-1}-k_i}}{G_{k_{i-1}}}\right)_L \otimes \left(G_{k_{i-1}-k_i} \times G_{k_i-k_{i+1}}\right)_R. \end{aligned} \tag{9.61}$$

Βάση λοιπόν των κανόνων (9.60) και (9.61) μπορούμε εύκολα να βρούμε την σύμμορφη συμμετρία στο υπέρυθρο σημείο

$$((\lambda_0^{(1)})^{-1}, \lambda_0^{(2)}, (\lambda_0^{(3)})^{-1}, \lambda_0^{(4)}, (\lambda_0^{(5)})^{-1}, (\lambda_0^{(6)})^{-1}) = (\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow), \tag{9.62}$$

η οποία είναι η

$$\begin{aligned} &\left(\frac{G_{k_1} \times G_{k_6-k_1} \times G_{k_5-k_6} \times G_{k_4-k_5}}{G_{k_4}} \times \frac{G_{k_3} \times G_{k_2-k_3}}{G_{k_2}} \times G_{k_2-k_1} \times G_{k_4-k_3}\right)_L \otimes \\ &\left(\frac{G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}} \times \frac{G_{k_3} \times G_{k_4-k_3}}{G_{k_4}} \times G_{k_3-k_3} \times G_{k_6-k_1} \times G_{k_5-k_6} \times G_{k_4-k_5}\right)_R . \end{aligned} \tag{9.63}$$

9.6 Ταξινόμηση των ανεξάρτητων ΣΘΠ

Όπως είδαμε παραπάνω υπάρχουν ΣΘΠ που ορίζονται σε διαφορετικά υπέρυθρα σημεία, οι οποίες όμως σχετίζονται με ένα διακριτό μετασχηματισμό που εναλλάσει τον χειραλικό και αντιχειραλικό τομέα. Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την συμμετρία, αφού πρώτα την προσδιορίσουμε, για να αναγνωρίσουμε τις ανεξάρτητες ΣΘΠ.

Είναι εύκολο να παρατηρήσει κανείς ότι η δράση (8.24) είναι αναλλοίωτη κάτω από τον

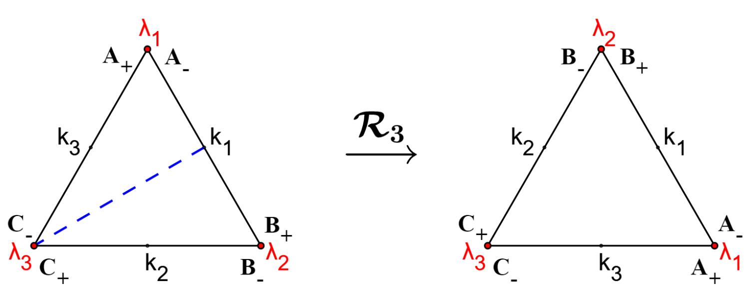
[10] Να σημειώσουμε ότι οι αλυσίδες από βέλη θεωρούνται κλειστές, επομένως το πρώτο και το N-οστό είναι γειτονικά.

διακριτό μετασχηματισμό

$$\mathcal{R}_N : \sigma_+ \leftrightarrow \sigma_- \,, \quad g_i \to g^{-1}_{N+2-i} \,, \quad k_i \to k_{N+2-i} \,, \quad \lambda_i \to \lambda_{N+3-i} \,, \quad A^{(i)}_{\pm} \to A^{(N+3-i)}_{\mp} \,. \tag{9.64}$$

Στο όριο των μικρών σταθερών ζεύξης ο παραπάνω μετασχηματισμός δεν αλλάζει τις αλληλεπιδράσεις των πρώτων γειτόνων. Ένας κομψός τρόπος να κατανοηθεί η (9.64) σχηματικά είναι με την βοήθεια ενός πολυγώνου. Αναπαριστούμε την i-οστή γωνία του πολυγώνου με τον i-οστό όρο αλληλεπίδρασης των πεδίων $A_{i\pm}$, και κάθε πλευρά του που εννώνει τις γωνίες i και $i+1$ την συμβολίζουμε με k_i, που είναι ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας του i-οστού διαδότη στην (8.24) που συζευγνύει τα πεδία A_{i-} και A_{i+1+}. Τότε ο μετασχηματισμός $\mathcal{R}_N$ κατανοείται ως η ανάκλαση ως προς την μεσοκάθετο στην πλευρά k_1, που έχει σχεδιαστεί με την μπλέ γραμμή στα παρακάτω σχήματα. Στο σχήμα (9.1) δίνουμε ένα παράδειγμα για την περίπτωση $N=3$ όπου η δράση (8.24) αναπαρίσταται με ένα τρίγωνο. Για την ευκολία της αναγνώστριας έχουμε συμπεριλάβει και την Λαγκραντζιανή, χωρίς τους WZW όρους (αυτοί είναι προφανείς) και για πρακτικούς λόγους έχουμε ορίσει $A_1 = A, A_2 = B, A_3 = C$.

$$\begin{aligned} L = {} & k_1 \mathrm{Tr}(A_- J^{(1)}_+ - B_+ J^{(1)}_- + A_- g_1 B_+ g_1^{-1}) + k_2 \mathrm{Tr}(B_- J^{(2)}_+ - C_+ J^{(2)}_- + B_- g_2 C_+ g_2^{-1}) \\ & + k_3 \mathrm{Tr}(C_- J^{(3)}_+ - A_+ J^{(3)}_- + C_- g_3 A_+ g_3^{-1}) - k^{(1)} \lambda_1^{-1} \mathrm{Tr}(A_+ A_-) - k^{(2)} \lambda_2^{-1} \mathrm{Tr}(B_+ B_-) \\ & - k^{(3)} \lambda_3^{-1} \mathrm{Tr}(C_+ C_-) \,. \end{aligned} \tag{9.65}$$



Σχήμα 9.1: Οι γωνίες του δεξιού τριγώνου αναπαριστούν τους τρείς τελευταίους όρους της δράσης (9.65), όπου για την διευκόλυνση μας δεν συμπεριλάβαμε τους όρους $k^{(i)}$ και τις συμβολίσαμε με τα λ_i αντί για τις αντίστροφες τιμές τους. Κάθε πλευρά του τριγώνου που ενώνει τα αντίστοιχα πεδία συμβολίζεται με τα επίπεδα k_i που εμφανίζονται ως παράγοντες στους αντίστοιχους διαδότες στην πρώτη και δεύτερη γραμμή της (9.65). Μπορεί να ελεγχθεί ότι ο $\mathcal{R}_3$ μετασχηματίζει τα πεδία ως $J^{(1)}_+ \leftrightarrow -J^{(1)}_-, J^{(2)}_\pm \leftrightarrow -J^{(3)}_\mp, A_\pm \leftrightarrow B_\mp, C_\pm \to C_\mp$ τις παραμέτρους παραμόρφωσης ως $\lambda_1 \leftrightarrow \lambda_2$, $\lambda_3 \to \lambda_3$ και τα επίπεδα ως $k_1 \to k_1$, $k_2 \leftrightarrow k_3$. Επομένως στην εικόνα των πολυγώνων ο $\mathcal{R}_3$ μετασχηματίζει το αριστερό τρίγωνο στο δεξί που αναπαριστά πάλι την ίδια δράση.

Δεδομένου ότι θέλουμε να αναπαραστήσουμε τις συσχετισμένες ΣΘΠ θα κρατήσουμε το μέρος της συμμετρίας (9.64) που μας ενδιαφέρει

$$\mathcal{R}_N : A_{\pm}^{(i)} \to A_{\mp}^{(N+3-i)}, \quad k_i \to k_{n+2-i}\,, \quad k^{(i)} \to k^{(N+3-i)}\,, \quad \lambda_0^{(i)} \to \big(\lambda_0^{(N+3-i)}\big)^{-1}\,, \tag{9.66}$$

Οι φαινομενικά ανεξάρτητες ΣΘΠ σχετίζονται με τον παραπάνω μετασχηματισμό. Δοσμένων των 2^{N-2} διαφορετικών υπέρυθρων σημείων θέλουμε να γνωρίζουμε, προτού κάνουμε τον οποιοδήποτε υπολογισμό, σε πια από αυτά ορίζονται ανεξάρτητες ΣΘΠ. Επομένως θα προσδιορίσουμε την δράση του (9.66) στις υπέρυθρες ΣΘΠ στον φορμαλισμό των πολυγώνων. Για τον λόγο αυτό, αντικαθιστούμε τις παραμέτρους λ_i στις γωνίες με τα αντίστοιχα βέλη, $\uparrow_i$ ή $\downarrow_i$, από την διάταξη του υπέρυθρου σημείου. Ο μετασχηματισμός $\mathcal{R}_N$ θα αντιστρέφει κάθε βέλος, στην περίπτωση που το συμμετρικό του ως προς την μεσοκάθετο έχει ίδια κατεύθυνση. Στην αντίθετη περίπτωση παραμένει αναλλοίωτο. Προφανώς αυτός ο κανόνας προκύπτει από τον μετασχηματισμό του $\lambda_0^{(i)}$ στην (9.66).

Για N περιττό, οι ανεξάρτητες ΣΘΠ είναι $\frac{2^{N-2}}{2}$, δηλαδή

$$N = \text{περιττός}: \qquad 2^{N-3}\,, \tag{9.67}$$

αφού κάθε σημείο (διάταξη από βέλη στις γωνίες του πολυγώνου) έχει το δυικό του, που αντιστοιχεί σε μια διαφορετική διάταξη από βέλη, καθώς η μεσοκάθετος τέμνει πάντα την απέναντι γωνία από της πλευράς k_1. Επομένως κάτω από την δράση του $\mathcal{R}_N$ θα αντιστραφεί.

Για N άρτιο απαιτείται προσεκτικότερη ανάλυση, αφού σε αυτήν την περίπτωση υπάρχουν υπέρυθρα σημεία τα οποία είναι αυτοδυικά. Αυτοδυικά σημεία, είναι τα σημεία των οποίων τα συμμετρικά βέλη σε σχέση με την μεσοκάθετο έχουν αντίθετες κατευθύνσεις. Σε αυτήν την περίπτωση βρίσκουμε ότι οι ανεξάρτητες ΣΘΠ είναι $\frac{2^{N-2}-2^{\frac{N-2}{2}}}{2} + 2^{\frac{N-2}{2}} = 2^{N-3} + 2^{\frac{N}{2}-2}$. Επομένως για

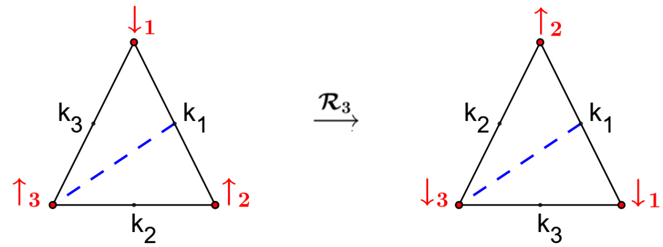
$$N = \text{άρτιος}: \qquad 2^{N-3} + 2^{\frac{N-4}{2}}\,. \tag{9.68}$$

Είναι προφανές ότι για N περιττό δεν υπάρχουν αυτοδυικά σημεία.

Ας εφαρμόσουμε τώρα την σχηματική μας αναπαράσταση, για τις περίπτωσεις που αναπτύξαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, $N = 3, 4$ και θα παρουσιάσουμε και τις περιπτώσεις $N = 5, 6$. Για $N = 3$ η (9.66) γράφεται ως

$$\mathcal{R}_3\,:\,1 \leftrightarrow 2\ ,\ 3 \to 3\ ,\ k_1 \to k_1\ ,\ k_2 \leftrightarrow k_3\,, \tag{9.69}$$

όπου για ευκολία αντικαταστήσαμε τα πεδία $A_{\pm}^{(i)}$σε κάθε γωνία με την αρίθμηση της γωνίας,



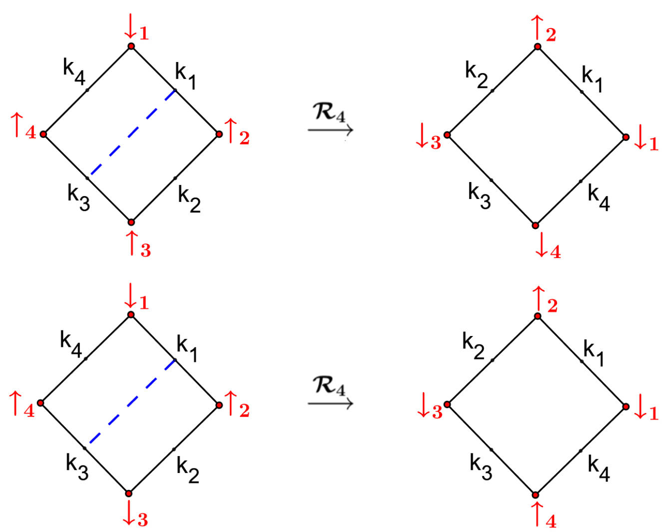
Σχήμα 9.2: Το αριστερό τρίγωνο αναπαριστά την ΣΘΠ ορισμένη στο υπέρυθρο σημείο (↑) και το δεξιό τρίγωνο την ΣΘΠ στο (↓)

i. Επίσης αγνοήσαμε δείκτες και ποσότητες που μένουν αναλλοίωτες στον ορισμό του μετασχηματισμού. Το αριστερό τρίγωνο στο σχήμα 9.2 αναπραριστά την ΣΘΠ στο υπέρυθρο σημείο που το συμβολίσαμε με (↑). Αφού τα σημεία $1, 2$ είναι καθρεφτικά σε σχέση με την μεσοκάθετο και τα αντίστοιχα βέλη είναι αντίθετα δεν θα αντιστραφούν κάτω από την δράση του $\mathcal{R}_3$, ενώ το βέλος στην γωνία 3 θα αντιστραφεί. Η τελική διάταξη είναι η ΣΘΠ στο υπερυθρο σημείο (↓). Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η συμμετρία $\mathcal{R}_3$ σχετίζει τις δύο ΣΘΠ που παρουσιάζονται στον πίνακα 9.3 σε συμφωνία με τον κανόνα (9.67).

Για την $N = 4$ περίπτωση ο $\mathcal{R}_4$ δίνεται ως

$$\mathcal{R}_4 \,:\, 1 \leftrightarrow 2 \;,\; 3 \leftrightarrow 4 \quad , \quad k_1 \to k_1 \;,\; k_3 \to k_3 \;,\; k_2 \leftrightarrow k_4 \,. \tag{9.70}$$

Στο σχήμα (9.3) παρουσιάζουμε τις σχέσεις των ΣΘΠ στα υπέρυθρα σημεία (↑,↑), (↓,↓) και



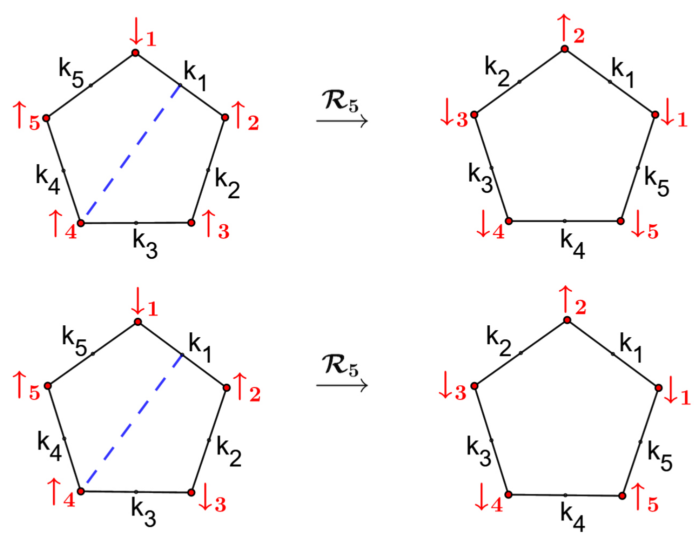
Σχήμα 9.3: Η πρώτη γραμμή αναπαριστά τις δυικές ΣΘΠ που ορίζονται στα υπέρυθρα σημεία (↑,↑), (↓,↓) και η δεύτερη γραμμή την αυτοδυική στο (↓,↑)

την αυτοδυικότητα του σταθερού σημείου (↑,↓) κάτω από την (9.70). Δεν συμπεριλάβαμε την αυτοδυικότητα του $(\downarrow, \uparrow)$ καθώς είναι προφανής. Σε συμφωνία με τις ΣΘΠ στο πίνακα (9.4) συμπεραίνουμε ότι για $N = 4$ έχουμε τρεις ανεξάρτητες.

Για $N = 5$ έχουμε $2^3 = 8$ διαφορετικά υπέρυθρα σημεία. Στον πίνακα (9.5) παρουσιάζουμε τους ολομορφικούς τομείς των ΣΘΠ που ορίζονται σε κάθε σημείο. Ένας πιο ευθής αλλά ισοδύναμος τρόπος για την εύρεση των σχετιζόμενων σημείων είναι ο ακόλουθος. Δεδομένης της διάταξης των βελών, συγκρίνουμε το πρώτο με το τελευταίο, το δεύτερο με το προτελευταίο και ούτω κάθε εξής. Αν έχουν την ίδια κατεύθυνση τα αντιστρέφουμε ενώ στην αντίθετη περίπτωση παραμένουν ως έχουν. Επομένως τα σχετιζόμενα σταθερά σημεία μέσω της $\mathcal{R}_5$ είναι τα

$$\begin{aligned} &(\uparrow,\uparrow,\uparrow) \sim (\downarrow,\downarrow,\downarrow) \quad (\downarrow,\uparrow,\uparrow) \sim (\downarrow,\downarrow,,\uparrow)\,, \\ &(\uparrow,\downarrow,\uparrow) \sim (\downarrow,\uparrow,\downarrow)\,, \quad (\uparrow,\uparrow,\downarrow) \sim (\uparrow,\downarrow,\downarrow)\,, \end{aligned} \tag{9.71}$$

γεγονός που συμφωνεί με τις σύμμορφες συμμετρίες στον πίνακα (9.5). Στο σχήμα (9.4) παρουσιάζουμε την σχέση των ΣΘΠ στα σύμμορφα σημεία $(\uparrow,\uparrow,\uparrow)$, $(\downarrow,\downarrow,\downarrow)$ και $(\uparrow,\downarrow,\uparrow)$, $(\downarrow,\uparrow,\downarrow)$. Επομένως συμπεραίνουμε ότι για $N = 5$ έχουμε τέσσερις ανεξάρτητες ΣΘΠ στο υπέρυθρο.



Σχήμα 9.4: Η πρώτη και δεύτερη γραμμή αναπαριστούν τις δυικές ΣΘΠ στα υπέρυθρα σημεία $(\uparrow,\uparrow,\uparrow)$, $(\downarrow,\downarrow,\downarrow)$ και $(\downarrow,\uparrow,\uparrow)$, $(\downarrow,\downarrow,\uparrow)$.

Κλείνοντας, για $N = 6$ έχουμε $2^4 = 16$ διαφορετικά υπέρυθρα σημεία, εκ των οποίων δέκα ορίζουν ανεξάρτητες ΣΘΠ. Αυτά που σχετίζονται μέσω του $\mathcal{R}_6$ είναι τα

$$\begin{aligned}
(\uparrow,\uparrow,\uparrow,\uparrow) \sim (\downarrow,\downarrow,\downarrow,\downarrow) \quad &, \quad (\downarrow,\uparrow,\uparrow,\downarrow) \sim (\uparrow,\downarrow,\downarrow,\uparrow)\,, \\
(\uparrow,\uparrow,\uparrow,\downarrow) \sim (\uparrow,\downarrow,\downarrow,\downarrow) \quad &, \quad (\downarrow,\downarrow,\uparrow,\downarrow) \sim (\uparrow,\downarrow,\uparrow,\uparrow)\,, \\
(\downarrow,\downarrow,\downarrow,\uparrow) \sim (\downarrow,\uparrow,\uparrow,\uparrow) \quad &, \quad (\downarrow,\uparrow,\downarrow,\downarrow) \sim (\uparrow,\uparrow,\downarrow,\uparrow)\,,
\end{aligned} \tag{9.72}$$

ενώ τα αυτοδυικά είναι τα $(\downarrow,\downarrow,\uparrow,\uparrow), (\downarrow,\uparrow,\downarrow,\uparrow), (\uparrow,\downarrow,\uparrow,\downarrow), (\uparrow,\uparrow,\downarrow,\downarrow)$.

υπερ. σημείο	χειραλικός τομέας
$(\uparrow,\uparrow,\uparrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_5-k_1}}{G_{k_5}}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_3-k_2}\times G_{k_4-k_3}\times G_{k_5-k_4}$
$(\downarrow,\uparrow,\uparrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_5-k_1}}{G_{k_5}}\times\frac{G_{k_3}\times G_{k_2-k_3}}{G_{k_2}}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_4-k_3}\times G_{k_5-k_4}$
$(\uparrow,\downarrow,\uparrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_5-k_1}}{G_{k_5}}\times\frac{G_{k_4}\times G_{k_3-k_4}}{G_{k_3}}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_3-k_2}\times G_{k_5-k_4}$
$(\uparrow,\uparrow,\downarrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_5-k_1}\times G_{k_4-k_5}}{G_{k_4}}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_3-k_2}\times G_{k_4-k_3}$
$(\downarrow,\downarrow,\uparrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_5-k_1}}{G_{k_5}}\times\frac{G_{k_4}\times G_{k_3-k_4}\times G_{k_2-k_3}}{G_{k_2}}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_5-k_4}$
$(\downarrow,\uparrow,\downarrow)$	$\frac{G_{k_3}\times G_{k_2-k_3}}{G_{k_2}}\times\frac{G_{k_1}\times G_{k_5-k_1}\times G_{k_4-k_5}}{G_{k_4}}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_4-k_3}$
$(\uparrow,\downarrow,\downarrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_5-k_1}\times G_{k_4-k_5}\times G_{k_3-k_4}}{G_{k_3}}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_3-k_2}$
$(\downarrow,\downarrow,\downarrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_5-k_1}\times G_{k_4-k_5}\times G_{k_3-k_4}\times G_{k_2-k_3}}{G_{k_2}}\times G_{k_2-k_1}$

υπερ. σημείο	αντιχειραλικός τομέας
$(\uparrow,\uparrow,\uparrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_3-k_2}\times G_{k_4-k_3}\times G_{k_5-k_4}}{G_{k_5}}\times G_{k_5-k_1}$
$(\downarrow,\uparrow,\uparrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}}\times\frac{G_{k_3}\times G_{k_4-k_3}\times G_{k_5-k_4}}{G_{k_5}}\times G_{k_5-k_1}\times G_{k_2-k_3}$
$(\uparrow,\downarrow,\uparrow)$	$\frac{G_{k_4}\times G_{k_5-k_4}}{G_{k_5}}\times\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_3-k_2}}{G_{k_3}}\times G_{k_5-k_1}\times G_{k_3-k_4}$
$(\uparrow,\uparrow,\downarrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_3-k_2}\times G_{k_4-k_3}}{G_{k_4}}\times G_{k_5-k_1}\times G_{k_4-k_5}$
$(\downarrow,\downarrow,\uparrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}}\times\frac{G_{k_4}\times G_{k_5-k_4}}{G_{k_5}}\times G_{k_5-k_1}\times G_{k_3-k_4}\times G_{k_2-k_3}$
$(\downarrow,\uparrow,\downarrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}}\times\frac{G_{k_3}\times G_{k_4-k_3}}{G_{k_4}}\times G_{k_5-k_1}\times G_{k_4-k_5}\times G_{k_2-k_3}$
$(\uparrow,\downarrow,\downarrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}\times G_{k_3-k_2}}{G_{k_3}}\times G_{k_5-k_1}\times G_{k_4-k_5}\times G_{k_3-k_4}$
$(\downarrow,\downarrow,\downarrow)$	$\frac{G_{k_1}\times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}}\times G_{k_5-k_1}\times G_{k_4-k_5}\times G_{k_3-k_4}\times G_{k_2-k_3}$

Πίνακας 9.5: Σύμμορφη συμμετρία υπέρυθρων ΣΘΠ για $N=5$.

Κεφάλαιο 10

Ολοκληρώσιμες βράνες στα γενικευμένα λ-πρότυπα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες, οι οποίες επιδέχονται γεωμετρικής ερμηνείας, στα γενικευμένα λ-πρότυπα. Για την εξαγωγή τους θα επεκτείνουμε την μέθοδο του υποκεφαλαίου 7.1.1, με στόχο την αναγνώριση επιπλέον συνοριακών συνθηκών που δεν έχουν ανάλογο στα συνήθη λ-πρότυπα. Στην συνέχεια, ακολουθώντας την προσέγγιση σ-προτύπου θα αναγνωρίσουμε τις ολοκληρώσιμες βράνες. Θα δούμε ότι όλες οι γνωστές γεωμετρίες σύμμορφων βρανών στην βιβλιογραφία επιβιώνουν ως ολοκληρώσιμες στις περιπτώσεις ενδιαφέροντος. Αυτές διαθέτουν τα ίδια λ-ανεξάρτητα χαρακτηριστικά με τις βράνες των απλών λ-προτύπων. Έμφαση θα δοθεί στις ολοκληρώσιμες βράνες, οι οποίες είναι εμβαπτισμένες στις θεωρίες με μη τετριμμένες ροές. Συγκεκριμένα, θα μελετηθεί η εναπομείνασα σύμμορφη συμμετρία των ΣΘΠ στα υπεριώδη και υπέρυθρα σημεία παρουσία των αντίστοιχων βρανών. Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου βασίζονται στην εργασία [201].

10.1 Ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες

10.1.1 Η περίπτωση των ίσων επιπέδων

Βάση της ανάλυσης του υποκεφαλαίου 8.1.2, μπορούμε να βρούμε δύο ζεύγη Lax πινάκων συναρτήσει των οποίων οι εξισώσεις κίνησης του προτύπου (8.11) είναι ισοδύναμες με δύο ανεξάρτητες εξισώσεις επιπεδότητας. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε δύο πίνακες μεταφοράς

$$T_i(b,a;z_i) = \mathcal{P}\exp\left(-\int_a^b d\sigma \mathcal{L}_{i\sigma}(\tau,\sigma,z_i)\right)\,, \quad i=1,2 \tag{10.1}$$

με

$$\mathcal{L}_{i\sigma} = \frac{2z_i}{1+\lambda_i}\left(\frac{1}{z_i-1}A_{i+} - \frac{1}{z_i+1}A_{i-}\right), \quad i=1,2\,, \tag{10.2}$$

οι οποίοι, στην περίπτωση της κλειστής ή άπειρης χορδής παράγουνε δύο άπειρα σύνολα μετατιθέμενων/ανεξάρτητων ολοκληρωμάτων κίνησης [185].

Στην περίπτωση της ανοιχτής χορδής, ο συνοριακός μονόδρομος πίνακας κατασκευάζεται από τον πίνακα μεταφοράς (10.1) στο διάστημα $\sigma \in [0,\pi]$ επί την ανακλώμενη έκφραση του στο διάστημα $\sigma \in [\pi, 2\pi]$ συμπεριλαμβανομένου και ενός αυτομορφισμού ο οποίος δρά στην άλγβερα $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$,

$$T_{ib} = T_{iR}^{\Omega_i}(2\pi,\pi;z_i)T_i(\pi,0;z_i)\,, \quad i=1,2\,. \tag{10.3}$$

Παρακάτω θεωρούμε δυο περιπτώσεις. Στην πρώτη θα καταλήξουμε σε συνοριακές συνθήκες που συσχετίζουν στο σύνορο τα πεδία απο τον ίδιο τομέα δηλαδή τα A_{i+} συναρτήσει των A_{i-}, ενώ στην δεύτερη περίπτωση τα πεδία των δύο διαφορετικών τομέων.

Ορίζοντας τον τελεστή ανάκλασης R ως

$$R : \sigma \to 2\pi - \sigma, \quad g_i \to g_{i+1}^{-1}\,, \quad i=1,2\,, \tag{10.4}$$

τα πεδία $A_{i\pm}$ μετασχηματίζονται κάτω από την δράση του σαν

$$A_{i\pm}(\sigma) \to A_{iR\pm}(\sigma) = A_{i\mp}(2\pi-\sigma)\,, \quad i=1,2 \tag{10.5}$$

και ο ανακλώμενος πίνακας μεταφοράς ικανοποιεί τις σχέσεις

$$T_{iR}^{\Omega_i}(2\pi,\pi;z) = T_i^{\Omega_i}(0,\pi;-z)\,, \quad i=1,2\,. \tag{10.6}$$

Δεδομένων των ταυτοτήτων (6.55) βρίσκουμε ότι ο συνοριακός μονόδρομος πίνακας (10.3) ικανοποιεί την (6.53) για $N_i(z) = \mathcal{L}_{i\tau}(z)$ και τις συνοριακές συνθήκες

$$\mathcal{L}_{i\tau}(z)|_{\partial\Sigma} = \Omega_i \mathcal{L}_{i\tau}(-z)|_{\partial\Sigma}\,, \quad i=1,2\,. \tag{10.7}$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση της χρονικής συνιστώσας του ζεύγους Lax

$$\mathcal{L}_{i\tau} = \frac{2z_i}{1+\lambda_i}\left(\frac{1}{z_i-1}A_{i+} + \frac{1}{z_i+1}A_{i-}\right), \quad i=1,2 \tag{10.8}$$

και συγκρίνοντας τις ίδιες δυνάμεις της φασματικής παραμέτρου βρίσκουμε ότι οι (10.7) συνεπάγονται τις ολοκληρώσιμες σ.σ

$$A_{1+}|_{\partial\Sigma} = \Omega_1 A_{1-}|_{\partial\Sigma}\,, \quad A_{2+}|_{\partial\Sigma} = \Omega_2 A_{2-}|_{2-}|_{\partial\Sigma} \tag{10.9}$$

και στα δύο άκρα της χορδής. Λόγω ίδιων επιχειρημάτων με την περιπτώση του λ-προτύπου οι πίνακες Ω_1, Ω_2 πρέπει να είναι σταθεροί μοναδιακοί πίνακες και να διατηρούν το ίχνος της άλγβερας $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$.

Εναλλακτικά, μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή ανάκλασης ως

$$R : \sigma \to 2\pi - \sigma, \quad g_i \to g_i^{-1}, \quad \lambda_i \to \lambda_{i+1}\,, \tag{10.10}$$

για τον οποίο ισχύει ότι

$$A_{i\pm}(\sigma) \to A_{iR\pm}(\sigma) = A_{i+1\mp}(2\pi-\sigma)\,, \quad i=1,2 \tag{10.11}$$

και η αντίστοιχη εξίσωση της (10.6) είναι η

$$T_{iR}^{\Omega_i}(2\pi,\pi;z) = T_{i+1}^{\Omega_i}(0,\pi;-z)\,, \quad i=1,2\,. \tag{10.12}$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με παραπάνω βρίσκουμε τις ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες

$$\frac{1}{1+\lambda_1}A_{1+}|_{\partial\Sigma} = \frac{1}{1+\lambda_2}\Omega A_{2-}|_{\partial\Sigma}\,, \quad \frac{1}{1+\lambda_2}A_{2+}|_{\partial\Sigma} = \frac{1}{1+\lambda_1}\Omega^{-1}A_{1-}|_{\partial\Sigma} \tag{10.13}$$

όπου για λόγους συνέπειας $\Omega_1 = \Omega_2^{-1} = \Omega$.[1] Επίσης να αναφέρουμε ότι σε αυτήν την περίπτωση ο πίνακας Ω δεν χρειάζεται να είναι μοναδιακός. Δεδομένου ότι οι σ.σ (10.13) σχετίζουν πεδία από διαφορετικούς τομείς χρειάζονται προσεκτικότερη ανάλυση. Απαιτώντας

[1] Συγκεκριμένα βρίσκουμε το σύστημα εξισώσεων

$$A_{1+} = \Omega_1 A_{2-} \quad A_{2+} = \Omega_2 A_{1-}$$
$$A_{1-} = \Omega_1 A_{2+} \quad A_{2-} = \Omega_2 A_{1+}\,,$$

από όπου και συνεπάγεται ότι $\Omega_1 = \Omega_2^{-1}$.

να ικανοποιούν την συνθήκη $T_{++}|_{\partial\Sigma} = T_{--}|_{\partial\Sigma}$ στο σύνορο βρίσκουμε ότι $\Omega^T\Omega = \mathbb{1}$ και $\lambda_1 = \lambda_2$, περιορισμός συμβατός με τις β-συναρτήσεις τους.

Συλλέγοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, βρήκαμε ότι το διπλά λ-παραμορφωμένο πρότυπο με ίσα επίπεδα επιδέχεται δύο ειδών ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες, τις

$$\begin{pmatrix} A_{1+} \\ A_{2+} \end{pmatrix}_{\partial\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega \\ \Omega^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1-} \\ A_{2-} \end{pmatrix}_{\partial\Sigma}, \tag{10.14}$$

και τις

$$\begin{pmatrix} A_{1+} \\ A_{2+} \end{pmatrix}_{\partial\Sigma} = \begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 \\ 0 & \Omega_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{1-} \\ A_{2-} \end{pmatrix}_{\partial\Sigma}, \tag{10.15}$$

με τις πρώτες να συνοδεύονται από την συνθήκη $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, ενώ οι δεύτερες διατηρούν την ανεξαρτησία τους.

Παρακάτω θα δείξουμε ότι οι συνοριακές συνθήκες (10.14), (10.15) περιγράφουν δύο διαφορετικές κλάσεις βρανών. Ήδη μπορούμε να δούμε ότι στο υπεριώδες $(\lambda_1, \lambda_2) = (0, 0)$, το πρότυπο είναι μια $G_k \times G_k$ ΣΘΠ και οι παραπάνω σ.σ, για τετριμένους αυτομορφισμούς, καταλήγουν στις

$$J_{1+}|_{\partial\Sigma} = -J_{1-}|_{\partial\Sigma}, \quad J_{2+}|_{\partial\Sigma} = -J_{2-}|_{\partial\Sigma}, \tag{10.16}$$

και στις

$$J_{1+}|_{\partial\Sigma} = -J_{2-}|_{\partial\Sigma}, \quad J_{1+}|_{\partial\Sigma} = -J_{2-}|_{\partial\Sigma}. \tag{10.17}$$

αντίστοιχα. Οι πρώτες περιγράφουν τις γνωστές κλάσεις συζυγίας της ομάδας G και οι δεύτερες περιγράφουν τις βράνες εναλλαγής. Παρακάτω θα δούμε ότι αυτές οι γεωμετρικές εικόνες επιβιώνουν της παραμόρφωσης.

10.1.2 Η περίπτωση των άνισων επιπέδων

Σε αυτό το υποκεφάλαιο θα ορίσουμε ολοκληρώσιμες σ.σ στο πρότυπο (8.24) για $N = 2$. Οι δύο πίνακες μεταφοράς που παράγουν τα ανεξάρτητα άπειρα σύνολα διατηρούμενων φορτίων, δίνονται στην (10.1) με

$$\mathcal{L}_{i\sigma} = \frac{2z_i}{1+\lambda_i}\left(\frac{1}{z_i - 1}\frac{1-\lambda_0^{(i)}\lambda_i}{1-\lambda_i^2}A_{i+} - \frac{1}{z_i+1}\frac{1-(\lambda_0^{(i)})^{-1}\lambda_i}{1-\lambda_i^2}A_{i-}\right), \quad i = 1, 2. \tag{10.18}$$

Ορίζοντας τον τελεστή ανάκλασης ως

$$R:\sigma\to 2\pi-\sigma\,,\quad g_i\to g_{i+1}^{-1}\,,\quad \lambda_0\to\lambda_0^{-1}\,,\quad i=1,2 \tag{10.19}$$

και ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την περίπτωση των ίσων επιπέδων βρίσκουμε τις ολοκληρώσιμες σ.σ

$$\frac{1-\lambda_0^{-1}\lambda_1}{1-\lambda_1^2}A_{1+}|_{\partial\Sigma}=\frac{1-\lambda_0\lambda_1}{1-\lambda_1^2}\Omega_1 A_{1-}|_{\partial\Sigma}\,,\quad \frac{1-\lambda_0\lambda_2}{1-\lambda_2^2}A_{2+}|_{\partial\Sigma}=\frac{1-\lambda_0^{-1}\lambda_2}{1-\lambda_2^2}\Omega_2 A_{2-}|_{\partial\Sigma}\,, \tag{10.20}$$

με τους πίνακες Ω_1, Ω_2 να είναι ορθογώνιοι, δηλαδή $\Omega_i\Omega_i^T=\mathbb{1}$.

Εναλλακτικά, αν ορίσουμε την δράση του ως

$$R:\sigma\to 2\pi-\sigma\,,\quad g_i\to g_i^{-1}\,,\quad \lambda_1\to\lambda_2\,,\quad i=1,2\,, \tag{10.21}$$

βρίσκουμε τις σ.σ

$$\frac{1-\lambda_0^{-1}\lambda_1}{1-\lambda_1^2}A_{1+}|_{\partial\Sigma}=\frac{1-\lambda_0^{-1}\lambda_2}{1-\lambda_2^2}\Omega A_{2-}|_{\partial\Sigma}\,,\quad \frac{1-\lambda_0\lambda_2}{1-\lambda_2^2}A_{2+}|_{\partial\Sigma}=\frac{1-\lambda_0^{-1}\lambda_1}{1-\lambda_1^2}\Omega^{-1} A_{1-}|_{\partial\Sigma}\,, \tag{10.22}$$

οι οποίες, όπως και στην περίπτωση των ίσων επιπέδων, οδηγούν στον περιορισμό $\lambda_1=\lambda_2$ με τον πίνακα Ω να διατηρεί το ίχνος της άλγεβρας και δεν απαιτείται να είναι μοναδιακός. Παρόλο που οι (10.20) δεν ικανοποιούν την συνθήκη $T_{++}|_{\partial\Sigma}=T_{--}|_{\partial\Sigma}$ στο σύνορο, λόγος για τον οποίο δεν επιδέχονται γεωμετρικής ερμηνείας, έχουν εξαχθεί με την μέθοδο του μονόδρομου πίνακα, επομένως διατηρούν την ολοκληρωσιμότητα του προτύπου.

Επομένως το γενικευμένο λ-πρότυπο με άνισα επίπεδα επιδέχεται τις παρακάτω ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες, με γεωμετρική εικόνα,

$$\begin{pmatrix}A_{1+}\\A_{2+}\end{pmatrix}_{\partial\Sigma}=\begin{pmatrix}0&\Omega\\ \Omega^{-1}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{1-}\\A_{2-}\end{pmatrix}_{\partial\Sigma}\,, \tag{10.23}$$

με τον πίνακα Ω να είναι ορθογώνιος και οι παράμετροι παραμόρφωσης ίσες, $\lambda_1=\lambda_2$.

10.1.3 Το λ-$(G \times G/G)$ πρότυπο

Χρησιμοποιώντας το ζεύγος Lax της θεωρίας (8.64) μπορούμε να ορίσουμε τον πίνακα μεταφοράς και ο συνοριακός μονόδρομος πίνακας δίνεται ως

$$T_b(z) = T_R(2\pi, \pi; z) T(\pi, 0; z), \tag{10.24}$$

με τον τελεστή της ανάκλασης $R : \sigma_+ \to \sigma_-$, $g_i \to g_i^{-1}$, $i = 1, 2$ να μετασχηματίζει τα πεδία (8.56) ως

$$A_{i\pm}(\sigma) \to A_{i\mp}(2\pi - \sigma), \quad i = 1, 2\,. \tag{10.25}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι σε αυτή την περίπτωση

$$T_R(2\pi, \pi; z) = T(0, \pi; z^{-1}). \tag{10.26}$$

Απαιτώντας ο μονόδρομος πίνακας (10.24) να παράγει άπειρα ολοκληρώματα κίνησης βρίσκουμε ότι η (6.53) ικανοποιείται για $N(z) = \mathcal{L}_\tau(0, z)$ και τις συνοριακές συνθήκες

$$\mathcal{L}_\tau(z)|_{\partial\Sigma} = \mathcal{L}_\tau(z^{-1})|_{\partial\Sigma} \tag{10.27}$$

και στα δύο άκρα της χορδής. Χρησιμοποιώντας την μορφή της χρονικής συνιστώσας του ζεύγους Lax βρίσκουμε τις ολοκληρώσιμες σ.σ

$$\mathcal{B}_+|_{\partial\Sigma} = \mathcal{B}_-|_{\partial\Sigma}\,, \tag{10.28}$$

οι οποίες είναι της ίδιας μορφής με αυτές του λ-G/H προτύπου για $\Omega = \mathbb{1}$.

10.2 Αναγνώριση των ολοκληρώσιμων βρανών

Στόχος μας είναι η αναγνώριση των βρανών που αποτελούν λύσεις των παραπάνω ολοκληρώσιμων συνοριακών συνθηκών. Εξαιτίας της περιπλοκότητας των πεδίων $A_{i\pm}$ θα προτιμήσουμε την μέθοδο της προσέγγισης σ-προτύπου, όπως την αναπτύξαμε και εφαρμόσαμε στο WZW και λ-παραμορφωμένο πρότυπο στα υποκεφάλαια 6.2.2, 7.2.

10.2.1 Η περίπτωση των ίσων επιπέδων

Θα ξεκινήσουμε με το πρότυπο (8.11), στο οποίο από εδώ και πέρα θα αναφερόμαστε ως πρότυπο (I). Θα προτιμήσουμε την δράση του γραμμένη στην μορφή

$$S_{k;\lambda_1,\lambda_2} = \int_\Sigma L_{k;\lambda_1,\lambda_2} + \int_M H_{k;\lambda_1,\lambda_2}\,, \tag{10.29}$$

όπου ορίσαμε

$$\begin{aligned} L_{k,\lambda_1,\lambda_2} = -\frac{k}{8\pi}\sum_{i=1}^{2} \mathrm{Tr}(g_i^{-1}\partial_\mu g_i, g_i^{-1}\partial^\mu g_i) + 2\lambda_i \mathrm{Tr}(\partial^\mu g_i g_i^{-1}, \mathcal{O}^T_{i,i+1} g^{-1}_{i+1}\partial_\mu g_{i+1}) \\ + 2\lambda_i\lambda_{i+1}\mathrm{Tr}(\partial^\mu g_i g_i^{-1}, \mathcal{O}_{i,i+1} D^T_{i+1} g_i^{-1}\partial_\mu g_i)\,, \end{aligned} \tag{10.30}$$

$$H_{k,\lambda_1,\lambda_2} = \frac{k}{4\pi}\sum_{i=1}^{2}(H_{WZ}(g_i) + \lambda_i d\mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1} \wedge \mathcal{O}^T_{i,i+1}(g^{-1}_{i+1}dg_{i+1} + \lambda_{i+1}D^T_{i+1}g_i^{-1}dg_i)))\,.$$

Στην περίπτωση της επιφάνειας Σ με σύνορο, η (10.29) τροποποιείται έτσι ώστε να συμπεριλάβει τις συνεισφορές του συνόρου. Συγκεριμένα γράφεται στην μορφή

$$S_{k;\lambda_1,\lambda_2} = \int_\Sigma L_{k;\lambda_1,\lambda_2} + \int_{M'} H_{k;\lambda_1,\lambda_2} - \int_D \omega_{k;\lambda_1,\lambda_2}, \tag{10.31}$$

με τον χώρο M' να ορίζεται έτσι ώστε $\partial M' = \Sigma \cup D$ και $\omega_{k;\lambda_1,\lambda_2}$ η επαγόμενη 2-μορφή στο εσωτερικό της βράνης, για την οποία ισχύει

$$H_{k;\lambda_1,\lambda_2}|_{\text{βράνη}} = d\omega_{k;\lambda_1,\lambda_2}, \tag{10.32}$$

Σε αυτό το σημείο θα θεωρήσουμε συγκεκριμένες γεωμετρίες βρανών. Αρχικά θα εμβαπτίσουμε στο πρότυπο βράνες με την παρακάτω γεωμετρία

$$\mathcal{C}_{f_1 f_2} = \{(h_1 f_1 h_1^{-1}, h_2 f_2 h_2^{-1}), |\forall h_1, h_2 \in G\}\,, \tag{10.33}$$

όπου f_1, f_2 σταθερά στοιχεία της ομάδας από τον Cartan τόρο. Η διάσταση τους είναι $2(d_G - r_G)$, όπου $r_G = \mathrm{rank}(G)$.

Δεδομένης της (10.33) και χρησιμοποιώντας την (10.32) βρίσκουμε ότι η 2-μορφή είναι η

$$\begin{aligned}\omega_{k;\lambda_1,\lambda_2} = \frac{k}{4\pi}\sum_{i=1}^{2}\Big(&\omega_{WZ}(h_i) - \lambda_i \mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1}\wedge \mathcal{O}^T_{i,i+1} g^{-1}_{i+1} dg_{i+1})|_{\mathcal{C}_{f_1 f_2}} \\ &- \lambda_i\lambda_{i+1}\mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1}\wedge \mathcal{O}^T_{i,i+1} D^T_{i+1} g_i^{-1} dg_i)|_{\mathcal{C}_{f_1 f_2}}\Big)\,,\end{aligned} \tag{10.34}$$

όπου

$$\omega_{WZ}(h_i) = \mathrm{Tr}(h_i^{-1}dh_i \wedge f_i h_i^{-1} dh_i f_i^{-1}), \quad i=1,2\,, \tag{10.35}$$

έτσι ώστε, $H_{WZ}(g_i)|_{\mathcal{C}_{f_i}} = d\omega_{WZ}(h_i)$.[2] Ο δεύτερος όρος στο δεξί μέλος της (10.34) είναι η λ-εξαρτώμενη δύο μορφή υπολογισμένη στην βράνη. Γνωρίζοντας την γεωμετρία (10.33) αλλά και την επαγόμενη μορφή, μπορούμε να υπολογίσουμε την συνοριακή συνεισφορά στην μεταβολή της δράσης (10.31). Για τον αναλυτικό υπολογισμό της παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο παράρτημα Δ. Αυτή δίνεται ως

$$\begin{aligned}\delta S|_{\partial\Sigma} &= \frac{k}{2\pi}\int_{\partial\Sigma}\mathrm{Tr}(\delta h_1 h_1^{-1}, \nabla_+ g_1 g_1^{-1} + g_1^{-1}\nabla_- g_1 + (A_{1+}-A_{2+}) + (A_{1-}-A_{2-})) \\ &+ \frac{k}{2\pi}\int_{\partial\Sigma}\mathrm{Tr}(\delta h_2 h_2^{-1}, \nabla_+ g_2 g_2^{-1} + g_2^{-1}\nabla_- g_2 + (A_{2+}-A_{1+}) + (A_{2-}-A_{1-})) \\ &= \frac{k}{2\pi}\int_{\partial\Sigma}\mathrm{Tr}(\delta h_1 h_1^{-1}, \lambda^{-1}(A_{1+}-A_{2-}) - (A_{2+}-A_{1-})) \\ &+ \frac{k}{2\pi}\int_{\partial\Sigma}\mathrm{Tr}(\delta h_2 h_2^{-1}, \lambda^{-1}(A_{2+}-A_{1-}) - (A_{1+}-A_{2-}))\,,\end{aligned} \tag{10.36}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις εξισώσεις (8.9) και θέσαμε τις παραμέτρους παραμόρφωσης ίσες. Είναι προφανές ότι ο μηδενισμός της (10.36) συνεπάγεται τις συνοριακές συνθήκες

$$A_{1+}|_{\partial\Sigma} = A_{2-}|_{\partial\Sigma}\,, \quad A_{2+}|_{\partial\Sigma} = A_{1-}|_{\partial\Sigma} \tag{10.37}$$

που αποτελούν τις ολοκληρώσιμες σ.σ (10.14) που βρήκαμε με την μέθοδο του μονόδρομου πίνακα.

Εναλλακτικά, μπορούμε να θεωρήσουμε τις βράνες εναλλαγής, τις οποίες παρουσιάσαμε στο υποκεφάλαιο 6.3 και ορίζονται ως

$${\mathcal{C}^\pi}_{f_1 f_2} = \{(h_1 f_1 h_2^{-1}, h_2 f_2 h_1^{-1}), |\forall h_1, h_2 \in G\}\,. \tag{10.38}$$

Η γεωμετρία τους είναι συνεπής με το συγκεκριμένο πρότυπο, διότι τα επίπεδα είναι ίσα.

[2] Δές υποκεφάλαιο 6.2.2

Υπολογίζοντας την συνοριακή 2-μορφή επαγόμενη στο εσωτερικό τους, βρίσκουμε την έκφραση (10.34) με την διαφορά ότι

$$\omega_{\mathrm{WZ}}(f_i) = \mathrm{Tr}(h_i^{-1}dh_i \wedge f_i h_{i+1}^{-1} dh_{i+1} f_i^{-1}), \quad i = 1, 2, \tag{10.39}$$

και ο δεύτερος όρος στην ίδια εξίσωση είναι υπολογισμένος στην βράνη (10.38).[3] Όπως προηγουμένως είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την συνοριακή συνεισφορά των βρανών (10.38) στην μεταβολή της δράσης (10.31), η οποία δίνεται ως

$$\begin{aligned}\delta S|_{\partial\Sigma} &= \frac{k}{2\pi}\int \mathrm{Tr}(\delta h_1 h_1^{-1}, \nabla_+ g_1 g_1^{-1} + g_2^{-1}\nabla_- g_2) + \mathrm{Tr}(\delta h_2 h_2^{-1}, \nabla_+ g_2 g_2^{-1} + g_1^{-1}\nabla_- g_1) \\ &= \frac{k}{2\pi}\int (\lambda_1^{-1} - 1)\mathrm{Tr}(\delta h_1 h_1^{-1}, A_{1+} - A_{1-}) + (\lambda_2^{-1} - 1)\mathrm{Tr}(\delta h_2 h_2^{-1}, A_{2+} - A_{2-})\,.\end{aligned} \tag{10.40}$$

Ο μηδενισμός της συνεπάγεται τις ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες (10.15),

$$A_{1+}|_{\partial\Sigma} = A_{1-}|_{\partial\Sigma}, \quad A_{2+}|_{\partial\Sigma} = A_{2-}|_{\partial\Sigma}, \tag{10.41}$$

Επομένως συλλέγοντας τα παραπάνω αποτελέσματα βρήκαμε ότι το πρότυπο (Ι) με ίσα επίπεδα επιδέχεται δύο ειδών ολοκληρώσιμες βράνες.

Δύο ανεξάρτητες κλάσεις συζυγίας:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{f_1 f_2} &= \{(h_1 f_1 h_1^{-1}, h_2 f_2 h_2^{-1}, |\forall h_1, h_2 \in G)\}, \\ \omega_{k;\lambda_1,\lambda_2} &= \frac{k}{4\pi}\sum_{i=1}^{2}\Big(\omega_{\mathrm{WZ}}(h_i) - \lambda_i \mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1} \wedge \mathcal{O}_{i,i+1}^T g_{i+1}^{-1} dg_{i+1})|_{\mathcal{C}_{f_1 f_2}} \\ &\quad - \lambda_i\lambda_{i+1}\mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1} \wedge \mathcal{O}_{i,i+1}^T D_{i+1}^T g_i^{-1} dg_i)|_{\mathcal{C}_{f_1 f_2}}\Big) \\ \omega_{\mathrm{WZ}}(f_i) &= \mathrm{Tr}(h_i^{-1} dh_i \wedge f_i h_i^{-1} dh_i f_i^{-1})\,,\end{aligned} \tag{10.42}$$

[3]Κάποιος/κάποια μπορεί να ανατρέξει στο υποκεφάλαιο 6.3 και να επιβεβαιώσει ότι

$$\sum_{i=1}^{2} H_{WZ}(g_i)|_{\mathcal{C}^{\pi}_{f_1 f_2}} = \sum_{i=1}^{2}\mathrm{Tr}(h_i^{-1}dh_i \wedge f_i h_{i+1}^{-1} dh_{i+1} f_i^{-1})$$

που υπόκεινται στην συνθήκη $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ και τις βράνες εναλλαγής:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}^{\pi}_{f_1 f_2} &= \{(h_1 f_1 h_2^{-1}, h_2 f_2 h_1^{-1}, |\forall h_1, h_2 \in G)\}, \\
\omega_{k;\lambda_1,\lambda_2} &= \frac{k}{4\pi}\sum_{i=1}^{2}\Big(\omega_{\mathrm{WZ}}(h_i) - \lambda_i \mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1} \wedge \mathcal{O}^T_{i,i+1} g_{i+1}^{-1} dg_{i+1})|_{\mathcal{C}^{\pi}_{f_1 f_2}} \\
&\quad - \lambda_i \lambda_{i+1} \mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1} \wedge \mathcal{O}^T_{i,i+1} D^T_{i+1} g_i^{-1} dg_i)|_{\mathcal{C}^{\pi}_{f_1 f_2}}\Big) \\
\omega_{\mathrm{WZ}}(f_i) &= \mathrm{Tr}(h_i^{-1} dh_i \wedge f_i h_{i+1}^{-1} dh_{i+1} f_i^{-1})\,.
\end{aligned}
\tag{10.43}
$$

10.2.2 Η περίπτωση των άνισων επιπέδων

Σε αυτή την περίπτωση η δράση του προτύπου δίνεται στην (8.31), στο οποίο θα αναφερόμαστε ως πρότυπο (II). Οπως δείξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο αυτό παρεμβάλεται μετάξυ δύο ΣΘΠ στο υπεριώδες και στο υπέρυθρο σημείο

$$
G_{k_1} \times G_{k_2} \Longrightarrow \left(\frac{G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2-k_1}\right)_L \otimes \left(\frac{G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}}{G_{k_2}} \times G_{k_2-k_1}\right)_R . \tag{10.44}
$$

Θα προτιμήσουμε να γράψουμε την δράση του στην μορφή

$$
S_{k_1,k_2;\lambda_1,\lambda_2} = \int_\Sigma L_{k_1,k_2;\lambda_1,\lambda_2} + \int_M H_{k_1,k_2;\lambda_1,\lambda_2}\,, \tag{10.45}
$$

με τους ορισμούς

$$
\begin{aligned}
L_{k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2} &= -\frac{1}{8\pi}\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Tr}(g_i^{-1}\partial_\mu g_i, g_i^{-1}\partial^\mu g_i) + 2\lambda_i k_i \mathrm{Tr}(\partial^\mu g_i g_i^{-1}, \mathcal{O}^T_{i+1,i} g_{i+1}^{-1}\partial_\mu g_{i+1}) \\
&\qquad + 2\lambda_i\lambda_{i+1} k_i \mathrm{Tr}(\partial^\mu g_i g_i^{-1}, \mathcal{O}_{i+1,i} D^T_{i+1} g_i^{-1}\partial_\mu g_i))
\end{aligned}
\tag{10.46}
$$

$$
H_{k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2} = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{2}(k_i H_{\mathrm{WZ}}(g_i) + \lambda_i k_i d\mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1} \wedge \mathcal{O}_{i+1,i}(g_{i+1}^{-1} dg_{i+1} + \lambda_{i+1} D^T_{i+1} g_i^{-1} dg_i)))\,.
$$

Οι βράνες που θα εμβαπτίσουμε περιγράφονται από την γεωμετρία (10.33) και η 2-μορφή επαγόμενη στο εσωτερικό τους είναι η

$$
\begin{aligned}
\omega_{k_1,k_2;\lambda_1,\lambda_2} &= \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{2}\Big(k_i \omega_{\mathrm{WZ}}(h_i) - \lambda_i k_i \mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1} \wedge \mathcal{O}^T_{i+1,i} g_{i+1}^{-1} dg_{i+1})|_{\mathcal{C}_{f_1 f_2}} \\
&\qquad - \lambda_i \lambda_{i+1} k_i \mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1} \wedge \mathcal{O}^T_{i+1,i} D^T_{i+1} g_i^{-1} dg_i)|_{\mathcal{C}_{f_1 f_2}}\Big)\,.
\end{aligned}
\tag{10.47}
$$

Μετά από μια σειρά πράξεων, τις οποίες επίσης παρουσιάζουμε στο παράρτημα Ε, βρίσκουμε ότι η συνοριακή συνεισφορά είναι η

$$
\begin{aligned}
\delta S|_{\partial\Sigma} &= \frac{k_1}{2\pi}\int_{\partial\Sigma}\mathrm{Tr}(\delta h_1 h_1^{-1}, \nabla_+ g_1 g_1^{-1} + g_1^{-1}\nabla_- g_1 + (A_{1+} - A_{2+}) + (A_{1-} - A_{2-})) \\
&+ \frac{k_2}{2\pi}\int_{\partial\Sigma}\mathrm{Tr}(\delta h_2 h_2^{-1}, \nabla_+ g_2 g_2^{-1} + g_2^{-1}\nabla_- g_2 + (A_{2+} - A_{1+}) + (A_{2-} - A_{1-})) \\
&= \frac{k_1}{2\pi}\int_{\partial\Sigma}\mathrm{Tr}(\delta h_1 h_1^{-1}, \lambda^{-1}\lambda_0^{-1}(A_{1+} - A_{2-}) - (A_{2+} - A_{1-})) \\
&+ \frac{k_2}{2\pi}\int_{\partial\Sigma}\mathrm{Tr}(\delta h_2 h_2^{-1}, \lambda^{-1}\lambda_0(A_{2+} - A_{1-}) - (A_{1+} - A_{2-}))\,,
\end{aligned}
\tag{10.48}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις εξισώσεις (8.29) και θέσαμε $\lambda_1 = \lambda_2$. Ο μηδενισμός της (10.48) συνεπάγεται τις ολοκληρώσιμες σ.σ (10.23), αποδεικνύωντας ότι οι βράνες

$$
\mathcal{C}_{f_1 f_2} = \{(h_1 f_1 h_1^{-1}, h_2 f_2 h_2^{-1}, |\forall h_1, h_2 \in G)\},
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_{k_1,k_2;\lambda_1,\lambda_2} = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{2}\Big(& k_i\omega_{WZ}(h_i) + \lambda_i k_i \mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1}\wedge \mathcal{O}_{i,i+1}^T g_{i+1}^{-1} dg_{i+1})|_{\mathcal{C}_{f_1 f_2}} \\
&+ \lambda_i\lambda_{i+1}k_i\mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1}\wedge \mathcal{O}_{i,i+1}^T D_{i+1}^T g_i^{-1} dg_i)|_{\mathcal{C}_{f_1 f_2}}\Big)\,,
\end{aligned}
\tag{10.49}
$$

$$
\omega_{WZ}(f_i) = \mathrm{Tr}(h_i^{-1}dh_i \wedge f_i h_i^{-1} dh_i f_i^{-1})\,,
$$

με $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, διατηρούν την ολοκληρωσιμότητα του προτύπου και την σύμμορφη συμμετρία των ΣΘΠ στο υπεριώδες και υπέρυθρο σημείο της (10.44). Η λεπτομερής ανάλυση των υποομάδων της σύμμορφης συμμετρίας που επιβιώνουν παρουσία των (10.49) και τις καθιστούν σύμμορφες θα μας απασχολήσει παρακάτω.

10.2.3 Η περίπτωση του λ-$(G\times G/G)$ προτύπου

Η δράση που περιγράφει την δυναμική του προτύπου, στο οποίο και θα αναφερόμαστε ως πρότυπο (III), δίνεται στην (8.60) και αποτελεί μια ολοκληρώσιμη θεωρία που παρεμβάλεται μεταξύ δύο ΣΘΠ της μορφής $G\times G/G$, (8.69).

Η (8.60) μπορεί να γραφτεί στην μορφή

$$
S_{k_1,k_2;\lambda} = \int_\Sigma L_{k_1,k_2;\lambda} + \int_M H_{k_1,k_2;\lambda}
\tag{10.50}
$$

όπου

$$
\begin{aligned}
L_{k_1,k_2,\lambda} &= -\frac{1}{8\pi}\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Tr}(g_i^{-1}\partial_\mu g_i, g_i^{-1}\partial^\mu g_i) + 2k_i s_i(1-\lambda)\mathrm{Tr}(\partial^\mu g_i g_i^{-1}, \Lambda_{i,i+1}^{-T} g_i^{-1}\partial_\mu g_i) \\
&+ 2k_{i+1}s_{i+1}(1-\lambda)\mathrm{Tr}(\partial^\mu g_i g_i^{-1}, \Lambda_{i,i+1}^{-T} g_{i+1}^{-1}\partial_\mu g_{i+1}) - 2\lambda s_i s_{i+1} k_i \mathrm{Tr}(\partial^\mu g_i g_i^{-1}, \Lambda_{i,i+1}^{-T}(D_{i+1}^T - \mathbb{1}) g_i^{-1}\partial_\mu g_i)\,, \\
H_{k_1,k_2,\lambda} &= \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{2}(k_i H_{\mathrm{WZ}}(g_i) + 2k_i s_i(1-\lambda) d\mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1}, \Lambda_{i,i+1}^{-T} g_i^{-1} dg_i) \qquad (10.51) \\
&+ 2k_{i+1}s_{i+1}(1-\lambda) d\mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1}, \Lambda_{i,i+1}^{-T} g_{i+1}^{-1} dg_{i+1}) - 2\lambda s_i s_{i+1} k_i d\mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1}, \Lambda_{i,i+1}^{-T}(D_{i+1}^T - \mathbb{1}) g_i^{-1} dg_i))\,.
\end{aligned}
$$

Όπως και προηγουμένως, αν θεωρήσουμε τις βράνες $\mathcal{C}_{f_1 f_2}$ και την 2-μορφή που αποτελεί λύση της εξίσωσης (10.32), βρίσκουμε ότι η συνοριακή συνεισφορά στην μεταβολή της δράσης είναι η

$$
\begin{aligned}
\delta S|_{\partial\Sigma} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Sigma} k_1 \mathrm{Tr}(\delta h_1 h_1^{-1}, \nabla_+ g_1 g_1^{-1} + g_1^{-1}\nabla_- g_1) + k_2 \mathrm{Tr}(\delta h_2 h_2^{-1}, \nabla_+ g_2 g_2^{-1} + g_2^{-1}\nabla_- g_2) \\
&= \frac{k(\lambda^{-1}-1)}{4\pi}\int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta h_1 h_1^{-1}, \mathcal{B}_+ - \mathcal{B}_-) - \mathrm{Tr}(\delta h_2 h_2^{-1}, \mathcal{B}_+ - \mathcal{B}_-)\,, \qquad (10.52)
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις εξισώσεις (8.55). Είναι προφανές ότι ο μηδενισμός της (10.52) συνεπάγεται τις συνοριακές συνθήκες (10.28), αποδεικνύωντας ότι οι βράνες

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_{f_1 f_2} &= \{(h_1 f_1 h_1^{-1}, h_2 f_2 h_2^{-1}, |\forall h_1, h_2 \in G)\}, \\
\omega_{k_1,k_2;\lambda} &= \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{2}\Big(k_i\omega_{\mathrm{WZ}}(h_i) + 2k_i(1-\lambda)\mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1}, \Lambda_{i,i+1}^{-T}(s_i g_i^{-1} dg_i + s_{i+1} g_{i+1}^{-1} dg_{i+1}))|_{\mathcal{C}_{f_1 f_2}} \\
&\quad - 2\lambda s_i s_{i+1} k_i \mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1}, \Lambda_{i,i+1}^{-T}(D_{i+1}^T - \mathbb{1}) g_i^{-1} dg_i)|_{\mathcal{C}_{f_1 f_2}}) \qquad (10.53) \\
\omega_{\mathrm{WZ}}(f_i) &= \mathrm{Tr}(h_i^{-1} dh_i \wedge f_i h_i^{-1} dh_i f_i^{-1})\,,
\end{aligned}
$$

διατηρούν την ολοκληρωσιμότητα του προτύπου για κάθε τιμή της παραμέτρου παραμόρφωσης.

10.3 Το φάσμα των επιτρεπτών βρανών

Οι WZ όροι στις δράσεις των προτύπων μας οδηγούν σε ζητήματα τοπολογικής φύσεως, τα οποία, όπως έχουμε αναφέρει, για να μην επηρεάζουν την φυσική των θεωριών πρέπει η σχετική κοχομολογική κλάση $[(H,\omega)]$ να είναι ολοκλήρωμα. Αντικαθιστώντας τις 3-

μορφές (10.30), (10.46), (10.51) και τις αντίστοιχες συνοριακές 2-μορφές (10.42), (10.43), (10.49), (10.53) στην (6.20) βρίσκουμε ότι σε κάθε περίπτωση αυτή είναι ανεξάρτητη των παραμέτρων παραμόρφωσης και ισούται με

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{k_i}{4\pi} \int_{S^3} H_{WZ}(g_i) - \int_{S^2} \omega_{WZ}(f_i) \in 2\pi\mathbb{Z} . \tag{10.54}$$

Η (10.54) οδηγεί στην κβάντωση των στοιχείων f_i του **Cartan** τόρου. Πιο συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε την ομάδα $G = SU(2)$ και την παραμετροποίηση των στοιχείων της (5.25) βρίσκουμε ότι το πρότυπο (I) επιδέχεται $(k+1)^2$ ολοκληρώσιμες βράνες της μορφής (10.33) που είναι επιφάνειες εντοπισμένες γύρω από τα σημεία

$$\psi_i = \frac{n_i \pi}{k}, \quad n_i = 0, 1, \ldots, k, \quad i = 1, 2, \tag{10.55}$$

του λ-εξαρτώμενου υποβάθρου. Όπως έχουμε δείξει ο αριθμός των επιτρεπτών βρανών εναλλαγής (10.37) σε ένα γινόμενο $G_k \times G_k$ είναι ίσος με τον αριθμό των κλάσεων συζυγίας σε ένα G_k πρότυπο. Δεδομένου ότι αυτή η εικόνα ισχύει στο υπεριώδες σημείο του προτύπου μας θα ισχύει και για κάθε τιμή των παραμέτρων παραμόρφωσης. Επομένως το πρότυπο (I) επιδέχεται επιπλέον $(k+1)$ βράνες εναλλαγής, ως ολοκληρώσιμες.

Αντίστοιχα το πρότυπο (II) επιδέχεται $(k_1+1)(k_2+1)$ ολοκληρώσιμες βράνες τις μορφής (10.33) οι οποίες είναι εντοπισμένες γύρω από τα σημεία

$$\psi_i = \frac{n_i \pi}{k_i}, \quad n_i = 0, 1, \ldots, k_i, \quad i = 1, 2 . \tag{10.56}$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι παρόλο που οι βαθμοί ελευθερίας της υπέρυθρης ΣΘΠ μειώνονται σε σχέση με της υπεριώδους το φάσμα των επιτρεπτών βρανών είναι αναλλοίωτο. Αυτό δεν αντιτίθεται με το C-θεώρημα, αφού το ίδιο δεν αναφέρεται σε συνοριακούς βαθμούς ελευθερίας.

10.4 Το παράδειγμα της $SU(2)$

Οι γεωμετρίες των υποβάθρων που αναλύουμε είναι λ-εξαρτώμενες ενώ οι ολοκληρώσιμες βράνες διαθέτουν ενδιαφέροντα χαρακτηριστικά ανεξάρτητα της παραμόρφωσης. Οι **Dirichlet** κατευθύνσεις τους και τα σημεία όπου ισορροπούν παραμένουν αναλλοίωτα όταν παραμορφώνουμε τα υπόβαθρα στα οποία είναι εμβαπτισμένες. Αυτά τα χαρακτηριστικά βρέθηκαν και στην περίπτωση των ολοκληρώσιμων βρανών του απλού λ-προτύπου όπου επιπλέον είδαμε ότι η παραμόρφωση επηρεάζει μόνο το μέγεθος τους. Αντιθέτως στις περιπτώσεις που μελετάμε η δράση της παραμόρφωσης στις μεγαλύτερης διάστασης βράνες είναι πιο περίπλοκη.

Θα επιλέξουμε να παρουσιάσουμε αυτήν την πρόταση για την περίπτωση του προτύπου (II) και για $G = SU(2)$, επομένως για ένα εξαδιάστατο υπόβαθρο. Στο υπεριώδες οι βράνες παρουσιάζονται στον πίνακα 10.1.

Πλήθος (N)	Γεωμετρία βρανών	Διάσταση (D)
$N = 4$	$\{\pm\mathbb{1}\} \times \{\pm\mathbb{1}\}$	$D = 0$
$N = 2(k_1 + k_2 - 2)$	$S^2 \times \{\pm\mathbb{1}\}, \{\pm\mathbb{1}\} \times S^2$	$D = 2$
$N = (k_1 - 1)(k_2 - 1)$	$S^2 \times S^2$	$D = 4$

Πίνακας 10.1: Σύμμορφες βράνες στο γινόμενο $G_{k_1} \times G_{k_2}$

Ανάβοντας την παραμόρφωση οι δισδιάστατες βράνες αλλάζουν μόνο σε μέγεθος, όπως και στην περίπτωση του απλού λ-προτύπου. Αυτό φαίνεται υπολογίζοντας την επαγόμενη μετρική

$$d\hat{s}_i^2 = \frac{k_i(1-\lambda^4)}{\Delta(\psi_i)} \sin^2\psi_i (d\theta_i^2 + \sin^2\theta_i d\phi_i^2), \quad g_{i+1} = \pm\mathbb{1}, \quad i = 1, 2, \tag{10.57}$$

με $\psi_i = \frac{n_i \pi}{k_i}$, $n_i = 1, \ldots, k_i - 1$. Τι μπορούμε να πούμε για την γεωμετρία των τετραδιάστατων βρανών κάτω από την παραμόρφωση; Είναι τετραδιάστατες επιφάνειες $\mathcal{S}_{\psi_1\psi_2} = \mathcal{S}_{\psi_1\psi_2}(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2)$ με $\psi_1, \psi_2 \neq 0, \pi$ και τις υπόλοιπες συντεταγμένες συζευγμένες με περίπλοκο λ-εξαρτώμενο τρόπο. Επομένως η παραμόρφωση δρα με σύνθετο τρόπο στις $S^2 \times S^2$ βράνες, χωρίς να επηρεάζει όμως την τοπολογία τους. Συγκεκριμένα υπολογίσαμε τον Gauss-Bonet όρο ο οποίος για τετραδιάστατους χώρους αποτελεί τοπολογικό αναλλοίωτο και τον βρήκαμε ανεξάρτητο του λ, όπως και αναμέναμε.

10.5 Σχόλια για τις ολοκληρώσιμες βράνες για $N > 2$

Σε αυτό το σημείο θα θεωρήσουμε το πολλαπλά λ-πραμορφωμένο πρότυπο σε ίσα επίπεδα (8.14). Όπως έχουμε δείξει, οι εξισώσεις κίνησης του μπορούν να γραφτούν στην μορφή Lax για N ανεξάρτητα ζεύγη πινάκων $A_{i\pm}$, τα οποία συναρτήσει των στοιχείων ομάδας δίνονται ως

$$
\begin{aligned}
A_{+}^{(i)} &= (\mathbb{1} - \hat{D}_i \dots \hat{D}_{N+i-1})^{-1} \sum_{j=i}^{N+i-1} \hat{D}_j \dots \hat{D}_{j-1} \lambda_j J_{+}^{(j)} \,, \\
A_{-}^{(i)} &= -(\mathbb{1} - \hat{D}_{i-1}^{T} \dots \hat{D}_{N+i-2})^{-1} \sum_{j=i-1}^{N+i-2} \hat{D}_j^{T} \dots \hat{D}_{j-1}^{T} \lambda_j J_{-}^{(j)} \,,
\end{aligned}
\tag{10.58}
$$

Με την μέθοδο του μονόδορμου πίνακα βρίσκουμε ότι οι ολοκληρώσιμες συνοριακές συνθήκες γράφονται στην μορφή

$$
\mathbb{A}_{+}|_{\partial\Sigma} = \mathbb{R}_N \mathbb{A}_{-}|_{\partial\Sigma} \,, \tag{10.59}
$$

όπου $\mathbb{A}_{\pm}^{T} = (A_{1\pm}, A_{2\pm}, \dots, A_{N\pm})$ και $\mathbb{R}_N$ ο πίνακας που περιγράφει όλες τις δυνατές συσχετίσεις μεταξύ των πεδίων $A_{i\pm}$ στο σύνορο. Στόχος μας είναι να εξάγουμε ένα γενικό κανόνα ο οποίος, δοσμένου του πίνακα $\mathbb{R}_N$, θα προσδιορίζει την γεωμετρία των ολοκληρώσιμων βρανών.

Θα ξεκινήσουμε για αρχή με την περίπτωση $N = 3$. Είναι εύκολο να δειχθεί ότι όλες οι δυνατές ολοκληρώσιμες σ.σ που βρίσκουμε, χρησιμοποιώντας μονόδρομους πίνακες της μορφής (6.52) είναι της μορφής

$$
\mathbb{R}_3 = \begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega \\ 0 & \Omega^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & \Omega_2 & 0 \\ \Omega^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \Omega & 0 \\ \Omega^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Omega_3 \end{pmatrix}, \tag{10.60}
$$

με τους πίνακες Ω_i, $i = 1, 2, 3$ και Ω, αυτομορφισμούς που δρούν στην άλγεβρα $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}$. Οι Ω_i είναι μοναδιακοί $\forall i = 1, 2, 3$ για λόγους αυτοσυνέπειας των σ.σ ενώ για τον Ω δεν είναι απαραίτητο. Οι τρείς τελευταίες σ.σ θέτουν τους περιορισμούς $\lambda_2 = \lambda_3$, $\lambda_1 = \lambda_3$ και $\lambda_1 = \lambda_2$ ενώ η πρώτη διατηρεί την ανεξαρτησία τους. Αν συμβολίσουμε το κάθε ζεύγος πεδίων $A_{i\pm}$ με τον δείκτη i τότε είναι προφανές ότι ο $\mathbb{R}_3$ αντιστοιχεί σε στοιχεία της συμμετρικής ομάδας S_3 της μορφής $(i)(j)(k)$, δηλαδη ενός γινομένου τριών διακριτών 1-κύκλων και της μορφής $(i)(jk)$, δηλαδή ενός 1-κύκλου του i και ενός 2-κύκλου μεταξύ των στοιχείων j,k. Ο κανόνας είναι απλός:

$$(i) \leftrightarrow A_{i+}|_{\partial\Sigma} = \Omega_i A_{i-}|_{\partial\Sigma},$$
$$(ij) \leftrightarrow A_{i+}|_{\partial\Sigma} = \Omega A_{j-}|_{\partial\Sigma}\,,\; A_{j+}|_{\partial\Sigma} = \Omega^{-1} A_{i-}|_{\partial\Sigma}.$$

Με αντίστοιχους υπολογισμούς, όπως αυτούς στα παραρτήματα βρίσκουμε ότι οι συνοριακές συνθήκες (10.60) αντιστοιχούν στις ολοκληρώσιμες γεωμετρίες[4]

$$\begin{aligned}&(1)(2)(3) : \mathcal{C}^{\pi}{}_{f_1 f_2 f_3},\\ &(1)(23) + \text{κυκλ.μετ.} : \left(\mathcal{C}_{f_2}, \mathcal{C}^{\pi}{}_{f_1 f_3}\right) + \text{κυκλ.μετ.}.\end{aligned} \tag{10.62}$$

Παρατηρούμε ότι οι συνοριακές συνθήκες γινόμενο τρίων διακριτών 1-κύκλων, αντιστοιχούν σε βράνες εναλλαγής μεταξύ και των τριών στοιχείων, ενώ οι σ.σ γινόμενο ενός 1-κύκλου και ενός 2-κύκλου, αντιστοιχούν σε γινόμενο μίας κλάσης συζυγίας με μια βράνη εναλλαγής μεταξύ των υπόλοιπων στοιχείων. Θέλουμε να δούμε αν υπάρχει μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ γεωμετρίας βρανών και στοιχείων της ομάδας συμμετρίας για $N > 3$.

Για τον σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι διαφορετικές συνοριακές συνθήκες ταξινομούνται στις κλάσεις (n,m) όπου n ο αριθμός των 2-κύκλων και m των 1-κύκλων με $N = 2n + m$. Βάση συνδυαστικής κάθε κλάση έχει $N!/n!m!2^n$ στοιχεία.

Για την $N = 4$ περίπτωση βρίσκουμε ότι οι σ.σ χωρίζονται στις κλάσεις $(0,4), (1,2), (2,0)$. Μετά από υπολογισμούς όμως, βρήκαμε ότι σε κάθε κλάση αντιστοιχούν παραπάνω από μία γεωμετρίες. Συγκεκριμένα

$$\begin{aligned}&(0,4) : \mathcal{C}^{\pi}{}_{ffff},\\ &(1,2) : \left(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}^{\pi}{}_{fff}\right), \left(\mathcal{C}^{\pi}{}_{ff}, \mathcal{C}^{\pi}{}_{ff}\right),\\ &(2,0) : \left(\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_f, \mathcal{C}^{\pi}{}_{ff}\right), \mathcal{C}^{\pi}{}_{ffff}.\end{aligned} \tag{10.63}$$

Ενας γενικός κανόνας απαιτεί πιο περιπλοκή συνδυαστική εντός της κάθε κλασης. Βέβαια ισχύει ότι κάθε 2-κύκλος μεταξύ γειτονικών δεικτών, δηλαδή $(i, i+1)$, οδηγεί σε βράνη με γεωμετρία κλάση συζυγίας. Επομένως ο μέγιστος αριθμός κλάσεων συζυγίας που μπορεί να περιέχουν οι ολοκληρώσιμες βράνες για N άρτιο είναι $N/2$ ενώ για περιττό $(N-1)/2$.

[4]Οι βράνες εναλλαγής για N στοιχεία ομάδας g_i ορίζονται ως

$$\mathcal{C}^{\pi}{}_{f_1,\ldots,f_i,\ldots f_N} = (h_1 f_1 h_2^{-1}, \ldots, h_i f_i h_{i+1}^{-1}, \ldots, h_N f_N f_1^{-1}) \tag{10.61}$$

10.6 Μελέτη των συμμετριών των βρανών στα σύμμορφα σημεία

10.6.1 Πρότυπο (II)

Όπως έχουμε αναφέρει το πρότυπο (II) παρεμβάλεται μεταξύ δύο ΣΘΠ στο υπεριώδες και υπέρυθρο σημείο της ροής του. Συνεπείς συνοριακές συνθήκες μειώνουν την αρχική ομάδα συμμετρίας μιας ΣΘΠ σε μια αρκετά μεγάλη υποομάδα η οποία εξασφαλίζει την διατήρηση της σύμμορφης συμμετρίας της.

Οι (10.23) ικανοποιούν την συνθήκη $T_{++} = T_{--}$ στο σύνορο, με αποτέλεσμα στα σύμμορφα σημεία να διατηρούν ένα αντίγραφο της Virassoro άλγβερας. Διατηρούν όμως και επιπλέον ομάδες συμμετρίας. Συγκεκριμένα στο υπεριώδες, όπου γράφονται στην μορφή

$$J_{1+}|_{\partial\Sigma} = J_{1-}|_{\partial\Sigma}, \quad J_{2+}|_{\partial\Sigma} = J_{2-}|_{\partial\Sigma}, \tag{10.64}$$

και το πρότυπο είναι μια $G_{k_1} \times G_{k_2}$ ΣΘΠ, διατηρούν ένα αντίγραφο της κάθε Kac-Moody άλγεβρας $\hat{\mathfrak{g}}_{k_i}$. Εναλλακτικά, στο επίπεδο των συμμετριών της δράσης, οι βράνες $\mathcal{C}_{f_1 f_2}$ διατηρούν την διαγώνια υποομάδα της χειραλικής συμμετρίας $G_L(\sigma_+) \times G_R(\sigma_-)$ του κάθε WZW προτύπου.

Στρέφοντας την προσοχή μας στο υπέρυθρο σημείο, οι συνοριακές συνθήκες γράφονται στην μορφή

$$A_{1+}(\lambda_0)|_{\partial\Sigma} = A_{2-}(\lambda_0)|_{\partial\Sigma}, \quad A_{2+}(\lambda_0)|_{\partial\Sigma} = A_{1-}(\lambda_0)|_{\partial\Sigma}, \tag{10.65}$$

ενώ η θεωρία, κάτω από τον επαναορισμό των πεδίων $(g_1, g_2) \to (g'_1 = g_1 g_2, g_2)$, είναι ισοδύναμη με την ΣΘΠ (9.41) για την επιλογή βαθμίδας $g_3 = \mathbb{1}$. Υπενθυμίζουμε ότι η (9.41) απολαμβάνει την συμμετρία βαθμίδας

$$(g_1, g_2, g_3) \mapsto (L^{-1} g_1 L\,,\, g_2 L\,,\, L^{-1} g_3), \quad L = L(\sigma_+, \sigma_-)\,, \tag{10.66}$$

και την χειραλική συμμετρία

$$(g_2, g_3) \mapsto (k_L^{-1}(\sigma_+) g_2, g_3 k_R(\sigma_-))\,. \tag{10.67}$$

Οι γεννήτορες της (10.67), στην προαναφερθείσα βαθμίδα, ισούνται με τα πεδία A_{2+} και A_{1-}, τα οποία ικανοποιούν την $\hat{\mathfrak{g}}_{k_2-k_1} \oplus \hat{\mathfrak{g}}_{k_2-k_1}$ άλγεβρα. Δεδομένου ότι η δεύτερη εξίσωση στην (10.65) σχετίζει τα προανεφερθέντα πεδία, συμπαιρένουμε ότι οι βράνες $\mathcal{C}_{f_1 f_2}$, οι οποίες κάτω από τον επαναορισμό των πεδίων γράφονται ως $(\mathcal{C}_{f_1}\mathcal{C}_{f_2}, \mathcal{C}_{f_2})$, διατηρούν την $\hat{\mathfrak{g}}_{k_2-k_1}$ άλγεβρα στο σύνορο. Επίσης, μπορούμε να υποθέσουμε με ασφάλεια ότι αποτελούν την εκδοχή γενικευμένων βρανών, οι οποίες εμβαπτισμένες στην ΣΘΠ (9.41) διατηρούν την συμμετρία βαθμίδας (10.66) και την διαγώνια υποομάδα της (10.67).

10.6.2 Πρότυπο (III)

Το πρότυπο (III) παρεμβάλεται μεταξύ δύο ΣΘΠ και σχηματικά η ροή του είναι η

$$\frac{G_{k_1} \times G_{k_2}}{G_{k_1+k_2}} \Longrightarrow \frac{G_{k_1-k_2} \times G_{k_2}}{G_{k_1}}\,. \tag{10.68}$$

Οι ολοκληρώσιμες βράνες $\mathcal{C}_{f_1 f_2}$ εμβαπτισμένες στην (10.68) διατηρούν την συμμετρία βαθμίδας επομένως πρέπει να προβληθούν στον παραμορφωμένο χώρο πηλίκου μειώνοντας έτσι την διάσταση τους σε $(d_G - 2r_G)$.[5] Για να το δούμε αυτό παρατηρούμε ότι κάτω από την (8.59) η δράση (8.60) μετασχηματίζεται ως

$$\delta_V S = \delta_V S|_\Sigma + \delta_V S|_{\partial\Sigma}\,, \tag{10.69}$$

με τον συνοριακό όρο να δίνεται ως

$$\delta_V S|_{\partial\Sigma} = \frac{k(\lambda^{-1}-1)}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta_V h_1 h_1^{-1}, \mathcal{B}_+ - \mathcal{B}_-) - \mathrm{Tr}(\delta_V h_2 h_2^{-1}, (\mathcal{B}_+ - \mathcal{B}_-))\,. \tag{10.70}$$

Για να βρούμε την μεταβολή του συνοριακού όρου παρατηρούμε ότι η γεωμετρία των βρανών παραμένει αναλλοίωτη, δηλαδή

$$(g_1, g_2)|_{\partial\Sigma} \mapsto (L^{-1} g_1 L, L^{-1} g_2 L)|_{\partial\Sigma} = (h_1' f_1 h_1'^{-1}, h_2' f_2 h_2'^{-1}), \tag{10.71}$$

με $h_i' = L^{-1} h_i$. Επομένως θέτωντας $\delta_V h_1 h_1^{-1} = \delta_V h_2 h_2^{-1}$ στην (10.70) βρίσκουμε $\delta_V S|_{\partial\Sigma} = 0$ ενώ εξ' ορισμού $\delta_V S|_\Sigma = 0$.

Στρέφοντας την προσοχή μας στα σύμμορφα σημεία της ροής (10.68) επιλέγουμε θεωρίες της μορφής $SU(2)_{k_1} \times SU(2)_{k_2} / SU(2)_{k_3}$ με $k_3 = k_1 + k_2$. Οι αναπαραστάσεις της χειραλικής τους άλγβερας ταξινομούνται βάση τριών θετικών ακέραιων κβαντικών αριθμών n_1, n_2, n_3 με $0 < n_i < k_i$. Σύμφωνα με την ανάλυση των εργασιών [202, 203] η γεωμετρία των

[5] Στην περίπτωση που $G = SU(2)$ είναι προφανές ότι οι βράνες είναι σημειακές και μονοδιάστατες.

σύμμορφων βρανών στις παραπάνω θεωρίες είναι η

$$\pi_{Ad}(\mathcal{C}_{a_1a_2a_3}) = \pi_{Ad}((\mathcal{C}_{a_1}\mathcal{C}_{a_3}, \mathcal{C}_{a_2}\mathcal{C}_{a_3})), \tag{10.72}$$

όπου π_{Ad} είναι ο προβολικός τελεστής στον χώρο πηλίκου και a_i οι συντεταγμένες που παραμετροποιούν τον cartan τόρο της $SU(2)$, $f_i = f_i(a_i) \in \mathcal{T}(SU(2))$, με $a_i = n_i\pi/k_i$. Όπως έδειξαν οι συγγραφείς, ανάλογα με τις τιμές των n_i οι βράνες διακρίνονται σε τρισδιάστατες, μονοδιάστατες και σημειακές, ενώ επιπλέον μελέτησαν και την γεωμετρία τους.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα μας, είναι προφανές ότι οι ολοκληρώσιμες βράνες (10.33) γράφονται στην μορφή (10.72) για $a_3 = 0, \pi$ και

$$\psi_i = a_i = \frac{n_i\pi}{k_i}, \quad i = 1, 2\,. \tag{10.73}$$

Όπως έχουμε αναφέρει, στο υπέρυθρο σημείο η ΣΘΠ $G_{k_1-k_2} \times G_{k_2}/G_{k_1}$ αναγνωρίζεται κάτω από την αλλαγή συντεταγμένων $(g_1, g_2) \rightarrow (g'_1 = g_1, g'_2 = g_2g_1)$, με τις βράνες $\mathcal{C}_{f_1f_2}$ να γράφονται στην μορφή

$$(g'_1, g'_2)|_{\partial\Sigma} = (\mathcal{C}_{\psi_1}, \mathcal{C}_{\psi_2}\mathcal{C}_{\psi_1})\,. \tag{10.74}$$

Η γεωμετρία (10.74) γράφεται στην μορφή (10.72) για $a_1 = 0$ και $a_3 = \psi_1$, σε συμφωνία με την αντιστοίχιση κβαντικών αριθμών και επιπέδων.

Οι βράνες που αναφέραμε είναι σημειακές και μονοδιάστατες. Οι τρισδιάστατες αντιστοιχούν στην περίπτωση όπου $n_i \neq 0, k_i$, $\forall i = 1, 2, 3$ και όπως αναφέρθηκε αποτελούν συνεπείς βράνες για τις ΣΘΠ στα σύμμορφα σημεία [203]. Παρόλα αυτά όμως, δεν καταφέραμε να δείξουμε ότι διατηρούν την ολοκληρωσιμότητα του προτύπου.

Για να γίνουμε πιο σαφείς αν θεωρήσουμε τις συνοριακές τιμές $(g_1, g_2)|_{\partial\Sigma} = (r_1r_3, r_2r_3)$ με $r_i = h_if_ih_i^{-1}, \forall h_i \in G$ βρίσκουμε ότι η συνοριακή συνεισφορά στην μεταβολή της δράσης είναι η

$$
\begin{aligned}
\delta S|_{\partial\Sigma} = \frac{k_1}{2\pi}\int_{\partial\Sigma} &\mathrm{Tr}(\delta h_1 h_1^{-1}, \nabla_+ g_1 g_1^{-1} + D_{r_3} g_1^{-1}\nabla_- g_1 + (1-D_{r_3})A_{1\tau} - \partial_\tau r_3 r_3^{-1}) \\
&+ \frac{k_2}{2\pi}\int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta h_2 h_2^{-1}, \nabla_+ g_2 g_2^{-1} + D_{r_3} g_2^{-1}\nabla_- g_2 + (1-D_{r_3})A_{2\tau} - \partial_\tau r_3 r_3^{-1}) \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta h_3 h_3^{-1}, (D_{r_3}-1)(k_1 g_1^{-1}\nabla_- g_1 + k_2 g_2^{-1}\nabla_- g_2) \\
&+ (D_{r_3}-1)(k_1 A_{1\tau} + k_2 A_{2\tau}) + (k_1+k_2)\partial_\tau r_3 r_3^{-1})\,.
\end{aligned}
\tag{10.75}
$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (8.55), η (10.75) γράφεται ως

$$
\begin{aligned}
\delta S|_{\partial\Sigma} = \frac{k}{4\pi}\int_{\partial\Sigma} &\mathrm{Tr}(\delta h_1 h_1^{-1}, (\lambda^{-1}-1)(\mathcal{B}_+ - D_{r_3}\mathcal{B}_-) + 2s_1(1-D_{r_3})A_{1\tau} - 2s_1\partial_\tau r_3 r_3^{-1}) \\
+ \frac{k}{4\pi}\int_{\partial\Sigma} &\mathrm{Tr}(\delta h_2 h_2^{-1}, (1-\lambda^{-1})(\mathcal{B}_+ - D_{r_3}\mathcal{B}_-) + 2s_2(1-D_{r_3})A_{2\tau} - 2s_2\partial_\tau r_3 r_3^{-1})\,. \\
+ \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Sigma} &\mathrm{Tr}(\delta h_3 h_3^{-1}, (D_{r_3}-1)(k_1 A_{1\tau} + k_2 A_{2\tau}) + (k_1+k_2)\partial_\tau r_3 r_3^{-1})\,.
\end{aligned}
\tag{10.76}
$$

Ο μηδενισμός του συνοριακού όρου οδηγεί στις εξισώσεις

$$
\begin{gathered}
((\lambda^{-1}+4s_1s_2) - 4s_1s_2 D_{r_3})\mathcal{B}_+|_{\partial\Sigma} = ((\lambda^{-1}+4s_1s_2)D_{L_3} - 4s_1s_2)\mathcal{B}_-|_{\partial\Sigma}\,, \\
\partial_\tau r_3 r_3^{-1}|_{\partial\Sigma} = (1-D_{r_3})(s_1 A_{1\tau} + s_2 A_{2\tau})|_{\partial\Sigma}\,.
\end{gathered}
\tag{10.77}
$$

Προς απόδειξη της ολοκληρωσιμότητας των τρισδιάστατων βρανών πρέπει να εξάγουμε τις (10.77) μέσω της μεθόδου του συνοριακού μονόδρομου πίνακα. Η πεδιακή εξάρτηση της συσχέτισης των πεδίων βαθμίδας στο σύνορο μαρτυρά το γεγονός ότι θα πρέπει να κατασκευάσουμε πίνακα που στην ανακλώμενη περιοχή περιλαμβάνει έναν μετασχηματισμό βαθμίδας με το στοιχείο ομάδας r_3. Σε αυτή την περίπτωση οι συνοριακές συνθήκες γράφονται ως

$$
\mathcal{L}_\tau(z)|_{\partial\Sigma} = D_{r_3}\mathcal{L}_\tau(z^{-1}) + \partial_\tau r_3 r_3^{-1}|_{\partial\Sigma}, \quad r_3 \in G \tag{10.78}
$$

Χρησιμοποιώντας όμως την μορφή του ζεύγους Lax καταλήγουμε για λόγους συνέπειας ότι $D_{r_3}^2(\mathfrak{g}) = \mathbb{1}$ που συνεπάγεται ότι $r_3 = \mathbb{1}$. Σε αυτή όμως την περίπτωση οι (10.78) περιγράφουν τις σημειακές και μονοδιάστατες βράνες που προαναφέραμε.

10.7 Γενικευμένες βράνες εναλλαγής εμβαπτισμένες στα πρότυπα (II) και (III)

Παρακάτω θα εμβαπτίσουμε στα πρότυπα (II) και (III) τις γενικευμένες βράνες εναλλαγής, $\mathcal{D}^{\tau}{}_f$ που παρουσιάστηκαν στο υποκεφάλαιο 6.4. Θα δούμε ότι για το πρότυπο (III) αποτελούν επιπρόσθετες ολοκληρώσιμες βράνες, μεγαλύτερης όμως διάστασης από το γινόμενο κλάσεων συζυγίας, $\mathcal{C}_{f_1 f_2}$. Για το πρότυπο (II), δεν καταφέραμε να αποδείξουμε την ολοκληρωσιμότητα τους αλλά στο υπεριώδες και υπέρυθρο σημείο αποτελούν σύμμορφες.

10.7.1 Πρότυπο (III)

Θα ξεκινήσουμε με την μελέτη των βρανών

$$\mathcal{D}^{\pi}_f = \left\{ \left((h_1 f h_2^{-1})^{k_2'}, (h_2 f h_1^{-1})^{k_1'} \right) = \left(v_1{}^{k_1'}, v_2{}^{k_2'} \right) | \forall\, h_1\,,\, h_2 \in G \right\}\,, \tag{10.79}$$

εμβαπτισμένων στο πρότυπο (8.60). Για να εξάγουμε τις συνοριακές συνθήκες χρειαζόμαστε την επαγόμενη 2-μορφή. Είναι προφανές ότι αυτή δίνεται ως

$$\omega_{k_1,k_2;\lambda} = \omega_{WZ}(h_1,h_2) - \sum_{i=1}^{2} k_i \mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1} \wedge A_i^L)|_{\mathcal{D}_\tau(f)}, \tag{10.80}$$

με την $\omega_{WZ}(h_1,h_2)$ να δίνεται στην (6.48). Βάση των παραπάνω στοιχείων βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \delta S|_{\partial\Sigma} = & \frac{k(\lambda^{-1}-1)}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta h_1 h_1^{-1}, ((1-D_{v_1}^T)^{-1} - (1-D_{v_2})^{-1})(\mathcal{B}_+ - \mathcal{B}_-)) \\ & - \frac{k(\lambda^{-1}-1)}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta h_2 h_2^{-1}, ((1-D_{v_2}^T)^{-1} - (1-D_{v_1})^{-1})(\mathcal{B}_+ - \mathcal{B}_-))\,. \end{aligned} \tag{10.81}$$

Ο μηδενισμός της παραπάνω έκφρασης συνεπάγεται τις (10.28), αποδεικνύοντας ότι οι (10.79) αποτελούν επιπρόσθετες ολοκληρώσιμες βράνες.

Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι οι βράνες (10.79) διατηρούν την συμμετρία βαθμίδας της θεωρίας κατά μήκος όλης της ροής της ΟΕ. Αρχικά, κάτω από τον μετασχηματισμό (8.59) παραμένουν αναλλοίωτες

$$(g_1, g_2)|_{\partial\Sigma} \mapsto (Lg_1L^{-1}, Lg_2L^{-1})|_{\partial\Sigma} = ((h_1' f h_2'^{-1})^{k_2'}, (h_2' f h_1'^{-1})^{k_1'})\,, \tag{10.82}$$

με $h_1' = Lh_1$ και $h_2' = Lh_2$. Στην (10.69), ο εσωτερικός όρος μηδενίζεται και ο συνοριακός δίνεται στην (10.81) με την απαίτηση $\delta_V h_1 h_1^{-1} = \delta_V h_2 h_2^{-1}$. Με έναν απλό υπολογισμό βρίσκουμε ότι και ο συνοριακός όρος μηδενίζεται αποδεικνύοντας ότι οι γενικευμένες βράνες εναλλαγής διατηρούν την συμμετρία βαθμίδας του προτύπου για κάθε τιμή της παραμέτρου παραμόρφωσης.

Επομένως σύμφωνα με την ανάλυση του κεφαλαίου 6.4 βρίσκουμε ότι το πρότυπο (III) επιδέχεται $\kappa = \text{ΕΚΠ}(k_1, k_2)$ επιπλέον ολοκληρώσιμες βράνες, διάστασης $(d_G - r_G)$ και εντοπισμένες στον υπόχωρο $\mathcal{D}_\tau(f)$ με $f = \exp(\pi i \lambda / \kappa) \in \mathcal{T}(G)$.

10.7.2 Πρότυπο (II)

Για χάριν απλότητας θα θεωρήσουμε τις χαμηλότερης διάστασης βράνες

$$\mathcal{D}_e^\pi = \left\{ \left(v^{k_2'}, v^{-k_1'} \right) | \, \forall \, v = h_1 h_2^{-1} \in G \right\} , \tag{10.83}$$

εμβαπτισμένες στο πρότυπο (8.31). Η συνοριακή 2-μορφή είναι η

$$\begin{aligned} \omega_{k_1,k_2;\lambda_1,\lambda_2} = \frac{1}{4\pi} \Big(& \omega_{\text{WZ}}(h_1, h_2) - \sum_{i=1}^{2} \lambda_i k_i \text{Tr}(dg_i g_i^{-1} \wedge \mathcal{O}_{i+1,i}^T g_{i+1}^{-1} dg_{i+1})|_{\mathcal{D}^\pi(e)} \\ & - \lambda_i \lambda_{i+1} k_i \text{Tr}(dg_i g_i^{-1} \wedge \mathcal{O}_{i+1,i}^T D_{i+1}^T g_i^{-1} dg_i)|_{\mathcal{D}^\pi(e)} \Big) , \end{aligned} \tag{10.84}$$

Μεταβάλλοντας την δράση και επικεντρώνοντας την προσοχή μας στον συνοριακό όρο βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \delta S_{k_1,k_2;\lambda_1,\lambda_2} = & \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{2\pi} \int_{\partial\Sigma} \text{Tr}(\delta h_1 h_1^{-1}, (1 - D_h^T)^{-1}((\lambda_1^{-1} - \lambda_0^{-1}) A_{1+} + (\lambda_2^{-1} - \lambda_0) A_{2+} \\ & - (\lambda_1^{-1} - \lambda_0) A_{1-} - (\lambda_2^{-1} - \lambda_0^{-1}) A_{2-}) \\ & + \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{2\pi} \int_{\partial\Sigma} \text{Tr}(\delta h_2 h_2^{-1}, (1 - D_h)^{-1}((\lambda_1^{-1} - \lambda_0^{-1}) A_{1+} + (\lambda_2^{-1} - \lambda_0) A_{2+} \\ & - (\lambda_1^{-1} - \lambda_0) A_{1-} - (\lambda_2^{-1} - \lambda_0^{-1}) A_{2-}). \end{aligned} \tag{10.85}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα υποδηλώνει ότι η γεωμετρία (10.83) με την συνοριακή 2-μορφή (10.84) αποτελεί λύση των συνοριακών συνθηκών

$$(\lambda_1^{-1} - \lambda_0^{-1}) A_{1+} + (\lambda_2^{-1} - \lambda_0) A_{2+}|_{\partial\Sigma} = (\lambda_1^{-1} - \lambda_0) A_{1-} + (\lambda_2^{-1} - \lambda_0^{-1}) A_{2-}|_{\partial\Sigma} , \tag{10.86}$$

τις οποίες όμως δεν καταφέραμε να εξάγουμε με την μέθοδο του μονόδρομου πίνακα. Επομένως, παραμένει άγνωστο αν η εμβάπτιση τους διατηρεί την ολοκληρωσιμότητα του προτύπου (II). Παρόλα αυτά θα τις μελετήσουμε στα σύμμορφα σημεία της επαγόμενης ροής της ΟΕ.

Αρχικά θα θεωρήσουμε την περίπτωση $(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda, 0)$ κατά την οποία το πρότυπο παρεμβάλεται μεταξύ δύο WZW προτύπων,

$$G_{k_1} \times G_{k_2} \Longrightarrow G_{k_1} \times G_{k_2 - k_1}\,, \tag{10.87}$$

και η δράση του δίνεται ως

$$S_{k_1,k_2;\lambda} = S_{WZW,k_1}(g_1) + S_{WZW,k_2}(g_2) - \frac{\sqrt{k_1 k_2}}{\pi}\lambda^{-1}\int d^2\sigma \mathrm{Tr}(J_{1+}, J_{2-})\,. \tag{10.88}$$

Σε αυτή την περίπτωση οι σ.σ (10.86) γράφονται στην μορφή

$$(\lambda_0 - \lambda)J_{1+} + \lambda_0^{-1}(J_{2+} + \lambda D_2 J_{1+})|_{\partial\Sigma} = -(\lambda_0^{-1} - \lambda)J_{2-} - \lambda_0(J_{1-} + \lambda D_1^T J_{2-})|_{\partial\Sigma}\,, \tag{10.89}$$

όπου εκφράσαμε τα πεδία συναρτήσει των στοιχείων ομάδας. Στο υπεριώδες σημείο οι (10.89) δίνουν

$$k_1 J_{1+} + k_2 J_{2+} = -k_1 J_{1-} - k_2 J_{2-}\,, \tag{10.90}$$

όπως αναμέναμε, σε συμφωνία με την διατήρηση της $\hat{\mathfrak{g}}_{k_1+k_2}$ άλγεβρας στο σύνορο.

Στο υπέρυθρο σημείο $\lambda = \lambda_0$, η ΣΘΠ αναγνωρίζεται κάτω απο τον επαναπροσδιορισμό $(g_1, g_2) \to (g' = g_2 g_1, g_2)$ και οι σ.σ (10.89) γράφονται ως

$$k_1 J'_+ + (k_2 - k_1)J_{2+} = -k_1 J'_- - (k_2 - k_1)J_{2-}\,, \tag{10.91}$$

όπου $J_+ = \partial_+ g g^{-1}$ και $J_- = g^{-1}\partial_- g$.[6] Τα πεδία που σχετίζονται μέσω της (10.91) είναι ο διαγώνιος συνδυασμός των γεννητόρων της $\hat{\mathfrak{g}}_{k_1} \oplus \hat{\mathfrak{g}}_{k_2-k_1}$ άλγεβρας της υπέρυθρης ΣΘΠ, επομένως οι βράνες (10.83), διατηρούν την $\hat{\mathfrak{g}}_{k_2}$ άλγεβρα στο σύνορο. Το παραπάνω αποτέλεσμα το αναμέναμε αφού κάτω απο τον επαναπροσδιορισμό των πεδίων η βράνη (10.83)

[6] Οι σχέσεις που χρησιμοποιήσαμε είναι οι

$$J_+ = J_{1+} + D_1 J_{2+}\,, \quad J_- = J_{2-} + D_2^T J_{1-}\,. \tag{10.92}$$

μετασχηματίζεται ως

$$\mathcal{D}^{\pi}{}_{e} = \left(v^{k_2'}, v^{-k_1'}\right) \to \left(v^{k_2'-k_1'}, v^{-k_1'}\right) = \mathcal{D}^{\pi}{}_{e}\,, \tag{10.93}$$

που αποτελεί την χαμηλότερης διάστασης γενικευμένη βράνη για την $G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}$ ΣΘΠ, αφού $\text{ΜΚΔ}(k_1, k_2) = \text{ΜΚΔ}(k_1, k_2 - k_1) = k$ για $k_2 > k_1$. Επομένως καταλήγουμε ότι οι βράνες

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{\pi}(e) &= \left\{\left(v^{k_2'}, v^{-k_1'}\right) | \,\forall\, v = h_1 h_2^{-1} \in G\right\}\,, \\ \omega_{k_1,k_2;\lambda} =& \omega_{WZ}(h_1,h_2) + \sqrt{k_1 k_2}\lambda \text{Tr}(dg_1 g_1^{-1} \wedge g_2^{-1} dg_2)|_{\mathcal{D}^{\pi}(e)}\,, \end{aligned} \tag{10.94}$$

είναι σύμμορφες στο υπεριώδες και υπέρυθρο σημείο του προτύπου αλλά η διατήρηση της ολοκληρωσιμότητας του υπό την παρουσία τους παραμένει ανοιχτή.

Κάποιος/Κάποια θα μπορούσε να ισχυριστεί ότι ο αριθμός των γενικευμένων επιτρεπτών βρανών μειώνεται από το υπεριώδες στο υπέρυθρο. Αυτό διότι μια $G_{k_1} \times G_{k_2-k_1}$ ΣΘΠ επιδέχεται κ' σταθερές βράνες με $\kappa' = \text{ΕΚΠ}(k_1, k_2 - k_1) < \kappa = \text{ΕΚΠ}(k_1, k_2)$. Αυτό όμως δεν ισχύει, αφού οι ανώτερης διάστασης βράνες (10.79) κάτω από τον μετασχηματισμό συντεταγμένων γράφονται ως[7]

$$\mathcal{D}^{\pi}{}_{f} \to \left\{\left({v_2}^{k_2'} {v_1}^{k_1'}, {v_2}^{k_2'}\right) |\forall\, h_1\,,\, h_2 \in G\right\} = \mathcal{M}_f\,, \tag{10.95}$$

επομένως η γεωμετρία τους αλλάζει. Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνθήκη κβάντωσης των παραπάνω βρανών στην ΣΘΠ στο υπέρυθρο είναι ίδια με των (10.79) αυτής στο υπεριώδες.[8]

Στην περίπτωση που καμία παράμετρος παράμορφωσης δεν είναι παγωμένη το υπέρυθρο σημείο είναι το $(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_0, \lambda_0)$. Σε αυτή την περιπτωση οι σ.σ (10.89) γράφονται ως

$$A_{2+}(\lambda_0)|_{\partial\Sigma} = A_{1-}(\lambda_0)|_{\partial\Sigma}\,, \tag{10.96}$$

που είναι οι γεννήτορες της χειραλικής συμμετρίας (10.67). Επομένως η βράνη (10.83) διατηρεί ένα αντίγραφο της $\hat{\mathfrak{g}}_{k_2-k_1}$ άλγεβρας της ΣΘΠ στο υπέρυθρο (9.45).

[7] Η ισότητα (10.93) ισχύει μόνο για τις χαμηλότερης διάστασης βράνες, δηλαδή $f = e$.

[8] Οι βράνες (10.95) περιγράφονται από την εμβάπτιση $\mathcal{C}(f^2) \times G \mapsto G \times G$

$$\mathcal{C}(f^2) \times G \ni (c, g) \mapsto (g^{k_1'}(g^{-1}c)^{k_2'}, g^{k_1'}) \in \mathcal{M}_f\,.$$

Βάση της ίδιας επιχειρηματολογίας με αυτής στο κεφάλαιο 6.4 βρίσκουμε ότι $f^{2k_2'} = \exp\left[(\frac{2\pi i}{k_1})\Lambda H\right]$

10.7.3 Το παράδειγμα της $SU(2)$

Όπως και σε προηγούμενα υποκεφάλαια θα παρουσιάσουμε τα επαγόμενα πεδία για την ομάδα $G = SU(2)$. Για λόγους ευκολίας θα θεωρήσουμε την τρισδιάστατη βράνη (10.83) εμβαπτισμένη στο πρότυπο (10.88).

Χρησιμοποιώντας την παραμετροποίηση (5.25)[9] βρίσκουμε ότι η επαγώμενη μετρική είναι η

$$ds^2 = f(k_1, k_2, \lambda) d\psi^2 + g(k_1, k_2; \lambda)(d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2)\,, \tag{10.97}$$

όπου

$$\begin{aligned} & f(k_1, k_2, \lambda) = k_1' k_2' (k_1 + k_2 - 2k_2 \lambda \lambda_0), \\ & g(k_1, k_2; \lambda) = (k_1 - k_2 \lambda \lambda_0) \sin^2(k_2' \psi) + k_2 (1 - \lambda \lambda_0) \sin^2(k_1' \psi) \\ & + k_2 \lambda \lambda_0 \sin^2((k_1' - k_2')\psi)\,, \end{aligned} \tag{10.98}$$

ενώ χρησιμοποιώντας την έκφραση για την 2-μορφή στην (10.94) βρίσκουμε

$$\omega_{k_1, k_2; \lambda} = h(k_1, k_2, \lambda) \sin(\theta) d\theta \wedge d\phi\,, \tag{10.99}$$

με

$$h(k_1, k_2, \lambda) = k_2(\sin(2k_1'\psi) - \lambda_0^2 \sin(2k_2'\psi) - 4\lambda_0 \lambda \sin(k_2'\psi) \sin(k_1'\psi) \sin((k_2' - k_1')\psi))\,. \tag{10.100}$$

Για $\lambda \to 0$ είναι προφανές ότι τα επαγόμενα πεδία είναι αυτά που υπολογίστηκαν στην [115]. Στρέφοντας την προσοχή μας στο υπέρυθρο σημείο $\lambda = \lambda_0$, βρίσκουμε ότι τα πεδία είναι αυτά που βρήκαμε στο υπεριώδες, κάτω από τον επαναορισμό $k_2 \to k_2 - k_1$, δηλαδή

$$\begin{aligned} d\hat{s}^2 &= k_1'(k_2' - k_1') k_2 d\psi^2 + (k_1 \sin^2((k_2' - k_1')\psi) - (k_2 - k_1) \sin^2 k_1'\psi)(d\theta^2 + \sin(\theta)^2 d\phi^2) \\ \omega_{k_1, k_2, \lambda_0} &= (k_1 \sin(2(k_2' - k_1')\psi) - (k_2 - k_1) \sin(2k_1'\psi)) \sin(\theta) d\theta \wedge d\phi\,, \end{aligned} \tag{10.101}$$

σε συμφωνία με την παραπάνω ανάλυση.

Τέλος να αναφέρουμε ότι για $k_1 = k_2$ η βράνη (10.94) καταλήγει στην ολοκληρώσιμη

[9] Είναι βολική παραμετροποίηση, διότι μας επιτρέπει να χειριζόμαστε δυνάμεις του g. Συγκεκριμένα το g^n για $n \in \mathbb{Z}$ έχει συντεταγμένες $(n\psi, \theta, \phi)$

τρισδιάστατη βράνη $\mathcal{C}^{\pi}{}_{f,f^{-1}}$ για το πρότυπο (8.11) με $(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda, 0)$. Από την σχέση (10.97), βρίσκουμε ότι η γεωμετρία της είναι αυτής μιας S^3-σφαίρας, με λ-εξαρτώμενη ακτίνα, εμβαπτισμένης με τρόπο διαγώνιο και συμμετρικό στο υπόβαθρο του προτύπου

$$ds^2 = k(1-\lambda)(d\psi^2 + \sin^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)). \tag{10.102}$$

Κεφάλαιο 11

Συμπεράσματα και μελλοντικές ερευνητικές κατευθύνσεις

Τα ολοκληρώσιμα σ-πρότυπα αποτελούν σημαντικό τομέα της θεωρητικής φυσικής με εφαρμογές στη θεωρία πεδίου και τη θεωρία χορδών. Λόγω της χαρακτηριστικής ομάδας συμμετρίας τους ανήκουν σε μια μικρή οικογένεια ακριβώς επιλύσιμων θεωριών, κλασικά και κβαντικά, ξεπερνώντας έτσι τους περιορισμούς της θεωρίας διαταραχών. Εν μέσω άλλων, χαρακτηριστικό παράδειγμα εφαρμογής των μεθόδων της ολοκληρωσιμότητας αποτελεί ο υπολογισμός του κενού μάζας (mass gap) του χειραλικού προτύπου.

Η κατασκευή ολοκληρώσιμων παραμορφώσεων γνωστών σ-προτύπων εμπλουτίζει τη δομή τους και έχει οδηγήσει σε θεωρίες με ενδιαφέρουσες θεωρητικές και πρακτικές ιδιότητες. Ταυτόχρονα, έχει αναπτυχθεί αξιοσημείωτος αριθμός τεχνικών, γεωμετρικών αλλά και θεωρίας πεδίου, για την μελέτη τους. Αυτό έδωσε ώθηση στην έρευνα προς την κατεύθυνση της ομαδοποίηση όλων των γνωστών παραμορφώσεων, με πρόσφατες διατυπώσεις βασισμένες στα Gaudin και υψηλότερης διάστασης Chern-Simons πρότυπα [204, 205]. Αυτές παρέχουν καινούργιες οπτικές γωνίες και εμπλουτίζουν το θεωρητικό πλαίσιο της κβαντικής περιγραφής των παραμορφωμένων προτύπων. Σχετικό ερώτημα, επίσης, αποτελεί η ακριβής σχέση ολοκληρωσιμότητας και επανακανονικοποίησης. Συγκεκριμένα, όλα τα γνωστά κλασικά ολοκληρώσιμα πρότυπα είναι και επανακανονικοποιήσιμα σε τάξη ενός βρόγχου. Η κατανόηση αυτής της συσχέτισης σε θεμελιώδες επίπεδο αποτελεί ενδιαφέρον και ανοιχτό πρόβλημα.

Οι ολοκληρώσιμες παραμορφώσεις εξασφαλίζουν το ιδανικό πλαίσιο για την κατασκευή καινούργιων λύσεων της θεωρίας χορδών από ήδη γνωστές. Ενώ αυτό έχει επιτευχθεί για αρκετά λ, η-πρότυπα [151, 164–166, 168–173], η πλειοψηφία τους δεν έχει εμβαπτιστεί σε δεκαδιάστατα υπόβαθρα υποστηριγμένα με κατάλληλα R-R πεδία. Ταυτόχρονα, η ολογραφική εικόνα των ήδη γνωστών λύσεων είναι ελλιπής, πεδίο το οποίο μπορεί να οδηγήσει στον προσδιορισμό καινούργιων θεωριών βαθμίδας. Τέλος, ενώ η εφαρμογή μεθόδων της ολοκληρωσιμότητας στην $AdS_5 \times S^5$ ελεύθερη χορδή είναι πλήρως κατανοητή [206], η επέκταση τους σε παραμορφωμένες λύσεις παραμένει θολή. Ένα καθολικά θεωρητικό και πρακτικό πλαίσιο του ρόλου της ολοκληρωσιμότητας στη θεωρία χορδών αποτελεί πεδίο προς εξερεύνηση.

Σε αυτήν την διατριβή μελετήσαμε εκτενώς μια μεγάλη κλάση ολοκληρώσιμων θεωριών, οι οποίες εισήχθησαν ως γενικεύσεις των συνήθων λ-προτύπων. Αυτές χαρακτηρίζονται από ροές της ΟΕ οι οποίες στο υπεριώδες σημείο περιγράφουν ΣΘΠ με τις χαρακτηριστικές συμμετρίες (8.1), (8.2). Ενδιαφέρουσα ιδιότητα τους, βασικό κίνητρο για την συγκεκριμένη μελέτη, είναι το γεγονός ότι για άνισα επίπεδα k_i οι θεωρίες μας ρέουν προς καλώς ορισμένες ΣΘΠ στο υπέρυθρο. Στην περίπτωση των ίσων επιπέδων είναι κανονικά ισοδύναμες με τα συνήθη λ-πρότυπα. Πιο συγκεκριμένα η έρευνα μας χωρίστηκε σε δύο κύριες ενότητες.

Στην πρώτη ενότητα επικεντρωθήκαμε στην μελέτη των προτύπων στα υπέρυθρα σταθερά σημεία. Ο υπολογισμός του κεντρικού φορτίου αποκάλυψε ότι αυτά ρέουν προς μια πληθώρα ΣΘΠ, ανάλογα την διάταξη των επιπέδων. Ενώ η έκφραση του σχετίζεται άμεσα με τις συμμετρίες της εκάστοτε ΣΘΠ, στις περιπτώσεις μας δεν οδηγεί μονοσήμαντα στον προσδιορισμό τους. Χρησιμοποιώντας τον λαγκραντζιανό φορμαλισμό και αναβαθμίζοντας ανά περίπτωση μια διαφορετική υποομάδα συμμετρίας κατάλληλα επιλεγμένων γινομένων WZW προτύπων σε τοπική, επιλύσαμε το πρόβλημα αυτό και συμπεράναμε ότι οι επιθυμητές ΣΘΠ χαρακτηρίζονται από ασύμμετρους ολομορφικούς και αντιολομορφικούς τομείς. Παρόλη την ασυμμετρία, τα κεντρικά τους φορτία είναι ίσα, με αποτέλεσμα οι θεωρίες να είναι ελεύθερες από ανωμαλίες. Ταυτόχρονα βρήκαμε ότι εξ' αυτών δεν είναι όλες ανεξάρτητες αλλά σχετίζονται μέσω ενός γενικευμένου τελεστή ομοτιμίας. Ορίζοντας την δράση του διαγραμματικά, με την χρήση πολυγώνων, προσδιορίσαμε με ευκολία το υποσύνολο των ανεξάρτητων ΣΘΠ.

Στην δεύτερη ενότητα μελετήσαμε D-βράνες εμβαπτισμένες στα πρότυπα ενδιαφέροντος με τρόπο που να διατηρούν την ολοκληρωσιμότητα τους. Αυτό επιτεύχθηκε ορίζοντας κατάλληλες συνοριακές συνθήκες μέσω της γενίκευσης της μεθόδου του συνοριακού μονόδρομου πίνακα και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση σ-προτύπου δόθηκε η γεωμετρική τους ερμηνεία. Αποδείξαμε ότι όλες οι γνωστές στην βιβλιογραφία γεωμετρίες βρανών που διατηρούν την σύμμορφη συμμετρία γινομένων WZW προτύπων επιβιώνουν στα πρότυπά μας ως ολοκληρώσιμες και διαθέτουν χαρακτηριστικά ανεξάρτητα των παραμέτρων παραμόρφωσης. Για τον λόγο αυτό επικεντρωθήκαμε στις ιδιότητες των βρανών στα πρότυπα με υπέρυθρα σημεία και μελετήσαμε την συμπεριφορά τους στην ροή της ΟΕ εξ΄ ολοκλήρου. Ταυτόχρονα, προσδιορίσαμε τις διατηρούμενες Kac-Moody άλγεβρες υπό την παρουσία των αντίστοιχων βρανών.

Παρακάτω παρουσιάζουμε τις ερευνητικές κατευθύνσεις που προκύπτουν από την διατριβή ανά χείρας.

Οι λ- και Yang-Baxter-παραμορφώσεις σχετίζονται μέσω της Poisson-Lie (P-L) δυϊκότητας [141, 142], η οποία αποτελεί γενίκευση της μη αβελιανής T-δυϊκότητας [141–146]. Μέσω του φορμαλισμού των $\mathcal{E}$-προτύπων οι δύο προαναφερθείσες θεωρίες εμπεριέχονται σε ένα σ-πρότυπο ορισμένο σε μια Drinfeld διπλέτα και προκύπτουν από αυτό μέσω της ολοκλήρωσης των αντίστοιχων βαθμών ελευθερίας του [142]. Φυσικό επακόλουθο αποτελεί η διερεύνηση της δυνατότητας των θεωριών μας να ανήκουν στην κλάση των $\mathcal{E}$-προτύπων, γεγονός που θα καταστήσει απλούστερη την εύρεση των δυϊκών γενικευμένων προτύπων στην Yang-Baxter πλευρά. Δεδομένου ότι η P-L δυϊκότητα αποτελεί ένα κανονικό μετασχηματισμό [147,148], οι θεωρίες που σχετίζονται μέσω αυτού είναι κανονικά ισοδύναμες και τα σταθερά σημεία των ροών της ΟΕ τους διατηρούνται. Στην βιβλιογραφία, παραμορφώσεις τύπου Yang-Baxter με ροές της ΟΕ προς υπέρυθρα σημεία δεν έχουν κατασκευαστεί.

Η μη αβελιανή T-δυϊκότητα μπορεί να ενσωματωθεί στην γεωμετρία μιας διπλασιασμένης θεωρίας πεδίου (ΔΘΠ) [207], ενώ η εμβάπτιση της P-L δυϊκότητας σε αυτή, απαιτεί τον ορισμό της σε μια Drinfeld διπλέτα [208]. Η περαιτέρω επέκταση της τελευταίας σε μια τύπου II-ΔΘΠ εντάσσει την δομή των $\mathcal{E}$-προτύπων στον R-R τομέα και τον τομέα του διαστελονίου [209], με αποτέλεσμα την συνεπή γενίκευση της ιδέας των εργασιών [151, 153] σε περίπλοκα P-L συμμετρικά υπόβαθρα. Βάση αυτών, η γραφή των θεωριών μας ως ένα $\mathcal{E}$-πρότυπο μπορεί να καταστήσει την εμβάπτιση τους σε ένα υπόβαθρο της τύπου II-υπερβαρύτητας απλούστερη, επομένως και την μελέτη τους στα πλαίσια της θεωρίας υπερχορδών εφικτή.

Όπως έχουμε αναφέρει, στις εργασίες [127, 128] υπήρξε η προσπάθεια να συσχετιστεί η κβαντική ολοκληρωσιμότητα του χειραλικού προτύπου παρουσία των ολοκληρώσιμων βρανών με το υποσύνολο των εναπομείναντων τοπικών διατηρούμενων φορτίων. Βασισμένοι στην [210], μπορούμε να αναδείξουμε και να μελετήσουμε την σύνδεση αυτή στο λ-πρότυπο, χρησιμοποιώντας το υπόβαθρο του παρουσία των ολοκληρώσιμων βρανών και ελέγχοντας τον ρόλο των άπειρων τοπικών φορτίων στην παραγοντοποίηση του S-πίνακα. Αυτή η ανάλυση μπορεί να επεκταθεί και στα γενικευμένα πρότυπα που ρέουν προς ΣΘΠ σε υπέρυθρα σταθερά σημεία και επιδέχονται επιπλέον ολοκληρώσιμες γεωμετρίες βρανών σε σχέση με του λ-προτύπου. Ταυτόχρονα, μπορούμε να ελέγξουμε την διατήρηση της ολοκληρωσιμότητας του προτύπου (10.88) υπό την παρουσία των γενικευμένων βρανών εναλλαγής, ερώτημα που έχει μείνει ανοιχτό. Τέλος, ενδιαφέρουσα θα ήταν η εφαρμογή της μεθόδου του κεφαλαίου 10 για τον ορισμό ολοκληρώσιμων βρανών στα πρότυπα των εργασιών [211, 212]. Δεδομένου ότι τα ζεύγη Lax τους δεν διαθέτουν την συνήθη εξάρτηση από την φασματική παράμετρο, όπως τα λ-πρότυπα, θα είναι αναγκαία η περαιτέρω γενίκευση της μεθόδου του συνοριακού μονόδρομου πίνακα για την εύρεση των κατάλληλων συνθηκών.

Παράρτημα Α′

Χωροχρονικές συμβάσεις

Η κοσμική επιφάνεια Σ είναι μια δισδιάστατη επιφάνεια που παραμετροποιείται απο μια χρονική και μια χωρική συντεταγμένη (τ, σ). Η μετρική η_{ab} και ο αντισυμμετρικός τανυστής δεύτερης τάξης ϵ_{ab} δίνονται ως

$$\eta_{\tau\tau} = -\eta_{\sigma\sigma} = \eta^{\tau\tau} = -\eta^{\sigma\sigma} = 1, \quad \epsilon_{\tau\sigma} = -\epsilon^{\tau\sigma} = -\epsilon_{\sigma\tau} = \epsilon^{\sigma\tau} = -1 \tag{Α′.1}$$

Στις συντεταγμένες κώνου φωτός $\sigma_{\pm} = \tau \pm \sigma$ η μετρική και ο αντισυμμετρικός τανυστής παίρνουν την μορφή

$$\begin{aligned} \eta_{+-} &= \eta_{-+} = 1/2, \quad \eta^{+-} = \eta^{-+} = 2 \\ \epsilon_{+-} &= -\epsilon^{-+} = 1/2, \quad \epsilon^{+-} = -\epsilon^{-+} = 2 \end{aligned} \tag{Α′.2}$$

Η συσχέτιση των στοιχείων όγκου στα δύο συστήματα συντεταγμένων είναι

$$d^2\sigma = d\tau \wedge d\sigma, \quad d\sigma_+ \wedge d\sigma_- = -2d^2\sigma \tag{Α′.3}$$

Παράρτημα Β′

Lie Αλγεβρες

Μια συμπαγής Lie άλγεβρα $\mathfrak{g}$ μιας Lie ομάδας G είναι ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με μια δυαδική πράξη

$$[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}\,, \tag{Β′.1}$$

που καλείται μεταθέτης και ικανοποιεί την Ιακωβιανή ταυτότητα

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0, \quad x,y,z \in \mathfrak{g}\,. \tag{Β′.2}$$

Δοσμένης μιας βάσης από στοιχεία (γεννήτορες), $\{T^A\} = Span(\mathfrak{g})$ με $A = 1,\ldots,\dim G$, ο μεταθέτης (Β′.1) γράφεται ως

$$[T^A, T^B] = iF_C^{AB} T^C\,, \tag{Β′.3}$$

όπου F_C^{AB} πραγματικές σταθερές γνωστές και ως σταθερές δομής, και η Ιακωβιανή ταυτότητα (Β′.2) ως

$$F_E^{AB} F_D^{CE} + F_E^{CB} F_D^{AE} + F_E^{CA} F_D^{BE} = 0\,. \tag{Β′.4}$$

Οι γεννήτορες T^A μπορούν πάντα να αναπαρασταθούν ως $d_R \times d_R$ πίνακες, όπου d_R η διάσταση της αναπαράστασης. Η αναπαράσταση μια άλγεβρας $\mathfrak{g}$ σε έναν διανυσματικό χώρο $\mathcal{V}$ είναι ένας ομομορφισμός $R : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{V})$ ο οποίος διατηρεί τις σχέσεις μετάθεσης και συμβολίζουμε την δράση της με $R(X)$, $X \in \mathfrak{g}$. Η Lie ομάδα δρά στην άλγβερα με την γνωστή συζυγή αναπαράσταση

$$R(X) \equiv Ad(X) = gXg^{-1}\,, \tag{Β′.5}$$

ενω η αντίστοιχη αναπαράσταση της άλγεβρας είναι η

$$ad_X[Y] = [X,Y], \quad X,Y \in \mathfrak{g}\,. \tag{Β΄.6}$$

Για μια ημιαπλή άλγβερα μπορούμε πάντα να ορίσουμε την διγραμμική μορφή

$$\langle X,Y\rangle_i = \mathrm{Tr}(R_i(X), R_i(Y)), \quad X,Y \in \mathfrak{g} \tag{Β΄.7}$$

Αν η αναπαράσταση είναι η συζυγής, τότε η διγραμμική μορφή είναι η Killing μορφή

$$\langle X,Y\rangle = \mathrm{Tr}(ad(X), ad(Y))\,. \tag{Β΄.8}$$

Ο Dynkin δείκτης I_i εμφανίζεται ως η πολλαπλασιαστική σταθερά που συσχετίζει την διγραμμική μορφή και την Killing μορφή

$$(X,Y) = \frac{I_i}{I_{ad}}\langle X,Y\rangle_i\,. \tag{Β΄.9}$$

Όλες οι παραπάνω μορφές είναι μη εκφυλισμένες και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως μετρικές. Μπορούμε να ορίσουμε μια μετρική ανεξάρτητη της αναπαράστασης ως

$$\kappa^{AB} = (T^A, T^B) = \frac{1}{I_i}k_i(T^A, T^B)\,. \tag{Β΄.10}$$

Στην διατριβή θα χρησιμοποιούμε την μετρική (Β΄.10) με κανονικοποιημένους τους γεννήτορες έτσι ώστε

$$(T^A, T^B) = \delta^{AB}\,. \tag{Β΄.11}$$

εκτός από το κεφάλαιο των ασσύμμετρων χώρων πηλίκου όπου θα συμπεριλαμβάνουμε τον δείκτη Dynkin.

Στην διατριβή, θα συμβολίζουμε τον $Ad(X)$ τελεστή με $D(X)$. Ως πίνακας είναι $\dim G \times \dim G$ και τα στοιχεία του ορίζονται ως $D(T^A) = D^{AB}T^B \to D^{AB} = \mathrm{Tr}(T^A g T^B g^{-1})$. Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι η Killing μετρική (Β΄.11) είναι Ad-αναλλοίωτη το οποίο μεταφράζεται και ως $D^T D = DD^T = \mathbb{1}$.

Είναι γνωστό ότι μια ομάδα G είναι και μια πολλαπλότητα, γνωστή και ως πολλαπλότητα ομάδας, στην οποία δρά με τρόπο που δεν παράγει σταθερά σημεία και την καλύπτει όλη. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή μιας μορφής σε οποιοδήποτε σημείο της πολλαπλότητας σχετίζεται με την τιμή της μορφής στο ταυτοτικό στοιχείο. Οι φυσικοί υποψήφιοι για αυτές τις 1-μορφές που ανήκουν στην άλγεβρα $\mathfrak{g}$ είναι οι αριστερές/δεξιές Maurer-Cartan μορφές

$$g^{-1}dg = -iL^A T^A, \quad dgg^{-1} = -iR^A T^A \tag{B'.12}$$

οι οποίες ικανοποιούν την πρώτη Cartan ταυτότητα

$$dL^A = -\frac{1}{2} f^A_{BC} L^B \wedge L^C, \quad dR^A = \frac{1}{2} f^A_{BC} R^B \wedge R^C \tag{B'.13}$$

Παραμετροποιώντας την ομάδα G με τις συντεταγμένες X^μ, $\mu = 1, \ldots, \dim G$ οι (B'.12) γράφονται ως

$$g^{-1}dg = -iL^A_\mu dX^\mu, \quad dgg^{-1} = -iR^A_\mu dX^\mu \tag{B'.14}$$

όπου R^A_μ, L^A_μ $\dim G \times \dim G$ πίνακες. Τέλος να αναφέρουμε ότι οι δύο μορφές σχετίζονται με την δράση του Ad-τελεστή, η οποία σε μορφή πινάκων γράφεται ως

$$R^A_\mu = D^{AB} L^B_\mu \rightarrow L^A_\mu = (D^T)^{AB} R^B_\mu \tag{B'.15}$$

Παράρτημα Γ′

Συνοριακές συνθήκες στο WZW πρότυπο

Παρακάτω θα δείξουμε ότι οι στραμμένες κλάσεις συζυγίας

$$\mathcal{C}_f^{\omega} = \{\omega(h) f h^{-1} | \forall h \in G\}\,, \tag{Γ′.1}$$

με κατάλληλη συνοριακή 2-μορφή αντιστοιχούν στις σ.σ

$$J_+ = \Omega J_-\,, \tag{Γ′.2}$$

με $\Omega^T\Omega = \mathbb{1}$.

Μεταβάλλοντας τον κινητικό όρο της δράσης (6.18) βρίσκουμε την σχέση (6.27). Αυτό είναι εύκολο να αποδηχθεί παρατηρώντας ότι

$$\delta(g^{-1}\partial_a g) = \partial_a(g^{-1}\delta g) + [g^{-1}\partial_a g, g^{-1}\delta g] \tag{Γ′.3}$$

Χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση και εκφράζοντας το αποτέλεσμα στις (τ, σ) συντεταγμένες, χρησιμοποιώντας τις συμβάσεις στο παράρτημα A, βρίσκουμε ένα όρο που συνησφέρει στο εσωτερικό και ένα συνοριακό που είναι ακριβώς ο (6.27). Ο μεταθέτης στην (Γ′.3) επίσης συνησφέρει στο εσωτερικό. Χρησιμοποιώντας τις συνοριακές τιμές g βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \delta g g^{-1}|_{\partial\Sigma} &= (\Omega - D)\delta h h^{-1} \\ g^{-1}\delta g|_{\partial\Sigma} &= (D^T\Omega - \mathbb{1})\delta h h^{-1} \end{aligned} \tag{Γ′.4}$$

Επομένως, επικεντρώνοντας την προσοχή μας στον συνοριακό όρο βρίσκουμε

$$\delta S_{\text{κιν.}}|_{\partial\Sigma} = \frac{k}{\pi}\int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta h h^{-1}, \Omega^T \partial_\sigma g g^{-1} - g^{-1}\partial_\sigma g)\,. \tag{Γ΄.5}$$

Για την συνοριακή 2-μορφή χρησιμοποιούμε την P-W ταυτότητα

$$\begin{aligned} H_{WZ}(\omega(h) f h^{-1}) &= H_{WZ}(\omega(h)) + H_{WZ}(h^{-1}) + d\mathrm{Tr}(\omega(h^{-1}) d\omega(h) \wedge f h^{-1} d h f^{-1}) \\ &= d\mathrm{Tr}(\omega(h^{-1}) d\omega(h) \wedge f h^{-1} d h f^{-1})\,, \end{aligned}$$

όπου για να ακυρώσουμε τους δύο όρους που δεν γράφονται ως $d(\dots)$ χρησιμοποιήσαμε ότι $\Omega \in Aut(G)$ και απαιτήσαμε $\Omega^T\Omega = \mathbb{1}$[1]. Επομένως

$$\begin{aligned} \omega_{WZ} &= \mathrm{Tr}(\omega(h^{-1}) d\omega(h) \wedge f h^{-1} d h f^{-1}) \\ &= \mathrm{Tr}(h^{-1} d h \wedge \Omega^T f h^{-1} d h f^{-1})\,. \end{aligned} \tag{Γ΄.7}$$

Μεταβάλλοντας τον όρο (Γ΄) βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \delta S_\omega|_{\partial D} &= -\frac{k}{\pi}\int_{\partial D} d\tau \mathrm{Tr}(\delta h h^{-1}, (\Omega^T D - D^T\Omega)\partial_\tau h h^{-1}) \\ &= \frac{k}{\pi}\int_{\partial D} \mathrm{Tr}(\delta h h^{-1}, \Omega^T \partial_\tau g g^{-1} + g^{-1}\partial_\tau g)\,, \end{aligned} \tag{Γ΄.8}$$

Τέλος συνδυάζοντας τις (Γ΄.4), (Γ΄.7) καταλήγουμε στον συνοριακό όρο

$$\delta S|_{\partial\Sigma} = \frac{k}{\pi}\int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta h h^{-1}, \Omega^T \partial_+ g g^{-1} + g^{-1}\partial_- g)\,, \tag{Γ΄.9}$$

όπου ο μηδενισμός του συνεπάγεται ακριβώς τις σ.σ (Γ΄.4).

[1] Για να ακυρωθούν πρέπει

$$\mathrm{Tr}(T^A, [T^B, T^C]) = \mathrm{Tr}(\Omega(T^A), [\Omega(T^B), \Omega(T^C)]) = \mathrm{Tr}(\Omega(T^A), \Omega[T^B, T^C]) \to \Omega^T\Omega = \mathbb{1} \tag{Γ΄.6}$$

Παράρτημα Δ′

Συνοριακές συνθήκες στα γενικευμένα λ-παραμορφωμένα πρότυπα

Δ′.1 Πρότυπο (I)

Για την απλοποίηση των υπολογισμών θα χρησιμοποιήσουμε αντίστοιχους ορισμούς με τους (7.30), δηλαδή

$$
\begin{aligned}
A^L_{1a} &= -\mathcal{O}^T_{12}\lambda_1(g_2^{-1}\partial_a g_2 + \lambda_2 D_2^T g_1^{-1}\partial_a g_1)\,,\\
A^R_{1a} &= \mathcal{O}_{12}\lambda_1(\partial_a g_1 g_1^{-1} + \lambda_2 D_1 \partial_a g_2 g_2^{-1})\,,\\
A^L_{2a} &= -\mathcal{O}^T_{21}\lambda_2(g_1^{-1}\partial_a g_1 + \lambda_1 D_1^T g_2^{-1}\partial_a g_2)\,,\\
A^R_{2a} &= \mathcal{O}_{21}\lambda_2(\partial_a g_2 g_2^{-1} + \lambda_1 D_2 \partial_a g_1 g_1^{-1})\,,
\end{aligned}
\tag{Δ′.1}
$$

κάτω από τους οποίους ο κινητικός όρος στην (10.30) απλοποιείται ως

$$
L_{k,\lambda_1,\lambda_2} = -\frac{k}{8\pi}\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Tr}(g_i^{-1}\partial_a g_i, g_i^{-1}\partial^a g_i) - 2\mathrm{Tr}(\partial^a g_i g_i^{-1}, A^L_{ia})\,,
\tag{Δ′.2}
$$

και η 2-μορφή (10.34) ως

$$
\omega_{k,\lambda_1,\lambda_2} = \frac{k}{4\pi}\sum_{i=1}^{2}\omega_{WZ}(h_i) - \mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1}\wedge A^L_i)|_{\mathcal{C}_{f_1 f_2}}\,,
\tag{Δ′.3}
$$

με $A_i^L = A_{ia}^L dx^a$. Μεταβάλλοντας τον κινητικό όρο και κρατώντας μόνο την συνοριακή συνεισφορά, όπως θα πράττουμε στην συνέχεια, βρίσκουμε

$$\delta S_{\text{κιν.}}|_{\partial\Sigma} = \frac{k}{4\pi}\int_{\partial\Sigma}\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Tr}(g_i^{-1}\delta g_i, g_i^{-1}\partial_\sigma g_i) - \mathrm{Tr}(\delta g_i g_i^{-1}, A_{i\sigma}^L) + \mathrm{Tr}(g_i\delta g_i, A_{i+1\sigma}^R)\,. \tag{Δ΄.4}$$

Χρησιμοποιώντας την γεωμετρία (10.33) γενικές μεταβολές των στοιχείων ομάδας στο σύνορο γράφονται ως

$$\begin{aligned} g_i^{-1}\delta g_i &= (D_i^T - 1)\delta h_i h_i^{-1}\,, \\ \delta g_i g_i^{-1} &= (1 - D_i)\delta h_i h_i^{-1}\,, \quad i = 1,2\,. \end{aligned} \tag{Δ΄.5}$$

Αντικαθιστώντας τις (Δ΄.5) στην (Δ΄.4) βρίσκουμε

$$\delta S_{\text{κιν.}}|_{\partial\Sigma} = \frac{k}{4\pi}\int_{\partial\Sigma}\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Tr}(\delta h_i h_i^{-1}, \partial_\sigma g_i g_i^{-1} - g_i^{-1}\partial_\sigma g_i - (1 - D_i^T)A_{i\sigma}^L + (D_i - 1)A_{i+1\sigma}^R)\,. \tag{Δ΄.6}$$

Μεταβάλλοντας τώρα την 2-μορφή βρίσκουμε

$$\delta S_D|_{\partial\Sigma} = -\frac{k}{4\pi}\int_{\partial\Sigma}\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Tr}(\delta h_i h_i^{-1}, \partial_\tau g_i g_i^{-1} + g_i^{-1}\partial_\tau g_i + (D_i - 1)A_{i+1\tau}^R + (1 - D_i^T)A_{i\tau}^L)\,. \tag{Δ΄.7}$$

Συνδυάζοντας τις (Δ΄.6), (Δ΄.7) βρίσκουμε ότι η συνολική συνοριακή προσφορά στην μεταβολή της δράσης είναι

$$\begin{aligned} \delta S|_{\partial\Sigma} &= \frac{k}{2\pi}\int_{\partial\Sigma}\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Tr}(\delta h_i h_i^{-1}, \partial_+ g_i g_i^{-1} + g_i^{-1}\partial_- g_i + (1 - D_i^T)A_{i-} + (D_i - 1)A_{i+1+}) \\ &= \frac{k}{2\pi}\int_{\partial\Sigma}\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Tr}(\delta h_i h_i^{-1}, \nabla_+ g_i g_i^{-1} + g_i^{-1}\nabla_- g_i + (A_{i+} - A_{i+1+}) + (A_{i-} - A_{i+1-}))\,. \end{aligned} \tag{Δ΄.8}$$

Για να περάσουμε από την πρώτη στην δεύτερη ισότητα χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της συναλλοίωτης παραγώγου $\nabla_a g_i = \partial_a g_i - A_{ia} g_i + g_i A_{i+1a}$.

Στρέφοντας την προσοχή μας στις βράνες (10.38) βρίσκουμε ότι γενικές απειροστές μεταβολές των στοιχείων ομάδας γραφονται στην μορφή

$$
\begin{aligned}
g_i^{-1}\delta g_i &= D_i^T \delta h_i h_i^{-1} - \delta h_{i+1} h_{i+1}^{-1}\,, \\
\delta g_i g_i^{-1} &= \delta h_i h_i^{-1} - D_i \delta h_{i+1} h_{i+1}^{-1}, \quad i = 1,2\,.
\end{aligned} \tag{Δ΄.9}
$$

Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς (Δ΄.1) η συνοριακή 2-μορφή γράφεται ως

$$
\omega_{k,\lambda_1,\lambda_2} = \frac{k}{4\pi}\sum_{i=1}^{2} \omega_{WZ}(h_i) - \mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1} \wedge A_i^L)|_{\mathcal{C}^{\pi}{}_{f_1 f_2}}\,, \tag{Δ΄.10}
$$

με την $\omega_{WZ}(h_i)$ να δίνεται στην (10.39). Ακολουθώντας τα ίδια βήματα με προηγουμένως βρίσκουμε

$$
\delta S_{\text{κιν.}}|_{\partial\Sigma} = \frac{k}{4\pi}\int_{\partial\Sigma}\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Tr}(\delta h_i h_i^{-1}, \partial_\sigma g_i g_i^{-1} - A^R_{i\sigma} - D_i A^R_{i+1\sigma} - g_{i+1}^{-1}\partial_\sigma g_{i+1} + D_{i+1}^T A^L_{i+1\sigma} - A^L_{i\sigma})\,, \tag{Δ΄.11}
$$

και

$$
\delta S_D|_{\partial\Sigma} = -\frac{k}{4\pi}\int_{\partial\Sigma}\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Tr}(\delta h_i h_i^{-1}, \partial_\tau g_i g_i^{-1} - A^R_{i\tau} - D_i A^R_{i+1\tau} + g_{i+1}^{-1}\partial_\tau g_{i+1} - D_{i+1}^T A^L_{i+1\tau} + A^L_{i\tau})\,. \tag{Δ΄.12}
$$

Συνδυάζοντας τις (Δ΄.11) και (Δ΄.12) βρίσκουμε ότι η συνοριακή προσφορά για τις βράνες (10.38) είναι

$$
\begin{aligned}
\delta S_{\partial\Sigma} &= \frac{k}{2\pi}\int_{\partial\Sigma}\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Tr}(\delta h_i h_i^{-1}, \partial_+ g_i g_i^{-1} - A_{i+} + D_1 A_{i+1+} + g_{i+1}^{-1}\partial_- g_{i+1} - D_{i+1}^T A_{i+1-} + A_{i-}) \\
&= \frac{k}{2\pi}\int_{\partial\Sigma}\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Tr}(\delta h_i h_i^{-1}, D_+ g_i g_i^{-1} + g_{i+1}^{-1} D_- g_{i+1})\,.
\end{aligned} \tag{Δ΄.13}
$$

Δ′.2 Πρότυπο (II)

Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τους ορισμούς

$$
\begin{aligned}
A^L_{1a} &= -\mathcal{O}^T_{12}\lambda_1(\lambda_0 g_2^{-1}\partial_a g_2 + \lambda_2 D_2^T g_1^{-1}\partial_a g_1)\,,\\
A^R_{1a} &= \mathcal{O}_{12}\lambda_1(\lambda_0^{-1}\partial_a g_1 g_1^{-1} + \lambda_2 D_1 \partial_a g_2 g_2^{-1})\,,\\
A^L_{2a} &= -\mathcal{O}^T_{21}\lambda_2(\lambda_0^{-1} g_1^{-1}\partial_a g_1 + \lambda_1 D_1^T g_2^{-1}\partial_a g_2)\,,\\
A^R_{2a} &= \mathcal{O}_{21}\lambda_2(\lambda_0\partial_a g_2 g_2^{-1} + \lambda_1 D_2 \partial_a g_1 g_1^{-1})\,,
\end{aligned}
\tag{Δ′.14}
$$

κάτω από τους οποίους ο κινητικός όρος στην (10.46) απλοποιείται ως

$$
L_{k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2} = -\frac{1}{8\pi}\sum_{i=1}^{2} k_i \mathrm{Tr}(g_i^{-1}\partial_a g_i, g_i^{-1}\partial^a g_i) - 2k_i \mathrm{Tr}(\partial^a g_i g_i^{-1}, A^L_{ia})
\tag{Δ′.15}
$$

και η 2-μορφή (10.34) ως

$$
\omega_{k_1,k_2,\lambda_1,\lambda_2} = \frac{1}{4\pi}\sum_{i=1}^{2} k_i \omega_{WZ}(h_i) - k_i \mathrm{Tr}(dg_i g_i^{-1}\wedge A^L_i)|_{\mathcal{C}_{f_1 f_2}}\,.
\tag{Δ′.16}
$$

Οι υπολογισμοί είναι ίδιοι με προηγουμένως επομένως βρίσκουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\delta S|_{\partial\Sigma} &= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Sigma}\sum_{i=1}^{2} k_i \mathrm{Tr}(\delta h_i h_i^{-1}, \partial_+ g_i g_i^{-1} + g_i^{-1}\partial_- g_i + (1-D_i^T)A_{i-} + (D_i - 1)A_{i+1+})\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Sigma}\sum_{i=1}^{2} k_i \mathrm{Tr}(\delta h_i h_i^{-1}, \nabla_+ g_i g_i^{-1} + g_i^{-1}\nabla_- g_i + (A_{i+} - A_{i+1+}) + (A_{i-} - A_{i+1-}))\,.
\end{aligned}
\tag{Δ′.17}
$$

Στην περίπτωση της εμβάπτισης της χαμηλότερης διάστασης γενικευμένης βράνης (10.83) απειροστοί γενικοί μετασχηματισμοί των στοιχείων ομάδας στο σύνορο γράφονται ως

$$
\begin{aligned}
g_i^{-1}\delta g_i &= \frac{1-D_i^T}{1-D_{v_i}^T}(D^T_{r_i}\delta h_i h_i^{-1} - \delta h_{i+1} h_{i+1}^{-1})\,,\\
\delta g_i g_i^{-1} &= \frac{D_i - 1}{1-D_{v_i}^T}(D^T_{v_i}\delta h_i h_i^{-1} - \delta h_{i+1} h_{i+1}^{-1}), \quad i = 1,2\,,
\end{aligned}
\tag{Δ′.18}
$$

όπου $v_1 = v_2^{-1} = v = h_1 h_2^{-1}$. Αντικαθιστώντας τις (Δ′.18) στον συνοριακό όρο της μεταβολής της (Δ′.15) βρίσκουμε

$$\delta S_{\text{κιν.}}|_{\partial\Sigma} = = \frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Sigma}\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Tr}((D_{v_i}-1)^{-1}\delta h_i h_i^{-1}, k_i(\partial_\sigma g_i g_i^{-1} - g_i^{-1}\partial_\sigma g_i - (1-D_i^T)A_{i\sigma}^L + (D_i-1)A_{i+1\sigma}^R) \\ + k_{i+1}(\partial_\sigma g_{i+1} g_{i+1}^{-1} + g_{i+1}^{-1}\partial_\sigma g_{i+1} - (1-D_{i+1}^T)A_{i+1\sigma}^L + (D_{i+1}-1)A_{i\sigma}^R))\,. \tag{Δ′.19}$$

Η μεταβολή της συνοριακής 2-μορφής (6.48) έχει υπολογιστεί στην [115]. Επομένως η μεταβολή της (10.84) είναι η

$$\delta S_D|_{\partial\Sigma} = -\frac{1}{4\pi}\int_{\partial\Sigma}\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Tr}((D_{v_i}-1)^{-1}\delta h_i h_i^{-1}, k_i(\partial_\tau g_i g_i^{-1} + g_i^{-1}\partial_\tau g_i + (1-D_i^T)A_{i\tau}^L + (D_i-1)A_{i+1\tau}^R) \\ + k_{i+1}(\partial_\tau g_{i+1} g_{i+1}^{-1} + g_{i+1}^{-1}\partial_\tau g_{i+1} - (1-D_{i+1}^T)A_{i+1\tau}^L + (D_{i+1}-1)A_{i\tau}^R))\,. \tag{Δ′.20}$$

Συνδυάζοντας τις (Δ′.19) και (Δ′.20) βρίσκουμε ότι η συνολική συνοριακή προσφορά είναι η

$$\delta S_{\partial\Sigma} = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial\Sigma}\sum_{i=1}^{2}\mathrm{Tr}((D_{v_i}-1)^{-1}\delta h_i h_i^{-1}, k_i(\nabla_+ g_i g_i^{-1} + g_i^{-1}\nabla_- g_i + A_{i+} - A_{i+1+} + A_{i-} \\ - A_{i+1-}) + k_{i+1}(\nabla_+ g_{i+1} g_{i+1}^{-1} + g_{i+1}^{-1}\nabla_- g_{i+1} + A_{i+1+} - A_{i+} + A_{i+1-} - A_{i-}))\,. \tag{Δ′.21}$$

Δ′.3 Πρότυπο (III)

Για τις σ.σ (10.75) θα αγνοήσουμε τις ενδιάμεσες τεχνικές λεπτομέρειες και θα παρουσιάσουμε τα απαραίτητα αποτελέσματα για την εξαγωγή τους:

$$\begin{aligned} \delta g_i g_i^{-1} &= (1 - D_i D_{r_3}^T)\delta h_i h_i^{-1} + (D_i D_{r_3}^T - D_i)\delta h_3 h_3^{-1} \\ g_i^{-1}\delta g_i &= (D_i^T - D_{r_3}^T)\delta h_i h_i^{-1} + (D_{r_3}^T - 1)\delta h_3 h_3^{-1}, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{Δ′.22}$$

$$\int_{\partial\Sigma} \delta L = \sum_{i=1}^{2} \frac{k_i}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta h_i h_i^{-1}, \partial_\sigma g_i g_i^{-1} - D_{r_3} g_i \partial_\sigma g_i - (1 - D_{r_3} D_i^T) A_{i\sigma}^L + (D_i - D_{r_3}) A_{i\sigma}^R)$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} \frac{k_i}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta h_3 h_3^{-1}, (D_3 - 1) g_i^{-1} \partial_\sigma g_i - (D_{r_3} D_i^T - 1) A_{i\sigma}^L + (D_{r_3} - 1) A_{i\sigma}^R), \tag{Δ'.23}$$

$$\int_{\partial D} \delta\omega = -\sum_{i=1}^{2} \frac{k_i}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta h_i h_i^{-1}, \partial_\tau g_i g_i^{-1} + D_{r_3} g_i \partial_\tau g_i + (1 - D_{r_3} D_i^T) A_{i\tau}^L + (D_i - D_{r_3}) A_{i\tau}^R$$

$$- 2\partial_\tau r_3 r_3^{-1}) - \sum_{i=1}^{2} \frac{k_i}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \mathrm{Tr}(\delta h_3 h_3^{-1}, (D_3 - 1) g_i^{-1} \partial_\tau g_i + (D_{r_3} D_i^T - 1) A_{i\tau}^L$$

$$+ (D_{r_3} - 1) A_{i\tau}^R + 2\partial_\tau r_3 r_3^{-1}). \tag{Δ'.24}$$

Βιβλιογραφία

[1] Gell-Mann, M., Lévy, M. The axial vector current in beta decay, Nuovo Cim 16, 705–726 (1960).

[2] Scherk, J.; Schwarz, J. (1974). "Dual models for non-hadrons". Nuclear Physics B. 81 (1): 118–144.

[3] Gliozzi, F.; Scherk, J.; Olive, D. I. (1977). "Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model". Nucl. Phys. B. 122 (2): 253

[4] Green, M. B.; Schwarz, J. H. (1984). "Anomaly cancellations in supersymmetric D = 10 gauge theory and superstring theory". Physics Letters B. 149 (1–3): 117–122.

[5] Polchinski, J (1995). "Dirichlet branes and Ramond-Ramond charges". Physical Review D. 50 (10): R6041–R6045.

[6] G. 't Hooft, "A Planar Diagram Theory for Strong Interactions," Nucl. Phys. B **72** (1974), 461

[7] J. Maldacena, "The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity", Ri Adv. Theor. Math. Phys. 2 (1998) 231-252, [hep-th/9711200].

[8] "The Worlds as a Hologram", J. Math. Phys. 36 (1995) 6377, hep-th/9409089.

[9] J. Balog, P. Forgacs, Z. Horvath and L. Palla, "A new family of $SU(2)$ symmetric integrable σ-models, Phys. Lett. B324 (1994) 403, hep-th/9307030

[10] V.A. Fateev, The sigma model (dual) representation for a two-parameter family of integrable quantum field theories Nucl. Phys. B473 (1996) 509

[11] Fradkin and A.A. Tseytlin, Lebedev Inst. preprint N261 (1984)

[12] C. G. Callan, Jr., E. J. Martinec, M. J. Perry and D. Friedan,“ Strings in Background Fields,” [https://doi.org/10.1016/0550-3213(85)90506-1.

[13] L. Alvarez-Gaume, D. Z. Freedman and S. Mukhi, The Background Field Method and the Ultraviolet Structure of the Supersymmetric Nonlinear Sigma Model, Annals Phys. 134 (1981) 85.

[14] J. Polchinsky,“ Scale and Conformal Invariance in Quantum Field Theory”, Nuclear Physics B303 (1988) https://doi.org/10.1016/0550-3213(88)90179-4.

[15] R. R. Metsaev and A. A. Tseytlin, “Order alpha-prime (Two Loop) Equivalence of the String Equations of Motion and the Sigma Model Weyl Invariance Conditions: Dependence on the Dilaton and the Antisymmetric Tensor,” Nucl. Phys. B **293** (1987), 385-419 doi:10.1016/0550-3213(87)90077-0

[16] A. A. Tseytlin, “σ-Model Weyl Invariance Conditions and String Equations of Motion,” Nucl. Phys. B **294** (1987), 383-411 doi:10.1016/0550-3213(87)90588-8

[17] G. M. Shore, A Local Renormalization Group Equation, Diffeomorphisms, and Conformal Invariance in s Models, Nucl. Phys. B286 (1987) 349.

[18] R. G. Leigh, Dirac-Born-Infeld Action from Dirichlet Sigma Model, Mod. Phys. Lett. A4 (1989) 2767.

[19] R. G. Leigh,“ Dirac-Born-Infeld Action from Dirichlet Sigma Model”, [arXiv:2010.07879 [hep-th]].

[20] F. Loebbert, “Lectures on Yangian Symmetry,” J. Phys. A **49** (2016) no.32, 323002 [arXiv:1606.02947 [hep-th]].

[21] A. Torrielli, “Lectures on Classical Integrability,” J. Phys. A **49** (2016) no.32, 323001 [arXiv:1606.02946 [hep-th]].

[22] Sklyanin, E.K. Quantum version of the method of inverse scattering problem.J Math Sci 19, 1546–1596 (1982).

[23] O. Babelon, D. Bernard and M. Talon,“ Introduction to Classical Integrable Systems”, Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2003,doi.org/10.1017/CBO9780511535024

[24] J. M. Maillet, Kac-Moody algebra and extended Yang-Baxter relations in the O(N) non-linear sigma model,Phys. Lett. B162 (1985), 137-142

[25] J. M. Maillet, New integrable canonical structures in two-dimensional models, Nucl. Phys. B269 (1986), 54-76.

[26] B. Vicedo, On integrable field theories as dihedral affine Gaudin models,Int. Math. Res. Not. 15 (2020), 4513-4601, [1701.04856].

[27] F. Delduc, M. Magro and B. Vicedo, On classical q-deformations of integrable σ-models, JHEP 1311 (2013), 192, [1308.3581].

[28] B. Vicedo, Deformed integrable σ-models, classical R-matrices and classical exchange algebra on Drinfel'd doubles,J. Phys. A48 (2015) 355203, [1504.06303].

[29] T. J. Hollowood, J. L. Miramontes and D. M. Schmidtt, S-Matrices and Quantum Group Symmetry of k-Deformed Sigma Models,J. Phys. A49 (2016), 465201, [1506.06601].

[30] G. Itsios, K. Sfetsos, K. Siampos and A. Torrielli, "The classical Yang–Baxter equation and the associated Yangian symmetry of gauged WZW-type theories," Nucl. Phys. B **889** (2014), 64-86 [arXiv:1409.0554 [hep-th]].

[31] G. Georgiou, K. Sfetsos and K. Siampos, Strong integrability of λ-deformed models, Nucl. Phys. B952 (2020), 114923, [1911.07859].

[32] K. Costello, M. Yamazaki, Gauge Theory And Integrability, III,[1908.02289].

[33] B. Vicedo, Holomorphic Chern-Simons theory and affine Gaudin models,[1908.07511].

[34] F. Delduc, S. Lacroix, M. Magro and B. Vicedo, A unifying 2d action for integrable σ-models from 4d Chern-Simons theory,Lett. Math. Phys. 110 (2020), 1645-1687, [1909.13824].

[35] F. Delduc, S. Lacroix, K. Sfetsos and K. Siampos, "RG flows of integrable σ-models and the twist function," JHEP **02** (2021), 065, [arXiv:2010.07879 [hep-th]]

[36] A. M. Polyakov, Interaction of Goldstone Particles in Two-Dimensions. Applications to Ferromagnets and Massive Yang-Mills Fields, Phys. Lett. 59B (1975) 79.

[37] V. E. Zakharov and A. V. Mikhailov, Relativistically Invariant Two-Dimensional Models in Field Theory Integrable by the Inverse Problem Technique. (In Russian), Sov. Phys. JETP 47 (1978) 1017.

[38] A. M. Polyakov and A. A. Belavin, Metastable States of Two-Dimensional Isotropic Ferromagnets, JETP Lett. 22 (1975) 245.

[39] A. A. Migdal, Recursion Equations in Gauge Theories, Sov. Phys. JETP 42 (1975) 413.

[40] K. Pohlmeyer, Integrable Hamiltonian Systems and Interactions Through Quadratic Constraints, Commun. Math. Phys. 46 (1976) 207.

[41] M. Luscher and K. Pohlmeyer, Scattering of Massless Lumps and Nonlocal Charges in the Two-Dimensional Classical Nonlinear Sigma Model, Nucl. Phys. B137 (1978) 46.

[42] M. Luscher, Quantum Nonlocal Charges and Absence of Particle Production in the Two-Dimensional Nonlinear Sigma Model, Nucl. Phys. B135 (1978) 1.

[43] I. Pesando, The GS type IIB superstring action on $AdS_3 \times S^3 \times T^4$, JHEP 02 (1999) 007, [hep-th/9809145].

[44] J. Rahmfeld and A. Rajaraman, The GS string action on $AdS_3 \times S^3$ with Ramond-Ramond charge, Phys. Rev. D60 (1999) 064014 [hep-th/9809164].

[45] J. Park and S.-J. Rey, Green-Schwarz superstring on $AdS_3 \times S^3$, JHEP 01 (1999) 001 [hep-th/9812062].

[46] J. M. Evans, M. Hassan, N. J. MacKay and A. J. Mountain, "Local conserved charges in principal chiral models," Nucl. Phys. B **561** (1999), 385-412 [arXiv:hep-th/9902008 [hep-th]].

[47] N.J. MacKay, On the classical origins of Yangian symmetry in integrable field theory, Phys. Lett. B281 (1992), 90; err. ibid. B308 (1993) 444.

[48] N. J. MacKay, "Introduction to Yangian symmetry in integrable field theory," Int. J. Mod. Phys. A **20** (2005), 7189-7218 [arXiv:hep-th/0409183 [hep-th]].

[49] E. Brezin, C. Itzykson, J. Zinn-Justin and J.-B. Zuber, Remarks on the existence of non-local charges in two-dimensional models, Phys. Lett. 82B (1979) 442.

[50] P. Hasenfratz, M. Maggiore and F. Niedermayer, The Exact mass gap of the O(3) and O(4) nonlinear sigma models in d = 2, Phys. Lett. B245 (1990) 522.

[51] J. Balog, S. Naik, F. Niedermayer and P. Weisz, Exact mass gap of the chiral $SU(n) \times SU(n)$ model, Phys. Rev. Lett. 69 (1992) 873.

[52] J.A. de Azcarraga, A.J. Macfarlane, A.J. Mountain and J.C. Perez Bueno, Invariant tensors for simple groups, Nucl. Phys. B510 (1998) 657; physics/9706006.

[53] J. M. Evans, N. J. MacKay and M. Hassan, "Conserved charges and supersymmetry in principal chiral models," [arXiv:hep-th/9711140 [hep-th]].

[54] C. Appadu and T. J. Hollowood, Beta function of k deformed $AdS_5 \times S_5$ string theory, JHEP 11 (2015) 095 [1507.05420].

[55] D. Friedan, Nonlinear Models in Two Epsilon Dimensions, Phys. Rev. Lett. 45 (1980) 1057.

[56] K. Zarembo, Integrability in Sigma-Models, in Les Houches Summer School: Integrability: From Statistical Systems to Gauge Theory Les Houches, France, June 6-July 1, 2016, 2017,1712.07725.

[57] J. Evans and A. Mountain, Commuting charges and symmetric spaces, Phys. Lett. B483 (2000) 290; hep-th/0003264.

[58] M. B. Green and J. H. Schwarz, Covariant Description of Superstrings, Phys. Lett. B136 (1984) 367.

[59] V. V. Serganova, Classification of real simple Lie superalgebras and symmetric superspaces, Funct. Anal. Appl. 17 (1983) 200.

[60] L. F. Alday, G. Arutyunov and A. A. Tseytlin, On integrability of classical superstrings in AdS(5) x S**5,JHEP 07 (2005) 002 [hep-th/0502240].

[61] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, "Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory," Nucl. Phys. B **241** (1984)

[62] Ralph BlumenhagenErik Plauschinn, Introduction to Conformal Field Theory, 2009, Volume 779, ISBN : 978-3-642-00449-0.

[63] Philippe Di FrancescoPierre MathieuDavid Sénéchal, Conformal Field Theory, 1997,ISBN : 978-1-4612-7475-9

[64] E. Witten, Nonabelian Bosonization in Two-Dimensions, Commun. Math. Phys. 92 (1984) 455.

[65] K. Gawedzki, Conformal field theory: A Case study, hep-th/9904145.

[66] D. Gepner and E. Witten, String Theory on Group Manifolds, Nucl. Phys. B278 (1986) 493.

[67] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, Infinite Conformal Symmetry in Two-Dimensional Quantum Field Theory, Nucl. Phys. B241 (1984) 333.

[68] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, Current Algebra and Wess-Zumino Model in Two-Dimensions, Nucl. Phys. B247 (1984) 83.

[69] J. M. Evans, M. Hassan, N. J. MacKay and A. J. Mountain, "Conserved charges and supersymmetry in principal chiral and WZW models," Nucl. Phys. B **580** (2000), 605-646, [arXiv:hep-th/0001222 [hep-th]].

[70] S. w. Chung and S. H. H. Tye, "Chiral gauged WZW theories and coset models in conformal field theory," Phys. Rev. D **47** (1993), 4546-4566 [arXiv:hep-th/9202002 [hep-th]].

[71] E. Witten, On Holomorphic factorization of WZW and coset models, Commun. Math. Phys. 144 (1992) 189.

[72] K. Gawedzki and A. Kupiainen, G/h Conformal Field Theory from Gauged WZW Model, Phys. Lett. B215 (1988) 119.

[73] D. Karabali, Q.-H. Park, H. J. Schnitzer and Z. Yang, A GKO Construction Based on a Path Integral Formulation of Gauged Wess-Zumino-Witten Actions, Phys. Lett. B216 (1989) 307.

[74] [150] D. Karabali and H. J. Schnitzer, BRST Quantization of the Gauged WZW Action and Coset Conformal Field Theories, Nucl. Phys. B329 (1990) 649.

[75] A. A. Tseytlin, Effective action of gauged WZW model and exact string solutions, Nucl. Phys. B399 (1993) 601 [hep-th/9301015].

[76] I. Bars and K. Sfetsos, Exact effective action and space-time geometry n gauged WZW models,Phys. Rev. D48 (1993) 844 [hep-th/9301047].

[77] A. A. Tseytlin, Conformal sigma models corresponding to gauged Wess-Zumino-Witten theories, Nucl. Phys. B411 (1994) 509 [hep-th/9302083].

[78] K. Bardakci, E. Rabinovici and B. Saering, String Models with $c < 1$ Components, Nucl. Phys. B299 (1988) 151.

[79] J. M. Maldacena, G. W. Moore and N. Seiberg, Geometrical interpretation of D-branes in gauged WZW models, JHEP 07 (2001) 046 [hep-th/0105038].

[80] E. Witten, On string theory and black holes, Phys. Rev. D44 (1991) 314.

[81] R. Dijkgraaf, H. L. Verlinde and E. P. Verlinde, String propagation in a black hole geometry, Nucl. Phys. B371 (1992) 269.

[82] E. B. Kiritsis, Duality in gauged WZW models, Mod. Phys. Lett. A6 (1991) 2871.

[83] M. A. Walton and J.-G. Zhou, D-branes in asymmetrically gauged WZW models and axial vector duality, Nucl. Phys. B648 (2003) 523 [hep-th/0205161].

[84] [170] M. A. Walton and J.-G. Zhou, D-branes in asymmetrically gauged WZW models and axial vector duality, Nucl. Phys. B648 (2003) 523 [hep-th/0205161].

[85] I. Bars and K. Sfetsos, Generalized duality and singular strings in higher dimensions, Mod. Phys. Lett. A7 (1992) 1091 [hep-th/9110054].

[86] T. Quella, V. Schomerus, Asymmetric Cosets, JHEP 0302 (2003) 030, arXiv:hep-th/0212119 [hep-th].

[87] E. Witten, On Holomorphic factorization of WZW and coset models, Commun. Math. Phys. 144 (1992) 189.

[88] C. R. Nappi and E. Witten, A Closed, expanding universe in string theory, Phys. Lett. B293 (1992) 309 [hep-th/9206078].

[89] E. Guadagnini, M. Martellini and M. Mintchev, “Scale Invariance Sigma Models On Homogeneous Spaces,” Phys. Lett. B194 (1987) 69.

[90] E. Guadagnini, “Current Algebra In Sigma Models On Homogeneous Spaces,” Nucl. Phys. B290 (1987) 417.

[91] L. A. Pando Zayas and A. A. Tseytlin, “Conformal sigma models for a class of T**(p,q) spaces,” Class. Quant. Grav. **17** (2000), 5125-5131 [arXiv:hep-th/0007086 [hep-th]]

[92] M. Kato and T. Okada, D-branes on group manifolds, Nucl. Phys. B499 (1997) 583 [hep-th/9612148].

[93] N. Ishibashi, The Boundary and Crosscap States in Conformal Field Theories, Mod. Phys. Lett. A4 (1989) 251.

[94] J. L. Cardy, Boundary Conditions, Fusion Rules and the Verlinde Formula, Nucl. Phys. B324 (1989) 581.

[95] M. R. Gaberdiel and T. Gannon, “Boundary states for WZW models,” Nucl. Phys. B **639** (2002), 471-501 [arXiv:hep-th/0202067 [hep-th]].

[96] G. Felder, J. Frohlich, J. Fuchs and C. Schweigert, “The Geometry of WZW branes,” J. Geom. Phys. **34** (2000), 162-190 [arXiv:hep-th/9909030 [hep-th]].

[97] H. Ishikawa, “Boundary states in coset conformal field theories,” Nucl. Phys. B **629** (2002), 209-232 [arXiv:hep-th/0111230 [hep-th]].

[98] S. Fredenhagen and V. Schomerus, “D-branes in coset models,” JHEP **02** (2002), 005 [arXiv:hep-th/0111189 [hep-th]].

[99] K. Gawedzki, “Boundary WZW, G / H, G / G and CS theories,” Annales Henri Poincare **3** (2002), 847-881 [arXiv:hep-th/0108044 [hep-th]].

[100] A. Y. Alekseev and V. Schomerus, “D-branes in the WZW model,” Phys. Rev. D 60 (1999), 061901 [arXiv:hep-th/9812193 [hep-th]]..

[101] S. Stanciu, “D-branes in group manifolds,” JHEP 01 (2000), 025 [arXiv:hep-th/9909163 [hep-th]].

[102] S. Stanciu, "A Note on D-branes in group manifolds: Flux quantization and D0-charge," JHEP 10 (2000), 015 [arXiv:hep-th/0006145 [hep-th]].

[103] J. M. Figueroa-O'Farrill and S. Stanciu, "D-branes in AdS(3) x S**3 x S**3 x S**1," JHEP 04 (2000), 005 [arXiv:hep-th/0001199 [hep-th]].

[104] J. M. Figueroa-O'Farrill and S. Stanciu, "More D-branes in the Nappi-Witten background," JHEP 01 (2000), 024 [arXiv:hep-th/9909164 [hep-th]].

[105] S. Elitzur and G. Sarkissian, "D branes on a gauged WZW model," Nucl. Phys. B **625** (2002), 166-178 [arXiv:hep-th/0108142 [hep-th]].

[106] S. Elitzur, A. Giveon, D. Kutasov, E. Rabinovici and G. Sarkissian, "D-branes in the background of NS five-branes," JHEP **08** (2000), 046 [arXiv:hep-th/0005052 [hep-th]].

[107] K. Gawedzki, I. Todorov and P. Tran-Ngoc-Bich, "Canonical quantization of the boundary Wess-Zumino-Witten model," Commun. Math. Phys. **248** (2004), 217-254 [arXiv:hep-th/0101170 [hep-th]].

[108] C. Klimcik and P. Severa, "Poisson Lie T duality: Open strings and D-branes," Phys. Lett. B **376** (1996), 82-89 [arXiv:hep-th/9512124 [hep-th]].

[109] C. Bachas, M. R. Douglas and C. Schweigert, Flux stabilization of D-branes, JHEP 05 (2000) 048 [hep-th/0003037].

[110] J. M. Figueroa-O'Farrill and S. Stanciu, "D-brane charge, flux quantization and relative (co)homology," JHEP **01** (2001), 006 [arXiv:hep-th/0008038 [hep-th]].

[111] S. Stanciu, "An Illustrated guide to D-branes in SU(3)," [arXiv:hep-th/0111221 [hep-th]].

[112] A. Recknagel, "Permutation branes," JHEP **04** (2003), 041 [arXiv:hep-th/0208119 [hep-th]].

[113] G. Sarkissian and M. Zamaklar, "Symmetry breaking, permutation D-branes on group manifolds: Boundary states and geometric description," Nucl. Phys. B **696** (2004), 66-106 [arXiv:hep-th/0312215 [hep-th]].

[114] M. R. Gaberdiel and S. Schafer-Nameki, D-branes in an asymmetric orbifold, Nucl. Phys. B654 (2003) 177–196 [hep-th/0210137].

[115] S. Fredenhagen and T. Quella, “Generalised permutation branes,” JHEP **11** (2005), 004 [arXiv:hep-th/0509153 [hep-th]].

[116] S. Fredenhagen and C. Restuccia, “DBI analysis of generalised permutation branes,” JHEP **01** (2010), 065 [arXiv:0908.1049 [hep-th]].

[117] S. Fredenhagen and M. R. Gaberdiel, “Generalised N=2 permutation branes,” JHEP **11** (2006), 041 [arXiv:hep-th/0607095 [hep-th]].

[118] I. V. Cherednik, Factorizing Particles on a Half Line and Root Systems, Theor. Math. Phys. 61 (1984) 977.

[119] E. K. Sklyanin, Boundary Conditions for Integrable Quantum Systems, J. Phys. A21 (1988) 2375.

[120] P. Bowcock, E. Corrigan, P. E. Dorey and R. H. Rietdijk, Classically integrable boundary conditions for affine Toda field theories, Nucl. Phys. B445 (1995) 469 [hep-th/9501098].

[121] A. Dekel and Y. Oz, Integrability of Green-Schwarz Sigma Models with Boundaries, JHEP 08 (2011) 004 [1106.3446].

[122] G. W. Delius, N. J. MacKay and B. J. Short, Boundary remnant of Yangian symmetry and the structure of rational reflection matrices, Phys. Lett. B522 (2001) 335 [hep-th/0109115].

[123] E. Corrigan and Z.-M. Sheng, Classical integrability of the O(N) nonlinear sigma model on a half line, Int. J. Mod. Phys. A12 (1997) 2825 [hep-th/9612150].

[124] I. Aniceto, Z. Bajnok, T. Gombor, M. Kim and L. Palla, On integrable boundaries in the 2 dimensional O(N) s-models, J. Phys. A50 (2017) 364002 [1706.05221].

[125] H. J. de Vega and A. Gonzalez-Ruiz, Boundary K matrices for the XYZ, XXZ and XXX spin chains, J. Phys. A27 (1994) 6129 [hep-th/9306089].

[126] D. Arnaudon, J. Avan, N. Crampe, A. Doikou, L. Frappat and E. Ragoucy, General boundary conditions for the sl(N) and sl(M|N) open spin chains, J. Stat. Mech. 0408 (2004) P08005 [math-ph/0406021].

[127] N. J. MacKay and B. J. Short, Boundary scattering, symmetric spaces and the principal chiral model on the half line, Commun. Math. Phys. 233 (2003) 313 [hep-th/0104212].

[128] N. J. MacKay and C. A. S. Young, Classically integrable boundary conditions for symmetric space sigma models, Phys. Lett. B588 (2004) 221 [hep-th/0402182].

[129] M. Moriconi, Integrable boundary conditions and reflection matrices for the O(N) nonlinear sigma model, Nucl. Phys. B619 (2001) 396 [hep-th/0108039].

[130] I. Bena, J. Polchinski and R. Roiban, Hidden symmetries of the AdS(5) x S**5 superstring, Phys. Rev. D69 (2004) 046002 [hep-th/0305116].

[131] O. Lunin and J. M. Maldacena, Deforming field theories with U(1) x U(1) global symmetry and their gravity duals, JHEP 05 (2005) 033 [hep-th/0502086].

[132] C. Klimcik, Yang-Baxter sigma models and dS/AdS T duality, JHEP 12 (2002) 051, [hep-th/0210095].

[133] C. Klimcik, On integrability of the Yang-Baxter sigma-model, J. Math. Phys. 50 (2009) 043508 [0802.3518].

[134] F. Delduc, M. Magro and B. Vicedo, On classical q-deformations of integrable sigma-models, JHEP 11 (2013) 192, [1308.3581].

[135] F. Delduc, M. Magro and B. Vicedo, An integrable deformation of the AdS5xS5 superstring action, Phys. Rev. Lett. 112 (2014) 051601 [1309.5850].

[136] K. Sfetsos, Integrable interpolations: From exact CFTs to non-Abelian T-duals, Nucl. Phys. B880 (2014) 225 [1312.4560].

[137] T. J. Hollowood, J. L. Miramontes and D. M. Schmidtt, Integrable Deformations of Strings on Symmetric Spaces, JHEP 11 (2014) 009 [1407.2840].

[138] T. J. Hollowood, J. L. Miramontes and D. M. Schmidtt, An Integrable Deformation of the $AdS_5 \times S^5$ Superstring, J. Phys. A47 (2014) 495402 [1409.1538].

[139] F. A. Smirnov and A. B. Zamolodchikov, On space of integrable quantum field theories, Nucl. Phys. B915 (2017) 363 [1608.05499].

[140] A. Cavaglià, S. Negro, I. M. Szécsényi and R. Tateo, T¯T-deformed 2D Quantum Field Theories, JHEP 10 (2016) 112 [1608.05534].

[141] [251] K. Sfetsos, K. Siampos and D. C. Thompson, Generalised integrable λ- and η-deformations and their relation, Nucl. Phys. B899 (2015) 489 [1506.05784].

[142] C. Klimcik, η and λ deformations as E -models, Nucl. Phys. B900 (2015) 259 [1508.05832].

[143] C. Klimčík, "Poisson–Lie T-duals of the bi-Yang–Baxter models," Phys. Lett. B **760** (2016), 345-349 [arXiv:1606.03016 [hep-th]].

[144] B. Hoare and F. K. Seibold, "Poisson-Lie duals of the η deformed symmetric space sigma model," JHEP **11** (2017), 014 [arXiv:1709.01448 [hep-th]].

[145] C. Klimcik and P. Severa, "Poisson-Lie T duality and loop groups of Drinfeld doubles," Phys. Lett. B **372** (1996), 65-71 [arXiv:hep-th/9512040 [hep-th]].

[146] C. Klimcik, "Poisson-Lie T duality," Nucl. Phys. B Proc. Suppl. **46** (1996), 116-121, [arXiv:hep-th/9509095 [hep-th]].

[147] K. Sfetsos, "Poisson-Lie T duality and supersymmetry," Nucl. Phys. B Proc. Suppl. **56** (1997), 302-309 [arXiv:hep-th/9611199 [hep-th]].

[148] K. Sfetsos, "Canonical equivalence of nonisometric sigma models and Poisson-Lie T duality," Nucl. Phys. B **517** (1998), 549-566 [arXiv:hep-th/9710163 [hep-th]].

[149] B. Hoare, "Integrable Deformations of Sigma Models," [arXiv:2109.14284 [hep-th]].

[150] G. Itsios, K. Sfetsos and K. Siampos, The all-loop non-Abelian Thirring model and its RG flow, Phys. Lett. B733 (2014) 265 [1404.3748].

[151] K. Sfetsos and D. C. Thompson, "Spacetimes for λ-deformations," JHEP **12** (2014), 164 doi:10.1007/JHEP12(2014)164 [arXiv:1410.1886 [hep-th]].

[152] L. Wulff, "All symmetric $\mathrm{AdS}_{n>2}$ solutions of type II supergravity," J. Phys. A **50** (2017) no.49, 495402 [arXiv:1706.02118 [hep-th]].

[153] K. Sfetsos and D. C. Thompson, "On non-abelian T-dual geometries with Ramond fluxes," Nucl. Phys. B **846** (2011), 21-42 [arXiv:1012.1320 [hep-th]].

[154] Y. Lozano, E. O Colgain, K. Sfetsos and D. C. Thompson, "Non-abelian T-duality, Ramond Fields and Coset Geometries," JHEP **06** (2011), 106 [arXiv:1104.5196 [hep-th]].

[155] C.M. Hull, Timelike T-duality, de Sitter space, large N gauge theories and topological field theory, JHEP 9807 (1998) 021, hep-th/9806146.

[156] B. Hoare, N. Levine and A. A. Tseytlin, Integrable 2d sigma models: quantum corrections to geometry from RG flow, 1907.04737.

[157] F. Hassler and T. B. Rochais, "O(D,D)-covariant two-loop β-functions and Poisson-Lie T-duality," JHEP **10** (2021), 210 [arXiv:2011.15130 [hep-th]].

[158] R.F. Dashen and Y. Frishman, Thirring model with u(n) symmetry - scale invariant only for fixed values of a coupling constant, Phys. Lett. B46 (1973) and Four Fermion Interactions and Scale Invariance, Phys. Rev. D11 (1975) 2781.

[159] D. Kutasov, String Theory and the Nonabelian Thirring Model, Phys. Lett. B227 (1989) 68.

[160] G. Georgiou and K. Sfetsos, "Field theory and λ-deformations: Expanding around the identity," Nucl. Phys. B **950** (2020), 114855 [arXiv:1910.01056 [hep-th]].

[161] G. Georgiou, K. Sfetsos and K. Siampos, "All-loop anomalous dimensions in integrable λ-deformed σ-models," Nucl. Phys. B **901** (2015), 40-58 [arXiv:1509.02946 [hep-th]].

[162] P. Bowcock, Canonical Quantization of the Gauged Wess-Zumino Model, Nucl. Phys. B316 (1989) 80.

[163] S. Demulder, K. Sfetsos and D. C. Thompson, "Integrable λ-deformations: Squashing Coset CFTs and $AdS_5 \times S^5$," JHEP **07** (2015), 019 [arXiv:1504.02781 [hep-th]].

[164] Y. Chervonyi and O. Lunin, “Supergravity background of the λ-deformed $\mathrm{AdS}_3\times \mathrm{S}^3$ supercoset,” Nucl. Phys. B **910** (2016), 685-711 [arXiv:1606.00394 [hep-th]].

[165] R. Borsato, A. A. Tseytlin and L. Wulff, “Supergravity background of λ-deformed model for $\mathrm{AdS}_2\times \mathrm{S}^2$ supercoset,” Nucl. Phys. B **905** (2016), 264-292 [arXiv:1601.08192 [hep-th]].

[166] Y. Chervonyi and O. Lunin, “Generalized λ-deformations of $\mathrm{AdS}_p\times \mathrm{S}^p$,” Nucl. Phys. B **913** (2016), 912-941 [arXiv:1608.06641 [hep-th]].

[167] N. Berkovits, O. Chandia. “Superstring Vertex Operators In An AdS5 ×S5 Background”. Nucl.Phys. B596 (2001) 185-196. [e-Print: hep-th/0009168]

[168] H. A. Benítez and D. M. Schmidtt, “λ-deformation of the $AdS_5 \times S^5$ pure spinor superstring,” JHEP **10** (2019), 108, [arXiv:1907.13197 [hep-th]].

[169] G. Itsios and K. Sfetsos, “AdS solutions and λ-deformations,” Nucl. Phys. B **953** (2020), 114960 [arXiv:1911.12371 [hep-th]].

[170] F. Delduc, M. Magro and B. Vicedo, “An integrable deformation of the $AdS_5 \times S^5$ superstring action,” Phys. Rev. Lett. **112** (2014) no.5, 051601 [arXiv:1309.5850 [hep-th]].

[171] B. Hoare, “Towards a two-parameter q-deformation of $\mathrm{AdS}_3 \times S^3 \times M^4$ superstrings,” Nucl. Phys. B **891** (2015), 259-295 [arXiv:1411.1266 [hep-th]].

[172] S. J. van Tongeren, “On classical Yang-Baxter based deformations of the $\mathrm{AdS}_5{\times}\mathrm{S}^5$ superstring,” JHEP **06** (2015), 048 [arXiv:1504.05516 [hep-th]].

[173] G. Arutyunov, S. Frolov, B. Hoare, R. Roiban and A. A. Tseytlin, “Scale invariance of the η-deformed $AdS_5 \times S^5$ superstring, T-duality and modified type II equations,” Nucl. Phys. B **903** (2016), 262-303 [arXiv:1511.05795 [hep-th]].

[174] K. Bardacki, M.J. Crescimanno and E. Rabinovici, Parafermions from Coset Models, Nucl. Phys. B344 (1990) 344.

[175] K. Bardakci, M.J. Crescimanno and S. Hotes, Parafermions from non-abelian coset models, Nucl. Phys. B349 (1991) 439.

[176] K. Sfetsos and K. Siampos, “The anisotropic λ-deformed SU(2) model is integrable,” Phys. Lett. B **743** (2015), 160-165, [arXiv:1412.5181 [hep-th]].

[177] C. Appadu, T. J. Hollowood, D. Price and D. C. Thompson, “Yang Baxter and Anisotropic Sigma and Lambda Models, Cyclic RG and Exact S-Matrices,” JHEP **09** (2017), 035 [arXiv:1706.05322 [hep-th]].

[178] C. Appadu, T. J. Hollowood, D. Price and D. C. Thompson, J. Phys. A **51** (2018) no.40, 405401 [arXiv:1802.06016 [hep-th]].

[179] K. Sfetsos and K. Siampos, “Gauged WZW-type theories and the all-loop anisotropic non-Abelian Thirring model,” Nucl. Phys. B **885** (2014), 583-599 [arXiv:1405.7803 [hep-th]].

[180] C. Klimcik, “Integrability of the bi-Yang-Baxter sigma-model,” Lett. Math. Phys. **104** (2014), 1095-1106 [arXiv:1402.2105 [math-ph]].

[181] F. Delduc, M. Magro and B. Vicedo, “Integrable double deformation of the principal chiral model,” Nucl. Phys. B **891** (2015), 312-321 [arXiv:1410.8066 [hep-th]].

[182] F. Delduc, B. Hoare, T. Kameyama and M. Magro, “Combining the bi-Yang-Baxter deformation, the Wess-Zumino term and TsT transformations in one integrable σ-model,” JHEP **10** (2017), 212 [arXiv:1707.08371 [hep-th]].

[183] S. Driezen, A. Sevrin and D. C. Thompson, “D-branes in λ-deformations,” JHEP **09** (2018), 015 [arXiv:1806.10712 [hep-th]].

[184] S. Driezen, A. Sevrin and D. C. Thompson, “Integrable asymmetric λ-deformations,” JHEP **04** (2019), 094 [arXiv:1902.04142 [hep-th]].

[185] G. Georgiou and K. Sfetsos, A new class of integrable deformations of CFTs, JHEP 1703 (2017) 083, arXiv:1612.05012 [hep-th].

[186] G. Georgiou, K. Sfetsos and K. Siampos, Double and cyclic λ-deformations and their canonical equivalents, Phys. Lett. B771 (2017) 576, arXiv:1704.07834 [hep-th].

[187] G. Georgiou, E. Sagkrioti, K. Sfetsos and K. Siampos, Quantum aspects of doubly deformed CFTs, Nucl. Phys. B919 (2017) 504, arXiv:1703.00462 [hep-th].

[188] G. Georgiou and K. Sfetsos, Integrable flows between exact CFTs, JHEP 1711 (2017) 078, arXiv:1707.05149 [hep-th].

[189] G. Georgiou, G. P. D. Pappas and K. Sfetsos, "Asymmetric CFTs arising at the IR fixed points of RG flows," Nucl. Phys. B **958** (2020), 115138 [arXiv:2005.02414 [hep-th]].

[190] G. Georgiou, K. Sfetsos and K. Siampos, "λ-Deformations of left–right asymmetric CFTs," Nucl. Phys. B **914** (2017), 623-641 [arXiv:1610.05314 [hep-th]].

[191] K. Sfetsos and K. Siampos, "Integrable deformations of the $G_{k_1} \times G_{k_2}/G_{k_1+k_2}$ coset CFTs," Nucl. Phys. B **927** (2018), 124-139 [arXiv:1710.02515 [hep-th]].

[192] C. Crnkovic, G. M. Sotkov and M. Stanishkov, Renormalization Group Flow for General SU(2) Coset Models, Phys. Lett. B226 (1989) 297.

[193] A. B. Zamolodchikov, TBA equations for integrable perturbed SU(2)k $\times$ SU(2)l /SU(2)k+l coset models, Nucl. Phys. B366 (1991) 122.

[194] F. Ravanini, Thermodynamic Bethe ansatz for G(k)xG(l)/G(k + l) coset models per- turbed by their $\phi_{1,1,Ad_j}$ operator, Phys. Lett. B282, 73 (1992), hep-th/9202020.

[195] A. LeClair, Chiral stabilization of the renormalization group for flavor and color anisotropic current interactions, Phys. Lett. B519 (2001) 183, hep-th/0105092.

[196] G. Georgiou, K. Sfetsos and K. Siampos, *All-loop correlators of integrable λ-deformed σ-models*, Nucl. Phys. **B909** (2016) 360, 1604.08212 [hep-th].

[197] G. Georgiou, P. Panopoulos, E. Sagkrioti and K. Sfetsos, *Exact results from the geometry of couplings and the effective action*, Nucl. Phys. **B948** (2019) 114779, arXiv:1906.00984 [hep-th].

[198] G. Georgiou, P. Panopoulos, E. Sagkrioti, K. Sfetsos and K. Siampos, *The exact C-function in integrable λ-deformed theories*, Phys. Lett. B **782**, 613 (2018) [arXiv:1805.03731 [hep-th].

[199] A.B. Zamolodchikov, Irreversibility of the Flux of the Renormalization Group in a 2D Field Theory, JETP Lett. 43 (1986) 730.

[200] E. Sagkrioti, K. Sfetsos and K. Siampos, “Weyl anomaly and the C-function in λ-deformed CFTs,” Nucl. Phys. B **938** (2019), 426-439 [arXiv:1810.04189 [hep-th]].

[201] G. P. D. Pappas, “Integrable branes in generalized λ-deformations,” JHEP **06** (2022), 035 [arXiv:2202.08535 [hep-th]].

[202] B. Fraser, “D-branes (or not) in the non-Abelian T-dual of the $SU(2)$ WZW model,” Phys. Lett. B **784** (2018), 307-311 [arXiv:1806.00713 [hep-th]].

[203] A. Wurtz, “D-branes in the diagonal SU(2) coset,” JHEP **01** (2006), 154 [arXiv:hep-th/0512126 [hep-th]].

[204] B. Vicedo, “On integrable field theories as dihedral affine Gaudin models,” Int. Math. Res. Not. **2020** (2020) no.15, 4513-4601 [arXiv:1701.04856 [hep-th]].

[205] B. Vicedo, “4D Chern–Simons theory and affine Gaudin models,” Lett. Math. Phys. **111** (2021) no.1, 24 [arXiv:1908.07511 [hep-th]].

[206] N. Beisert, C. Ahn, L. F. Alday, Z. Bajnok, J. M. Drummond, L. Freyhult, N. Gromov, R. A. Janik, V. Kazakov and T. Klose, *et al.* “Review of AdS/CFT Integrability: An Overview,” Lett. Math. Phys. **99** (2012), 3-32 [arXiv:1012.3982 [hep-th]].

[207] C. Hull and B. Zwiebach, “Double Field Theory,” JHEP **09** (2009), 099 [arXiv:0904.4664 [hep-th]].

[208] F. Hassler, “Poisson-Lie T-Duality in Double Field Theory,” Phys. Lett. B **807** (2020), 135455 [arXiv:1707.08624 [hep-th]].

[209] S. Demulder, F. Hassler and D. C. Thompson, “Doubled aspects of generalised dualities and integrable deformations,” JHEP **02** (2019), 189 [arXiv:1810.11446 [hep-th]].

[210] G. Georgiou and K. Sfetsos, “Scattering in integrable pp-wave backgrounds: S-matrix and absence of particle production,” Nucl. Phys. B **987** (2023), 116096 [arXiv:2208.01072 [hep-th]].

[211] G. Georgiou, “Webs of integrable theories,” Nucl. Phys. B **965** (2021), 115340 [arXiv:2006.12525 [hep-th]].

[212] G. Georgiou and K. Sfetsos, “The most general λ-deformation of CFTs and integrability,” JHEP **03** (2019), 094 [arXiv:1812.04033 [hep-th]].