ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν
Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

Σχολή Επιστημών της Αγωγής
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
«Διδακτική των Μαθηματικών και Τεχνολογίες της Πληροφορίας και Επικοινωνίας στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση»

Κατεύθυνση
«Διδακτική των Μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

που εκπονήθηκε για τη χορήγηση

Διπλώματος Μεταπτυχιακών Σπουδών

από τον

Βασίλειο Σώζο

(Α.Μ. 7981172100018)

ΘΕΜΑ: «Η γεωμετρία των οχυρώσεων ή προστασία χάρη στα μαθηματικά: Διδασκαλία Γεωμετρίας στο Δημοτικό με αξιοποίηση ιστορικών πηγών»

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Κωνσταντίνος Νικολαντωνάκης	Καθηγητής	**ΠΤΔΕ, ΦΛΩΡΙΝΑΣ**	**Επιβλέπων**
Ανδρέας Μούτσιος-Ρέντζος	Επίκουρος Καθηγητής	**ΠΤΔΕ, ΕΚΠΑ**	**Μέλος**
Ευγενία Κολέζα	Καθηγήτρια	**ΠΤΔΕ, ΠΑΤΡΑΣ**	**Μέλος**

Αθήνα, 2024

Η έγκριση της παρούσης Διπλωματικής Εργασίας στο πλαίσιο του Π.Μ.Σ. «Διδακτική των Μαθηματικών και Τεχνολογίες της Πληροφορίας και Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση», Κατεύθυνση «Διδακτική των Μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση» του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέως.

ΔΗΛΩΣΗ ΣΥΓΓΡΑΦΕΩΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Ο υπογράφων Βασίλειος Σώζος του Πέτρου, με Αριθμό Μητρώου 7981172100018, φοιτητής του Παιδαγωγικού τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης της Σχολής Επιστημών Αγωγής του Εθνικού Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών, δηλώνω υπεύθυνα ότι:

«Η συγκεκριμένη διπλωματική εργασία για τη λήψη του μεταπτυχιακού τίτλου σπουδών του ΠΜΣ «Διδακτική των Μαθηματικών και Τεχνολογίες της Πληροφορίας και Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση» της κατεύθυνσης «Διδακτική των Μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση», έχει συγγραφεί από εμένα προσωπικά και δεν έχει υποβληθεί, ούτε έχει εγκριθεί στο πλαίσιο κάποιου άλλου μεταπτυχιακού ή προπτυχιακού τίτλου σπουδών, στην Ελλάδα ή στο εξωτερικό. Επιπλέον, αντιπροσωπεύει τις προσωπικές μου απόψεις επί του θέματος και οι πηγές από τις οποίες έκανα χρήση δεδομένων, ιδεών, ή λέξεων, είτε ακριβώς, είτε παραφρασμένες, αναφέρονται στο σύνολό τους, με σαφείς και πλήρεις αναφορές σε όλες τις επιστημονικές πηγές (ενδεικτικά και μη αποκλειστικά, συγγραφείς, εκδοτικό οίκο, περιοδικό, πρακτικά συνεδρίου) συμπεριλαμβανομένων και των πηγών που χρησιμοποιήθηκαν από το διαδίκτυο.

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελεί προϊόν πνευματικής ιδιοκτησίας τόσο δικής μου, όσο και του Ιδρύματος.»

Αθήνα, 20/06/2024

Ο Δηλών
Βασίλειος Σώζος

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Κατάλογος εικόνων

Κατάλογος πινάκων

Περίληψη

Στην παρούσα έρευνα χρησιμοποιήθηκε μια παρουσίαση με ιστορικές πηγές για το έργο του Jean Errard στην εξέλιξη της γεωμετρίας των οχυρώσεων με σκοπό την κινητοποίηση των μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών, την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών της Γεωμετρίας μέσα από το κατασκευαστικό πρόγραμμα του Jean Errard και τη δημιουργία θετικής στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά. Συμμετέχοντες ήταν 14 μαθητές από ένα τμήμα της Δ΄ τάξης. Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται σε αυτήν την εργασία προέρχονται από φύλλα εργασίας, από παρατηρήσεις κατά τη διδασκαλία και από ένα ερωτηματολόγιο. Οι μαθητές κατανόησαν τους λόγους εξέλιξης των οχυρών με τη βοήθεια των Μαθηματικών που λειτούργησαν ως θετικό κίνητρο στην ενότητα της Γεωμετρίας. Έπειτα, κατασκεύασαν το εξαγωνικό οχυρό με προμαχώνες του Jean Errard και κατανόησαν τις γεωμετρικές έννοιες που περιλαμβάνονται σε αυτό. Τέλος, από την αξιολόγηση των μαθητών για την Ιστορία των Μαθηματικών, φαίνεται πως η αξιοποίηση της επηρέασε θετικά τη στάση των μαθητών ως προς το μάθημα των Μαθηματικών.

Λέξεις κλειδιά: *Ιστορία των Μαθηματικών, Γεωμετρία των οχυρώσεων, Jean Errard*

Abstract

In this research, a presentation with historical sources on Jean Errard's work in the development of the geometry of fortifications was used in order to motivate students in the lesson of Mathematics, the understanding of the mathematical concepts of Geometry through Jean Errard's construction project and the creation of a positive attitude of students towards Mathematics. Participants were 14 students from a 4th grade class. The results presented in this paper come from worksheets, observations during teaching and a questionnaire. The students understood the reasons for the evolution of the forts with the help of Mathematics which acted as a positive motivation in the lesson of Geometry. Then, they constructed Jean Errard's hexagonal bastion fort and understood the geometric concepts involved. Finally, from the students' assessment on the History of Mathematics, it appears that its use positively influenced students' attitudes towards the lesson of Mathematics.

Key words: *History of Mathematics, Geometry of fortifications, Jean Errard*

Εισαγωγή

Τα τελευταία χρόνια στη μαθηματική κοινότητα παρατηρείται έντονος προβληματισμός ως προς τη θέση που κατέχει το μάθημα των Μαθηματικών στην Ελληνική Εκπαίδευση. Αναζητούνται συνεχώς νέες διδακτικές προσεγγίσεις. Μία προσέγγιση, η οποία εξετάζεται κυρίως τα τελευταία 40 χρόνια αλλά και στην παρούσα έρευνα, είναι η διδασκαλία με αξιοποίηση ιστορικών πηγών.

Στο πλαίσιο της διδακτικής μου παρέμβασης με θέμα τη Γεωμετρία της Δ΄ τάξης, αναπτύσσεται ο ρόλος που θα μπορούσε να παίξει η ιστορία της Γεωμετρίας, μέσα από ιστορικά σημειώματα για το έργο του Jean Errard (Metin, 2018). Με την ενσωμάτωση των ιστορικών στοιχείων εξετάζεται το αν επιδρά η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών ως εργαλείο θετικού κίνητρου και το αν επηρεάζεται θετικά η στάση των μαθητών απέναντι στη διδασκαλία των μαθηματικών μετά από αυτήν την διδακτική προσέγγιση. Οι μαθητές έρχονται σε επαφή με γεωμετρικές έννοιες (ευθεία, ημιευθεία, ευθύγραμμο τμήμα, παράλληλες ευθείες, κάθετες ευθείες, ορθή γωνία, απόσταση, συμμετρία, ορθογώνιο τρίγωνο, ισόπλευρο τρίγωνο, εξάγωνο, ανάλυση και σύνθεση επίπεδου σχήματος) και με τα γεωμετρικά εργαλεία (κανόνα, γνώμονα, μοιρογνωμόνιο και διαβήτη). Έπειτα, εμπεδώνουν τις νέες έννοιες μέσα από το κατασκευαστικό πρόγραμμα του Jean Errard για τον σχεδιασμό ενός εξαγωνικού οχυρού με προμαχώνες. Σκοπός είναι οι μαθητές να συμμετέχουν ενεργά και δημιουργικά κατά την εκπαιδευτική διαδικασία και να εξοικειωθούν με τα γεωμετρικά εργαλεία. Συχνά οι μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες στη χρήση των γεωμετρικών εργαλείων, όπως του χάρακα (Τριανταφυλλίδης, 1999) και δεν νιώθουν άνετα στη χρήση τους (Τζανάκης, 1993). Τέλος, οι μαθητές με τη μέθοδο της “επαναδημιουργίας” γίνονται “μικροί Jean Errard” και γράφουν τις οδηγίες κατασκευής του εξαγωνικού οχυρού με προμαχώνες. Σε αυτήν τη δραστηριότητα γίνεται η τελική αξιολόγηση των μαθητών, σχετικά με τις νεοαποκτηθείσες γνώσεις, από την οποία προκύπτουν και τα συμπεράσματα της έρευνας.

Σε μεγάλο ποσοστό οι μαθητές δηλώνουν ικανοποιημένοι από τη χρήση της Ιστορίας της Γεωμετρίας. Από την εξέλιξη των Μαθηματικών και των επιστημών ως εργαλεία των ανθρώπων στον πόλεμο, είτε για επίθεση είτε για άμυνα, αντιλαμβάνονται τη χρησιμότητα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε προβλήματα καθημερινής ζωής. Οι 12 από τους 14 μαθητές κρίνουν αυτόν τον τρόπο διδασκαλίας περισσότερο ενδιαφέρων και πιο εύκολο (5 μαθητές) ή το ίδιο εύκολο (9 μαθητές) από τον συνήθη τρόπο. Η διδασκαλία με αξιοποίηση ιστορικών πηγών επηρεάζει θετικά τους 13 από τους 14 μαθητές και κανέναν αρνητικά παρά τις όποιες δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές καθόλη τη διάρκεια της παρέμβασης, σε αντίθεση με έρευνες (Jankvist, 2009· Tzanakis et al., 2000) που αναφέρουν ότι η Ιστορία των Μαθηματικών μπορεί να μπερδέψει τους μαθητές.

Στο *πρώτο* κεφάλαιο της εργασίας γίνεται ιστορική ανασκόπηση στη σχέση της Ιστορίας των Μαθηματικών με τη Μαθηματική Εκπαίδευση με στόχο τη βελτίωση τη διδασκαλίας και τη μάθησης. Η Ιστορία χρησιμοποιείται στο πλαίσιο των Ρεαλιστικών Μαθηματικών με σκοπό την κινητοποίηση των μαθητών και την ενεργό συμβολή τους κατά τη διδασκαλία.

Στο *δεύτερο* κεφάλαιο παρουσιάζονται τα θετικά και τα αρνητικά επιχειρήματα για την διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών. Αναφέρονται οι συνηθέστεροι τρόποι αξιοποίησής της, οι περιορισμοί και οι πρακτικές δυσκολίες κατά τη χρήση της.

Στο *τρίτο* κεφάλαιο περιγράφεται η έννοια της Γεωμετρίας και η αξία της στην Εκπαίδευση. Υπάρχουν πολλοί λόγοι που κάνουν απαραίτητη τη διδασκαλία της αλλά και γενικές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές.

Στο *τέταρτο* κεφάλαιο παρουσιάζεται η Γεωμετρία των οχυρώσεων και η εξέλιξή της, έως τον 17ο αιώνα μ.Χ. Δηλαδή το πως η Γεωμετρία βοήθησε τους ανθρώπους να εξελίξουν τα οχυρά και την άμυνα με τη βοήθεια της επιστήμης ενάντια στην εξέλιξη των κανονιών και του τρόπου επίθεσης από εχθρούς. Κύριος εκφραστής του τρόπου οχύρωσης με προμαχώνες του 17ου αιώνα είναι ο Jean Errard, για αυτό και γίνεται σύντομη αναφορά στη βιογραφία του.

Στο *πέμπτο* κεφάλαιο παρουσιάζεται το θεωρητικό πλαίσιο που στηρίχθηκε η έρευνα: η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών για τη δημιουργία Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας όπου οι μαθητές θα ασχοληθούν με το κατασκευαστικό πρόγραμμα του Jean Errard που είναι και το κύριο μέρος της παρέμβασης στην τάξη.

Στο *έκτο* κεφάλαιο παρουσιάζονται η μεθοδολογία, οι στόχοι της έρευνας, τα ερευνητικά ερωτήματα και ο σχεδιασμός των μαθημάτων της παρέμβασης για την επίτευξη των στόχων.

Η παρέμβαση αποτελείται από:

- 1 μάθημα εισαγωγής στη Γεωμετρία με χρήση της Ιστορίας,
- 4 μαθήματα από τα Σχολικά Εγχειρίδια (με θέμα τις παράλληλες και τεμνόμενες ευθείες, τη χάραξη καθέτων, τη χάραξη παράλληλων, τη χρήση διαβήτη),
- 1 μάθημα συμμετρίας πολυγώνων (σχολικό εγχειρίδιο και φύλλο εργασίας),
- 1 μάθημα με μικροπείραμα από το Φωτόδεντρο (χρήση ΤΠΕ) με θέμα τη σύνθεση και την ανάλυση του εξαγώνου,
- 1 μάθημα κατασκευής εξαγωνικού οχυρού από την ιστορική πηγή,
- 1 μάθημα για αξιολόγηση των μαθητών (περιγραφική “αναδημιουργία” του κατασκευαστικού προγράμματος του Jean Errard),
- και 1 μάθημα αναστοχασμού των μαθητών (ερωτηματολόγιο αξιολόγησης της Ιστορίας των Μαθηματικών και της διδακτικής της αξιοποίησης)

Στο *έβδομο* κεφάλαιο παρουσιάζονται και αναλύονται ξεχωριστά τα αποτελέσματα των μαθημάτων της παρέμβασης, τα αποτελέσματα του φύλλου εργασίας για την αξιολόγησης των μαθητών και τα αποτελέσματα του φύλλου αναστοχασμού για την αξιολόγηση της Ιστορίας των Μαθηματικών ως μέσο κινητοποίησης και αλλαγής στάσης των μαθητών προς τα Μαθηματικά.

Στο *όγδοο* και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της έρευνας και γίνεται συζήτηση ως προς αυτά. Στη συζήτηση γίνεται σύγκλιση ή σύγκρουση των θεωριών που χρησιμοποιήθηκαν στο θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας. Επιπλέον, παρουσιάζονται οι περιορισμοί και οι δυσκολίες που προέκυψαν κατά την παρέμβαση αλλά και οι πιθανοί παράγοντες που βοήθησαν του στόχους της παρέμβασης. Τέλος, προτείνεται μια αντίστοιχη εφαρμογή παρέμβασης, σε μεγαλύτερης ηλικίας μαθητές, για επέκταση και επιβεβαίωση των ευρημάτων της έρευνας.

Θεωρητικό μέρος

1. Ιστορία των μαθηματικών

Η Ιστορία των Μαθηματικών και η σχέση της με τη Μαθηματική εκπαίδευση άρχισαν να διερευνώνται τα τελευταία εκατό χρόνια περίπου. Σκοπός των ερευνών είναι να βελτιώσουν τη διδασκαλία των εκπαιδευτικών αλλά και τη διαδικασία μάθησης των μαθητών. Ο βιογενετικός νόμος του Ernst Haeckel (Λεμονίδης & Νικολαντωνάκης, 2007) χρησιμοποιήθηκε ως επιχείρημα για τη μεταφορά στοιχείων της Ιστορίας στο χώρο της εκπαίδευσης. Σύμφωνα με αυτόν η οντογένεση (όρος για την ανάπτυξη ενός οργανισμού), είναι μια σύντομη ανακεφαλαίωση της φυλογένεσης (όρος για την εξέλιξη του αντίστοιχου γένους του οργανισμού). Αφού η γνωστική εξέλιξη ενός ατόμου ανακεφαλαιώνει την εξέλιξη ολόκληρου του ανθρώπινου γένους, υποστηρίχθηκε πως η διδασκαλία των Μαθηματικών θα πρέπει να περιέχει στοιχεία από την Ιστορία τους ακολουθώντας την ιστορική διαδρομή και τον τρόπο εξέλιξής τους. Πάνω σε αυτό το επιχείρημα εξελίχθηκαν συγκεκριμένες και ορθολογικές προτάσεις για την αξιοποίηση της Ιστορίας των μαθηματικών στην εκπαίδευση αλλά και προτάσεις με γενετικές μεθόδους διδασκαλίας και παραγωγής κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού. Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών ως βοηθητικό εργαλείο στην εκπαιδευτική διαδικασία, σύμφωνα με τη θεωρία της γενετικής, πρέπει να καθοδηγεί την πορεία μάθησης από απλές έννοιες σε πιο περίπλοκες αλλά και να βασίζεται στον τρόπο εξέλιξης των εννοιών από τη στιγμή που παρουσιάστηκαν μέχρι τη σημερινή εποχή. Με αυτόν τον τρόπο οι μαθητές αποκτούν ολοκληρωμένη γνώση για την έννοια Αντίθετα, διατυπώθηκαν αμφιβολίες για τη δυνατότητα ένταξης και αξιοποίησης των ιστορικών στοιχείων στην εκπαιδευτική διαδικασία με λειτουργικό τρόπο (Θωμαΐδης, 2014).

Τα τελευταία πενήντα χρόνια άλλαξε θεαματικά ο τρόπος που προσεγγίζονται και ερμηνεύονται οι μαθηματικές γνώσεις των αρχαίων χρόνων γύρω από τις βασικές μαθηματικές έννοιες. Ταυτόχρονα εξελίχθηκε η επιστήμη της Διδακτικής η οποία, με την ένταξη της Ιστορίας ως εργαλείο πλαισίωσης των μαθηματικών εννοιών, δίνει μια πραγματική και φυσική υπόσταση στις μαθηματικές έννοιες. Οι μαθητές μπορούν να γνωρίσουν την αρχική σημασία μιας έννοιας και την εξέλιξή της στα χρόνια (με τα όποια εμπόδια) αλλά και τον χρόνο που χρειάστηκε (να ξεπεράσει τα εμπόδια) μέχρι τη σημερινή της σημασία. Για να μάθει κάποιος μια μαθηματική έννοια πρέπει να ακολουθήσει την ίδια διαδρομή που ακολούθησε και η συγκεκριμένη έννοια μέσα στα χρόνια και να γνωρίσει τις όποιες κοινωνικές και πολιτιστικές παραμέτρους που εμπόδισαν ή βοήθησαν στην εξέλιξή της. Αυτά ονομάζονται επιχειρήματα ανακεφαλαίωσης (recapitulation argument).

Μια άλλη θεωρία για τον τρόπο ένταξης της Ιστορίας των Μαθηματικών στην διδασκαλία των Μαθηματικών εντάσσεται στο πλαίσιο της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Νικολαντωνάκης, 2022α). Βασικό αξίωμα αυτής της θεωρίας είναι «αρχή της εκ νέου επινόησης» του Hans Freudenthal που παρουσιάζεται στα βιβλία του: Mathematics as an Educational Task (1973) και Didactical Phenomenology of Mathematical Structures (1983). Ασκεί κριτική στο υπάρχον αξιωματικό τρίπτυχο στυλ παρουσίασης των Μαθηματικών εκείνης της εποχής (ορισμός - θεώρημα - απόδειξη) και προτείνει την παρουσίαση των προσπαθειών που προηγήθηκαν ενός μαθηματικού αποτελέσματος και την ένταξη αυτής της Ιστορίας στα διδακτικά κείμενα των Μαθηματικών. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές ανακαλύπτουν πώς θα ξεπερνούσαν ένα πρόβλημα αν ήταν τόσο έξυπνοι όσο ήταν οι άνθρωποι εκείνης της εποχής σε εκείνον τον χώρο.

Η αρχή της εκ νέου επινόησης (Freudenthal, 1973) μοιάζει με τη Σωκρατική μέθοδο, αν και απαιτεί πιο ενεργό από τους μαθητές καθώς εφαρμόζεται στο πλαίσιο της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Βασίζεται στην ερώτηση: “Σκέψου πώς θα μπορούσες να το έχεις ανακαλύψει εσύ ο ίδιος;”. Αυτή η ιδέα της “αναδημιουργίας” μιας μαθηματικής έννοιας μέσα από την ανάλυση των ιστορικών πηγών μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πρότυπη διαδικασία στη διδασκαλία των Μαθηματικών. Πριν τη διδασκαλία, ο εκπαιδευτικός, αφού έχει μελετήσει προσεκτικά τις ιστορικές πηγές (βιβλία, κείμενα, ιστορικά πακέτα), πρέπει να τις μετασχηματίσει και να δημιουργήσει κατάλληλο υλικό για αξιοποίηση στην τάξη σε μια σειρά μαθημάτων στο πλαίσιο της ΡΜΕ. Όπως αναφέρει ο Freudenthal (1991):

> Οι μαθητές ναι μεν πρέπει να επαναλάβουν την πορεία γνώσης που ακολούθησε το ανθρώπινο γένος, όχι όμως όπως ακριβώς αυτή συνέβη, αλλά όπως θα συνέβαινε αν οι άνθρωποι του τότε γνώριζαν λίγα περισσότερα από αυτά που γνωρίζουμε εμείς σήμερα.

2. Διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών

Για τη διδακτική αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδακτική θεωρία και πράξη έρευνες (Jankvist, 2009˙ Tzanakis et al., 2000) παρουσιάζουν πως μπορεί να κινητοποιήσει τους μαθητές αλλά και να συντελέσει στη διδασκαλία συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών. Οι εκπαιδευτικοί, λαμβάνοντας υπόψιν τα εμπόδια και τις δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι έννοιες στη διάρκεια των χρόνων, μπορούν να εκτιμήσουν τις πιθανές δυσκολίες και παρανοήσεις κατά τη μάθηση των εννοιών και να σχεδιάσουν τη διδασκαλία τους με κατάλληλο τρόπο, ώστε να βοηθήσουν τους μαθητές στην αντιμετώπιση και την υπέρβαση αυτών των δυσκολιών. Με αυτόν τον τρόπο μπορεί να επιτευχθεί αλλαγή στα συναισθήματα των μαθητών και να υπάρξει γενικότερη αλλαγή της στάσης που έχουν οι μαθητές για το μάθημα των Μαθηματικών προς μια θετική κατεύθυνση. Επιπλέον, η Ιστορία των Μαθηματικών επηρεάζει θετικά και τις πεποιθήσεις των μαθητών για τα Μαθηματικά, αφού από ένα απρόσωπο μάθημα, αποκομμένο από την πραγματικότητα, παρουσιάζεται ως ανάγκη των ανθρώπων για την εξέλιξή τους και ως εργαλείο επίλυσης πραγματικών προβλημάτων και δυσκολιών της καθημερινής ζωής. Τέλος, υπέρ της αξιοποίησης της Ιστορίας παρουσιάζονται τα οφέλη διαθεματικότητας, του συνδυασμού των Μαθηματικών με την Ιστορία και άλλα γνωστικά αντικείμενα.

Από την άλλη πλευρά, οι έρευνες προβάλλουν τις αρνητικές συνέπειες του συνδυασμού Μαθηματικών και Ιστορίας (Jankvist, 2009˙ Tzanakis et al., 2000). Μαθητές που δεν αγαπούν την Ιστορία μπορεί να αποκτήσουν αρνητικά συναισθήματα για τα Μαθηματικά, ενώ μαθητές που δυσκολεύονται ίσως μπερδευτούν περισσότερο από τον συνδυασμό των μαθημάτων και τις επιπλέον πληροφορίες. Εκτός από τους μαθητές, δυσκολίες από τη χρήση της Ιστορίας στα Μαθηματικά αντιμετωπίζουν και οι εκπαιδευτικοί. Ο χρόνος που προβλέπεται από τα προγράμματα σπουδών για τη διδασκαλία των Μαθηματικών θεωρείται περιορισμένος και η εισαγωγή επιπλέον πληροφοριών από την Ιστορία περιορίζει ακόμα περισσότερο τον διδακτικό χρόνο των Μαθηματικών. Η έλλειψη γνώσεων των τρόπων χρήσης της Ιστορίας από τους εκπαιδευτικούς είναι ένα ακόμα εμπόδιο στην εφαρμογή της. Τέλος, υπάρχει δυσκολία στην αξιολόγηση αυτού του τρόπου διδασκαλίας με συνέπεια να χάνεται η προσοχή των μαθητών.

Οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές κατά τη μάθηση μιας νέας μαθηματικής έννοιας οφείλονται στις αντιλήψεις τους. Συνειδητοποιώντας, οι μαθητές, τη σχέση των δικών τους εμποδίων με τα *επιστημολογικά εμπόδια* που αντιμετωπίζει η έννοια κατά την ιστορική της εξέλιξη και μεταφέροντας τη γνώση του παρελθόντος στην δική τους κατάσταση στο σήμερα, μπορούν να υπερβούν τις δυσκολίες τους με παρόμοιο τρόπο. Αυτή είναι μια επιστημολογική προσέγγιση Brousseau (2002) που αξιοποιεί την Ιστορία των Μαθηματικών που είναι και το αντικείμενο της παρούσας έρευνας. Εκτός από τα επιστημολογικά εμπόδια υπάρχουν τα οντογενετικά (που οφείλονται στις νοητικές δυνατότητες του παιδιού σύμφωνα με την ηλικία του), τα διδακτικά (που οφείλονται στη διδασκαλία και το εκπαιδευτικό σύστημα), και τα πολιτιστικά (που οφείλονται σε κοινωνικούς και πολιτιστικούς παράγοντες) (Νικολαντωνάκης, 2022α). Τον ρόλο του πολιτισμού και του σχολείου που δίνει στους μαθητές συμπυκνωμένες γνώσεις αιώνων υποστήριξαν και οι Furinghetti και Radford (2008). Τέλος, οι αντιλήψεις των μαθητών μπορεί να οφείλονται και σε περιβαλλοντικούς παράγοντες και τα εργαλεία των πολιτισμών (Vosniadou & Vamvakoussi, 2006).

Ο πιο συνηθισμένος τρόπος εισαγωγής και αξιοποίησης της Ιστορίας των Μαθηματικών στη διδασκαλία των Μαθηματικών είναι η απευθείας αναφορά σε ιστορικές πληροφορίες. Αυτό μπορεί να γίνει άμεσα (χωρίς προετοιμασία των μαθητών) ή έμμεσα (μετά από επίλυση προβλημάτων). Οι πληροφορίες παρουσιάζονται στους μαθητές μέσα από ιστορικά σημειώματα, τα οποία μπορεί να είναι είτε σύντομα (μεμονωμένα ιστορικά στοιχεία) είτε μεγάλα σε έκταση (ιστορικά βιβλία) που για την παρουσίαση τους απαιτείται σειρά μαθημάτων. Τα ιστορικά κείμενα δύνανται να περιέχουν ονόματα, βιογραφίες, χρονολογίες, ανέκδοτα ή αφηγήσεις (Jankvist, 2009˙ Tzanakis et al., 2000). Προσοχή χρειάζεται σε περίπτωση χρήσης μεγάλων σε μέγεθος ιστορικών πηγών όπου η Ιστορία μπορεί να λειτουργεί ως σκοπός του μαθήματος (Jankvist, 2009). Άλλοι τρόποι χρήσης της Ιστορίας είναι τα φύλλα εργασίας, τα ιστορικά προβλήματα και οι πρωτογενείς και δευτερογενείς πηγές. Οι πρωτογενείς πηγές απαιτούν κόπο και χρόνο από τους εκπαιδευτικούς καθώς βρίσκονται, συνήθως, σε γλώσσα που δεν καταλαβαίνουν οι μαθητές και χρειάζονται μετάφραση πριν τη χρήση τους (Jahnke et al., 2000). Αν κι ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να τροποποιήσει το κείμενο, καλό είναι η μετάφραση να είναι κοντά στο αυθεντικό κείμενο. Τέλος, οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα να συνδυάσουν όλα τα παραπάνω ώστε να σχεδιάσουν κατάλληλες και προσαρμοσμένες διδακτικές σειρές μαθημάτων και projects στο πλαίσιο του ισχύοντος προγράμματος σπουδών.

3. Γεωμετρία

Η Γεωμετρία είναι ένας κλάδος των Μαθηματικών που συμπεριλαμβάνεται στο πρόγραμμα διδασκαλίας από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού, καθώς δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να αναπτύξουν τις γνώσεις τους για τον χώρο και τα σχήματα. Μαθαίνουν να αναγνωρίζουν τα σχήματα, να ανακαλύπτουν τις ιδιότητές τους και να επιλύουν μαθηματικά προβλήματα (Κολέζα, 2000). Τα παιδιά γεννιούνται και μεγαλώνουν μέσα στον χώρο. Σε αυτόν μαθαίνουν να περπατούν. Τον εξερευνούν και τον ανακαλύπτουν. Η Γεωμετρία ασχολείται με αυτόν και τα βοηθά να τον κατακτήσουν (Κολέζα, 2009). Ένα από τα σημαντικότερα επιχειρήματα για την αξία της Γεωμετρίας είναι ότι συνδυάζει θεωρία και πράξη, αφού συμβάλλει στην περιγραφή των γεωμετρικών σχημάτων (του επιπέδου και του χώρου) αλλά και στον παραγωγικό συλλογισμό (Duval, 1999).

Η Γεωμετρία που διδάσκεται στις τάξεις του δημοτικού περιλαμβάνει δραστηριότητες για διερεύνηση με χειρωνακτικό τρόπο (Vand de Walle, 2001). Με αυτές τις δραστηριότητες οι μαθητές αποκτούν γνώσεις για τα γεωμετρικά σχήματα, τη μορφή τους, τις ιδιότητές τους, τις σχέσεις τους και τη μαθηματική ορολογία που πρέπει να χρησιμοποιούν στις περιγραφές τους. Οι Jones (2000) και Κολέζα (2009) αναφέρουν τους βασικούς στόχους της διδασκαλίας της Γεωμετρίας, σύμφωνα με τους οποίους οι μαθητές πρέπει να εξελίξουν: α) τη χωρική γνώση, τη γεωμετρική διαίσθηση, την ικανότητα οπτικοποίησης, β) τον συμπερασματικό λογισμό και την απόδειξη και γ) την μελέτη των δισδιάστατων και τρισδιάστατων αντικειμένων του χώρου.

Σχετικά με την κατανόηση της Γεωμετρίας στον πραγματικό χώρο, ο Duval (2004) τονίζει τις δυσκολίες που μπορεί να αντιμετωπίσουν οι μαθητές κατά τη διερεύνηση των αντικειμένων του, αφού όλα τα αντικείμενα που βρίσκονται στον φυσικό κόσμο δεν έχουν ακριβώς την ίδια μορφή με τα κατασκευασμένα γεωμετρικά σχήματα που συναντούν στο σχολείο. Επίσης, τα γεωμετρικά σχήματα των βιβλίων δεν είναι ακριβείς αναπαραστάσεις των φυσικών σχημάτων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να μην μπορούν να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις τους από τις πραγματικές τους εμπειρίες ώστε να οδηγηθούν στη γνώση των γεωμετρικών εννοιών (Μιχαήλ, Μουσκή & Γαγάτσης, 2006).

Η Γεωμετρία θεωρείται ένα δύσκολο αντικείμενο καθώς σε αυτή δεν αρκούν οι μηχανικές διαδικασίες για επίλυση προβλημάτων. Δηλαδή, δεν υπάρχουν αλγόριθμοι οι οποίοι μπορούν να εφαρμοστούν από τους μαθητές χωρίς αυτοί να έχουν κατανοηθεί. Ενώ μαθαίνουν σχετικά εύκολα τα γεωμετρικά σχήματα και τη μορφή τους, δυσκολεύονται να μάθουν τις ιδιότητές τους και τη μαθηματική ορολογία που χρησιμοποιείται για την περιγραφή τους (Τουμάσης, 1994). Επιπλέον, οι μαθητές ενώ γνωρίζουν τους μαθηματικούς ορισμούς δυσκολεύονται να τους αναγνωρίσουν σε ένα σχήμα (π.χ. αναγνώριση ορθής γωνίας), να τους εφαρμόσουν (π.χ. χάραξη ύψους σε αμβλυγώνιο τρίγωνο) και να τους διακρίνουν (π.χ. διάκριση τετραγώνου και ρόμβου) (Κολέζα, 2000). Τέλος, η Τζεκάκη (2002) αναφέρει πως μεγάλο ποσοστό μαθητών αποτυγχάνει σε ερωτήσεις που αφορούν στοιχειώδεις γεωμετρικές έννοιες και μετρήσεις.

3.1 Εργαλεία στη διδασκαλία της Γεωμετρίας

Οι μαθητές σε όλη τη σχολική ζωή τους χρησιμοποιούν κάποια “εργαλεία” που τους βοηθούν στο μάθημα της Γεωμετρίας. Εργαλεία είναι τα αντικείμενα που η έμμεση λειτουργία τους γίνεται μέσο για την επίτευξη μια ενέργειας (Vygotsky, 1978, 1997). Τέτοια “γεωμετρικά εργαλεία” είναι ο κανόνας, ο γνώμονας (είτε με γωνίες 30, 60 και 90 μοιρών είτε με γωνίες 45, 45 και 90 μοιρών), το μοιρογνωμόνιο και ο διαβήτης. Από την πρώτη κιόλας τάξη του δημοτικού οι μαθητές εξασκούνται με τον κανόνα για τη χάραξη γραμμών, τον σχεδιασμό γεωμετρικών σχημάτων, την ένωση σημείων και τη συμπλήρωση γεωμετρικών μοτίβων. Στις επόμενες τάξεις χρησιμοποιούν τα εργαλεία για να μετρούν, να σχεδιάζουν, να ελέγχουν τις γεωμετρικές έννοιες των σχημάτων και τις ιδιότητές τους. Με αυτόν τρόπο ενισχύεται η βιωματική μάθηση στο μάθημα της Γεωμετρίας και τα εργαλεία εμπλέκοντας ενεργά στη διαδικασία μάθησης το σώμα και τη σκέψη των μαθητών, με την καθοδήγηση των εκπαιδευτικών, γίνονται αποδοτικά (Φεσάκης, 2014).

Παρά τη θεωρητική αξία αυτών των εργαλείων, οι μαθητές του δημοτικού και του γυμνασίου δυσκολεύονται αρκετά με τη χρήση τους και αισθάνονται ανασφάλεια με συνέπεια να συναντούν εμπόδια στην κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών. Ο Τριανταφυλλίδης (1999) έχει τονίσει τις δυσκολίες των μαθητών στη χρήση του χάρακα. Οι μαθητές δυσκολεύονται στην ευθυγράμμιση του χάρακα με το ευθύγραμμο τμήμα που θέλουν να μετρήσουν. Επίσης, δεν τοποθετούν σωστά το σημείο μηδέν της κλίμακας του χάρακα με στην αρχή τους ευθύγραμμου τμήματος που μετρούν και δυσκολεύονται στη στρογγυλοποίηση των ενδείξεων. Ο Τζανάκης (1993) αναφέρει πως οι μαθητές δεν νιώθουν άνετα με τη χρήση του μοιρογνωμονίου, παρόλο που έχουν μάθει να το χειρίζονται.

Παρά τα πλεονεκτήματα που προκύπτουν από τη χρήση των εργαλείων στη διδασκαλία της Γεωμετρίας, οι εκπαιδευτικοί πολλές φορές αποφεύγουν ή αγνοούν την ουσιαστική χρήση τους. Έχουν τη λανθασμένη εκτίμηση πως οι μαθητές γνωρίζουν ήδη τη χρήση τους και τα παρακάμπτουν είτε πιστεύουν πως οι μαθητές έχουν δυσκολίες και δεν αξίζει να αφιερώνουν τον απαιτούμενο χρόνο για την υπέρβασή τους. Προχωρούν έτσι σε μια διαδικαστική διδασκαλία η οποία δεν αρκεί, όπως προαναφέρθηκε, για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Επίσης, η χρήση των εργαλείων δεν πρέπει να γίνεται αυτοσκοπός του μαθήματος αλλά να συντελούν στην ανάλυση του θεωρητικού πλαισίου των εννοιών (Φεσάκης, 2014). Πρέπει, δηλαδή, να κατανοούν τη χρήση τους καθώς οικοδομούν τις γεωμετρικές έννοιες.

4. Γεωμετρία των οχυρώσεων

Η στρατιωτική αρχιτεκτονική του 17ου αιώνα προσφέρει πολλά πλεονεκτήματα για την απόκτηση και την εξάσκηση των γεωμετρικών δεξιοτήτων, είτε πρόκειται για ανάλυση είτε για σχεδίαση σχημάτων. Τα σχήματα των ακροπόλεων είναι τόσο πολύπλοκα όσο και αρκετά κανονικά ώστε να μπορούν να γίνουν οπτικά αντιληπτά στο σύνολό τους, από σχέδια της εποχής ή από πρόσφατες αεροφωτογραφίες. Έχουν σχήμα αστεριού με ευθύγραμμο περίγραμμα, γωνίες διαφόρων ανοιγμάτων και τοίχους ποικίλου (αλλά όχι τυχαίου) μήκους, το επιβλητικό μέγεθος των οποίων αποκλείει κάθε άμεση μέτρηση.

4.1 Επίθεση και υπεράσπιση χώρων: μια τεχνολογική διελκυστίνδα

Η αρχιτεκτονική των οχυρών διαφοροποιήθηκε ανά τους αιώνες προτού καταλήξει σε ένα σύνολο ορθολογικών κανόνων στις αρχές του 17ου αιώνα. Η αντίθεση των δύο πόλων του πολέμου, της επίθεσης και της άμυνας, με τη δεύτερη να νοείται ως απάντηση του πρώτου, αναγκάζει τη συνεχή εξέλιξή τους. Η ανάπτυξη των επιστημών και η εφαρμογή τους στον πόλεμο ήταν ένα φυσικό βήμα. Τα καλύτερα όπλα αύξησαν τη δυναμική της επίθεσης και ανάγκασαν την οχύρωση να γίνει γεωμετρική, όταν οι μηχανικοί χρησιμοποίησαν τη Γεωμετρία στα σχέδιά τους για ενίσχυση της άμυνας. Η εξέλιξη των οχυρών παρουσιάζεται στο έργο ενός ολλανδικού έργου εκείνης της περιόδου (Dôgen, 1648, στο Metin, 2018).

4.2 Εξέλιξη οχυρών

Όταν οι άνθρωποι εγκατέλειψαν τα αρχαία φυσικά καταφύγιά τους (σπήλαια, βραχώδεις προεξοχές) κατά τους προϊστορικούς χρόνους για να εγκατασταθούν και να δημιουργήσουν οικιστικές κοινότητες, τα περιέβαλαν με παχιά τείχη που περιβάλλονταν από τάφρους. Αλλά τα τείχη αυτά είχαν ένα σοβαρό ελάττωμα: όταν ο εχθρός έφτανε στους πρόποδές τους, ήταν αδύνατο για τους κατοίκους να αμυνθούν χωρίς να τοποθετηθούν στο ύπαιθρο. Ως αποτέλεσμα, ο εχθρός μπορούσε να αρχίσει το έργο υπονόμευσης χωρίς να φοβάται τους υπερασπιστές. Οι υπερασπιστές επωφελήθηκαν από την εφεύρεση των πολεμίστρων και των παραθυρακίων, που τους επέτρεπαν να ενεργούν παραμένοντας καλυμμένοι. Όμως, υπήρχαν ακόμη χώροι που ήταν αδύνατο να υπερασπιστούν λόγω των τυφλών σημείων. Επιπλέον, οι αρχαίοι στρατοί είχαν τελειοποιήσει τις συσκευές για την εκτόξευση βλημάτων (καταπέλτες, σκορπιοί...), που γίνονταν ικανές να δημιουργούν τεράστιες ζημιές στο εσωτερικό οχυρωμένων περιβόλων και να ανοίγουν οχυρωμένους περιβόλους και να ανοίγουν κενά μέσω των οποίων γινόταν εύκολη η εισβολή σε πόλεις. Ήταν απαραίτητο να βρεθεί ένας τρόπος για να κρατηθούν οι επιτιθέμενοι σε μεγάλη απόσταση από τα τείχη. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα ήταν η πλαισίωση των οχυρωμένων τειχών. Αρκούσε η κατασκευή πύργων που έσπαγαν την ευθεία του τείχους, πέτρινες προεξοχές που έδιναν τη δυνατότητα να πιαστεί ένας εχθρός που είχε αποτολμήσει να μπει στις τάφρους. Αλλά είτε πρόκειται για τους τετράγωνους πύργους των αρχαίων πόλεων είτε για τους στρογγυλούς πύργους των μεσαιωνικών κάστρων, το ζήτημα των τυφλών σημείων παρέμενε. Καμία μορφή πύργου δεν μπορούσε να εξαλείψει εντελώς τις περιοχές στις οποίες ένας γενναίος επιτιθέμενος θα μπορούσε να είναι ασφαλής από τα βέλη των υπερασπιστών. Η ανακάλυψη (ή η εκ νέου ανακάλυψη) της πυρίτιδας στο τέλος του Μεσαίωνα στη Δύση ανάγκασε τους αρχιτέκτονες να ασχοληθούν εξ ολοκλήρου με το ζήτημα αυτό.

4.3 Οι μεταλλικές σφαίρες και η σύγχρονη οχύρωση

Οι μεσαιωνικές πέτρινες μπάλες κανονιού είχαν ελάχιστες πιθανότητες να χτυπήσουν με ακρίβεια έναν στόχο και, επιπλέον, οι μπάλες κανονιού προκαλούσαν ζημιές κυρίως στους πυροβολητές που τις χειρίζονταν. Ωστόσο, η βελτίωση των χυτοσιδήρων κανονιών και η ανάπτυξη του πυροβολικού άλλαξε τις ίδιες τις συνθήκες του πολιορκητικού πολέμου: τα κανόνια έριχναν πλέον μεταλλικές σφαίρες σε ευθεία γραμμή, το αποτέλεσμα των οποίων ήταν ασύγκριτο με εκείνο των πέτρινων σφαιρών των μεσαιωνικών όλμων. Το ύψος των πύργων καθίσταται προβληματικό, καθώς δεν έχει πλέον το πλεονέκτημα να τους θέτει εκτός της εμβέλειας των πεζών, οι οποίοι προηγουμένως ήταν ευάλωτοι κατά την ανάβασή τους. Αντιθέτως, καθιστά αυτές τις ψηλές κατασκευές ιδανικούς στόχους για το μακρινό πυροβολικό, και όταν καταρρέουν, αυτό συμβαίνει στους κατοίκους των πόλεων που προορίζονταν να προστατεύσουν.

Για να προσαρμοστούν στις νέες συνθήκες του πολιορκητικού πολέμου, οι Ιταλοί αρχιτέκτονες επινόησαν τους προμαχώνες. Πρόκειται για χαμηλούς πύργους, οι οποίοι δέχονται αμυντικό εξοπλισμό (κανόνια, κανονιοβολίδες), και εξαλείφουν τις απρόσιτες περιοχές όπου οι επιτιθέμενοι θα μπορούσαν να τοποθετούν τα εκρηκτικά τους χωρίς να φοβούνται πυρά από τους αμυνόμενους. Ποιο είναι αυτό το σχήμα; Ο Dôgen (1648, στο Metin, 2018) υποστήριζε το πενταγωνικό σχήμα το οποίο "δεν αφήνει τίποτα καλυμμένο για την προσπάθεια του εχθρού". Αυτή η ιταλική εφεύρεση διαδόθηκε σύντομα, υποβοηθούμενη από την πρόσληψη Ιταλών μηχανικών σε όλη την Ευρώπη.

Η γεωμετρική διάσταση των προφίλ αυτών των προμαχώνων ενισχύθηκε από μια θεωρία που επικεντρώθηκε στον προμαχώνα των κανονικών πολυγώνων. Ακόμη και αν δεν είχαν όλα τα φρούρια αυτή την κανονικότητα, η εκμάθηση της κατασκευής προμαχώνων βασιζόταν σε τυποποιημένες και επαναλαμβανόμενες ασκήσεις στο πεντάγωνο, το εξάγωνο κ.λπ. Οι συγγραφείς των οχυρωματικών συγγραμμάτων αναφέρονται σε αυτή την πρώτη προσέγγιση ως "κανονική οχύρωση", η οποία στη συνέχεια προσαρμόζεται στις πραγματικές συνθήκες του εδάφους με την "ακανόνιστη οχύρωση", αλλά τότε είναι μόνο θέμα επιλογής των κατάλληλων κατασκευών μεταξύ εκείνων που περιγράφονται και διδάσκονται στο "κανονικό" μέρος.

Οι ιταλικές πραγματείες τις οποίες γνωρίζουμε δεν δικαιολογούν πλήρως τις μεθόδους σχεδίασης των προμαχώνων. Η έλλειψη λεπτομερειών σχετικά με τα πρωτόκολλα κατασκευής μπορεί πιθανώς να εξηγηθεί εν μέρει από τη στρατηγική ανάγκη να κρατηθούν μυστικές. Γεγονός που θα εμπόδιζε τον διάσημο Vauban να δημοσιεύσει τη μέθοδό του για την οχύρωση των θέσεων, όπως εξηγεί ο ίδιος στην αφιέρωση στον Δούκα της Βουργουνδίας της Συνθήκης των πολιορκιών του (Vauban 1704, 3-4, στο Metin, 2018):

> «Κύριέ μου, μόνο με κάποια ανησυχία παίρνω το θάρρος να σας αφιερώσω αυτό το έργο [...] η χάρη που τολμώ να σας ζητήσω, κύριέ μου, είναι να κάνετε τον κόπο να διαβάσετε προσεκτικά αυτή την πραγματεία και να την κρατήσετε για τον εαυτό σας και να μην την μοιραστείτε με κανέναν, για να μην πάρουν κάποιοι αντίγραφα που, αν πήγαιναν στους εχθρούς μας, θα μπορούσαν να γίνουν εκεί καλύτερα δεκτά απ' ό,τι τους αξίζει».

4.4 Jean Errard

Ο Jean Errard (γεννήθηκε γύρω στο 1554 στο Bar-le-Duc και πέθανε στις 20 Ιουλίου 1610 στο Sedan) ήταν μαθηματικός και στρατιωτικός μηχανικός από τη Λωρραίνη, αρχικά στην υπηρεσία της δουκικής αυλής της Λωρραίνης, ο οποίος αργότερα μπήκε στην υπηρεσία του Γάλλου βασιλιά Ερρίκου Δ' και εισήγαγε την ιταλική οχύρωση στη Γαλλία. Το 1594, ο Errard δημοσίευσε το βιβλίο La Fortification réduite en art et démontrée, με το οποίο παρουσίασε την οχυρωματική στρατιωτική αρχιτεκτονική. Ήξερε πώς να χρησιμοποιεί τις ιδιαιτερότητες του εδάφους, θέσπισε κεκλιμένα επίπεδα που αποσκοπούσαν στην αποφυγή του αιφνιδιασμού από τις βυθιζόμενες απόψεις και πέτυχε να καλύψει τις πλευρές των προμαχώνων από τον εχθρό χάρη στη διάταξη των παραπετασμάτων. Εφηύρε επίσης το αναβατόριο και τυποποίησε το πάχος των προμαχώνων. Ήταν ο πρώτος που εφάρμοσε την αρχή της οχύρωσης με προμαχώνες στη Γαλλία και εξήγησε τις αρχές της. Το έργο του του χάρισε τον τίτλο του "πατέρα της γαλλικής οχύρωσης". Η γεωμετρία καθόριζε τη στρατηγική του σκέψη: ο Errard εξήγησε όλες τις διαδικασίες που επέτρεπαν να εντοπιστούν στο έδαφος τα διάφορα πολύγωνα, κανονικά ή ακανόνιστα, τα οποία ήταν απαραίτητα για τη σωστή οχύρωση ενός τόπου. Ο κύριος κανόνας του θεωρητικού του έργου είναι ότι η άμυνα ενός τόπου πρέπει να βασίζεται περισσότερο στο πεζικό παρά στο πυροβολικό, του οποίου τα πυρά στην εποχή του δεν ήταν αποτελεσματικά από το μέτωπο (Fortifications & Architecture, 2017).

Ερευνητικό μέρος

5. Θεωρητικό πλαίσιο για το σχεδιασμό της διδασκαλίας

Για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας χρησιμοποιήθηκε η θεωρία των Γεωμετρικών Χώρων Εργασίας (Kuzniak, 2006, 2012). Γεωμετρικός Χώρος Εργασίας (ΓΧΕ) είναι ο χώρος που έχει οργανωθεί με τρόπο ώστε το άτομο που βρίσκεται σε αυτόν να μπορεί να επιλύσει ένα γεωμετρικό πρόβλημα. Η ύπαρξη των προβλημάτων είναι προϋπόθεση για τη δημιουργία των ΓΧΕ.

Οι ΓΧΕ διακρίνονται σε τρεις τύπους Γεωμετρίας: τη Γεωμετρία 1 (GI), τη Γεωμετρία 2 (GII) και τη Γεωμετρία 3 (GIII). Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούνται οι δύο πρώτοι τύποι Γεωμετρίας που ασχολούνται με τον φυσικό κόσμο (Φυσική Γεωμετρία) και την αισθητή πραγματικότητα (Φυσική Αξιωματική Γεωμετρία) αντίστοιχα (Νικολαντωνάκης, 2022β).

Ειδικότερα, στη Γεωμετρία 1 (GI) τα επιχειρήματα που χρησιμοποιούνται για τις αποδείξεις βασίζονται στη διαίσθηση, στον πειραματισμό και στον ακόλουθο συλλογισμό. Τα γεωμετρικά εργαλεία, η δίπλωση και η αποκοπή-επικόλληση αποτελούν τα εργαλεία πειραματισμού. Επίσης, τα σχήματα χρησιμοποιούνται ως αντικείμενα πειραματισμού και πηγή επιχειρημάτων.

Στη Γεωμετρία 2 (GII) οι αποδείξεις βασίζονται σε υποθετικο-απαγωγικούς νόμους, στο πλαίσιο ενός αξιωματικού συστήματος. Τα σχήματα βασίζονται σε ορισμούς, οι οποίοι δεν αντιτίθενται στην πραγματικότητα και αποτελούν στήριγμα για το συλλογισμό, ενώ η μέτρηση τους δεν αποτελεί αποδεκτή απόδειξη. Τέλος, τα σχήματα κατασκευάζονται με το χέρι και θεωρούνται κωδικοποιημένα, δηλαδή μοιάζουν με ελεύθερα σχέδια που συνοδεύονται από γράμματα και άλλα ειδικά σύμβολα.

Άλλη μία κατηγοριοποίηση των ΓΧΕ γίνεται σε σχέση με το υποκείμενο που τους καθορίζει και διακρίνονται: α) ο ΓΧΕ αναφοράς, που καθορίζεται από το πρόγραμμα σπουδών ή μια κοινότητα μαθηματικών, β) ο κατάλληλος ΓΧΕ, που σχεδιάζεται από τον εκπαιδευτικό της τάξης και γ) ο προσωπικός ΓΧΕ, που αναπτύσσεται από το εκάστοτε μαθητή που δραστηριοποιείται σε αυτόν.

Ο ΓΧΕ περιλαμβάνει τρία συστατικά: τα φυσικά αντικείμενα, τα τεχνητά εργαλεία και το θεωρητικό σύστημα αναφοράς. Τέλος, σε γνωστικό επίπεδο, συμπεριλαμβάνονται τρεις διαδικασίες: η οπτικοποίηση, η κατασκευή και η απόδειξη.

Η αξιοποίηση ιστορικών πηγών της γεωμετρίας των οχυρώσεων προσφέρει πολλά πλεονεκτήματα για την απόκτηση και την εξάσκηση των γεωμετρικών δεξιοτήτων, είτε πρόκειται για ανάλυση είτε για σχεδίαση σχημάτων (Metin, 2018). Μάλιστα, από την οπτική της ψυχολογίας των κινήτρων, προτείνεται να χρησιμοποιείται υλικό από πρωτότυπες πηγές (Schunk et al., 2010). Το κατασκευαστικό πρόγραμμα εξαγωνικού οχυρού του Jean Errard έχει κοινούς στόχους με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών και το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ, 2003) της Δ΄ τάξης του Δημοτικού Σχολείου για τη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Η ευκολία κατανόησης, η ζωντάνια και η παραστατικότητα ενός κειμένου είναι χαρακτηριστικά που προκαλούν το ενδιαφέρον των ακροατών (Schraw et al., 1995). Η μεγαλόφωνη ανάγνωση από τον εκπαιδευτικό κάνει το κείμενο πιο ενδιαφέρον και πιο κατανοητό (Ariail & Albright, 2005· Ivey & Broaddus, 2001). Το ενδιαφέρον μπορεί να προκληθεί και άλλους παράγοντες όπως είναι: οι νεωτερισμοί, τα θέματα από τη ζωή και τη φύση, η εργασία σε ομάδες, οι πρακτικές και με νόημα δραστηριότητες που αντιστοιχούν στο επίπεδο των μαθητών σύμφωνα με τις γνώσεις και τις ικανότητές τους (Bergin, 1999· Mitchell, 1993· Schunk et al., 2010).

6. Μεθοδολογία Έρευνας

6.1 Δείγμα

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στη Δ΄ τάξη του 57ου (8/θέσιου) Δημοτικού Σχολείου Αθηνών, που βρίσκεται στο κέντρο της πρωτεύουσας της Ελλάδας. Πρόκειται για μια τάξη ενός μεγάλου σχολικού συγκροτήματος όπου η σύνθεση των μαθητών έχει πολλά διαφορετικά χαρακτηριστικά.

Οι εγγεγραμμένοι μαθητές στην τάξη ήταν 17 αλλά οι συμμετέχοντες ήταν 16 μαθητές με μέσο όρο ηλικίας τα 9,5 έτη. Από την έρευνα εξαιρέθηκε μία μαθήτρια επειδή είχε μόνο τρεις παρουσίες κατά τη διάρκεια της σχολικής χρονιάς μέχρι και την ημέρα που ξεκίνησε η έρευνα. Τα αγόρια ήταν 8 και τα κορίτσια 9. Ελληνική ιθαγένεια είχαν 8 μαθητές ενώ 8 ήταν από Αλβανία και 1 από Συρία. Στην έρευνα συμμετείχαν όλοι οι μαθητές καθώς πρόκειται για έρευνα σε μια σειρά μαθημάτων πάνω στην ύλη των Μαθηματικών της Δ΄ τάξης. Έπειτα από την παρέμβαση εξαιρέθηκαν ακόμα 2 μαθητές από το αρχικό δείγμα της τάξης, καθώς απουσίαζαν με εμπύρετη ίωση, λόγω Covid_19, από τις δραστηριότητες κατασκευής και αξιολόγησης. Έτσι, το τελικό δείγμα της έρευνας διαμορφώθηκε σε 14 μαθητές.

Η επιλογή αυτής της τάξης έγινε καθώς αποτελεί μια τυπική αστική τάξη με ποικίλα χαρακτηριστικά μαθητών που δε μοιάζουν να επηρεάζουν τα αποτελέσματα της έρευνας. Επίσης πέρα από ερευνητής, ήμουν και ο εκπαιδευτικός της τάξης. Ως εκπαιδευτικός της τάξης, ήξερα όλα τα στοιχεία των μαθητών: δημογραφικά, ειδικά χαρακτηριστικά, προϋπάρχουσα γνώση και δεξιότητες, κλίμα και λειτουργία τάξης. Έτσι, έγινε οικονομία χρόνου και κόπωσης, αφού δεν χρειάστηκε να γίνουν συνεντεύξεις με τους μαθητές. Οι μαθητές γνώριζαν ότι συμμετείχαν σε έρευνα αλλά δε δόθηκε άδεια από τους γονείς και από το σχολείο για λήψη φωτογραφικού υλικού. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στο πλαίσιο του μαθήματος χωρίς αναφορά ή δημοσίευση στοιχείων των μαθητών.

6.2 Ανάλυση δεδομένων

Τα δεδομένα που παρουσιάζονται στην έρευνα συλλέχθηκαν από φύλλα εργασίας, από παρατηρήσεις κατά τη διδασκαλία και από ένα ερωτηματολόγιο. Οι μαθητές εργάστηκαν ατομικά - παρόλο που κάθονταν σε ομάδες των τεσσάρων ατόμων - καθώς μας ενδιέφερε να εξετάσουμε τα κίνητρα, τις αποκτηθείσες γνώσεις και τις πεποιθήσεις ξεχωριστά για τον κάθε συμμετέχοντα. Οι ομάδες χρησιμοποιήθηκαν με σκοπό την ανταλλαγή ή δανεισμό γεωμετρικών οργάνων μεταξύ των μελών τους. Ακολούθησε ποιοτική ανάλυση των δεδομένων. Στα φύλλα εργασίας γίνεται ανάλυση των μαθησιακών αποτελεσμάτων σε σύγκριση με τα αναμενόμενα μαθησιακά αποτελέσματα που αναφέρονται στον σκοπό της έρευνας παρακάτω. Το ερωτηματολόγιο λειτουργεί ως φύλλο αναστοχασμού στο τέλος της έρευνας, από το οποίο αναλύεται το πως η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών: α) επηρεάζει ως κίνητρο τους μαθητές και β) αλλάζει τη στάση των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά.

6.3 Σκοπός της έρευνας

Η έρευνα αφορά σε μια σειρά μαθημάτων στην ενότητα της Γεωμετρίας. Σκοπός της είναι να πετύχουν οι μαθητές τους γενικούς στόχους της διδακτέας ύλης της Γεωμετρίας της Δ΄ δημοτικού με χρήση ιστορικών πηγών για τη δημιουργία οχυρών με προμαχώνες, σύμφωνα με το κατασκευαστικό πρόγραμμα του Jean Errard. Οι στόχοι αυτού του προγράμματος συμπίπτουν με τους στόχους των ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ (2003) αλλά και με τους στόχους του νέου Προγράμματος Σπουδών (ΠΣ) για το μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό Σχολείο (ΙΕΠ, 2022). Στις επιμέρους ενότητες αυτού του κεφαλαίου παρουσιάζονται οι σκοποί και οι στόχοι της παρέμβασης με τους συγκλίνοντες στόχους των ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ (2003) και του νέου ΠΣ των Μαθηματικών (2022). Με αυτόν τον τρόπο τονίζεται η συνάφεια των στόχων του κατασκευαστικού προγράμματος του Jean Errard που εφαρμόστηκε στη Γαλλία με τους στόχους της ελληνικής εκπαίδευσης, είτε με το ισχύον πρόγραμμα σπουδών (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ, 2003) είτε με το νέο ΠΣ (ΙΕΠ, 2022) που θα εφαρμοστεί σύντομα στην Ελλάδα μαζί με χρήση νέων βιβλίων (πολλαπλού βιβλίου). Η παρούσα έρευνα ασχολείται μόνο με τη γεωμετρία του επιπέδου, αφήνοντας εκτός τις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού. Οι δραστηριότητες δεν περιλαμβάνουν τα γεωμετρικά στερεά ούτε την έννοια του όγκου.

6.3.1 Σκοποί και στόχοι του κατασκευαστικού προγράμματος του Jean Errard

Οι μαθητές, κατασκευάζοντας το οχυρό του Jean Errard (Metin, 2018):

α) Αναγνωρίζουν, ονομάζουν, περιγράφουν, αναπαράγουν, αναπαριστούν, κατασκευάζουν ορισμένα γεωμετρικά σχήματα και στερεά.

- Αναγνώριση, ονομασία, σύγκριση, έλεγχος και περιγραφή απλών ή σύνθετων σχημάτων (σύνολα απλών σχημάτων).
- Αναγνώριση και χρήση ορισμένων γεωμετρικών σχέσεων: παραλληλία, ευθυγράμμιση και ένταξη - ισότητα μηκών.
- Παραγωγή, συμπλήρωση και σύνταξη προγράμματος κατασκευής.
- Επίπεδα σχήματα, πρώτοι χαρακτηρισμοί: τρίγωνα, συμπεριλαμβανομένων των ιδιαίτερων τριγώνων (ορθογώνιο, ισοσκελές, ισόπλευρο)

β) Συγκρίνουν, εκτιμούν, μετρούν γεωμετρικά μεγέθη με ακέραιους αριθμούς και δεκαδικούς αριθμούς: μήκος, γωνία.

- Προσδιορισμός των γωνιών σε ένα γεωμετρικό σχήμα
- Σύγκριση γωνιών
- Αναπαραγωγή μιας δεδομένης γωνίας χρησιμοποιώντας ένα πρότυπο
- Σχεδιασμός ενός τμήματος συγκεκριμένου μήκους ή μεταφορά του μήκους ενός τμήματος
- Συμπλήρωση ενός σχήματος με αξονική συμμετρία

γ) Αποκτούν ανεπτυγμένες δεξιότητες.

- Αναζήτηση: Συγκέντρωση και οργάνωση των πληροφοριών που απαιτούνται για την επίλυση προβλημάτων, χρησιμοποιώντας διάφορα μέσα: κείμενα, πίνακες, διαγράμματα, γραφήματα, σχέδια, διαγράμματα κ.λπ.
- Αναπαράσταση: Χρήση εργαλείων για την αναπαράσταση ενός προβλήματος: σχέδια, διαγράμματα. Αναπαραγωγή (υπό κλίμακα ή όχι) ενός σχήματος ii. από μοντέλο και από στοιχεία που έχουν ήδη σχεδιαστεί. Να αναπαράγετε ή να κατασκευάσετε ένα σχήμα χρησιμοποιώντας στοιχειώδεις τεχνικές μέτρησης και σχεδίασης και γνώση των συνήθων σχημάτων.
- Αιτιολόγηση: Ανάλυση ενός επίπεδου σχήματος από διάφορες πλευρές (επιφάνεια, περίγραμμα, γραμμές και σημεία).
- Μοντελοποίηση: Αναγνώριση πραγματικών καταστάσεων που μπορούν να μοντελοποιηθούν με γεωμετρικές σχέσεις (ευθυγράμμιση, παραλληλία, κάθετη, συμμετρία).

6.3.2 ΔΕΠΠΣ (2003) για τη Γεωμετρία στην Δ΄ τάξη του Δημοτικού

Οι μαθητές, σύμφωνα με τους γενικούς στόχους (γνώσεις, δεξιότητες, στάσεις και αξίες) των ΔΕΠΠΣ, πρέπει:

- να εξασκούνται με τη βοήθεια οργάνων στη χάραξη παράλληλων και κάθετων ευθειών και στο σχεδιασμό γεωμετρικών σχημάτων.
- να εξασκηθούν στην κατασκευή συμμετρικών σχημάτων ως προς άξονα σε τετραγωνισμένο χαρτί.

6.3.3 ΑΠΣ (2003) για τη Γεωμετρία στην Δ΄ τάξη του Δημοτικού

Οι μαθητές, σύμφωνα με τους στόχους των ΑΠΣ, πρέπει:

- να μπορούν να σχεδιάζουν γεωμετρικά σχήματα με τη βοήθεια οργάνων.
- να μπορούν να περιγράφουν και να σχεδιάζουν τα συνήθη επίπεδα γεωμετρικά σχήματα.
- να μπορούν να σχεδιάζουν τεμνόμενες, παράλληλες και κάθετες ευθείες με τη βοήθεια οργάνων.
- να μπορούν να σχεδιάζουν την απόσταση σημείου από ευθεία και την απόσταση δύο παράλληλων ευθειών.
- να μπορούν να σχεδιάζουν το συμμετρικό ενός επίπεδου σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας.
- να μπορούν να διενεργούν μεταφορά ενός σχήματος στο τετραγωνισμένο χαρτί κατά δοθέν ευθύγραμμο τμήμα.

6.3.4 Νέο πρόγραμμα σπουδών (ΠΣ) για το Δημοτικό σχολείο (ΙΕΠ, 2022)

Οι μαθητές, σύμφωνα με τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα για τη Γεωμετρία του επιπέδου του νέου ΠΣ για το Δημοτικό σχολείο, πρέπει να:

- αναγνωρίζουν σημεία, ευθείες, ημιευθείες, ευθύγραμμα τμήματα, τεμνόμενες, παράλληλες και κάθετες ευθείες.
- σχεδιάζουν γωνίες ίσες, μικρότερες και μεγαλύτερες από μία ορθή.
- αναγνωρίζουν και κατατάσσουν τετράπλευρα και πολύγωνα με βάση γεωμετρικές ιδιότητες και σχέσεις.
- σχεδιάζουν τρίγωνα και τετράπλευρα πάνω σε διάφορους καμβάδες και σε λευκό χαρτί με χρήση χάρακα.
- συνθέτουν και αναλύουν γεωμετρικά σχήματα σε 2 ή περισσότερα μέρη (π.χ. σε τρίγωνα και τετράπλευρα) με τη χρήση χειραπτικού και ψηφιακού υλικού.
- διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ διαφορετικών τετραπλεύρων.

6.4 Ερευνητικά ερωτήματα

Η παρούσα μελέτη εξετάζει τρία ερευνητικά ερωτήματα:

1. Αν η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών λειτουργεί ως εργαλείο θετικής κινητοποίησης των μαθητών ως προς τις νέες μαθηματικές έννοιες και δραστηριότητες που θα τους παρουσιαστούν.
2. Αν οι μαθητές θα πετύχουν τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα, στην ενότητα της Γεωμετρίας, με την αξιοποίηση ιστορικών πηγών, όπως αναφέρονται στο κατασκευαστικό πρόγραμμα του Jean Errard.

   Ειδικότερα:

   Το κατασκευαστικό πρόγραμμα του Jean Errard έχει ως επιμέρους στόχους, οι μαθητές:

   - να κατανοήσουν τις αρχές της οχύρωσης με προμαχώνες σύμφωνα με τον Jean Errard.
   - να κατανοήσουν την εξέλιξη της οχύρωσης, παράλληλα με την εξέλιξη του πυροβολικού.
   - να κατασκευάσουν εξαγωνικό οχυρό με προμαχώνες.
3. Αν η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών αλλάζει τη στάση των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά.

6.5 Σχεδιασμός του κατάλληλου ΓΧΕ

Οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών στη Γεωμετρία ήταν ότι περιλαμβάνεται στην ύλη του Δημοτικού από τις προηγούμενες τάξεις μέχρι την Γ΄ τάξη. Από την ύλη της Δ΄ τάξης είχαν διδαχθεί μόνο το κεφάλαιο 5, στην αρχή της σχολικής χρονιάς, με τίτλο “Μαθαίνω για τα Πολύγωνα” από το βιβλίο μαθητή (Βαμβακούση, κ.α., 2022α) και από το τετράδιο εργασιών της Δ΄ τάξης (Βαμβακούση, κ.α., 2022β), από το οποίο είχαν διδαχθεί την έννοια του πολυγώνου. Η παρέμβαση στην τάξη προτιμήθηκε να υλοποιηθεί πριν διδαχθούν οι μαθητές την ενότητα μαθημάτων του βιβλίου που αφορά τη Γεωμετρία, ώστε να μην έχουν διδαχθεί τίποτα σχετικά με αυτή. Ήθελα να χρησιμοποιηθεί η Ιστορία της Γεωμετρίας των οχυρώσεων του Jean Errard, ως εισαγωγικό ερέθισμα της ενότητας, ώστε να παρατηρηθεί η πιθανή χρήση της ως εργαλείο θετικής ενίσχυσης για το μάθημα της Γεωμετρίας.

Η πρωτογενής πηγή ήταν ένα αρχείο από μια επιμόρφωση με τίτλο Fortifications & Architecture (2017) σχετικά με την εξέλιξη του πολέμου και της επιστήμης, είτε για την επίθεση είτε για την άμυνα. Από αυτή την πηγή δημιουργήθηκαν: α) ένα μεταφρασμένο αρχείο (Παράρτημα 1) σε μορφή PDF, το οποίο χρησιμοποιήθηκε ως ψηφιακή παρουσίαση της ιστορίας του Jean Errard αλλά και του έργου του στην εξέλιξη των οχυρώσεων, β) το φύλλο εργασίας 1 (Παράρτημα 2) που δόθηκε αμέσως μετά την ψηφιακή παρουσίαση και γ) το φύλλο εργασίας 3 (Παράρτημα 3) με τις οδηγίες κατασκευής του εξαγωνικού οχυρού με προμαχώνες του Jean Errard.

Η ψηφιακή παρουσίαση (Παράρτημα 1) έχει ως στόχο να κατανοήσουν οι μαθητές τις αρχές της οχύρωσης με προμαχώνες, σύμφωνα με τον Jean Errard, αλλά και την εξέλιξη της οχύρωσης, παράλληλα με την εξέλιξη του πυροβολικού.

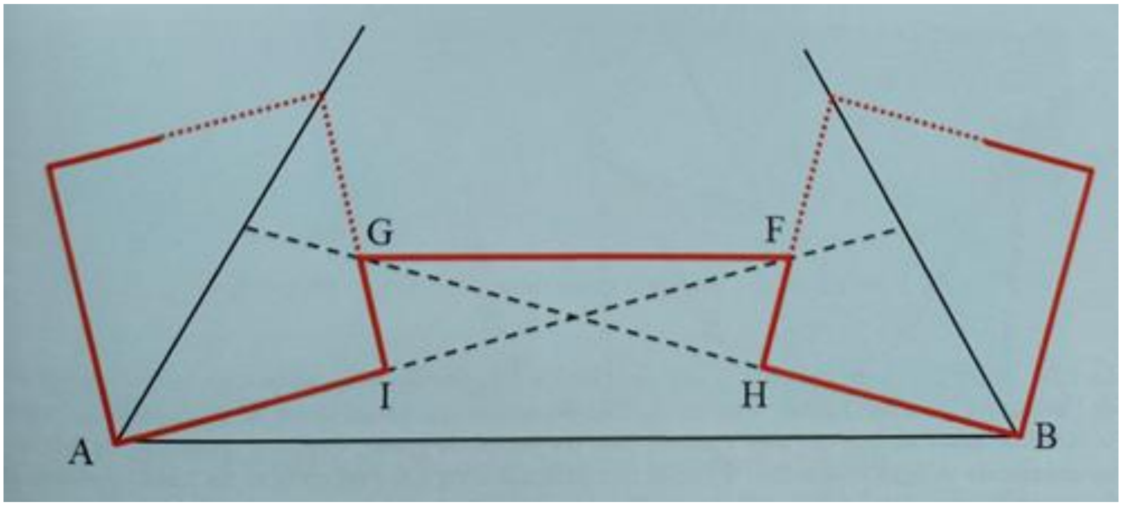
Στο φύλλο εργασίας 1 (Παράρτημα 2) περιλαμβάνεται μία άσκηση όπου ζητείται στους μαθητές να εντοπίσουν την ύπαρξη ή όχι τυφλών σημείων στα δύο σχεδιαγράμματα που τους δίνονται και στη συνέχεια, μέσω συζήτησης, να κατανοήσουν το πλεονέκτημα των οχυρώσεων με προμαχώνες έναντι των μεσαιωνικών πύργων (εξαφάνιση των τυφλών σημείων και των χώρων που δεν καλύπτονται από τα πυρά των κανονιών). Επιπλέον, ακολουθεί μία γλωσσική άσκηση κατανόησης των ορισμών της βασιλικής οχύρωσης με προμαχώνες, όπου τους δίνεται ένα σχεδιάγραμμα προς συμπλήρωση μαζί με τους ορισμούς των διάφορων μερών αυτής της οχύρωσης.

Στο φύλλο εργασίας 3 (Παράρτημα 3) δίνονται στους μαθητές μεταφρασμένες οι οδηγίες κατασκευής για την οχύρωση του εξαγωνικού οχυρού, κατά τον Jean Errard de Bar-le-Duc (1554-1610), με τις οποίες σχηματίζονται οι δύο ημι-προμαχώνες σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία και στα έξι ισόπλευρα τρίγωνα που συνθέτουν ή αναλύουν το κανονικό εξάγωνο, σχηματίζεται το εξαγωνικό οχυρό με προμαχώνες.

Έπειτα σχεδιάστηκε ένα ερωτηματολόγιο / φύλλο αναστοχασμού (Παράρτημα 4) με βασικό στόχο να καταγραφεί από τους μαθητές: α) αν η χρήση του ιστορικού κειμένου λειτούργησε ως θετικό κίνητρο για την ενασχόληση των μαθητών με τη Γεωμετρία και β) αν άλλαξε η στάση τους για το μάθημα των Μαθηματικών μετά από την παρέμβαση.

6.6 Διαδικασία

Η παρέμβαση σχεδιάστηκε να ξεκινήσει μετά τις Διακοπές του Πάσχα με διάρκεια έναν μήνα (Μάιος 2023). Ξεκίνησε με μια συζήτηση στην τάξη γύρω από τη λέξη Γεωμετρία ώστε να ενεργοποιηθούν οι προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών που χρειάζονταν για τη διαμόρφωση του ΓΧΕ: τι είναι πολύγωνο, ποια πολύγωνα γνωρίζουν και ποια είναι τα κανονικά σχήματα, τι είναι το ισόπλευρο τρίγωνο, τι είναι το ορθογώνιο τρίγωνο, τι είναι το κανονικό εξάγωνο. Η εισαγωγή της ενότητας της Γεωμετρίας έγινε με τη χρήση του ιστορικού κειμένου σε ψηφιακή παρουσίαση (Παράρτημα 1) προς ανάγκη των ανθρώπων για οχύρωση και εξέλιξη των κάστρων. Μετά δόθηκε στους μαθητές το φύλλο εργασίας 1 (Παράρτημα 2) ώστε να κατανοήσουν τα πλεονεκτήματα των οχυρώσεων με προμαχώνες και τους ορισμούς αυτής της οχύρωσης. Ακολούθησε η πρόταση για τη δημιουργία ενός εξαγωνικού οχυρού με προμαχώνες κατά τον τρόπο του Errard, με βάση ένα πρωτότυπο σχεδιάγραμμα από το έργο του (Εικόνα 1), στο οποίο τονίζονται τα περιγράμματα δύο ημι-προμαχώνων με κόκκινο χρώμα.



Εικόνα 1: Το έμμεσο σχήμα των τετράγωνων προμαχώνων του Errard (Metin, 2018)

Πριν υλοποιηθεί το υπόλοιπο μέρος της παρέμβασης, οι μαθητές διδάχθηκαν τα κεφάλαια 27, 28, 29, 30, 34 από το Βιβλίο Μαθητή των Μαθηματικών της Δ΄ τάξης (Βαμβακούση, κ.α., 2022α) και του Τετραδίου Εργασιών: γ΄ τεύχος (Βαμβακούση, κ.α., 2022γ) και ένα μικροπείραμα από το φωτόδεντρο (https://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/4268), ώστε να αποκτήσουν οι μαθητές απαραίτητες γνώσεις και δεξιότητες. Όλα τα μαθήματα ξεκινούσαν με αφόρμηση το εξαγωνικό οχυρό που είναι και το κεντρικό θέμα της παρέμβασης και μετά συνεχίζουν με τις εργασίες και τις ασκήσεις του Βιβλίου Μαθητή και του Τετραδίου Εργασιών. Στο κεφάλαιο 34 με θέμα τη Συμμετρία πρώτα δόθηκε στους μαθητές το φύλλο εργασίας 2 (Παράρτημα 6).

Με την ολοκλήρωση των προαπαιτούμενων μαθημάτων συνεχίστηκε η παρέμβαση για την κατασκευή δύο ημι-προμαχώνων από ισόπλευρο τρίγωνο και την ολοκλήρωση του εξαγωνικού οχυρού με το φύλλο εργασίας 3 (Παράρτημα 3). Για την αξιολόγηση των μαθητών, μετά την παρέμβαση, δόθηκε το φύλλο εργασίας 4 (Παράρτημα 5) όπου ζητείται στους μαθητές να δώσουν γραπτές οδηγίες σε κάποιο παιδί για το πώς να κατασκευάσει το οχυρό του Jean Errard. Τέλος, συμπληρώθηκε από τους μαθητές το ερωτηματολόγιο / φύλλο αναστοχασμού (Παράρτημα 4).

6.7 Σχέδια μαθημάτων

Για την παρέμβαση στην τάξη σχεδιάστηκαν εννέα μαθήματα σύμφωνα με τους στόχους του κατασκευαστικού προγράμματος του οχυρού με προμαχώνες του Jean Errard (Metin, 2018) και του Βιβλίου του Δασκάλου των Μαθηματικών της Δ΄ τάξης του Δημοτικού (Βαμβακούση, κ.α., 2022δ).

1ο μάθημα: Εισαγωγή (2 ώρες)

Χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών προς ανάγκη των ανθρώπων για οχύρωση και εξέλιξη των κάστρων με ψηφιακή παρουσίαση κειμένου για το Jean Errard.

Διδακτικοί στόχοι:

- Κινητοποίηση μαθητών
- Εννοιολογική κατανόηση ορισμών των οχυρώσεων με προμαχώνες.

2ο μάθημα: Κεφάλαιο 27 – Παράλληλες και τεμνόμενες ευθείες (2 ώρες)

Διδακτικοί στόχοι: Διαχείριση

Αναλυτικά: Στόχοι μας είναι να είναι ικανά τα παιδιά:

- ν’ αναγνωρίζουν εμπειρικά τις παράλληλες και τεμνόμενες ευθείες και να χρησιμοποιούν την αντίστοιχη ορολογία: “οι ευθείες είναι παράλληλες μεταξύ τους ”, “οι ευθείες τέμνονται”
- ν’ αναγνωρίζουν τις κάθετες ευθείες ως ειδική περίπτωση των τεμνόμενων ευθειών και να γνωρίζουν ότι δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες σχηματίζουν 4 ορθές γωνίες.

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Η έννοια της ορθής γωνίας. Έλεγχος της ορθής γωνίας με τον γνώμονα.

3ο μάθημα: Κεφάλαιο 28 – Χάραξη καθέτων (2 ώρες)

Διδακτικοί στόχοι: Χάραξη καθέτων ευθειών / ορθής γωνίας με γνώμονα. Απόσταση παραλλήλων ευθειών: έννοια και κατασκευή. Χρήση του μοιρογνωμονίου για τον έλεγχο της καθετότητας.

Αναλυτικά: Στόχοι μας είναι να είναι ικανά τα παιδιά:

- να εμπεδώσουν τις έννοιες της ορθής γωνίας, της καθετότητας και της παραλληλίας,
- να χρησιμοποιούν γεωμετρικά όργανα για να ελέγξουν την καθετότητα, καθώς και για να
  χαράξουν κάθετες μεταξύ τους ευθείες,
- να γνωρίζουν τι είναι η απόσταση σημείου από ευθεία και να μπορούν να τη χαράξουν.

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Έννοια της ορθής γωνίας, της καθετότητας και της παραλληλίας.

4^{ο} μάθημα: Κεφάλαιο 29 – Χάραξη παραλλήλων (2 ώρες)

Διδακτικοί στόχοι: Χάραξη παραλλήλων ευθειών. Απόσταση παραλλήλων ευθειών: Έννοια και κατασκευή.

Αναλυτικά: Στόχοι μας είναι να είναι ικανά τα παιδιά:

- να χρησιμοποιούν το γνώμονα για να χαράξουν παράλληλες ευθείες,
- να χρησιμοποιούν γεωμετρικά όργανα για να ελέγξουν την παραλληλία και την καθετότητα, καθώς και για να χαράξουν κάθετες και παράλληλες μεταξύ τους ευθείες,
- να γνωρίζουν τι είναι η απόσταση δύο παραλλήλων ευθειών και να μπορούν να τη χαράξουν.

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Εμπειρική αναγνώριση των παραλλήλων. Χάραξη καθέτων. Έννοια και σχεδιασμός της απόστασης σημείου από ευθεία.

5^{ο} μάθημα: Κεφάλαιο 30 – Χρήση διαβήτη (2 ώρες)

Διδακτικοί στόχοι: Διαισθητική προσέγγιση της έννοιας απόστασης / ευθύγραμμου τμήματος. Μέτρηση απόστασης / ευθύγραμμου τμήματος με μη τυπικές μονάδες.

Αναλυτικά: Στόχοι μας είναι να είναι ικανά τα παιδιά:

- να κατανοήσουν διαισθητικά την έννοια του ευθύγραμμου τμήματος,
- να μετρήσουν το ευθύγραμμο τμήμα με μη τυπικές μονάδες μέτρησης,
- να συγκρίνουν ευθύγραμμα τμήματα,
- να μεταφέρουν ευθύγραμμα τμήματα.

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Η έννοια της ευθείας, της ημιευθείας και του ευθύγραμμου τμήματος.

6^{ο} μάθημα: Κεφάλαιο 34 – Συμμετρία (2 ώρες)

Διδακτικοί στόχοι: Συμμετρία σε επίπεδα σχήματα.

Αναλυτικά: Στόχοι μας είναι να είναι ικανά τα παιδιά:

- ν’ αναγνωρίζουν τους άξονες συμμετρίας ενός επίπεδου σχήματος,
- να συμπληρώνουν ένα σχήμα με άξονα συμμετρίας,
- να σχεδιάζουν το συμμετρικό ενός επίπεδου σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας του.

Προαπαιτούμενες γνώσεις: Εμπειρική αναγνώριση άξονα συμμετρίας. Έλεγχος με δίπλωση ή πλαστικό καθρεφτάκι.

7ο μάθημα: Μικροπείραμα από το Φωτόδεντρο με χρήση ΤΠΕ (2 ώρες)

Διδακτικοί στόχοι:

- Σύνθεση εξαγώνου με ισόπλευρα και ορθογώνια τρίγωνα (Εικόνα 2)
- Ανάλυση / Διαχωρισμός εξαγώνου σε τρίγωνα: ισόπλευρα ή ορθογώνια (Εικόνα 3)

ΜΑΘΗΣΙΑΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: **ΦΤΙΑΧΝΩ ΠΛΑΚΟΣΤΡΩΤΑ**

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ: Μικροπείραμα για την εισαγωγή στα είδη και τις ιδιότητες των πολυγώνων. Στόχος του μαθησιακού αντικειμένου είναι να φτιάξουν οι μαθητές ένα πλακόστρωτο, χρησιμοποιώντας κανονικά εξάγωνα, καθώς και ισόπλευρα και ορθογώνια τρίγωνα. Το μικροπείραμα έχει δημιουργηθεί με χρήση εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας και χειρισμού αλγεβρικών ψηφιακών συστημάτων (Geogebra).

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΡΤΕΛΑΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ: https://photodentro.edu.gr/lor/r/8521/4268

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΦΥΣΙΚΟΥ ΠΟΡΟΥ: https://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/4268

ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗ ΒΑΘΜΙΔΑ / ΕΠΙΠΕΔΟ: δημοτικό

ΤΥΠΙΚΟ ΕΥΡΟΣ ΗΛΙΚΙΑΣ: 9-12

ΓΛΩΣΣΑ ΣΤΟΧΕΥΟΜΕΝΟΥ ΚΟΙΝΟΥ: ελληνικά

ΤΥΠΟΣ ΔΙΑΔΡΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ: ενεργό/διαδραστικό

ΤΥΠΟΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΥ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ: μικροπείραμα, διερεύνηση

ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ: γνωστική προσέγγιση > διερευνητική μάθηση

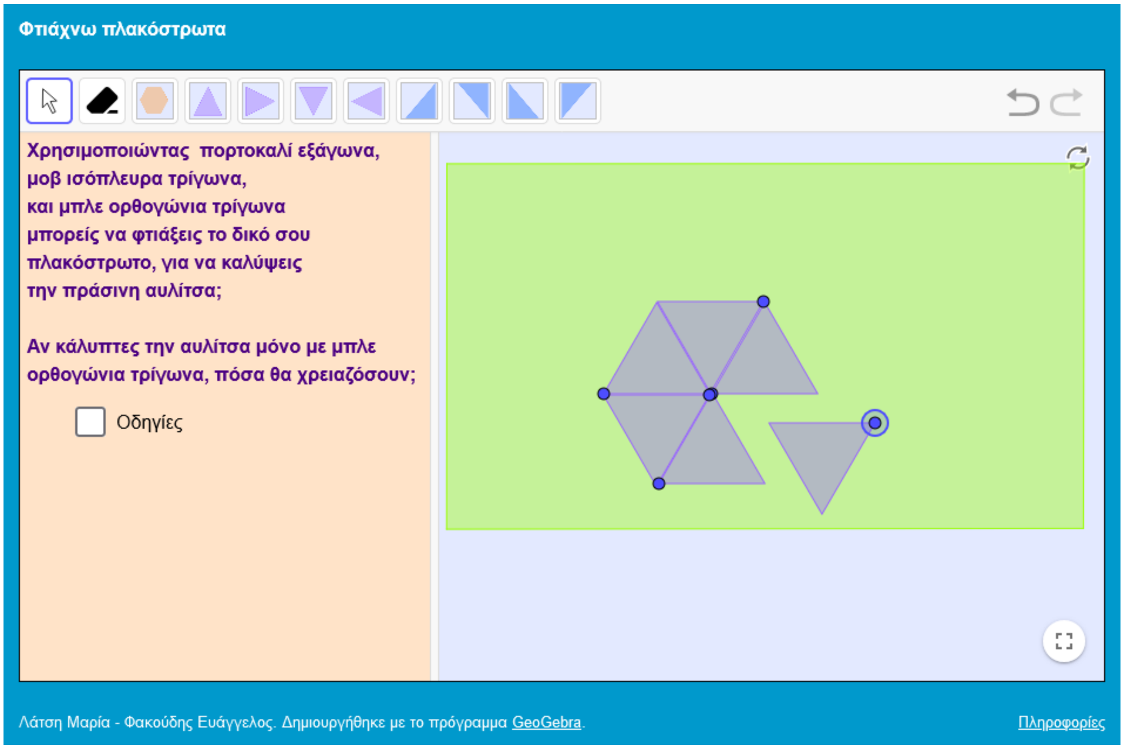
γνωστική προσέγγιση > επίλυση προβλήματος

ΣΥΛΛΟΓΕΣ ΟΠΟΥ ΕΜΦΑΝΙΖΕΤΑΙ: Μαθηματικά Δημοτικού

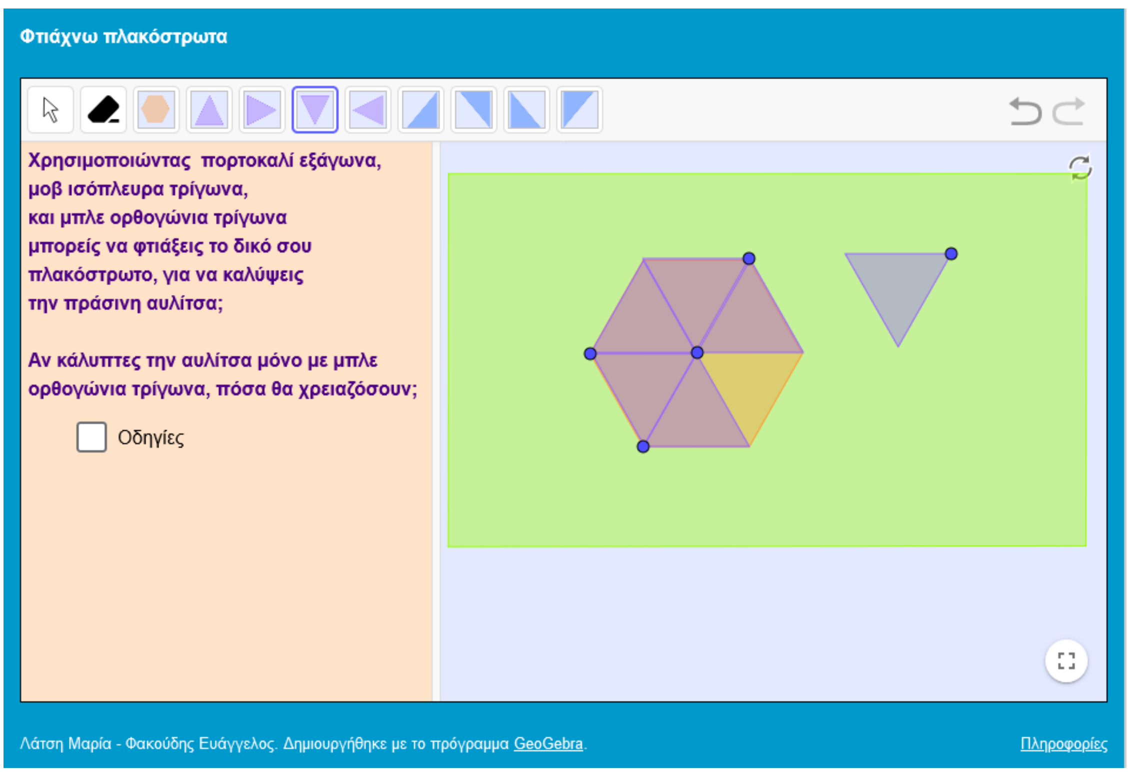
ΣΦΡΑΓΙΔΕΣ ΠΟΙΟΤΗΤΑΣ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟΥ: ΙΤΥΕ (ΨΗΦΙΑΚΟ ΣΧΟΛΕΙΟ)

ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΣ ΣΤΟΧΟΣ: γνωστικός

Δημιουργία: Μαρία Λάτση [ΙΤΥΕ], Βαγγέλης Φακούδης [ΙΤΥΕ]



Εικόνα 2: Σύνθεση κανονικού εξαγώνου από ισόπλευρα τρίγωνα



Εικόνα 3: Ανάλυση κανονικού εξαγώνου σε ισόπλευρα τρίγωνα

8ο μάθημα: Δραστηριότητα του ιστορικού κειμένου(2 ώρες)

Διδακτικοί στόχοι:

- Κατασκευή δύο ημι-προμαχώνων από ισόπλευρο τρίγωνο
- Ολοκλήρωση οχυρού

Αναλυτικά: Οι στόχοι της δραστηριότητας αναφέρονται παραπάνω, στο κεφάλαιο: "Σκοποί και στόχοι του κατασκευαστικού προγράμματος του Jean Errard"

9ο μάθημα: Τελική Αξιολόγηση (2 ώρες)

Διδακτικοί στόχοι:

- Δημιουργία οδηγιών κατασκευής εξαγωνικού οχυρού με προμαχώνες.
- Χρήση μαθηματικών εννοιών.
- Σύγκριση των προσδοκώμενων μαθησιακών στόχων με τα τελικά αποτελέσματα.

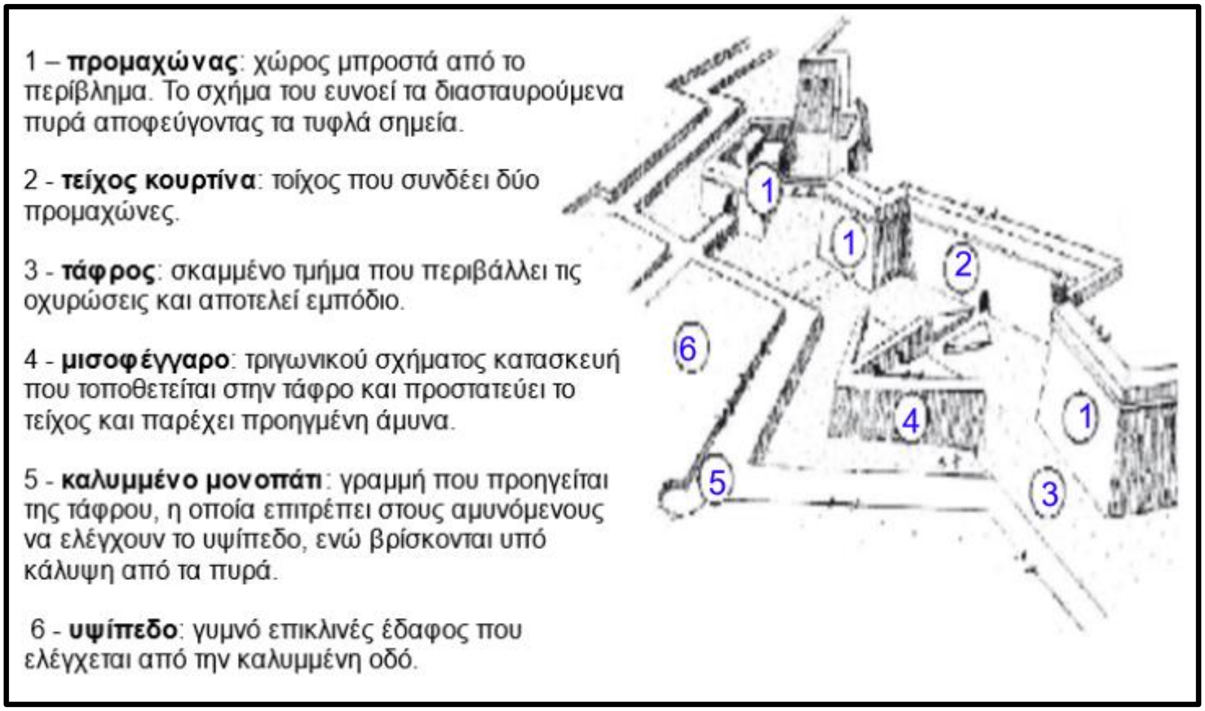
7. Αποτελέσματα

7.1 Αποτελέσματα μαθήματος εισαγωγής

Στο 1ο μάθημα, από την επεξεργασία της παρουσίασης σχετικά με το έργο του Jean Errard για τις οχυρώσεις (Παράρτημα 1), οι μαθητές κλήθηκαν να εντοπίσουν σε ένα φύλλο εργασίας τη βασική διαφορά μεταξύ των προμαχώνων των μεσαιωνικών οχυρών και των προμαχώνων των οχυρών του Jean Errard αλλά και τη ανάγκη εξέλιξής τους για την εξάλειψη τυφλών σημείων γύρω από τους προμαχώνες (Παράρτημα 2). Οι μαθητές κατάλαβαν τη διαφορά τους και εντόπισαν το τυφλό σημείο των μεσαιωνικών προμαχώνων (Εικόνα 4).

Εικόνα 4: Αναγνώριση τυφλού σημείου στον μεσαιωνικό προμαχώνα

Στο ίδιο φύλλο εργασίας ζητήθηκε στους μαθητές να αντιστοιχίσουν, σε ένα σχεδιάγραμμα οχυρού με προμαχώνες, τα σημεία της εικόνας με τις αριθμημένες έννοιες και τους ορισμούς τους που δίνονται και τα περιγράφουν (Εικόνα 5). Οι μαθητές κατάφεραν να αριθμήσουν σωστά τα σημεία της εικόνας.



Εικόνα 5: Εννοιολογική άσκηση - γλωσσάρι

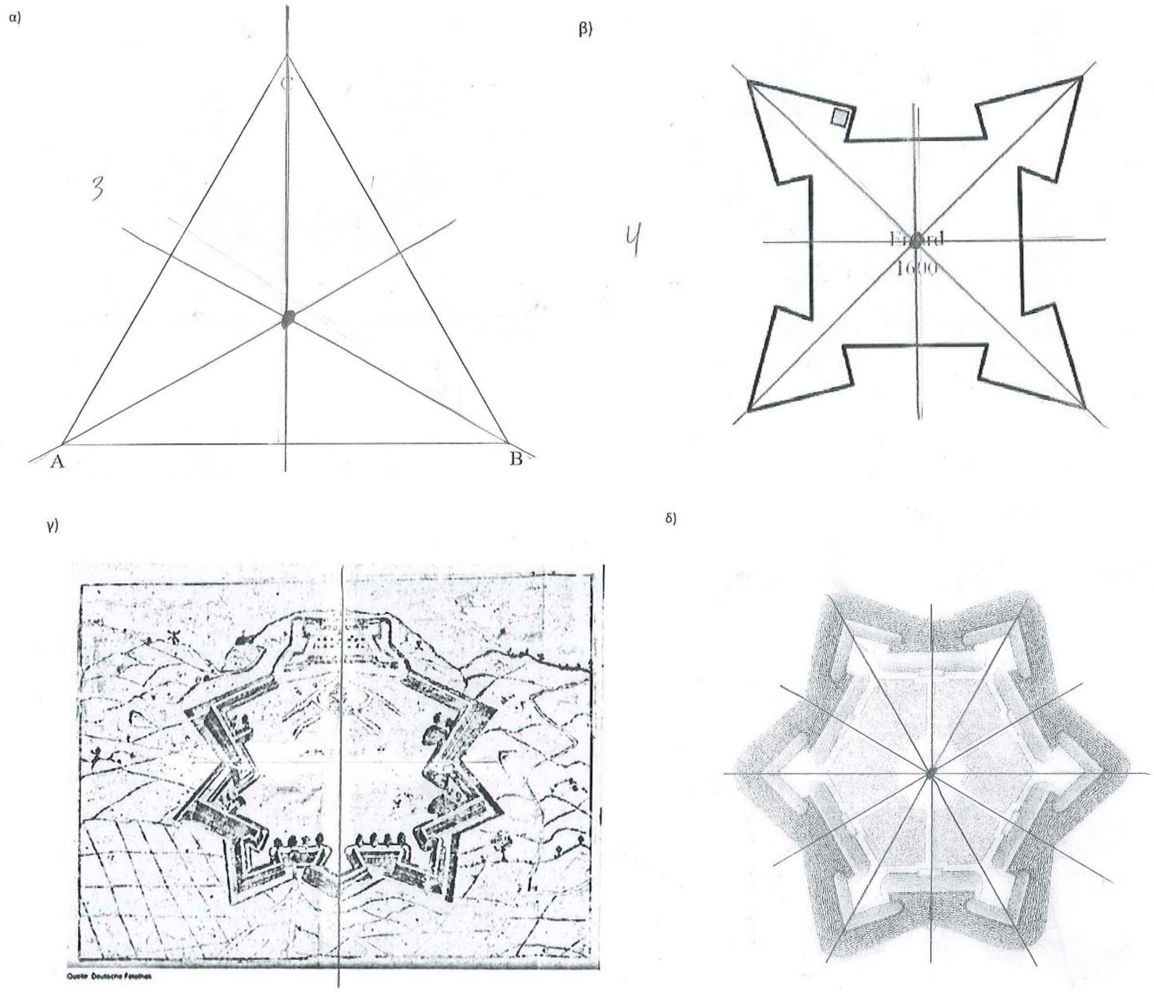
7.2 Αποτελέσματα (προαπαιτούμενων) μαθημάτων

Στα μαθήματα 2, 3, 4, και 5 της παρέμβασης οι μαθητές ολοκλήρωσαν τις δραστηριότητες (εργασίες και ασκήσεις) των κεφαλαίων 27, 28, 29 και 30 αντίστοιχα από το Βιβλίο Μαθητή και το Τετράδιο Εργασιών των Μαθηματικών της Δ΄ τάξης. Οι μαθητές κατανόησαν τις νέες μαθηματικές έννοιες αλλά αντιμετώπισαν δυσκολίες στον χειρισμό των γεωμετρικών οργάνων, όπως στην τοποθέτηση του γνώμονα και του μοιρογνωμονίου πάνω στην ευθεία για τον έλεγχο και τη δημιουργία ορθής γωνίας και στη χρήση του διαβήτη. Έτσι, δόθηκε περισσότερος χρόνος (1 διδακτική ώρα) στους μαθητές μετά από κάθε μάθημα για την εξοικείωσή τους με τα γεωμετρικά όργανα. Αυτός ο χρόνος ήταν αρκετός για να ξεπεράσουν οι μαθητές τις δυσκολίες τους.

7.3 Αποτελέσματα μαθήματος συμμετρίας

Στο 6ο μάθημα, για τη συμμετρία, δόθηκε στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας (Παράρτημα 6) με ασκήσεις. Οι μαθητές δεν ήταν εξοικειωμένοι με την έννοια της συμμετρίας, καθώς στην Γ΄ τάξη είχαν προσπεράσει το αντίστοιχο κεφάλαιο. Για αυτό το λόγο, πριν το φύλλο εργασίας, αφιερώθηκε μια διδακτική ώρα για την έννοια της συμμετρίας μέσα από τις δραστηριότητες (εργασίες και ασκήσεις) του κεφαλαίου 34 του Βιβλίου Μαθητή και του Τετραδίου Εργασιών των Μαθηματικών της Δ΄ τάξης. Έπειτα οι μαθητές προχώρησαν στο φύλλο εργασίας. Στην πρώτη άσκηση (Εικόνα 6), οι μαθητές χάραξαν τους άξονες συμμετρίας στα σχήματα που τους δόθηκαν:

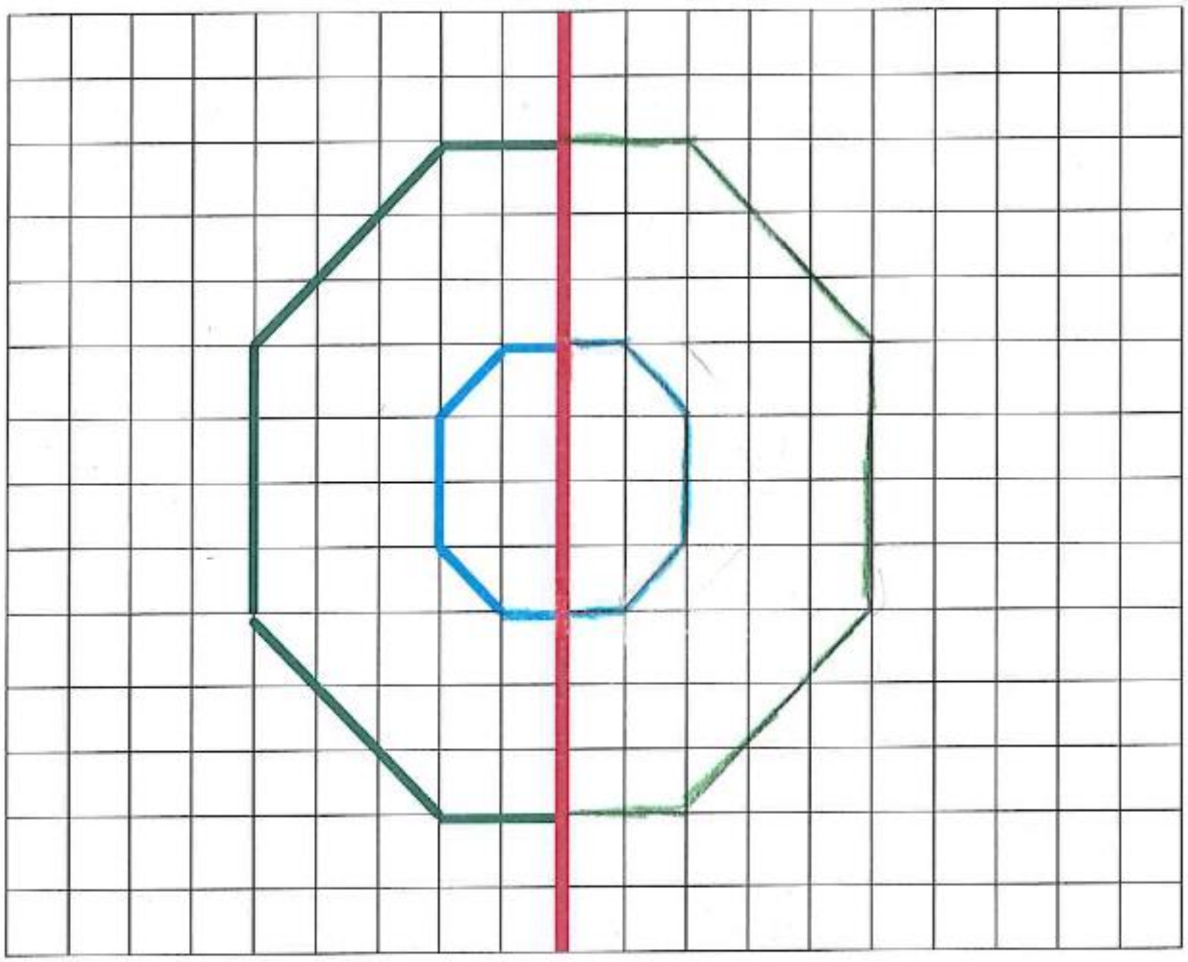
- ισόπλευρο τρίγωνο
- κάτοψη τετράγωνου οχυρού με προμαχώνες
- χάρτης οχυρού
- κάτοψη του εξαγωνικού οχυρού με προμαχώνες του Jean Errard



Εικόνα 6: Χάραξη αξόνων συμμετρίας

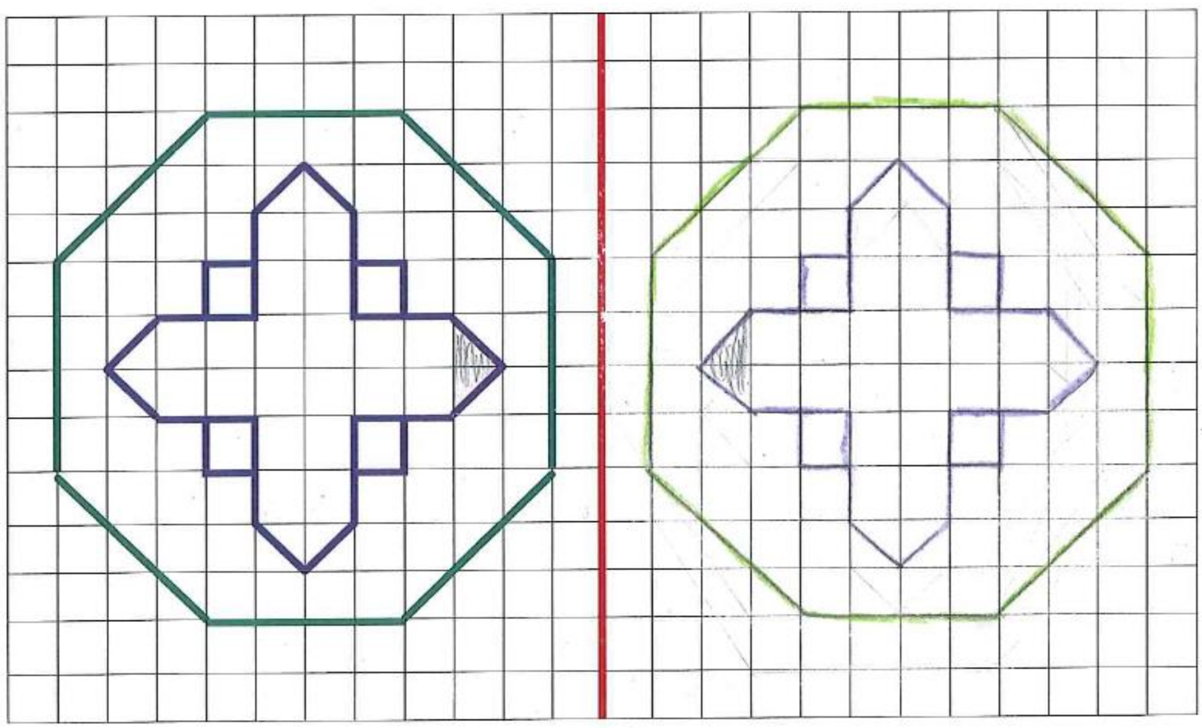
Σε αυτήν την άσκηση κάποιοι μαθητές παρουσίασαν δυσκολία στην εύρεση και των τριών αξόνων συμμετρίας του ισόπλευρου τριγώνου (Εικόνα 6, σχήμα α). Κατά τη συζήτηση στην τάξη ακούστηκαν οι απαντήσεις: α) ένας άξονας συμμετρίας και β) τρεις άξονες συμμετρίας. Οι μαθητές συμφώνησαν στην ορθότητα της δεύτερης απάντησης, με βασικό επιχείρημα την άποψη ενός μαθητή: "μπορούμε να φέρουμε έναν άξονα συμμετρίας από κάθε κορυφή του τριγώνου, άρα έχουμε τρεις". Πάλι - παρόλο που οι μαθητές δέχτηκαν την απάντηση των τριών αξόνων - δυσκολεύονταν με τη σωστή τοποθέτηση του γνώμονα για τη χάραξη αυτών. Το εμπόδιο ξεπεράστηκε με βοήθεια από τον δάσκαλο, όπου ανέφερε στους μαθητές τη δυνατότητα για περιστροφή του σχήματος/της σελίδας.

Στη δεύτερη άσκηση (Εικόνα 7), οι μαθητές συμπλήρωσαν το σχήμα που τους δόθηκε (μισό οκτάγωνο) ως προς τον άξονα συμμετρίας (κόκκινη γραμμή). Οι μαθητές συμπλήρωσαν το σχήμα με μοναδική διαφοροποίηση κάποιων αποτελεσμάτων να είναι η χρήση μολυβιού αντί χρωμάτων. Οι μαθητές επιχειρηματολόγησαν πως δε θεώρησαν απαραίτητη τη χρήση χρωμάτων για τη δημιουργία του συμμετρικού σχήματος, όμως, μετά από συζήτηση μεταξύ τους, συμφώνησαν πως τα χρώματα επηρεάζουν τη συμμετρία και ότι έπρεπε να τα είχαν χρησιμοποιήσει.



Εικόνα 7: Συμπλήρωση σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας

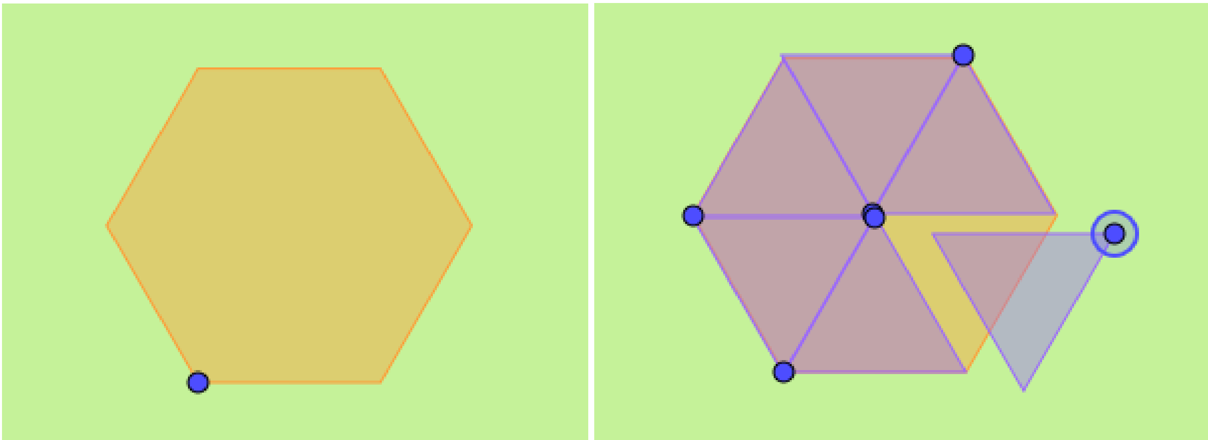
Στην τρίτη άσκηση (Εικόνα 8), οι μαθητές σχεδίασαν το συμμετρικό επίπεδο σχήμα ως προς τον άξονα συμμετρίας (κόκκινη γραμμή) που τους δόθηκε. Κάποιοι μαθητές δεν διατήρησαν τα χρώματα του αρχικού σχήματος κατά τον σχεδιασμό του συμμετρικού του, αφού δεν τα θεώρησαν απαραίτητο στοιχείο της άσκησης και εργάστηκαν μόνο με μολύβι. Επίσης, κάποιοι μαθητές, ενώ σχεδίασαν σωστά το συμμετρικό σχήμα, δε διατήρησαν την ίδια απόσταση από τον άξονα συμμετρίας. Τέλος, κάποιοι μαθητές μετακίνησαν το συμμετρικό σχήμα κατά μία θέση προς τα πάνω ή προς τα κάτω σε σχέση με το αρχικό. Ακολούθησε συζήτηση στην τάξη για την αντιμετώπιση των δυσκολιών των μαθητών που παρουσιάστηκαν με κύριο εμπόδιο την έλλειψη εμπειρίας από την προηγούμενη τάξη.



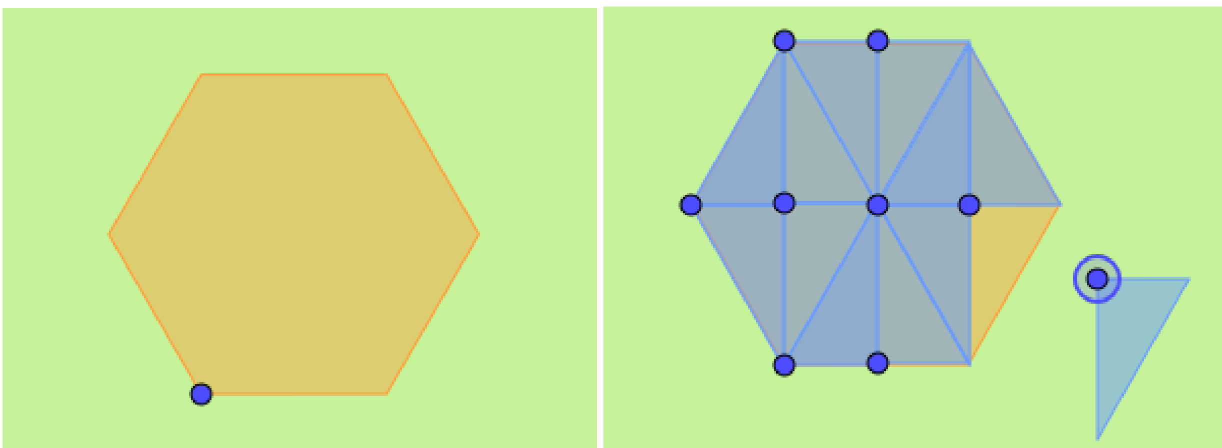
Εικόνα 8: Σχεδίαση συμμετρικού επίπεδου σχήματος ως προς άξονα συμμετρίας

7.4 Αποτελέσματα δραστηριότητας από το Φωτόδεντρο

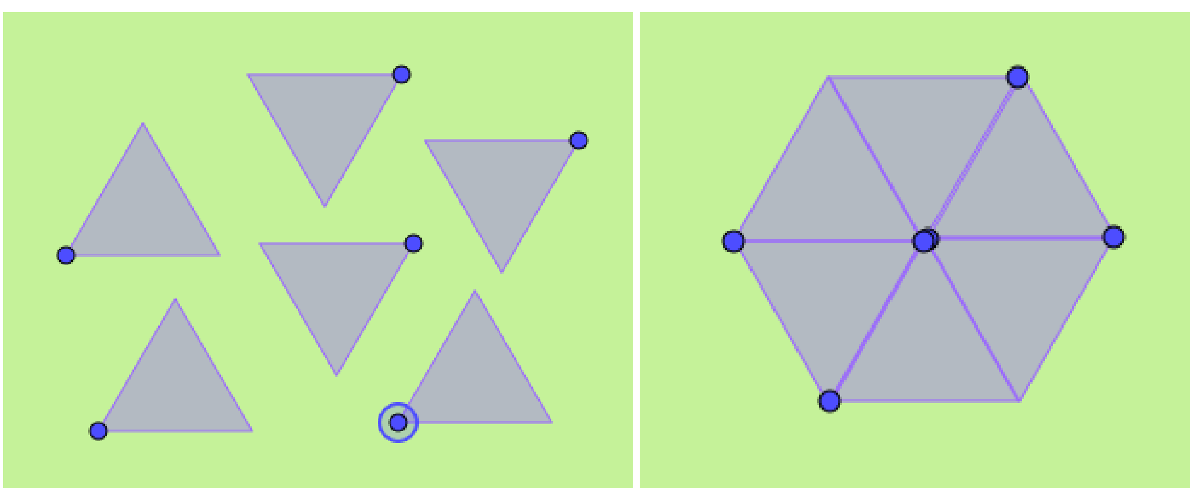
Στο 7ο μάθημα, από το μικροπείραμα του Φωτόδενδρου για την ανάλυση / σύνθεση κανονικού εξαγώνου σε / από ισόπλευρα ή ορθογώνια τρίγωνα, οι μαθητές εργάστηκαν σε δυάδες και κατάφεραν την ανάλυση και τη σύνθεση του κανονικού εξάγωνου σύμφωνα με τις οδηγίες κάθε φορά.



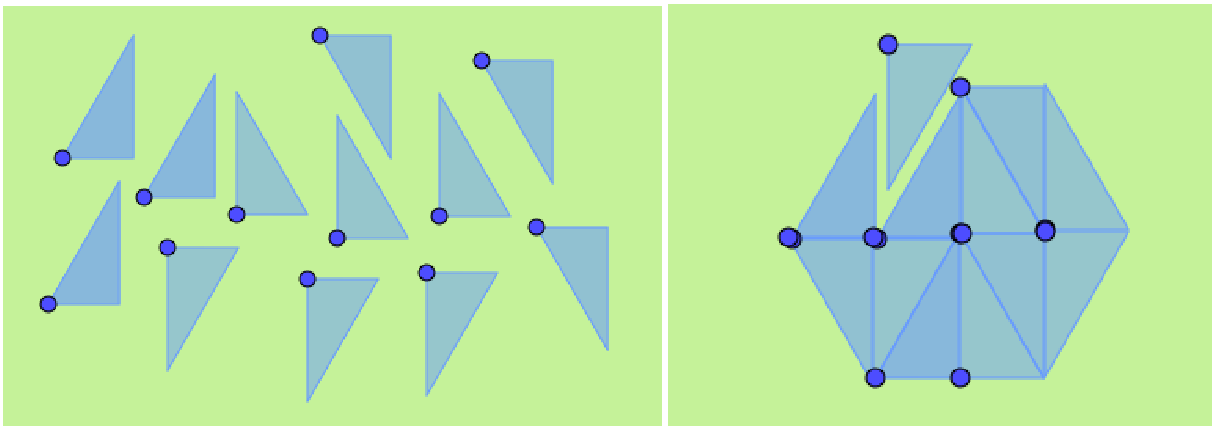
Εικόνα 9: Ανάλυση κανονικού εξαγώνου σε ισόπλευρα τρίγωνα



Εικόνα 10: Ανάλυση κανονικού εξαγώνου σε ορθογώνια τρίγωνα



Εικόνα 11: Σύνθεση κανονικού εξαγώνου από ισόπλευρα τρίγωνα

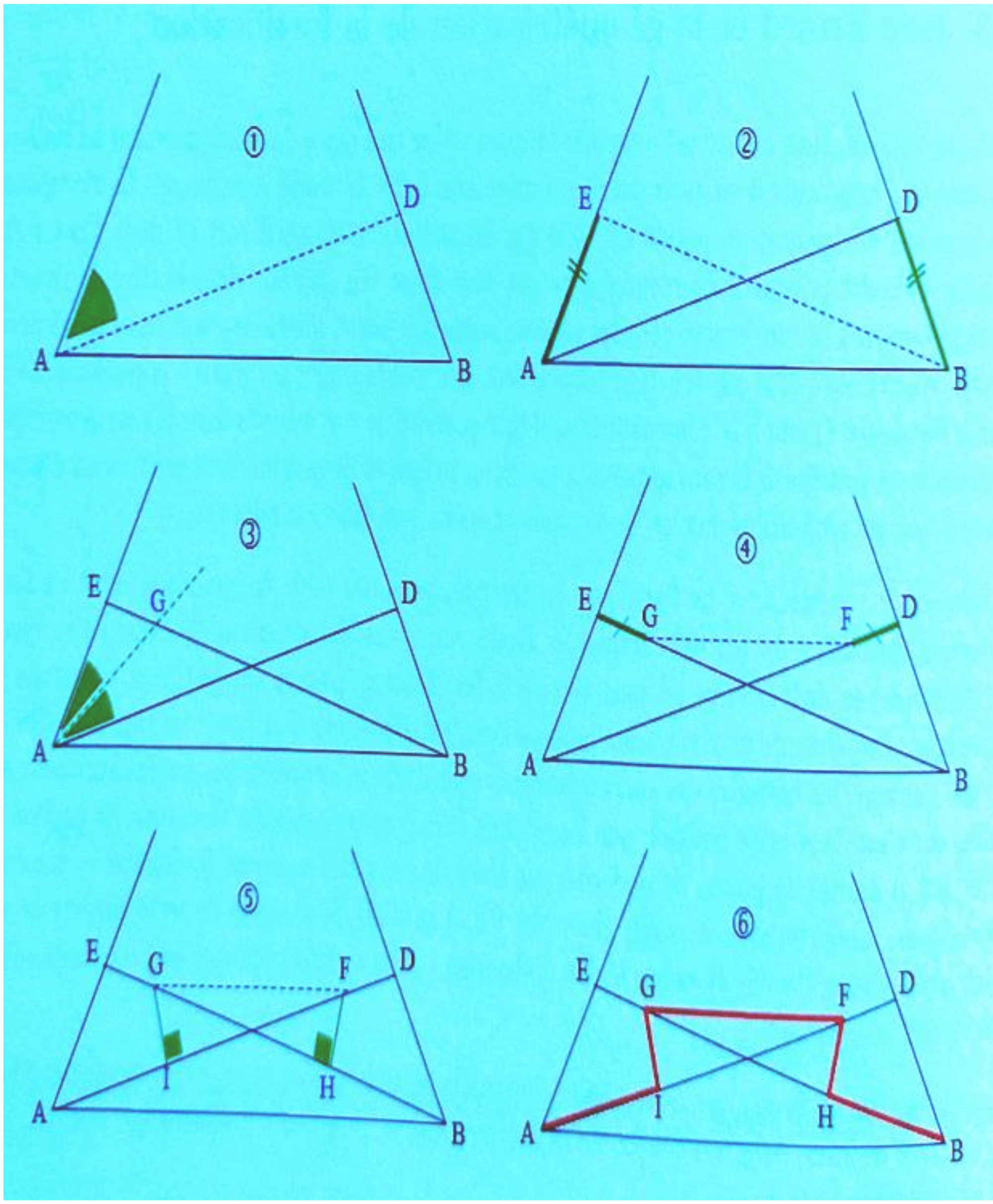


Εικόνα 12: Σύνθεση κανονικού εξαγώνου από ορθογώνια τρίγωνα

Δεν υπήρξαν δυσκολίες κατά τις δραστηριότητες του μικροπειράματος παρόλο που οι μαθητές δεν είχαν ιδιαίτερη εξοικείωση με τέτοιου είδους εφαρμογές. Μάλιστα, σε ελάχιστο χρόνο κατάφεραν να συνηθίσουν το τρόπο χρήσης της συγκεκριμένης εφαρμογής.

7.5 Αποτελέσματα κατασκευής εξαγωνικού οχυρού με προμαχώνες

Στο 8ο μάθημα, οι μαθητές εργάστηκαν ατομικά για την κατασκευή εξαγωνικού οχυρού με προμαχώνες με βάση το πρόγραμμα του Jean Errard (Εικόνα 13). Αρχικά, ο δάσκαλος εξήγησε τα βήματα, το σκεπτικό, το λεξιλόγιο και το υλικό που χρησιμοποιήθηκε, ενώ παράλληλα έδειξε την κατασκευή μπροστά στους μαθητές στον πίνακα. Χρησιμοποιήθηκε η έκφραση "ημί-ορθή γωνία", αλλά οι μαθητές γνώριζαν το μέτρο των 90° για την ορθή γωνία και την κατασκευή γωνιών, μικρότερων από 90°, με χρήση μοιρογνωμονίου. Ήξεραν, επίσης, να διχοτομούν γωνίες με τη μέθοδο της αναδίπλωσης. Έτσι, δεν δόθηκαν στους μαθητές έτοιμες πρότυπες γωνίες (45° και 22,5°), όπως προτείνεται στο πρόγραμμα του Jean Errard.



Εικόνα 13: Το πρωτόκολλο κατασκευής έξι βημάτων του Jean Errard (Metin, 2018)

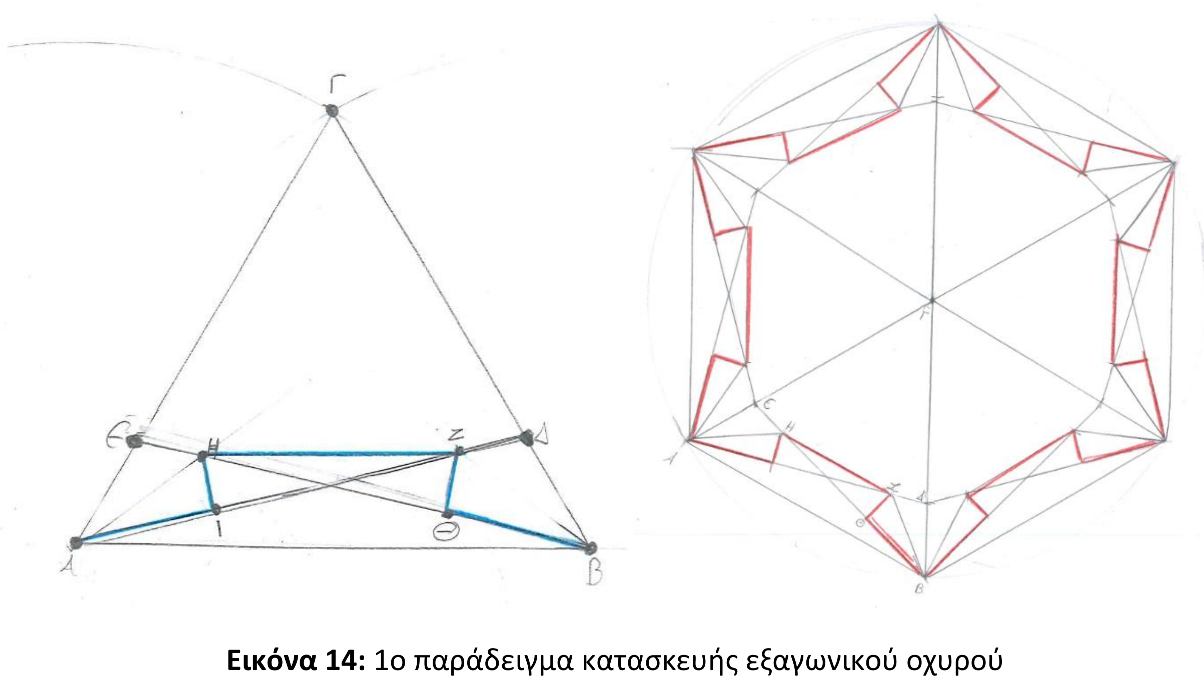
Οι μαθητές κατάφεραν την κατασκευή δύο ημι-προμαχώνων από ισόπλευρο τρίγωνο και έπειτα προχώρησαν στην κατασκευή ολόκληρου του εξαγωνικού οχυρού. Όλοι οι μαθητές εργάστηκαν με τον ίδιο τρόπο για την κατασκευή του πρότυπου τριγώνου, αφού ενήργησαν σύμφωνα με τις οδηγίες κατασκευής που τους δόθηκαν.

Οι μαθητές δημιούργησαν ένα πρότυπο ισόπλευρο τρίγωνο με δύο ημι-προμαχώνες. Σχεδίασαν με τον κανόνα ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και χάραξαν με τον διαβήτη δύο ημικύκλια με ακτίνα ΑΒ και κέντρα τα σημεία Α και Β. Στο σημείο τομής (Γ) των δύο ημικύκλιων σχημάτισαν το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Μετά, σχεδίασαν τη γωνία ΓΑΔ (45 μοιρών) με χρήση της πρότυπης γωνίας του ισοσκελούς γνώμονα και τη γωνία ΓΒΕ (45 μοιρών) μεταφέροντας με τον διαβήτη το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΕ στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ ώστε να σχηματιστεί το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ=ΑΕ. Ύστερα, με το μοιρογνωμόνιο, διχοτόμησαν τη γωνία ΓΑΔ. Το σημείο τομής της διχοτόμου με το ΒΕ το ονόμασαν Η, ώστε να δημιουργηθεί το ευθύγραμμο τμήμα ΕΗ, και μετέφεραν με τον διαβήτη το ΕΗ στο ΑΔ ώστε να δημιουργηθεί το ΔΖ=ΕΗ. Έπειτα, χάραξαν το ευθύγραμμο τμήμα ΗΖ (κουρτίνα). Τέλος, σχεδίασαν με τον γνώμονα τις αποστάσεις των σημείων Η και Ζ στα απέναντι ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΕ αντίστοιχα. Έτσι, δημιούργησαν την τεθλασμένη γραμμή ΑΙΗΖΘΒ, την οποία τόνισαν με μπλε ή κόκκινο χρώμα.

Διαφορετικός ήταν ο τρόπος κατασκευής του εξαγωνικού οχυρού από τους μαθητές. Ακολουθούν τέσσερα παραδείγματα μαθητριών που αντιπροσωπεύουν όλους τους τρόπους που εργάστηκαν οι μαθητές.

Παράδειγμα 1 (Εικόνα 14)

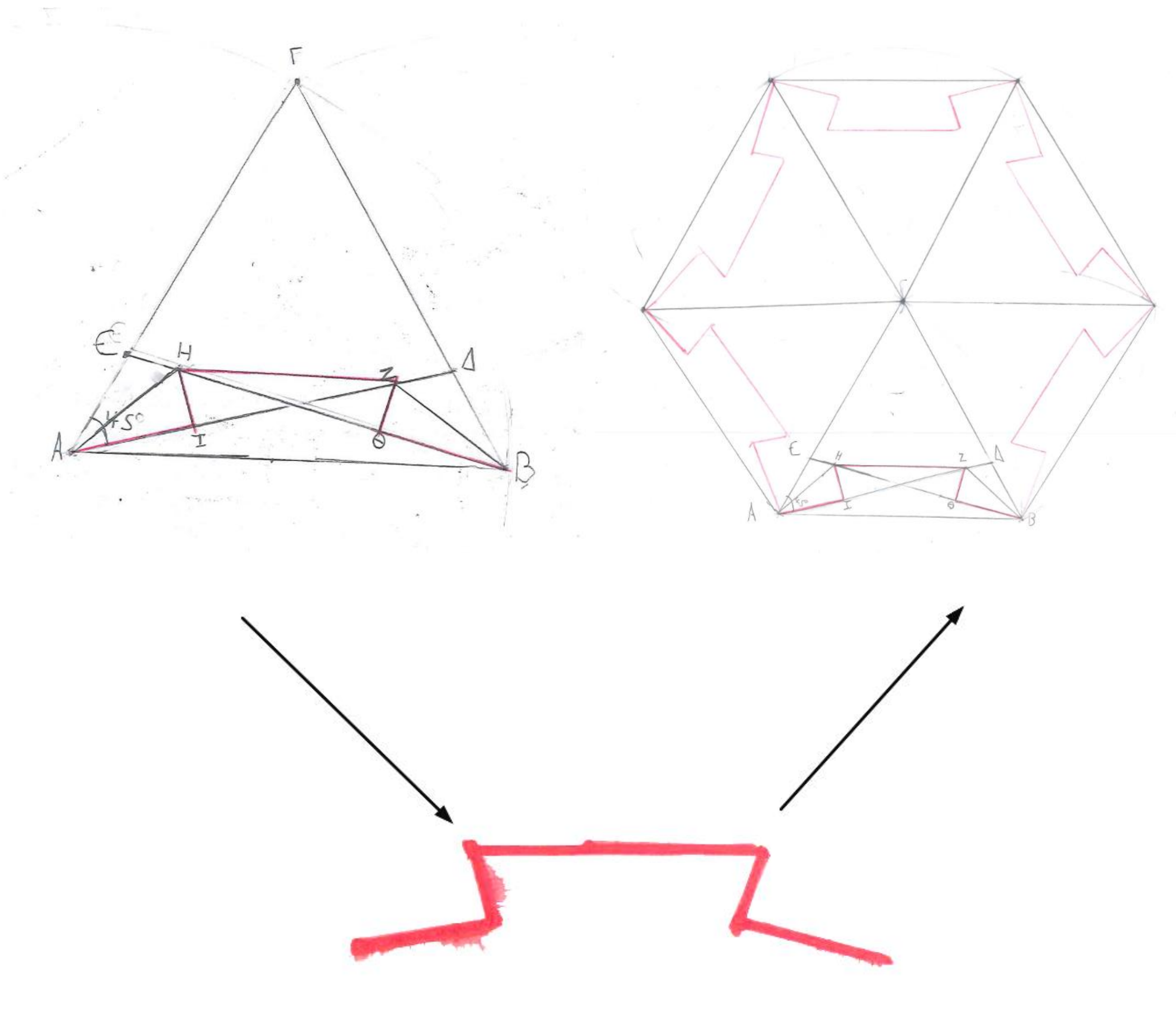
Για τη δημιουργία του εξαγωνικού οχυρού με προμαχώνες, η μαθήτρια σχεδίασε αρχικά έναν κύκλο. Με το μήκος της ακτίνας του κύκλου σχεδίασε το εγγεγραμμένο σε αυτόν κανονικό εξάγωνο. Χώρισε το εξάγωνο σε 6 ισόπλευρα τρίγωνα χαράζοντας τις διαγωνίους του (ανάλυση κανονικού εξαγώνου σε ισόπλευρα τρίγωνα). Σε ένα τρίγωνο σχεδίασε από την αρχή την τεθλασμένη γραμμή ΑΙΗΖΘΒ, όπως αναφέρθηκε προηγουμένως. Στα υπόλοιπα 5 ισόπλευρα τρίγωνα σχεδίασε τις τεθλασμένες γραμμές μεταφέροντας όλα τα ευθύγραμμα τμήματα του πρότυπου τριγώνου με τον διαβήτη.



Εικόνα 14: 1ο παράδειγμα κατασκευής εξαγωνικού οχυρού

Παράδειγμα 2 (Εικόνα 15)

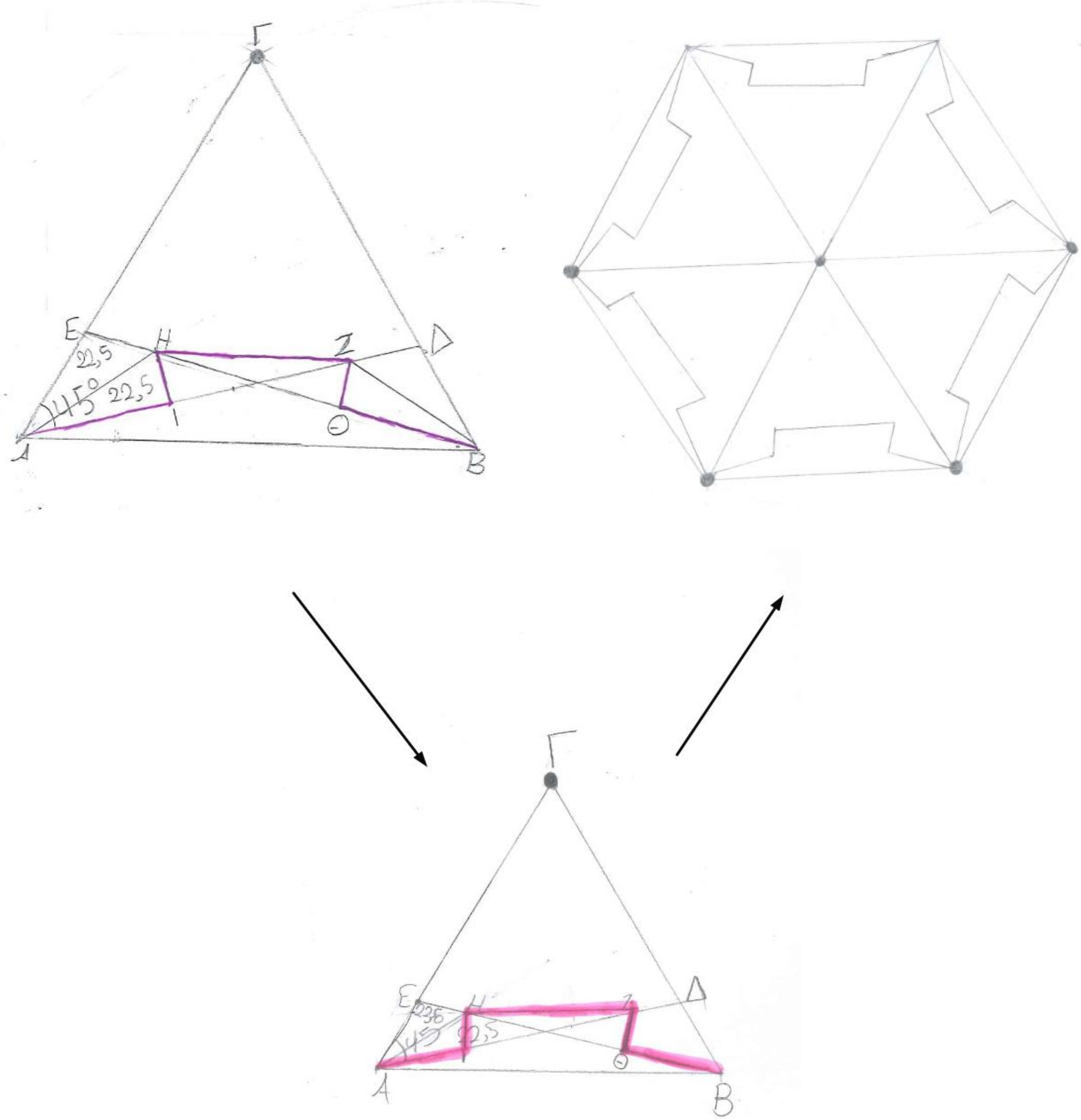
Η μαθήτρια του παραδείγματος δημιούργησε ένα πρότυπο ισόπλευρο τρίγωνο με δύο ημι-προμαχώνες και στη συνέχεια, με χρήση του διαβήτη, κατασκεύασε το κανονικό εξάγωνο δημιουργώντας ισόπλευρα τρίγωνα εφαπτόμενα μεταξύ τους (σύνθεση κανονικού εξαγώνου από ισόπλευρα τρίγωνα). Στη συνέχεια, πήρε ένα λευκό φύλλο χαρτί, το τοποθέτησε πάνω από το πρότυπο τρίγωνο και ξεπατίκωσε την τεθλασμένη γραμμή ΑΙΗΖΘΒ. Μετά, τοποθέτησε το χαρτί με την ξεπατικωμένη τεθλασμένη γραμμή κάτω από το χαρτί με το εξάγωνο και ξεπατίκωσε την ΑΙΗΖΘΒ σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο. Έτσι ολοκληρώθηκε το εξαγωνικό οχυρό με προμαχώνες.



Εικόνα 15: 2ο παράδειγμα κατασκευής εξαγωνικού οχυρού

Παράδειγμα 3 (Εικόνα 16)

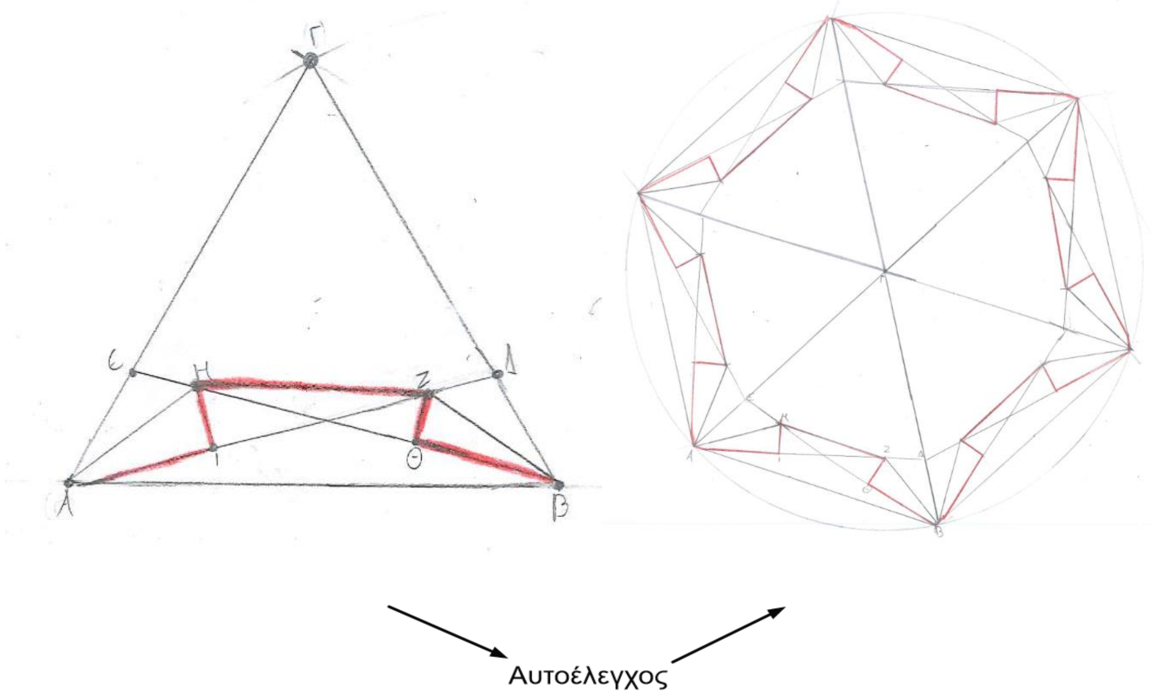
Σε αυτό παράδειγμα η μαθήτρια εργάστηκε με το ίδιο τρόπο, όπως η μαθήτρια του προηγούμενου παραδείγματος, μέχρι τη δημιουργία του εξαγώνου (σύνθεση κανονικού εξαγώνου από ισόπλευρα τρίγωνα). Έπειτα, πήρε το φύλλο χαρτιού όπου είχε κατασκευάσει το ισόπλευρο τρίγωνο με δύο ημι-προμαχώνες και φώτισε την τεθλασμένη γραμμή ΑΙΗΖΘΒ. Στη συνέχεια, τοποθέτησε το πρότυπο τρίγωνο κάτω από κάθε ένα τρίγωνο του εξαγώνου και ξεπατίκωσε την ΑΙΗΖΘΒ σε όλα τρίγωνα.



Εικόνα 16: 3ο παράδειγμα κατασκευής εξαγωνικού οχυρού

Παράδειγμα 4 (Εικόνα 17)

Σε αυτήν την περίπτωση κατασκευής οχυρού με προμαχώνες, η μαθήτρια σχεδίασε έναν κύκλο, με το μήκος της ακτίνας του κύκλου σχεδίασε το εγγεγραμμένο σε αυτόν κανονικό εξάγωνο και χώρισε το εξάγωνο σε 6 ισόπλευρα τρίγωνα χαράζοντας τις διαγωνίους του (ανάλυση κανονικού εξαγώνου σε ισόπλευρα τρίγωνα). Έπειτα, χρησιμοποιώντας το πρότυπο τρίγωνο με δύο ημι-προμαχώνες για αυτοέλεγχο, επανέλαβε σε κάθε τρίγωνο όλα τα βήματα κατασκευής των δύο ημι-προμαχώνων από την αρχή.



Εικόνα 17: 4ο παράδειγμα κατασκευής εξαγωνικού οχυρού

7.6 Αποτελέσματα τελικής εργασίας/αξιολόγησης

Στο 9ο μάθημα, δόθηκε στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας (Παράρτημα 5) στο οποίο οι μαθητές έπρεπε να γράψουν τις οδηγίες κατασκευής του εξαγωνικού οχυρού του Jean Errard. Τα αποτελέσματα των μαθητών ελέγχθηκαν ως προς τη σωστή σειρά των οδηγιών και ως προς τη γλώσσα που χρησιμοποιήθηκε στις λεκτικές περιγραφές των μαθητών με σκοπό να εντοπιστούν οι μαθηματικές έννοιες που αναφέρονται στο κατασκευαστικό πρόγραμμα του Jean Errard. Οι εργασίες των μαθητών παρουσιάζονται αυτούσιες στο Παράρτημα 7.

Στον παρακάτω πίνακα (Πίνακας 1) έχουν συγκεντρωθεί τα αποτελέσματα των μαθητών, από το τελευταίο μάθημα της παρέμβασης, για την κατασκευή εξαγωνικού οχυρού με προμαχώνες. Οι μαθηματικές έννοιες που αναφέρονται στον πίνακα είναι: το ευθύγραμμο τμήμα, το ισόπλευρο τρίγωνο, ο κύκλος, η απόσταση, η γωνία και η μισή γωνία. Στη χρήση του διαβήτη περιλαμβάνονται: η χάραξη κύκλου, η χάραξη ισόπλευρου τριγώνου και η μεταφορά ευθύγραμμου τμήματος. Παρακάτω ακολουθεί επεξήγηση των συμβόλων του πίνακα:

- Μ = Μαθηματική γλώσσα
- Κ = Καθημερινή γλώσσα
- Σ = Συμβολική γλώσσα
- Π 45 = Πρότυπη γωνία 45 μοιρών από ισοσκελή γνώμονα
- Μ 45 = Κατασκευή γωνίας 45 μοιρών με μοιρογνωμόνιο
- Μ 22,5 = Κατασκευή γωνίας 22,5 μοιρών με μοιρογνωμόνιο

Πίνακας 1. Αποτελέσματα μαθητών από την κατασκευή του οχυρού του Jean Errard

Μαθητές Α/Α	Οδηγίες	Γλώσσα			Μαθημα-τικές έννοιες	Χρήση διαβήτη	Δημιουργία γωνιών			Δημιουργία οχυρού	
		Μ	Κ	Σ			Π 45	Μ 45	Μ 22,5	**Α**νάλυση / **Σ**ύνθεση	**Ε**πανάληψη / **Α**ντιγραφή
1	✔	✔			✔	✔	✔		✔	**Σ**	**Α**
2	✔	✔		✔	✔	✔	✔		✔	**Α**	**Α**
3	✔	✔			✔	✔	✔		✔	**Α**	**Ε**
4	✔	✔			✔	✔	✔		✔	**Α**	**Ε**
5			✔			✔	✔		✔	**Α**	**Ε**
6	✔	✔			✔	✔	✔		✔	**Α**	**Ε**
7	✔	✔			✔	✔	✔		✔	**Α**	**Ε**
8	✔	✔	✔		✔	✔		✔	✔	**Σ**	**Ε**
9	✔	✔			✔	✔				**Σ**	**Α**
10		✔			✔	✔				**Σ**	**Ε**
11		✔				✔		✔		**Α**	**-**
12		✔								**Α**	**-**
13		✔	✔	✔	✔	✔	✔		✔	**Σ**	**Ε**
14			✔			✔	✔		✔	**Α**	**Ε**

Από τον πίνακα προκύπτει πως οι περισσότεροι μαθητές (8) έδωσαν σαφείς οδηγίες για την κατασκευή του εξαγωνικού οχυρού. Οι υπόλοιποι μαθητές (6) έδωσαν ασαφείς ή ελλιπείς οδηγίες. Από αυτούς, 2 μαθητές, με καταγωγή από Συρία και Αλβανία, έδωσαν ασαφείς οδηγίες λόγω ελλείμματος στην έκφραση της ελληνικής γλώσσας, ένας (1) μαθητής έδωσε ασαφείς και ελλιπείς οδηγίες λόγω απουσίας αναφορών σε απαραίτητες μαθηματικές έννοιες και απουσίας προσδιορισμών των ευθύγραμμων τμημάτων που εμπλέκονται στην κάθε οδηγία. Όσον αφορά στα είδη γλώσσας που χρησιμοποίησαν οι μαθητές, αξιοσημείωτο είναι το γεγονός πως πέρα από τη μαθηματική και την καθημερινή γλώσσα 2 μαθητές συνδύασαν και τη συμβολική γλώσσα για να περιγράψουν τις οδηγίες.

Όλοι οι μαθητές, εκτός από έναν, ο οποίος ανέφερε τον διαβήτη μόνο για τη δημιουργία κύκλου, μπόρεσαν να χρησιμοποιήσουν στις περιγραφές τον διαβήτη για δημιουργία κύκλου, ισόπλευρου τριγώνου και ευθύγραμμου τμήματος. Επίσης, οι περισσότεροι μαθητές χρησιμοποίησαν τον ισοσκελή γνώμονα (9 μαθητές) ή το μοιρογνωμόνιο (2 μαθητές) για την κατασκευή γωνίας 45 μοιρών, ενώ οι υπόλοιποι (3 μαθητές) δεν ανέφεραν τίποτα σχετικό με στις περιγραφές τους. Για την κατασκευή της μισής γωνίας (22,5 μοιρών), δηλαδή τη διχοτόμηση της γωνίας των 45 μοιρών, όλοι οι μαθητές που την ανέφεραν στις περιγραφές τους χρησιμοποίησαν το μοιρογνωμόνιο.

Η μέθοδος που προτίμησαν οι περισσότεροι μαθητές (9 μαθητές) για την κατασκευή του οχυρού ήταν η χάραξη κύκλου και ο σχεδιασμός, εγγεγραμμένου σε αυτόν, κανονικού εξαγώνου το οποίο ανέλυσαν/χώρισαν σε ισόπλευρα τρίγωνα, ενώ οι υπόλοιποι (5 μαθητές) προτίμησαν τον σχεδιασμό ισόπλευρου τριγώνου και τη σύνθεση εξαγώνου από διαδοχικά (εφαπτόμενα) ισόπλευρα τρίγωνα. Τέλος, για τη δημιουργία των δύο ημι-προμαχώνων μέσα στα ισόπλευρα τρίγωνα, η πλειοψηφία των μαθητών (9 μαθητές) επανέλαβε από την αρχή τα βήματα κατασκευής για κάθε τρίγωνο και τρεις (3) μαθητές χρησιμοποίησαν τη μέθοδο της ξεπατικωτούρας από πρότυπο τρίγωνο ή πρότυπη τεθλασμένη γραμμή. Δύο μαθητές δεν έκαναν αναφορά στις περιγραφές τους. Άξιο αναφοράς είναι πως - παρόλο που στη διάρκεια της παρέμβασης πραγματοποιήθηκε μάθημα με θέμα τη Συμμετρία - κανένας μαθητής στις περιγραφές του δεν αναφέρει τίποτα σχετικό με τη συμμετρία.

Παρακάτω παρουσιάζονται 2 παραδείγματα του τρόπου ανάλυσης των αποτελεσμάτων των περιγραφών των μαθητών για την κατασκευή του εξαγωνικού οχυρού με προμαχώνες. Μέσα από τις περιγραφές των μαθητών εντοπίζονται: η γλώσσα περιγραφής, οι μαθηματικές έννοιες και τα γεωμετρικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή, ο τρόπος κατασκευής των γωνιών (45 και 22,5 μοιρών) και ο τρόπος δημιουργίας του οχυρού (ανάλυση σε ισόπλευρα τρίγωνα ή σύνθεση από ισόπλευρα τρίγωνα). Επίσης, ελέγχεται η σειρά και η πληρότητα των οδηγιών που δίνουν οι μαθητές ως βήματα για την κατασκευή του οχυρού του Jean Errard.

Παράδειγμα 1 (Δείγμα 1, Παράρτημα 7)

Αυτο το σχημά είναι του Επταδ

- Για να το φτιάξεις πρώτα κανεις ένα ευθυγραμο τμήμα ΑΒ

- Τωρά φτιάξε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Για να το φτιάξεις πάρε τον διαβήτη και βάλ' τον πάνω στο ευθύγραμο τμήμα ΑΒ και κάνε και από τις δύο πλευρές μισό κύκλο. Εκεί που τέμνονται σημείωσαι το σημίο Γ. Σβήσε τις υπό-λυπες γραμμες και ένωσε το Γ με το Α και το Β.

- Μετα για να φτιάξεις το ευθύγραμο τμήμα ΑΔ πάνω στο ευθύγραμο τμήμα ΒΓ, πάρε τον γνώμονα και βαλ' τον πάνω στο ΑΓ, από τη γωνία που είναι 45° και ένωσε τη γραμμή από το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ στην γωνία Α και σημίωσε το σημίο Δ.

- Για να φτιάξεις το σημίο Ε στο ευθύγραμο τμήμα ΑΓ ισο μετο ΔΒ, πάρε τον διαβήτη και μέτρισε το ΔΒ. Χωρίς να το κουνίσεις βάλ' το στο ευθύγραμο τμήμα ΑΓ και σημίωσε το σημίο Ε.

Στην πρώτη σελίδα περιγραφής, η μαθήτρια:

- δίνει σαφείς οδηγίες και σε σωστή σειρά,
- χρησιμοποιεί μαθηματική γλώσσα,
- χρησιμοποιεί τις μαθηματικές έννοιες: ευθύγραμμο τμήμα, ισόπλευρο τρίγωνο, κύκλο, σημείο, γωνία,
- χρησιμοποιεί τον διαβήτη για τη δημιουργία ισόπλευρου τριγώνου και τη μεταφορά μήκους ευθύγραμμου τμήματος, τον (ισοσκελή) γνώμονα για τη σχεδίαση γωνίας 45 μοιρών.

• Μετά πρέπει να φτιάξεις το σημείο Η που να είναι το μισό της γωνίας Λ. Αν ξέρεις ότι η γωνία Λ είναι 45° τότε το μισό του είναι 22,5°. Για να το βρείς πάρε το μοιρογνωμόνιο, πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΛΔ και σημίωσε που είναι το 22,5°. Από το ευθύγραμμο τμήμα ΕΒ κάνε μια γραμμή έως το σημείο Λ και έτσι φτιάχνεις το ευθύγραμμο τμήμα ΗΛ.

• Τώρα φτιάξε το σημείο Ζ ίσο με το Η. Οπότε, πάρε τον διαβήτη και βάλτον πάνω ευθύγραμμο τμήμα ΕΗ. Χωρίς να το κουνήσεις, βάλτο πάνω στο σημείο Δ και εκεί που θα σημιώσεις θα είναι το σημείο Ζ.

• Κάνε την απόσταση απο το σημείο Η στο ευθύγραμμο τμήμα ΛΔ.

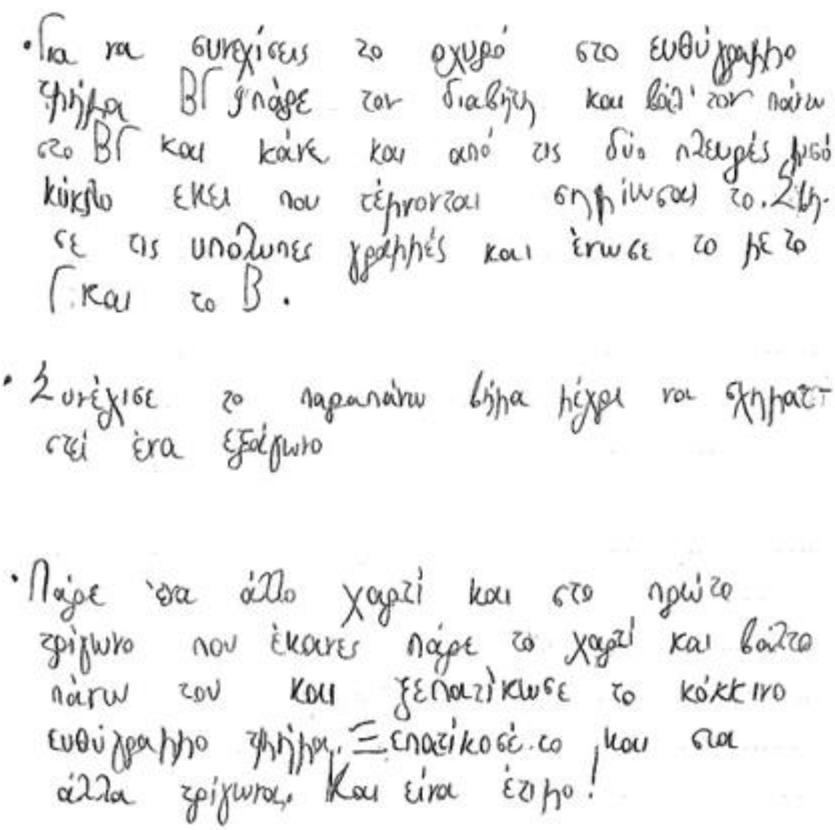
• Μετά κάνε την απόσταση απο το σημείο Ζ στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ.

• Τώρα ένωσε το σημείο Η με το σημείο Ζ και έτσι έφτιαξες το ευθύγραμμο τμήμα ΗΖ.

• Τέλος πέρασε με κόκκινο το ευθύγραμμο τμήμα ΛΙΗΖΘΒ

Στη δεύτερη σελίδα περιγραφής, η μαθήτρια:

- δίνει σαφείς οδηγίες και σε σωστή σειρά,
- χρησιμοποιεί μαθηματική γλώσσα,
- χρησιμοποιεί τις μαθηματικές έννοιες: γωνία, ευθύγραμμο τμήμα, απόσταση, σημείο,
- χρησιμοποιεί το μοιρογνωμόνιο για τη σχεδίαση γωνίας 22,5 μοιρών.


• Για να συνεχίσεις το οχυρό στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ πάρε τον διαβήτη και βάλ' τον πάνω στο ΒΓ και κάνε και από τις δύο πλευρές μισό κύκλο εκεί που τέμνονται σημείωσε το Ζ/Η. σε τις υπόλοιπες γραμμές και ένωσε το με το Γ και το Β.

• Συνέχισε το παραπάνω βήμα μέχρι να σχηματιστεί ένα εξάγωνο

• Πάρε ένα άλλο χαρτί και στο πρώτο τρίγωνο που έκανες πάρε το χαρτί και βάλτο πάνω του και ξεπατίκωσε το κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα. Ξεπατίκωσέ το και στα άλλα τρίγωνα. Και είναι έτοιμο!

Στην τρίτη σελίδα περιγραφής, η μαθήτρια:

- δίνει σαφείς οδηγίες και σε σωστή σειρά,
- χρησιμοποιεί μαθηματική γλώσσα,
- χρησιμοποιεί τις μαθηματικές έννοιες: ευθύγραμμο τμήμα, κύκλο, σημείο, τρίγωνο, εξάγωνο
- χρησιμοποιεί τον διαβήτη για τη δημιουργία ισόπλευρων τριγώνων που εφάπτονται μεταξύ τους μέχρι να συνθέσουν ένα εξάγωνο

Στην τελευταία οδηγία, περιγράφεται ο τρόπος κατασκευής των δύο ημι-προμαχώνων μέσα σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο του εξαγώνου. Η μαθήτρια χρησιμοποιεί τη μέθοδο ξεπατικωτούρας. Πρώτα κάνει ξεπατικωτούρα σε ένα φύλλο χαρτί την τεθλασμένη γραμμή ΑΙΗΖΘΒ και έπειτα κάνει ξεπατικωτούρα την ΑΙΗΖΘΒ από το χαρτί σε κάθε τρίγωνο του εξαγώνου ολοκληρώνοντας έτσι το οχυρό.

Στην περιγραφή δεν αναφέρονται: α) ο τρόπος χάραξης της απόστασης από σημείο στην απέναντι ευθεία και β) ο τρόπος ένωσης δύο σημείων. Θεωρήθηκαν αυτονόητα από τη μαθήτρια. Τέλος, λανθασμένα αναφέρεται η ΑΙΗΖΘΒ ως ευθύγραμμο τμήμα αντί για τεθλασμένη γραμμή.

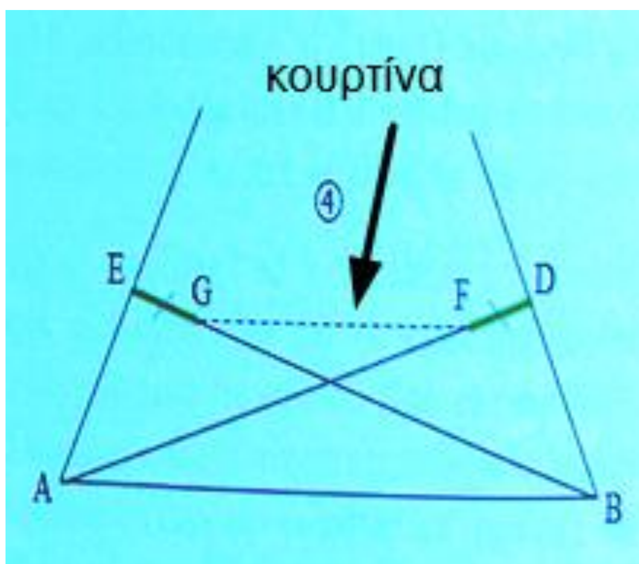
Παράδειγμα 2 (Δείγμα 4, Παράρτημα 7)

Εγώ αυτό που έφτιαξα είναι ένα εξάγωνο οχυρό. Για να το φτιάξεις κι εσύ πρέπει να: Παίρνεις το διαβήτη τον ανοίγεις κάνεις ένα κύκλο μετά με την ίδια ακτίνα δηλαδή το ίδιο άνοιγμα πας και χωρίζεις τον κύκλο σε μικρότερα έξι ισόπλευρα τρίγωνα. Μετά παίρνεις τον ισοσκελής γνώμονα και τον βάζεις στην ευθεία ΑΓ ; για να φτιάξεις γωνία 45° και για να το κάνω σωστά, ο ισοσκελής πρέπει να γίνει ένα με την ευθεία ΑΓ. Μετά παίρνω τον διαβήτη μετράω πόσο είναι το σημείο ΑΒ και μετά με το ίδιο άνοιγμα και σχηματίζω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ πάνω στην ευθεία ΑΓ. Μετά χωρίζω τη γωνία 45° στη μέση για να το κάνω παίρνω το μοιρογνωμόνιο το βάζω στο ΑΔ και φέρνω γωνία 22,5° η οποία τέμνει το ΒΕ στο σημείο Η. Μετά παίρνω το διαβήτη μετράω πόσο είναι το ΕΗ και φτιάχνω το ΖΔ. Μετά τραβάω την κουρτίνα δηλαδή το (ευθύγραμμο τμήμα). Μετά παίρνεις έναν από τους δύο γνώμονες και τραβάς την απόσταση ΗΙ (κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από Η μέχρι ΑΔ) και μετά μετράς πόσο είναι το ΑΙ και σχεδιάζεις την απόσταση ΒΘ πάνω στο ΕΒ.

Και τέλος περνάς με κόκκινο χρώμα το ΑΙΗΖΘΒ, Έφτιαξες δύο ημι-προμαχώνες. Και για να το κάνεις ολόκληρο το κάνεις άλλες πέντε φορές.

Στην περιγραφή της μαθήτριας του παραδείγματος 2 δίνονται οδηγίες, σαφής και με τη σειρά, που είναι απαραίτητες για την κατασκευή του οχυρού με προμαχώνες. Η περιγραφή αρχίζει με την χάραξη ενός κύκλου, τον σχεδιασμό του εγγεγραμμένου κανονικού εξαγώνου σε αυτόν και τον χωρισμό του εξαγώνου σε 6 ισόπλευρα τρίγωνα με πλευρά την ακτίνα του κύκλου (ανάλυση κανονικού εξαγώνου σε ισόπλευρα τρίγωνα). Στη συνέχεια, δίνονται οι οδηγίες και ο τρόπος κατασκευής των δύο ημι-προμαχώνων μέσα σε ένα από τα τρίγωνα με μαθηματική γλώσσα. Χρησιμοποιούνται σωστά: οι μαθηματικές έννοιες (εξάγωνο, κύκλος, ακτίνα, γωνία, σημείο, ισόπλευρο τρίγωνο, ευθύγραμμο τμήμα, απόσταση), ο διαβήτης (χάραξη κύκλου, σχεδιασμό κανονικού εξαγώνου, χάραξη ισόπλευρου τριγώνου, μεταφορά ευθύγραμμου τμήματος), ο ισοσκελής γνώμονας (σχεδιασμό γωνίας 45 μοιρών), ο ορθογώνιος γνώμονας (χάραξη αποστάσεων) και το μοιρογνωμόνιο (σχεδιασμό γωνίας 22,5 μοιρών). Τέλος, για την ολοκλήρωση όλων των προμαχώνων του οχυρού προτείνεται επανάληψη της διαδικασίας κατασκευής δύο ημι-προμαχώνων σε κάθε τρίγωνο από την αρχή.

Άξιο αναφοράς είναι πως η μαθήτρια στις περιγραφές της έδωσε και τον ορισμό της "απόστασης" ως κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από σημείο στην απέναντι ευθεία αλλά και τον ορισμό της λέξης "κουρτίνα" που χρησιμοποιεί ο Jean Errard για τη δημιουργία ευθύγραμμου τμήματος από την ένωση δύο σημείων (Εικόνα 18). Επιπλέον, η χρήση του κανόνα για τη χάραξη ευθυγράμμων τμημάτων θεωρήθηκε αυτονόητη και δεν υπάρχει μαθηματικός εννοιολογικός χαρακτηρισμός της ΑΙΗΖΘΒ.



Εικόνα 18: Η έννοια της κουρτίνας Jean Errard (Metin, 2018)

7.7 Αποτελέσματα από το φύλλο αναστοχασμού

Σε αυτό το φύλλο εργασίας οι μαθητές απάντησαν σε αρκετές ερωτήσεις αναστοχασμού. Σε αυτές απάντησαν όλοι εκτός από έναν μαθητή που απάντησε γενικά σε κάποιες ερωτήσεις εκτός πλαισίου μαθήματος.

Οι πρώτες ερωτήσεις αφορούσαν στο 1) τι έμαθαν, 2) τι τους άρεσε και 3) τι τους δυσκόλεψε. Στην πρώτη ερώτηση οι μαθητές ανέφεραν πως έμαθαν να φτιάχνουν εξάγωνο/οχυρό και να χρησιμοποιούν τα γεωμετρικά όργανα. Στη δεύτερη ερώτηση ανέφεραν πως τους άρεσε η κατασκευή του εξάγωνου/οχυρού καθώς και η χρήση των γεωμετρικών οργάνων στη διαδικασία κατασκευής του. Στην τρίτη ερώτηση οι απαντήσεις μοιράστηκαν κυρίως σε τέσσερις κατηγορίες: α) η χρήση των γεωμετρικών οργάνων (του διαβήτη, του μοιρογνωμονίου και του γνώμονα), β) η καταγραφή των οδηγιών, γ) η κατασκευή ολόκληρου του οχυρού και δ) τίποτα.

Στη συνέχεια οι μαθητές ανέφεραν τους δύο τρόπους κατασκευής του οχυρού (ανάλυση ή σύνθεση), κύκλωσαν τον τρόπο που χρησιμοποίησαν και σχολίασαν γιατί τον προτίμησαν. Εδώ οι απαντήσεις των μαθητών επαλήθευσαν τα αποτελέσματα της κατασκευής του οχυρού, όπου 9 μαθητές προτίμησαν την ανάλυση του εξαγώνου σε τρίγωνα και 5 μαθητές προτίμησαν τη σύνθεση του εξαγώνου από ισόπλευρα τρίγωνα. Μάλιστα, όλοι οι μαθητές σχολίασαν πως η επιλογή τους ήταν ο πιο εύκολος για αυτούς τρόπος.

Στην ερώτηση για το αν οι λόγοι που έκαναν τους ανθρώπους να εξελίξουν τη Γεωμετρία ή έστω κάποιοι από αυτούς, προκάλεσαν και το δικό τους ενδιαφέρον για να ασχοληθούν με τη Γεωμετρία όλοι απάντησαν θετικά εκτός από μία μαθήτρια, η οποία απάντησε ουδέτερα: “Γιατί δε με νοιάζει. Μ’ άρεσε που δουλεύαμε με χάρακες.” Μάλιστα, καθώς ήταν η συγκεκριμένη μαθήτρια είχε μία από τις καλύτερες επιδόσεις καθόλη τη διάρκεια των μαθημάτων, σε ερώτηση του δασκάλου την επόμενη ημέρα απάντησε: “Δεν με ενδιέφερε η ιστορία, απλώς μου αρέσει να είμαι καλή σε όλα. Ό,τι και να ήταν θα το έκανα”.

Στην αξιολόγηση της Ιστορίας των Μαθηματικών οι μαθητές επέλεξαν πως ήταν ευχάριστη, ενδιαφέρουσα και κατανοητή, εκτός από τρεις μαθητές που - παρόλο που τη βρήκαν ευχάριστη και κατανοητή - τη θεώρησαν δυσνόητη. Επίσης, απάντησαν πως η Ιστορία των Μαθηματικών τους άρεσε από αρκετά (3 μαθητές) έως πολύ/πάρα πολύ (11 μαθητές).

Για τον τρόπο εργασίας σε αυτήν την ενότητα μαθημάτων της Γεωμετρίας, με τη χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών, οι μαθητές απάντησαν πως είναι πιο εύκολος (5 μαθητές) ή πως έχει τον ίδιο βαθμό δυσκολίας (9 μαθητές). Επιπλέον, τον θεώρησαν περισσότερο ενδιαφέρων (εκτός από 2 που τον θεώρησαν το ίδιο ενδιαφέρων με τον συνήθη τρόπο εργασίας).

Τέλος, στην ερώτηση για το αν τους άρεσαν τα μαθήματα με τη χρήση της Ιστορίας του Jean Errard, όλοι οι μαθητές απάντησαν θετικά.

8. Συμπεράσματα - Συζήτηση

8.1 Συμπεράσματα

Από την ανάλυση των αποτελεσμάτων της έρευνάς προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

1. Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών λειτούργησε ως εργαλείο θετικής κινητοποίησης των μαθητών ως προς τις νέες μαθηματικές έννοιες και δραστηριότητες που τους παρουσιάστηκαν.
2. Οι μαθητές πέτυχαν τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα, στην ενότητα της Γεωμετρίας, με την αξιοποίηση ιστορικών πηγών, όπως αναφέρονται στο κατασκευαστικό πρόγραμμα του Jean Errard.

   Ειδικότερα:

   Από το κατασκευαστικό πρόγραμμα του Jean Errard, οι μαθητές:

   - κατανόησαν τις αρχές της οχύρωσης με προμαχώνες σύμφωνα με τους Errard.
   - κατανόησαν την εξέλιξη της οχύρωσης, παράλληλα με την εξέλιξη του πυροβολικού.
   - κατασκεύασαν εξαγωνικό οχυρό με προμαχώνες.

3. Η χρήση της Ιστορίας των Μαθηματικών επηρέασε θετικά τη στάση των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά.

8.2 Συζήτηση

Στην παρούσα έρευνα, η Ιστορία των Μαθηματικών αξιοποιήθηκε για την ανάπτυξη των ΓΧΕ των μαθητών με σκοπό την κινητοποίηση των μαθητών και την ενεργό συμμετοχή τους κατά τη διάρκεια των μαθημάτων της παρέμβασης. Οι μαθητές απέκτησαν τις απαραίτητες γνώσεις/δεξιότητες για τη λύση ασκήσεων και προβλημάτων Γεωμετρίας, που αποτελούν και τον λόγο ύπαρξης των ΓΧΕ (Kyzniak, 2012). Η χρήση της Ιστορίας του Jean Errard και η τελική εργασία "επαναδημιουργίας" των οδηγιών κατασκευής εξαγωνικού οχυρού με προμαχώνες χρησιμοποιήθηκαν σύμφωνα με τις αρχές της Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης (Freudenthal, 1973) και άλλαξαν θετικά τη στάση των μαθητών για τα Μαθηματικά, αφού συνειδητοποίησαν πως τα Μαθηματικά εξελίχθηκαν για να καλύψουν πραγματικές ανάγκες των ανθρώπων και να βελτιώσουν τη ζωή τους. Η παρουσίαση των ιστορικών πηγών έγινε μεγαλόφωνα από τον εκπαιδευτικό της τάξης, που πιθανότατα βοήθησε στην κατανόηση και προσέδωσε στην παρουσίαση ζωντάνια και παραστατικότητα, αυξάνοντας το ενδιαφέρον των μαθητών (Ariail & Albright, 2005˙ Ivey & Broaddus, 2001˙ Schraw et al., 1995). Καθώς οι ιστορικές πηγές αξιολογήθηκαν θετικά από τους μαθητές, μπορούμε να πούμε πως η Ιστορία αποτελεί μέσω κινητοποίησης των μαθητών στην προσπάθεια επίλυσης προβλημάτων (Brousseau, 2002) και ταυτόχρονα δε φάνηκε να επηρεάζεται κάποιος μαθητής αρνητικά επειδή δεν αγαπά την Ιστορία (Jankvist, 2009˙ Tzanakis et al., 2000).

Πριν από την κατασκευή του οχυρού προηγήθηκαν 6 μαθήματα, τα οποία ξεκινούσαν με αφόρμηση από τις ιστορικές πηγές. Οι μαθητές συμμετείχαν ενεργά σε όλα τα μαθήματα παρά τη μακρά διάρκεια της παρέμβασης, όπου και λόγω της νόσου Covid19 υπήρξαν κάποιες απουσίες μαθητών. Μάλιστα, όταν γυρνούσαν στο σχολείο ζητούσαν επίμονα να κάνουν ό,τι έχασαν ή να συνεχίσουν κι ας μην ξέρουν κάτι. Όλοι αυτοί οι μαθητές συμμετέχουν στην έρευνα κι ας ήταν σίγουρο ότι θα αντιμετώπιζαν κάποιες δυσκολίες, οι οποίες φάνηκαν και στα αποτελέσματα της παρέμβασης.

Πέρα από την διάρκεια της παρέμβασης, δυσκολίες προέκυψαν και από την πολυπολιτισμικότητα του τμήματος. Μαθητές από Αλβανία και Συρία, που εγγράφηκαν στην Δ΄ τάξη μεσούσης της χρονιάς ή έναν χρόνο πριν, είχαν αντικειμενικές δυσκολίες στην κατανόηση και στην έκφραση της ελληνικής γλώσσας, οι οποίες φάνηκαν επίσης στα αποτελέσματα. Ειδικότερα ο μαθητής από την Αλβανία (Δείγμα 13, Παράρτημα 7), που ζούσε τα τελευταία χρόνια στη Μύκονο, είχε δυσκολίες στην επικοινωνία καθώς μιλούσε μια μίξη αγγλικών, ελληνικών και αλβανικών. Παρόλα αυτά συμμετείχε με χαρά και ικανοποίηση. Μπορεί να μην είχε τα επίσημα προσδοκώμενα αποτελέσματα, είχε όμως τη μεγαλύτερη ατομική βελτίωση από όλους τους συμμετέχοντες. Η χρήση της Ιστορίας τον είχε ενθουσιάσει.

Άλλες αιτίες που πιθανότατα επηρέασαν τα αποτελέσματα, σύμφωνα με το φύλλο αναστοχασμού και την ερώτηση για πιθανές δυσκολίες που αντιμετώπισαν οι μαθητές, είναι η έλλειψη εμπειρίας στη χρήση των γεωμετρικών εργαλείων (κανόνα, γνώμονα, μοιρογνωμόνιο, διαβήτη) αλλά και η έλλειψη εμπειρίας σε αυτόν τον τρόπο εργασίας. Για αυτόν τον λόγο άλλωστε κρίθηκε απαραίτητο να δοθεί στους μαθητές μία διδακτική ώρα εργασίας με γεωμετρικά εργαλεία μετά από κάθε μάθημα. Ο διαφορετικός τρόπος εργασίας κινητοποίησε θετικά τους μαθητές αλλά η "επαναδημιουργία" των οδηγιών ίσως ήταν ένα εμπόδιο για κάποιους μαθητές. Η έκταση του κειμένου οδηγιών που έγραψαν οι μαθητές κυμάνθηκε από 1 έως 3 σελίδες. Το ότι δυσκολεύτηκαν δεν σημαίνει ότι δεν τα κατάφεραν. Περισσότερο δεν ήταν σίγουροι για το πως να γράψουν τις οδηγίες ή για το τι ήταν απαραίτητο να γράψουν. Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι της μαθήτριας (Δείγμα 9, Παράρτημα 7) που γνώριζε τους τρόπους κατασκευής των γωνιών του οχυρού αλλά δεν θεώρησε απαραίτητο να τους αναφέρει και αρκέστηκε στην οδηγία: "κατασκευάζω την Χ γωνία".

Ένας ακόμα περιορισμός στα αποτελεσμάτων της έρευνας είναι και η αξιολόγηση των αποτελεσμάτων από τον εκπαιδευτικό/ερευνητή (Jahnke et al., 2000). Τα αποτελέσματα της τελικής εργασίας/αξιολόγησης των μαθητών (Πίνακας 1) και τα αποτελέσματα από το φύλλο αναστοχασμού παρουσιάζονται σύμφωνα με τις καταγραφές των μαθητών παρόλο που ο εκπαιδευτικός/ερευνητής ήξερε πως κάποιοι μαθητές παράλειψαν να γράψουν πληροφορίες ενώ γνώριζαν ή παρανόησαν κάποια ερώτηση.

Τέλος, η αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών επηρέασε θετικά των άποψη των μαθητών για τα μαθηματικά. Παράγοντες που ίσως βοήθησαν σε αυτό είναι: α) η ενότητα των μαθημάτων της παρέμβασης (Γεωμετρία) που δεν απαιτούσε προηγούμενες γνώσεις των μαθητών, β) η χρήση των γεωμετρικών εργαλείων, γ) το θέμα της Ιστορίας και δ) ο διαφορετικός τρόπος μαθημάτων. Μαθητές που είχαν πολλές ή λίγες δυσκολίες στα Μαθηματικά και αρνητικά ή ουδέτερα συναισθήματα προς το μάθημα, ανυπομονούσαν να έρθει η ώρα των Μαθηματικών.

8.3 Πρόταση

Επαλήθευση των αποτελεσμάτων της έρευνας μπορεί να γίνει σε μια Ε΄ τάξη ενός Δημοτικού συμπεριλαμβάνοντας και τις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού, οι οποίες κρίθηκαν μη απαραίτητες για την κατασκευή του εξαγωνικού οχυρού με προμαχώνες. Αν και εμπεριέχονται στην ύλη της Δ΄ τάξης, θεωρήθηκε πως μεγαλύτερη διάρκεια στην παρέμβαση και περισσότερες μαθηματικές έννοιες θα ανέβαζαν τον δείκτη δυσκολίας αρκετά για μαθητές αυτής της ηλικίας. Από την άλλη μεριά, μαθητές της Ε΄ τάξης που έχουν διδαχθεί την ύλη της Γεωμετρίας της Δ΄ τάξης, μπορούν σε μικρότερη διάρκεια παρέμβασης να συμπεριλάβουν και τις δύο έννοιες που αναφέρθηκαν.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση

Anastasiadis, M., & Nikolantonakis, C. (2014). Ισοπεριμετρικά σχήματα στο δημοτικό σχολείο: διδασκαλία με την αξιοποίηση ιστορικών πηγών. *Education Sciences*, *2014*(4), 69-91.

Ariail, M., & Albright, L. K. (2005). A survey of teachers' read-aloud practices in middle schools. *Literacy Research and Instruction*, *45*(2), 69-89.

Bergin, D. A. (1999). Influences on classroom interest. *Educational psychologist*, *34*(2), 87-98.

Brousseau, G. (2002). *Theory of didactical situations in Mathematics* (eds. & trans. N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland & V. Warfield). New York: Kluwer Academic.

Duval, R., (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning.

Duval, R., (2004). Geometrical Pictures: kind of representation and specific processings. Notes from Lecture.

Fortifications & Architecture Guerre et sciences : combattre et se protéger Stage «Maths et Histoire au cycle 3» - 20 octobre 2017 FORTIFICATIONS & GÉOMÉTRIE - CYCLE 3 EMILIE VENNAT-LOUVEAU 1. Ανακτήθηκε στις 23/04/2023 από την ιστοσελίδα https://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/fortifications.pdf?361/a97365eb01b1f35d91b27690e00d5b45aa25e9b3e11f805ca64690ffe42c296a.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task.* Dordrecht: Reidel.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* 595.

Freudenthal, H. (1991). Revisiting mathematics education. China lectures. Kluwer.

Furinghetti, F. & L. Radford (2008) Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education.* New York: Routledge (2 nd ed.), 626-655.

Ivey, G., & Broaddus, K. (2001). "Just plain reading": A survey of what makes students want to read in middle school classrooms. *Reading research quarterly*, *36*(4), 350-377.

Jahnke, H.N., A. Arcavi, E. Barbin, O. Bekken, F. Furinghetti, A. El Idrissi... C. Weeks (2000). The use of original sources in the mathematics classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.) *History in mathematics education. The ICMI Study.* Dordrecht: Kluwer Academic, 291-328.

Jankvist, U.T. (2009). *Using history as a 'goal' in mathematics education* (Doctoral dissertation). Roskilde University.

Jones, K. (2000. Critical Issues in the Design of the Geometry Curriculum. *In*: Bill Barton (Ed), *Readings in Mathematics Education.* Auckland, New Zealand: University of Auckland, 75-90.

Kuzniak, A. (2006). Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *6*, 167-187.

Kuzniak, A. (2012, July). *Understanding the nature of the geometric work through its development and its transformations.* Regular lecture given at the 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea.

Metin, F., (2018). Se protéger grâce aux mathématiques: La géométrie des fortifications.

Mitchell, M. (1993). Situational interest: Its multifaceted structure in the secondary school mathematics classroom. *Journal of educational psychology*, *85*(3), 424.

Schraw, G., Bruning, R., & Svoboda, C. (1995). Sources of situational interest. *Journal of reading behavior*, *27*(1), 1-17.

Schunk, D.H., P.R. Pintrich & J.L. Meece. (2010). *Τα κίνητρα στην εκπαίδευση* (μτφρ. Μ. Κουλεντιανού, επιμ. Ν. Μακρής & Δ. Πνευματικός). Αθήνα: Gutenberg.

Tzanakis, C., A. Arcavi, C.C. de Sa, M. Isoda, C.K. Lit, M. Niss... M.K. Siu (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.) *History in mathematics education. The ICMI Study.* Dordrecht: Kluwer Academic, 201-240.

Van de Walle, J. A. (2001). Geometric thinking and geometric concepts. *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*, 342-349.

Van Hiele, P. M. (1999). Developing geometric thinking through activities that begin with play. *Teaching children mathematics*, *5*(6), 310-316.

Vosniadou, S. & X. Vamvakoussi (2006). Examining mathematics learning from a conceptual change point of view: Implications for the design of learning environments. In L. Verschaffel, F. Dochy, M. Boekaerts & S. Vosniadou (Eds.) *Instructional psychology: Past, present and future trends. Sixteen essays in honour of Erik De Corte.* Oxford: Elsevier, 55-72.

Vygotsky, L.S. (1997). Νους στην Κοινωνία. Επιμ. Σ. Βοσνιάδου. Αθήνα: Gutenberg.

Ελληνόγλωσση

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α.Δ. & Σαΐτης, Α. (2022α). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού.* Βιβλίο Μαθητή. ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ». ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α.Δ. & Σαΐτης, Α. (2022β). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού.* Τετράδιο Εργασιών: α τεύχος. ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ». ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α.Δ. & Σαΐτης, Α. (2022γ). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού.* Τετράδιο Εργασιών: γ τεύχος. ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ». ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ.

Βαμβακούση, Ξ., Καργιωτάκης, Γ., Μπομποτίνου, Α.Δ. & Σαΐτης, Α. (2022δ). *Μαθηματικά Δ' Δημοτικού.* Βιβλίο Δασκάλου. ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ». ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ.

ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ. (2003). Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Υπουργείο Παιδείας, Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων. ΦΕΚ 303Β/13-03-2003, ΦΕΚ 304Β/13-03-2003.

Θωμαΐδης, Γ. (2014). Θεωρητικό Πλαίσιο ενός Μεταπτυχιακού Μαθήματος με Θέμα: «Αξιοποίηση της Ιστορίας των Μαθηματικών στη Διδακτική τους». *Επιστήμες της Αγωγής*, Θεματικό τεύχος 2014, (σελ 16-37).

ΙΕΠ. (2022). ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΔΗΜΟΤΙΚΟ. ΔΕΥΤΕΡΗ ΕΚΔΟΣΗ, ΑΘΗΝΑ. Πράξη «Αναβάθμιση των Προγραμμάτων Σπουδών και Δημιουργία Εκπαιδευτικού Υλικού Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης» - MIS: 5035542

Κολέζα, Ε. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών.* Αθήνα: Leader Books.

Κολέζα, Ε. (2009). Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών. *Δ΄ Έκδοση. Αθήνα: Τόπος*.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι. & Σπανακά, Α. (2006 α). *Μαθηματικά Γ' Δημοτικού: Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Βιβλίο Δασκάλου.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Ε., Νικολαντωνάκης, Κ., Παναγάκος, Ι. & Σπανακά, Α. (2006 β). *Μαθηματικά Γ' Δημοτικού: Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής. Βιβλίο Μαθητή.* Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεως Διδακτικών Βιβλίων.

Λεμονίδης, Χ., Νικολαντωνάκης, Κ. (2007). Ελληνικός πολλαπλασιασμός: Ένας άγνωστος ιστορικός αλγόριθμος κατάλληλος για τη διδασκαλία. *Σύγχρονη Εκπαίδευση*, τεύχος 151, σελ. 169-178.

Μιχαήλ, Ε., Μουσκή, Κ., & Γαγάτσης, Α. (2006). Η ικανότητα αναγνώρισης και κατασκευής γεωμετρικών σχημάτων στις Γ΄-Δ΄ τάξεις του δημοτικού. *Άρθρο που παρουσιάστηκε στο 9ο Συνέδριο παιδαγωγικής εταιρείας Κύπρου*, 2-3.

Μιχαήλ, Ε., Σοφοκλέους, Π., Λεμονίδης, Χ., (2009). Η πολύ-πολιτισμική διάσταση του πολλαπλασιασμού: Στάσεις και αντιλήψεις Κυπρίων εκπαιδευτικών για τη χρήση της στη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Πρακτικά 5ου διεθνούς διημερίδας διδακτικής Μαθηματικών Τόμος 1, σελ. 17-29.* Πανεπιστήμιο Κρήτης.

Νικολαντωνάκης, Κ. (2022α). *Αξιοποίηση της ιστορίας των μαθηματικών στη διδασκαλία.* [πανεπιστημιακές σημειώσεις]. Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Χειμερινό εξάμηνο 2022-2023. Αθήνα.

Νικολαντωνάκης, Κ. (2022β). *Η Θεωρία του Γεωμετρικού Χώρου Εργασίας.* [πανεπιστημιακές σημειώσεις]. Εθνικό Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Χειμερινό εξάμηνο 2022-2023. Αθήνα.

Τζανάκης, Κ. (1993). Η διδασκαλία της μέτρησης γωνιών, μήκους περιφέρειας και εμβαδού κύκλου στο Δημοτικό σχολείο. *Σύγχρονη Εκπαίδευση: Τρίμηνη Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, (71), 65-70.

Τζεκάκη, Μ. (2002). Ελληνική Μαθηματική Εκπαίδευση, ένα πρόβλημα αναζητά λύση. *Themes in Education*, *3*(1), 22-34.

Τουμάσης, Μ. (1994). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών.* Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg.

Τριανταφυλλίδης, Τ. Α. (1999). Εποπτικές δραστηριότητες στα Μαθηματικά: Η έννοια της ομοιότητας [μέρος 1ο]. *Σύγχρονη Εκπαίδευση: Τρίμηνη Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, (105), 65-70.

Τριανταφυλλίδης, Τ. Α. (1999). Εποπτικές δραστηριότητες στα Μαθηματικά: Η έννοια της ομοιότητας [μέρος 2ο]. *Σύγχρονη Εκπαίδευση: Τρίμηνη Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, (106), 39-46.

Φεσάκης, Γ. (2014). Εικονικό και συμβατικό απτικό υλικό στη μάθηση και τη διδασκαλία των μαθηματικών: Θεωρητική ανάλυση. *Πρακτικά Συνεδρίου*, 72.

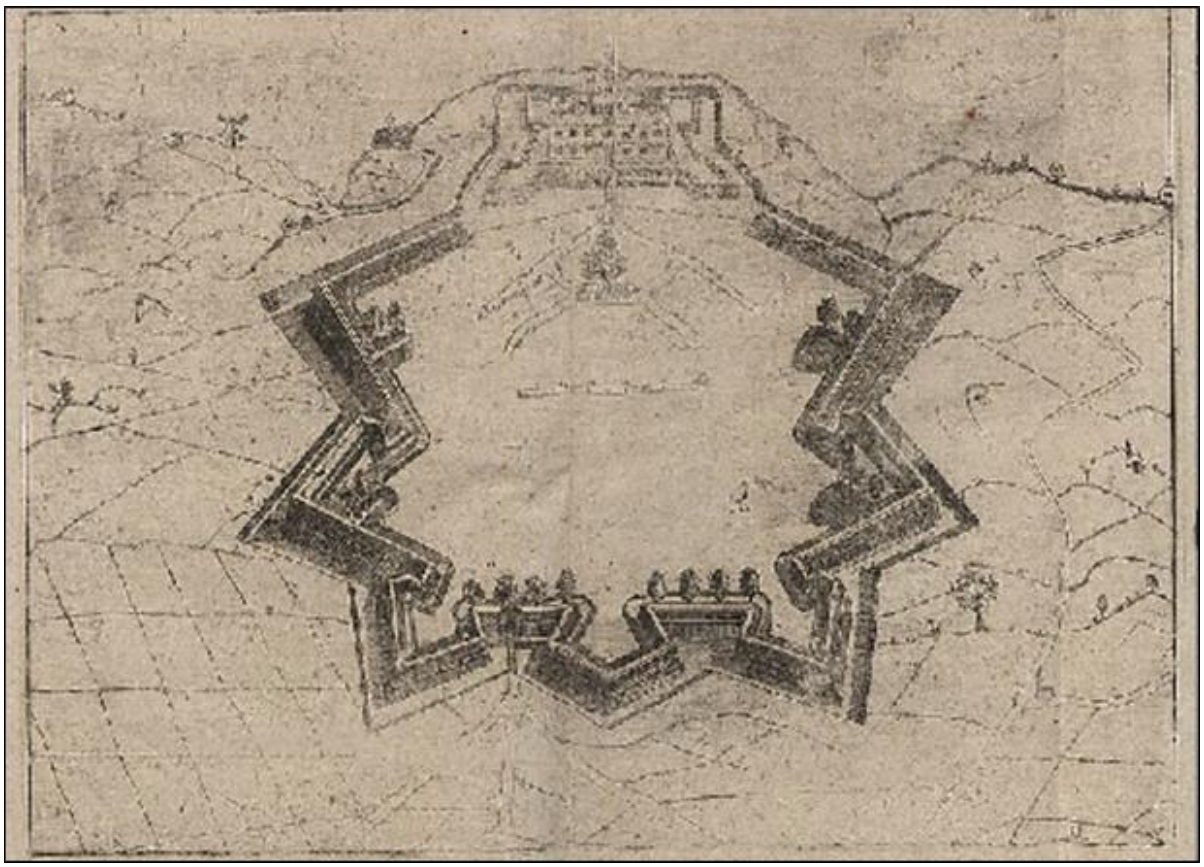
Παράρτημα

Παράρτημα 1

Οχυρώσεις & Αρχιτεκτονική

Πόλεμος και επιστήμη: πολεμώντας και προστατεύοντας

"Μαθηματικά και Ιστορία στην Δ΄ τάξη"



Εισαγωγή

Η **νύχτα του Αγίου Βαρθολομαίου** αναφέρεται στη σφαγή των Γάλλων προτεσταντών από τους Καθολικούς στο Παρίσι στις 24 Αυγούστου 1572, ανήμερα του Αγίου Βαρθολομαίου.

Η σφαγή του Αγίου Βαρθολομαίου προκάλεσε ένα κύμα πολεμικής στην πολιτική φιλοσοφία και στη λογοτεχνία, οι οποίες κατακλύστηκαν από θεωρίες, προκαταλήψεις και φοβίες. Οι επιστήμες και ειδικά η Γεωμετρία έπαιξαν σπουδαίο ρόλο στην εξέλιξη των πολέμων μετέπειτα.

Η *σφαγή του Αγίου Βαρθολομαίου*, Φρανσουά Ντυμπουά

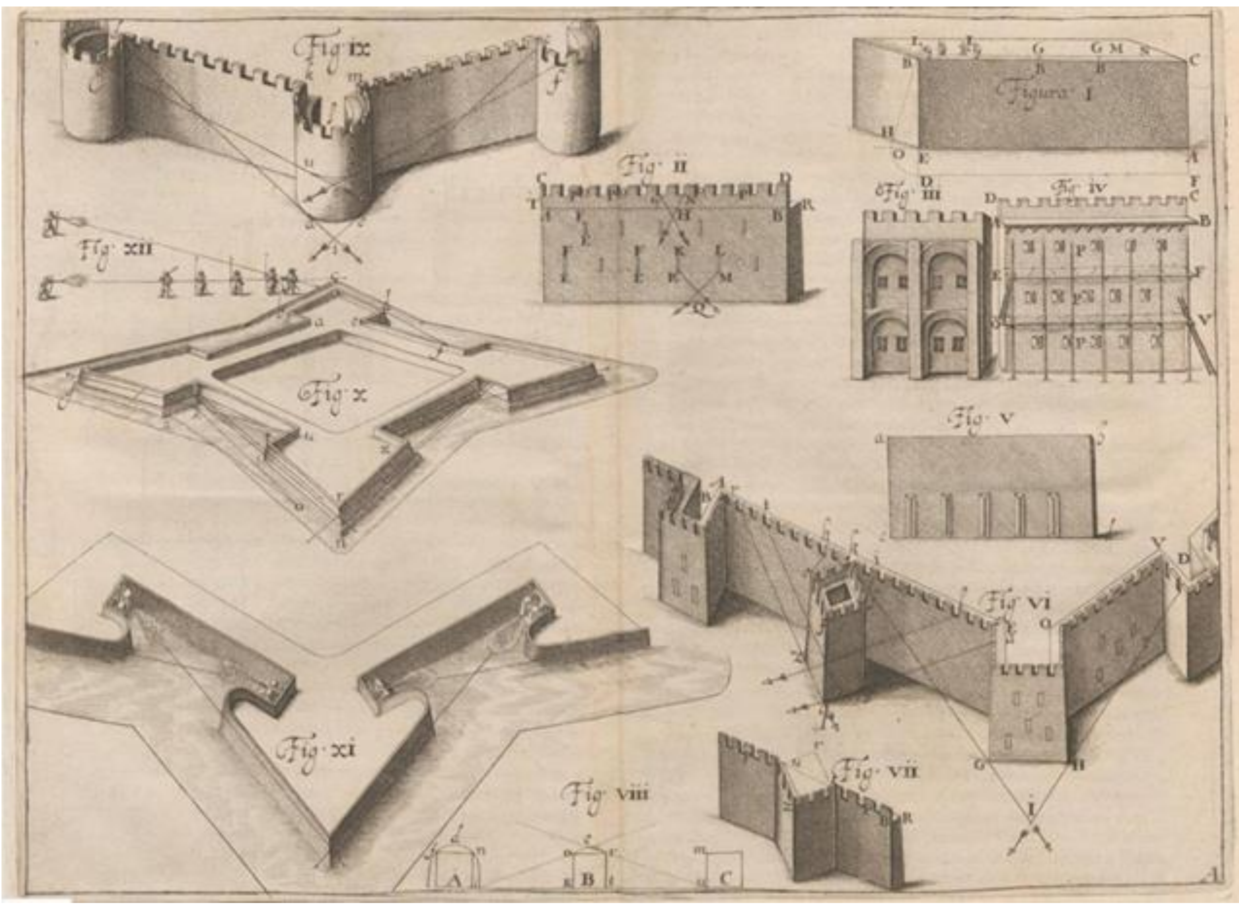
Επιστράτευση των μαθηματικών

Στις αρχές του 16ου αιώνα εφευρέθηκε στην Ιταλία ένας νέος τρόπος οχύρωσης για την προστασία των πόλεων από τη δύναμη των κανονιών. Ο προτεστάντης της Λωρραίνης **Jean Errard** (1554-1610), εκπαιδευμένος σε αυτόν τον ιταλικό τρόπο, έγινε ο κύριος στρατιωτικός μηχανικός του Ερρίκου Δ΄, ο οποίος του ανέθεσε να γράψει ένα συγγραφικό έργο για το θέμα αυτό. Ο Errard είχε ήδη δημοσιεύσει μια πρακτική Γεωμετρία, καθώς και μια έκδοση των Στοιχείων του Ευκλείδη. Το έργο του Fortification reduicte en art et demonstrée, το οποίο κυκλοφόρησε το 1600, ήταν το πρώτο γαλλικό έργο που παρουσίασε την οχυρωματική στρατιωτική αρχιτεκτονική, θεμελιώνοντας τις αρχές της σε μια ανάλυση των εμπλεκόμενων δυνάμεων και βασιζόμενος στην **Ευκλείδεια Γεωμετρία.**

Εξέλιξη οχυρών

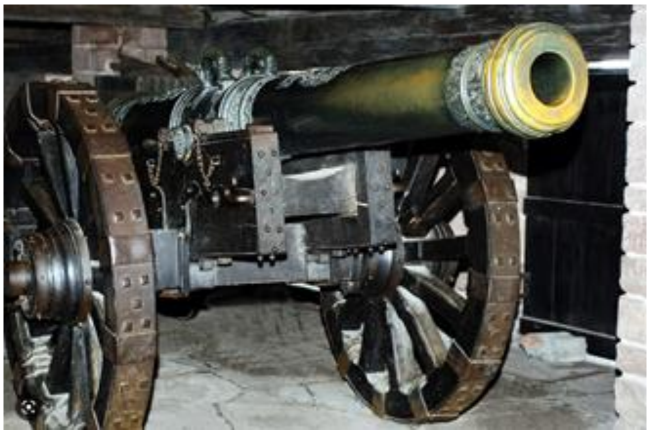
Τα πρώτα μέτρα προστασίας που χρησιμοποιήθηκαν ήταν χωμάτινα αναχώματα, τα οποία συμπληρώθηκαν με κορμούς δέντρων και πέτρες για να γίνουν πιο ανθεκτικά. Στη συνέχεια χτίστηκαν τοίχοι από τούβλα ή πέτρα, όλο και πιο ψηλοί και χοντροί, που προστατεύονταν από τάφρους νερού, και στη συνέχεια χτίστηκαν πύργοι μπροστά από τα τείχη.

Τα πρώτα κάστρα εμφανίστηκαν γύρω στον 10ο αιώνα. Έχουν τετράγωνο πύργο και βρίσκονται πάνω σε ένα ύψωμα από χώμα. Από τον 13ο αιώνα και μετά, τα κάστρα είχαν δύο ομόκεντρους περιβόλους, με πύργους με κρηπιδώματα και μαχαιρώματα. Τον 14ο και 15ο αιώνα, ήταν εξοπλισμένα με κυκλικούς πύργους και διπλό περιφραγμένο τείχος που στεφανωνόταν με πύργους και γωνιακούς πυργίσκους.



Τα κανόνια φέρνουν αλλαγές στην οχύρωση

Τα πρώτα κανόνια χρησιμοποιήθηκαν ήδη από τον 14ο αιώνα. Εκείνη την εποχή, τα μέρη των κανονιών ήταν κατασκευασμένα από σίδηρο και οι σφαίρες των κανονιών από πέτρα. Στα τέλη του 14ου αιώνα, εμφανίστηκε μια μεγάλη τεχνική καινοτομία: η χυτοσίδηρη κάννη, η οποία αντικατέστησε την πέτρινη κάννη. Το πυροβολικό έγινε πολύ πιο αποτελεσματικό. Τα κανόνια, κατασκευασμένα πλέον από χαλκό και τοποθετημένα πάνω σε τροχούς, ήταν πιο ακριβή, στερεά και ευέλικτα. Επέτρεπαν την καλύτερη στόχευση και την ταχύτερη επαναλαμβανόμενη βολή. Οι εξελίξεις αυτές κατέστησαν αναγκαία τη σκέψη νέων μορφών οχυρώσεων ικανών να αντέξουν αυτά τα κανόνια κατά τη διάρκεια πολιορκιών.

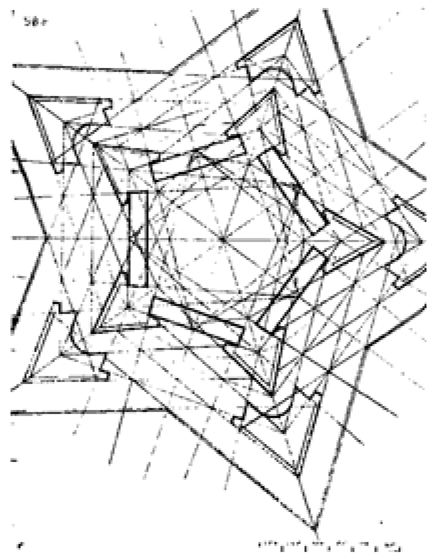


Κανόνι 17ου αιώνα

Βομβάρδα του Τάγματος του Αγίου Ιωάννη της Ιερουσαλήμ, Ρόδος, 1480–1500.

Οι αλλαγές

Τα φρούρια δεν χτίζονταν πλέον σε ψηλό έδαφος. Εμφανίστηκαν διάφορες σημαντικές καινοτομίες:



· Η χρήση χωμάτινων προμαχώνων αντί για πέτρινους προμαχώνες για την άμβλυνση της πρόσκρουσης των κανονιοβολισμών.

· Η αντικατάσταση του μεσαιωνικού πύργου από προμαχώνες για την υπεράσπιση των πλατειών, μπροστά από τους οποίους ένας ελεύθερος χώρος, που ονομάζεται τάφρος, αναγκάζει τους επιτιθέμενους να προχωρήσουν σε ανοιχτό χώρο.

· Η εξαφάνιση των τυφλών σημείων μπροστά από τα έργα, ώστε ο επιτιθέμενος να μην μπορεί να βρει κανένα καταφύγιο για να αποφύγει τα πυρά της άμυνας.

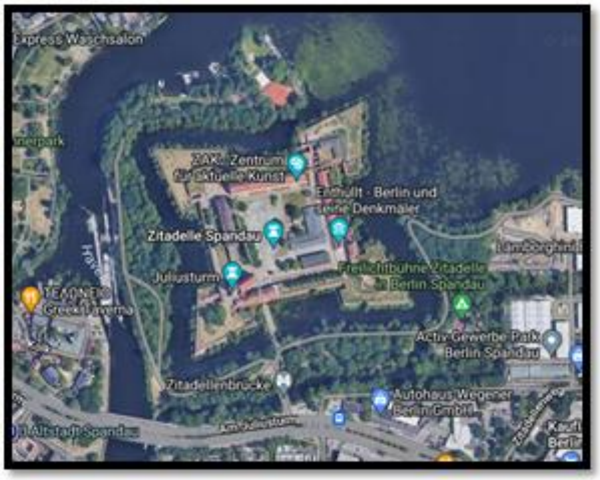
Η στρατηγική αυτή αποσκοπεί στην όσο το δυνατόν μεγαλύτερη καθυστέρηση της στιγμής που ο επιτιθέμενος πλησιάζει το οχυρό, πολλαπλασιάζοντας τα αμυντικά έργα μπροστά από το οχυρό, επιβραδύνοντας έτσι την πρόοδο του εχθρού ώστε να μην μπορεί να επιτεθεί.

Jean Errard

Ο Jean Errard (γεννήθηκε γύρω στο 1554 στο Bar-le-Duc και πέθανε στις 20 Ιουλίου 1610 στο Sedan) ήταν μαθηματικός και στρατιωτικός μηχανικός από τη Λωρραίνη, αρχικά στην υπηρεσία της δουκικής αυλής της Λωρραίνης, ο οποίος αργότερα μπήκε στην υπηρεσία του Γάλλου βασιλιά Ερρίκου Δ'. Εισήγαγε την ιταλική οχύρωση στη Γαλλία και υπήρξε έτσι πρόδρομος του Vauban. Το 1594, ο Errard δημοσίευσε το βιβλίο La Fortification réduite en art et démontrée. Προσδιόρισε τα μέσα αμύνης, ήξερε πώς να χρησιμοποιεί τις ιδιαιτερότητες του εδάφους, θέσπισε κεκλιμένα επίπεδα που αποσκοπούσαν στην αποφυγή του αιφνιδιασμού από τις βυθιζόμενες απόψεις και πέτυχε να καλύψει τις πλευρές των προμαχώνων από τον εχθρό χάρη στη διάταξη των παραπετασμάτων. Εφηύρε επίσης το αναβατόριο και τυποποίησε το πάχος των προμαχώνων.

Ο Jean Errard ήταν ο πρώτος που εφάρμοσε την αρχή της οχύρωσης με προμαχώνες στη Γαλλία και εξήγησε τις αρχές της. Το έργο του του χάρισε τον τίτλο του "πατέρα της γαλλικής οχύρωσης". Η γεωμετρία καθόριζε τη στρατηγική του σκέψη: ο Errard εξήγησε όλες τις διαδικασίες που επέτρεπαν να εντοπιστούν στο έδαφος τα διάφορα πολύγωνα, κανονικά ή ακανόνιστα, τα οποία ήταν απαραίτητα για τη σωστή οχύρωση ενός τόπου. Ο κύριος κανόνας του θεωρητικού του έργου είναι ότι η άμυνα ενός τόπου πρέπει να βασίζεται περισσότερο στο πεζικό παρά στο πυροβολικό, του οποίου τα πυρά στην εποχή του δεν ήταν αποτελεσματικά από το μέτωπο.

Οχυρά



Bourtange, Ολλανδία, πεντάγωνο

Βερολίνο, Γερμανία, τετράγωνο

Neuf Brisach, Γαλλία, οκτάγωνο

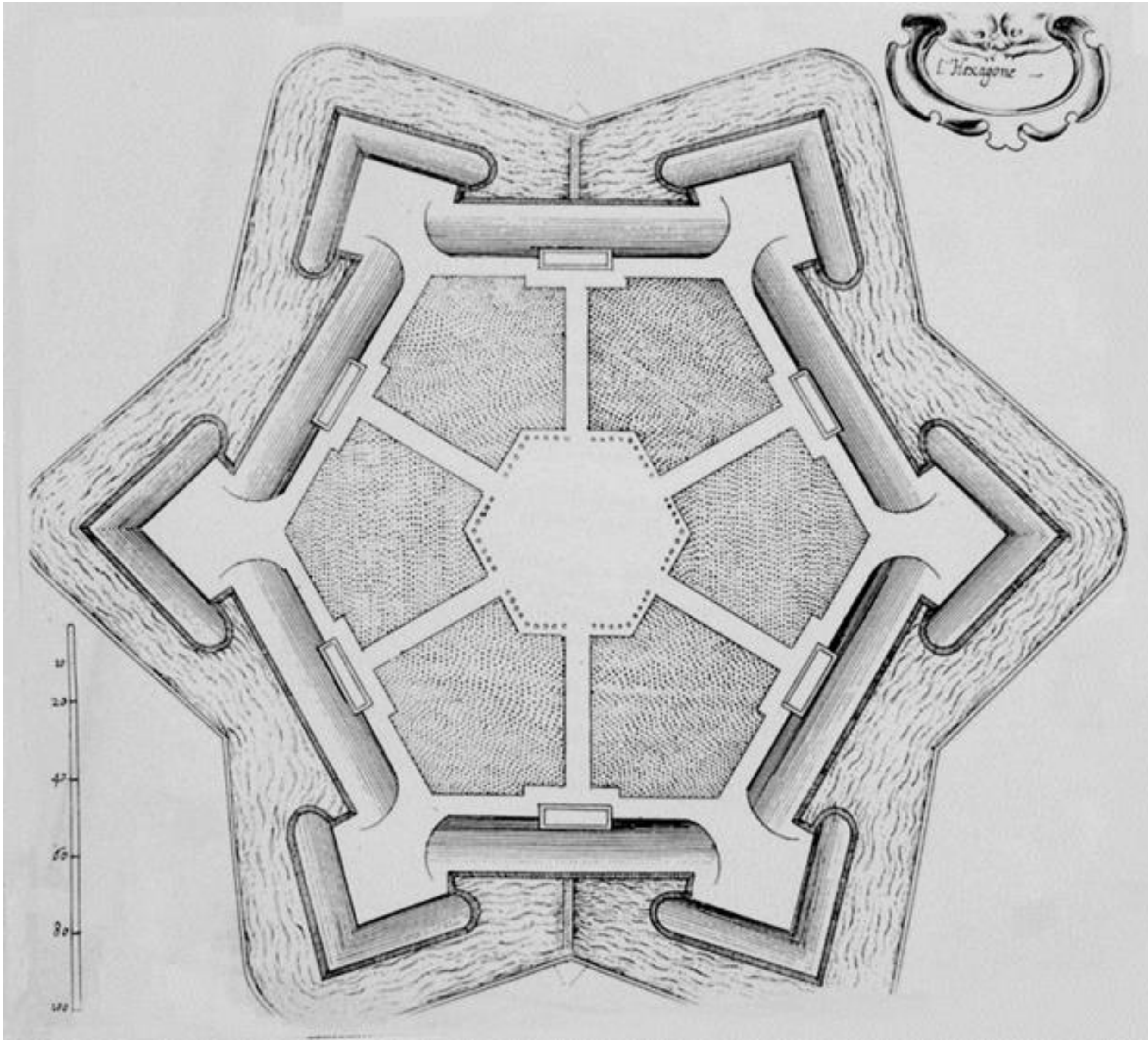
Palma Nova, Ιταλία, εννιάγωνο

Μεσαιωνικά Οχυρά

Yèvre-le-Châtel

Blanquefort

Εξάγωνο οχυρό του Errard



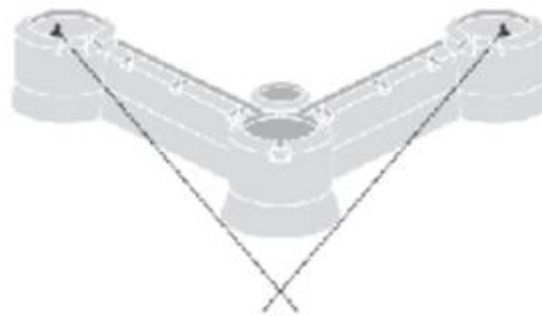
Παράρτημα 2

Φύλλο εργασίας 1

Πράξη

Κοιτάξτε προσεκτικά τα δύο παρακάτω σχεδιαγράμματα. Ποιο από τα δύο αναπαριστά την οχύρωση κατά τον Μεσαίωνα;

Με κόκκινο χρώμα, σχεδιάστε το τυφλό σημείο όπου οι εχθρικοί στρατιώτες μπορούν να βρουν καταφύγιο από τα πυρά.



Επιλέξτε

Με τη βοήθεια των ορισμών, αριθμήστε τα διάφορα μέρη της βασιλικής θωράκισης στο παρακάτω σχεδιάγραμμα.

1 – **προμαχώνας**: χώρος μπροστά από το περίβλημα. Το σχήμα του ευνοεί τα διασταυρούμενα πυρά αποφεύγοντας τα τυφλά σημεία.

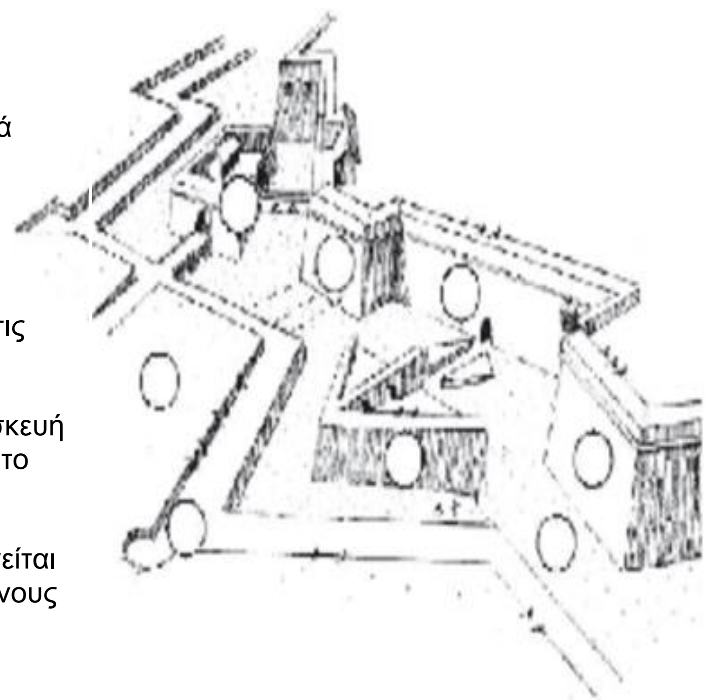
2 - **τείχος κουρτίνα**: τοίχος που συνδέει δύο προμαχώνες.

3 - **τάφρος**: σκαμμένο τμήμα που περιβάλλει τις οχυρώσεις και αποτελεί εμπόδιο.

4 - **μισοφέγγαρο**: τριγωνικού σχήματος κατασκευή που τοποθετείται στην τάφρο και προστατεύει το τείχος και παρέχει προηγμένη άμυνα.

5 - **καλυμμένο μονοπάτι**: γραμμή που προηγείται της τάφρου, η οποία επιτρέπει στους αμυνόμενους να ελέγχουν το υψίπεδο, ενώ βρίσκονται υπό κάλυψη από τα πυρά.

6 - **υψίπεδο**: γυμνό επικλινές έδαφος που ελέγχεται από την καλυμμένη οδό.



Παράρτημα 3

Φύλλο εργασίας 3

"Για την οχύρωση του εξαγώνου", κατά τον Jean Errard de Bar-le-Duc (1554-1610):

Προτείνεται η οχύρωση ενός εξαγώνου, δεδομένου μάλιστα ότι το εξάγωνο διαιρείται σε έξι ισόπλευρα τρίγωνα.

Σχεδίασε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ.

Στο ΑΒ σχεδίασε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ.

Στη συνέχεια φτιάξε την ημι-ορθή γωνία ΓΑΔ.

Σχεδίασε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ, πάνω στη γραμμή ΑΓ, ίσο με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΔ.

Έπειτα σχεδίασε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ.

Η γωνία ΕΑΔ να χωριστεί σε δύο ίσες γωνίες με το ευθύγραμμο τμήμα ΑΗ.

Σχεδίασε το ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ ίσο με το ΕΗ, και σχεδίασε την Κουρτίνα (ευθύγραμμο τμήμα) ΗΖ.

Σχεδίασε την απόσταση ΖΘ στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ, και σχεδίασε την απόσταση ΗΙ κάθετα στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ, όπως έκανες τη ΖΘ.

Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΙ λαμβάνεται ίσο με το ΒΘ.

Έτσι σχηματίζονται οι δύο ημι-προμαχώνες ΑΙΗ και ΒΘΖ.

Παράρτημα 4

<u>*Οι σκέψεις μου*</u>

<u>Σε αυτή τη σειρά μαθημάτων που κάναμε:</u>

1) Κάτι που έμαθα: ……………………………………………………………………………………………….……………… ……….

2) Κάτι που μου άρεσε: ……………………………………………………………………………………………………….. ………

3) Κάτι που με δυσκόλεψε: …………………………………………………….……………………………………………. ……….

4) Οι 2 μέθοδοι που χρησιμοποιήθηκαν από όλους τους μαθητές για τη δημιουργία οχυρού είναι:

   Α. ………

   Β. ………

   - Ποια μέθοδο προτίμησα; (κυκλώνω μία από τις παραπάνω)
   - Γιατί;…… ………

5) Τα εργαλεία και τα μέσα που χρησιμοποίησα για την κατασκευή του οχυρού του Errard είναι: …… ………. ……….

6) Οι άνθρωποι παλιά εξέλιξαν τη Γεωμετρία γιατί:

- Ήθελαν να κατασκευάσουν συμμετρικά οχυρά.
- Έπρεπε να αμυνθούν καλύτερα απέναντι στην εξέλιξη των κανονιών.
- Για να κατασκευάσουν πιο ανθεκτικούς προμαχώνες.
- Για να εξαλείψουν τα τυφλά σημεία κοντά στο τείχος του οχυρού όπου μπορεί να καλυφθεί ο εχθρός.

Προκάλεσε κάποιος από τους παραπάνω λόγους το ενδιαφέρον και σε εμένα, για να ασχοληθώ με αυτά τα μαθήματα; (Βάζω Χ) Ναι ……..   Όχι……..

Αν ναι, ποιος/ποιοι; (υπογραμμίζω παραπάνω)

Αν όχι, γιατί; ……….
……….

7) Πώς κατασκεύαζαν οι άνθρωποι τους προμαχώνες πριν τον 17^{ο} αιώνα;………………………………..
……….

8) Η παρουσίαση της εξέλιξης των οχυρών του Jean Errard: (σημειώνω με Χ)

- ήταν ευχάριστη   Ναι ……   Όχι ……
- ήταν ενδιαφέρουσα   Ναι ……   Όχι ……
- ήταν κατανοητή   Ναι ……   Όχι ……

9) Βαθμολογώ πόσο μου άρεσε: (κυκλώνω αυτό που πιστεύω)

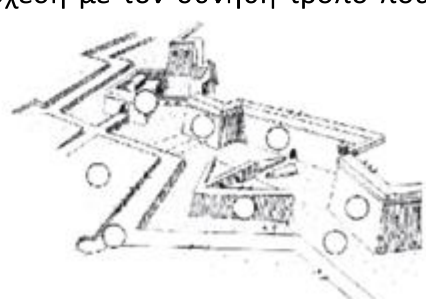
Α) Καθόλου   Β) Λίγο   Γ) Αρκετά   Δ) Πολύ   Ε) Πάρα πολύ

10) Ο τρόπος που εργαστήκαμε σε αυτά τα μαθήματα σε σχέση με τον συνήθη τρόπο που εργαζόμαστε στα μαθηματικά: (βάζω Χ στο κουτάκι)

- ήταν πιο δύσκολος
- ήταν πιο εύκολος
- είχε τον ίδιο βαθμό δυσκολίας

11) Ο τρόπος που εργαστήκαμε σε αυτά τα μαθήματα σε σχέση με τον συνήθη τρόπο που εργαζόμαστε στα μαθηματικά: (βάζω Χ στο κουτάκι)

- ήταν περισσότερο ενδιαφέρων
- ήταν λιγότερο ενδιαφέρων
- ήταν το ίδιο ενδιαφέρων



12) Μου άρεσαν τα μαθήματα Γεωμετρίας με τη χρήση της ιστορίας του Jean Errard; (βάζω Χ)

Ναι……   Όχι……

Παράρτημα 5

Φύλλο εργασίας 4

Σκέψου πως έρχεται στην τάξη σου ένα παιδί με μεταγραφή από άλλο σχολείο, βλέπει κρεμασμένο στον τοίχο της τάξης το οχυρό που σχεδίασες και θέλει να μάθει πώς το έφτιαξες. Μπορείς να γράψεις τις οδηγίες κατασκευής, ώστε να μπορέσει και το νέο παιδί να σχεδιάσει το εξαγωνικό οχυρό του Jean Errard;

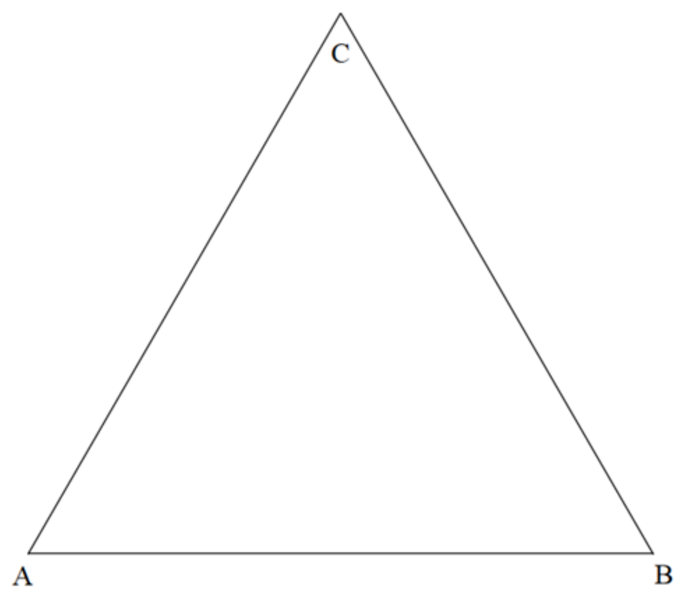
Παράρτημα 6

Φύλλο εργασίας 2

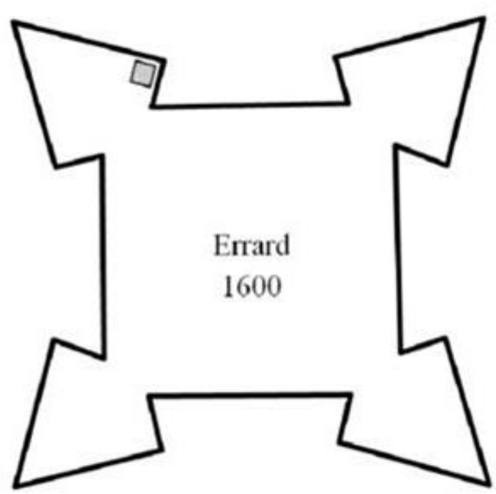
Άξονας Συμμετρίας

1. Χάραξε τους άξονες συμμετρίας στα παρακάτω σχήματα:

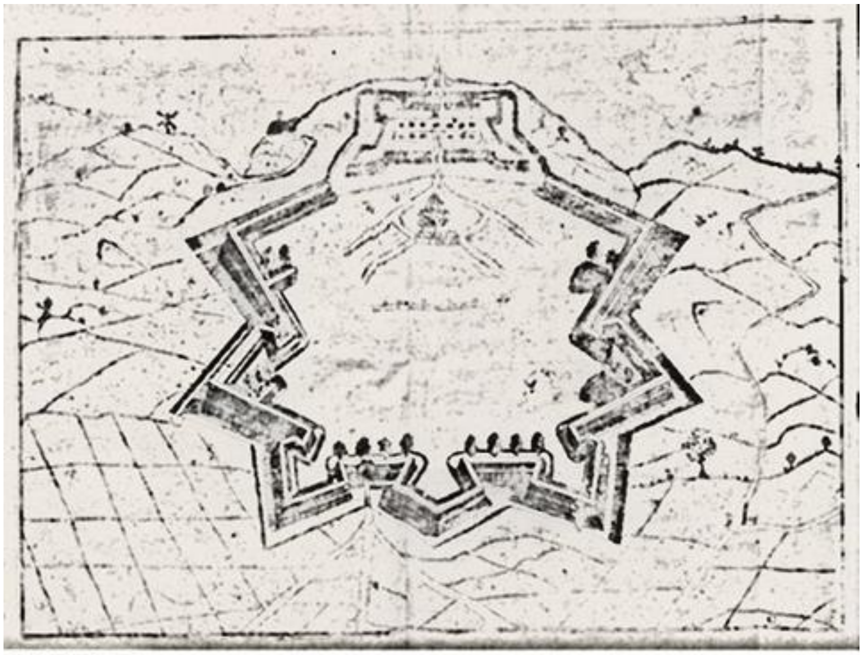
α)



β)

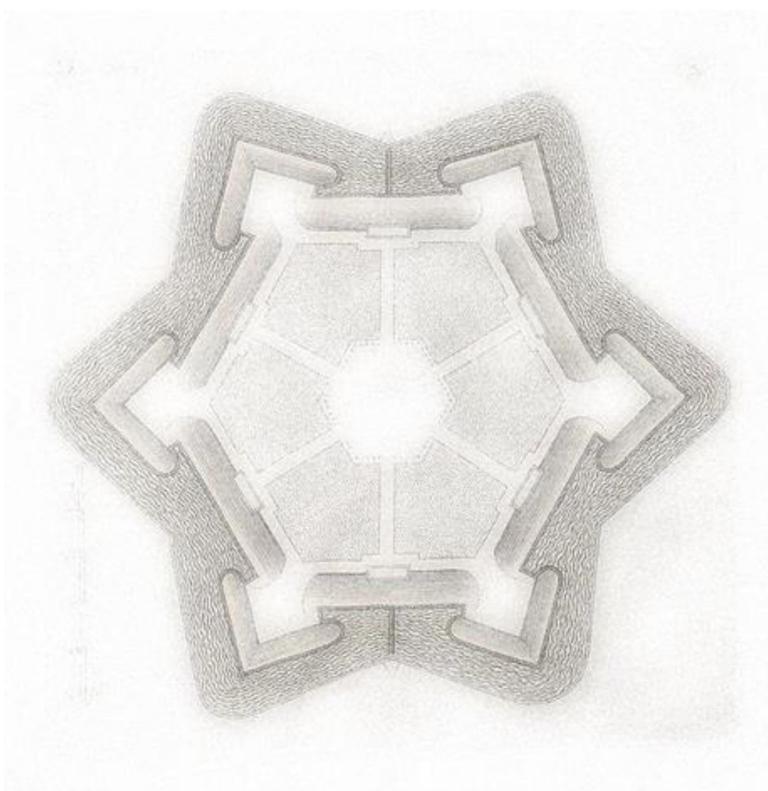


γ)

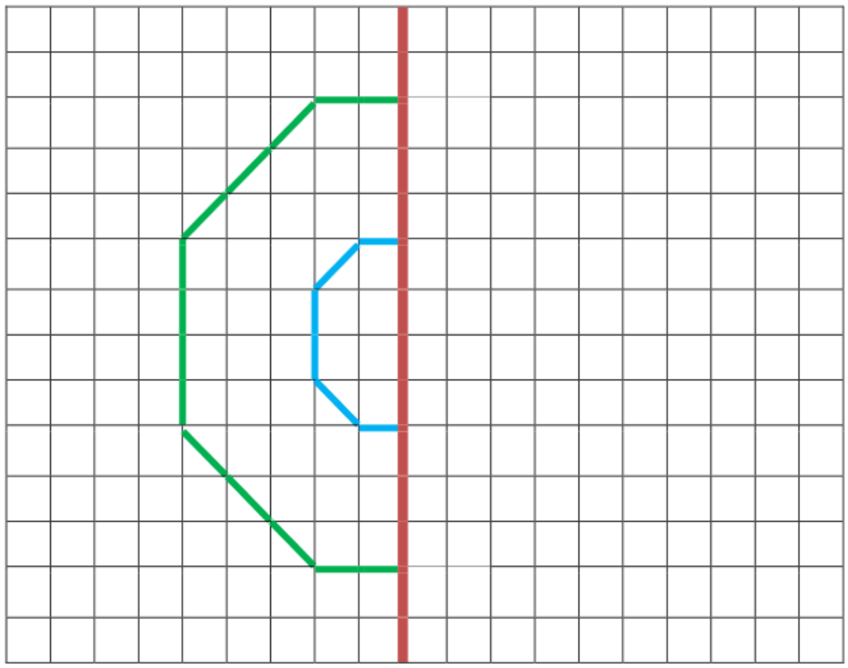


Quelle: Deutsche Fotothek

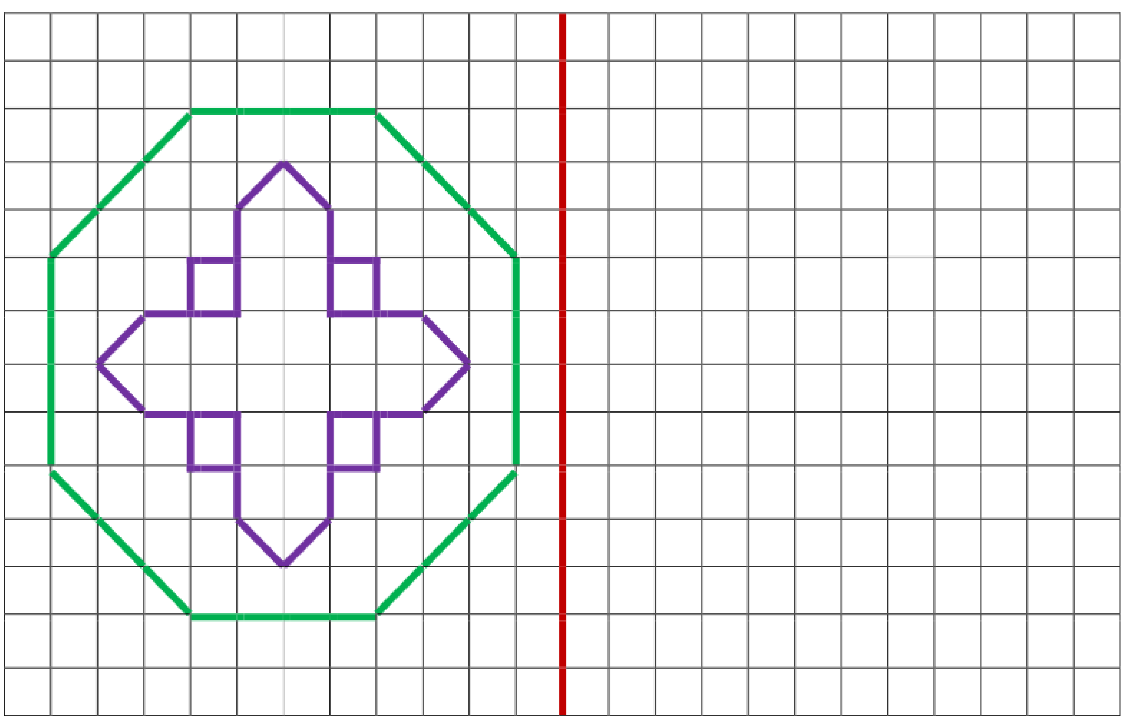
δ)



2. Συμπλήρωσε το παρακάτω σχήμα ως προς τον άξονα συμμετρίας. Τι σχήμα προκύπτει; ……………………………



3. Σχεδίασε το συμμετρικό επίπεδο σχήμα του παρακάτω σχήματος ως προς τον άξονα συμμετρίας.



Παράρτημα 7

Δείγμα 1

Αυτο το σχημά είναι του Errard

• Για να το φτιάξεις πρώτα κανεις ένα ευθυγραμο τμήμα ΑΒ

• Τωρά φτιάξε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Για να το φτιάξεις πάρε τον διαβήτη και βάλ' τον πάνω στο ευθύγραμο τμήμα ΑΒ και κάνε και από τις δύο πλευρές μισό κύκλο. Εκεί που τέμνονται σημείωσε το σημίο Γ. Σβήσε τις υπό- λυπες γραμμές και ένωσε το Γ με το Α και το Β.

• Μετα για να φτιάξεις το ευθύγραμο τμήμα ΑΔ πάνω στο ευθύγραμο τμήμα ΒΓ, πάρε τον γνώμονα και βαλ' τον πάνω στο ΑΓ, από τη γωνία που είναι 45° και ένωσε τη γραμμή από το ευθύγραμο τμήμα ΒΓ στην γωνία Α και σημίωσε το σημίο Δ.

• Για να φτιάξεις το σημίο Ε στο ευθύγραμο τμήμα ΑΓ ίσο με το ΔΒ, πάρε τον διαβήτη και μέτρησε το ΔΒ. Χωρίς να το κουνίσεις βάλ' το στο ευθύγραμο τμήμα ΑΓ και σημίωσε το σημίο Ε.

• Μετά πρέπει να φτιάξεις το σημείο Η που να είναι το μισό της γωνίας Λ. Αν ξέρεις ότι η γωνία Λ είναι 45° τότε το μισό του είναι 22,5°. Για να το βρείς πάρε το μοιρογνωμόνιο, πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα ΛΔ και σημείωσε που είναι το 22,5°. Από το ευθύγραμμο τμήμα ΕΒ κάνε μια γραμμή έως το σημείο Λ και έτσι φτιάχνεις το ευθύγραμμο τμήμα ΗΛ.

• Τώρα φτιάξε το σημείο Ζ ίσο με το Η. Οπότε, πάρε τον διαβήτη και βάλτον πάνω ευθύγραμμο τμήμα ΕΗ. Χωρίς να το κουνήσεις, βάλτο πάνω στο σημείο Δ και εκεί που θα σημειώσεις θα είναι το σημείο Ζ.

• Κάνε την απόσταση απο το σημείο Η στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ.

• Μετά κάνε την απόσταση απο το σημείο Ζ στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ.

• Τώρα ένωσε το σημείο Η με το σημείο Ζ και έτσι έφτιαξες το ευθύγραμμο τμήμα ΗΖ.

• Τέλος πέρασε με κόκκινο το ευθύγραμμο τμήμα ΛΙΗΖΘΒ

- Για να συνεχίσεις το σχήμα στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ πάρε τον διαβήτη και βάλ' τον πάνω στο ΒΓ και κάνε και από τις δύο πλευρές μισό κύκλο εκεί που τέμνονται σημείωσε το. Σβήσε τις υπόλοιπες γραμμές και ένωσε το με το Γ και το Β.

- Συνέχισε το παραπάνω βήμα μέχρι να σχηματιστεί ένα εξάγωνο

- Πάρε ένα άλλο χαρτί και στο πρώτο τρίγωνο που έκανες πάρε το χαρτί και βάλ'το πάνω του και ξεπατίκωσε το κόκκινο ευθύγραμμο τμήμα. Ξεπατίκωσέ το και στα άλλα τρίγωνα. Και είναι έτοιμο!

Δείγμα 2

Αυτό που έφτιαξα είναι το σχέδιο του οχυρού του Jean Errard.

Πρώτα σχεδίασα ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ περίπου 10 εκατοστά. Άνοιξα τον διαβήτη στο ίδιο μήκος της γραμμής στο σημείο Α και τον έφερα πιο κοντά στο σημείο Β και το Β πιο κοντά στο Α ώστε να δημιουργηθεί ένα Χ και στη μέση του βάζω μια τελεία. Αυτό είναι το σημείο Γ. Έβαλα τον γνώμονα με της 45° γωνίας στη γραμμή ΑΓ τραβάω γραμμή και έτοιμη η ημιευθεία ΑΔ και αλλάζω την μεριά του γνώμονα με τις 45° στη γραμμή ΒΓ τραβάω γραμμή και έτοιμη η ημιευθεία ΒΕ. Ύστερα παίρνω το μοιρογνωμόνιο, το βάζω στη γραμμή ΑΔ και το σημάδι του το βάζω γωνία ΑΓ και σημαδεύω τις 22,5° και σημείο Η. Το βάζω το σημάδι του στη γωνία ΒΓ και σημαδεύω τις 22,5° και το σημείο Ζ. Έκανα το ευθύγραμμο τμήμα ΗΖ. Μέτρησα την απόσταση ΖΔ και την ΕΗ και έκανα την κάθετη απόσταση ΗΙ και ΖΘ. Ζωγραφίζω με ένα έντονο χρώμα τις αποστάσεις ΑΙΗΖΘΒ. Έτσι έφτιαξα δύο μισούς προμαχώνες.
Έπειτα με βάση το τρίγωνο σχεδίασα έναν κύκλο πάνω του και τον χώρισα σε έξι ισόπλευρα τρίγωνα με του διαβήτη. Σε ένα άλλο χαρτί ξεπατικωσα την απόσταση ΑΙΗΖΘΒ. Τέλος ξεπατικωσα την κόκκινη γραμμή σε όλα τα τρίγωνα.

Δείγμα 3

Αυτό είναι το σχέδιο του Jean Errard.
Για να το φτιάξεις, πρώτα θα πρέπει να κάνεις
ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Με το διαβήτη θα φτιά-
ξεις ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Δηλαδή, θα μετρήσεις πόσο
είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, την μύτη θα την ακου-
μπήσεις <u>στη</u> πλευρά Α και να κάνεις ένα ημικύκλιο, και
το ίδιο κι απ' την πλευρά Β. Έπειτα θα χαράξεις δύο γραμμές
από το σημείο που ενώνονται τα ημικύκλια. Μετά παίρνεις
τον ισοσκελές χάρακα, τον ακουμπάς πάνω στην γραμμή
ΑΓ και σχεδιάζεις μια γραμμή που ονομάζεται ΑΔ.
Έπειτα παίρνεις τον διαβήτη, μετράς πόσο είναι η
ΒΔ, βάζεις ένα σημάδι στο σημείο που μέτρησες και
χαράζεις μια γραμμή με τον χάρακα που ονομάζεται
ΑΕ. Μετά θα χωρίσεις τη γωνία ΓΑΔ στη μέση με το
μοιρογνωμόνιο για να φτιάξεις το ευθύγραμμο τμήμα
ΑΗ. Έπειτα μετράω πόσο είναι το ΕΗ με τον
διαβήτη και σχεδιάζω το ΔΖ. Μετά σχεδιάζεις
την απόσταση ΗΙ απ' το Η στο ΑΔ και την
απόσταση ΖΘ από το Ζ στο ΒΕ και σχεδιάζω
την Κουρτίνα ΗΖ. Έπειτα σχεδιάζω έντονα με κόκκινο
χρώμα την σπασμένη γραμμή ΑΗΙΖΘΒ. Αυτό
το σχεδιάζω άλλες 5 φορές.

Δείγμα 4

Εγώ αυτό που έφτιαξα είναι ένα εξάγωνο οχυρό. Για να το φτιάξεις κι εσύ πρέπει να:
Παίρνεις το διαβήτη τον ανοίγεις κάνεις ένα κύκλο μετά με την ίδια ακτίνα δηλαδή το ίδιο άνοιγμα πας και χωρίζεις τον κύκλο σε μικρότερα έξι ισόπλευρα τρίγωνα. Μετά παίρνεις τον ισοσκελές γνώμονα και τον βάζεις στην ευθεία ΑΓ για να φτιάξεις γωνία 45° και για να το κάνω σωστά, ο ισοσκελές πρέπει να γίνει ένα με την ευθεία ΑΓ. Μετά παίρνω τον διαβήτη μετράω πόσο είναι το σημείο ΑΒ και μετά με το ίδιο άνοιγμα και σχηματίζω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ πάνω στην ευθεία ΑΓ. Μετά χωρίζω τη γωνία 45° στη μέση και για να το κάνω παίρνω το μοιρογνωμόνιο το βάζω στο ΑΔ και φέρνω γωνία 22,5° η οποία τέμνει το ΒΕ στο σημείο Η. Μετά παίρνω το διαβήτη μετράω πόσο είναι το ΕΗ και φτιάχνω το ΖΔ. Μετά τραβάω την κουρτίνα δηλαδή το (ευθύγραμμο τμήμα). Μετά παίρνεις έναν από τους δύο γνώμονες και τραβάς την απόσταση ΗΙ (κάθετο ευθύγραμμο τμήμα από Η μέχρι ΑΔ) και μετά μετράς πόσο είναι το ΑΙ και σχεδιάζεις την απόσταση ΒΘ πάνω στο ΕΒ.
Και τέλος περνάς με κόκκινο χρώμα το ΑΙΗΖΘΒ, έφτιαξες δύο ημι-προμαχώνες. Και για να το κάνεις ολόκληρο το κάνεις άλλες πέντε φορές.

Δείγμα 5

Ξεκίνησα να κάνω μία γραμμή και να κάνω δύο οβάλ του ΓΛΒ. Έσβησα από που περησέμη και πήρα τον γνώμονα και το έβαλα πάνω στην γραμμή της ΓΛ και έφτια το ΑΔ Μετά τράβηξα μία γραμμή και μετά πήρα ξανά τον γνώμονα και τράβηξα την γραμμή και έτσι γράψαμε και το ΒΕ. Μετά πήρα το μοιρογνωμόνιο και κύρισα 45° μοίρες στην μέση (22) μετά πήρα τον διαβήτη για να βρω πόσο είναι για να το κάνω από την άλλη. Μετά έπρεπε να κάνω την κουρτίνα (ίσια γραμμή) μετά τράβηξα μια ίσια γραμμή και έφτιαξα την ΗΙ και μετά πήρα τον διαβήτη και είδα πόσο είναι έξω να το βάλω και από την άλλη. Και μετά το συνδέω με διαβήτη.

Δείγμα 6

Πρώτα φτιάχνουμε έναν κύκλο μετά με το διαβήτη από το κέντρο βάζουμαι ένα τυχέο σημάδι κι από το σημάδι φτιάχνουμε κι άλλα μετά από τα σημάδια τραβάμαι ευθίες προς το κέντρο μετά συνδέουμαι όλες τις γραμμές με ευθύγραμμα τμήματα AB μετά θέρνουμε μια γωνία 45° μοιρών ΓΑΔ και μετά μια γωνιά 45° μοιρών ΓΕΒ μετά με το μοιρογνωμόνιο φτιάχνουμαι μια ευθεία AH 22,5° μοιρών μετά με το διαβήτη μετράω την ευθεία EH και την φτιάχνω από δίπλα και βάζω ένα σημάδι και τραβάω μια γραμή και ενώνω την HZ*και μετά στο τέλος κοκκινίζω την AIHZΘB.

Αυτό που έφτιαξα είναι ένα εξάγωνο

Με τις οδηγίες που έγραψα

* Μετά με το γνώμωνα τραβάμε μια κάθετη ευθεία HI μετά πάλι με το γνώμωνα κάνω το ίδιο αλλά σχεδιάζω την εθυεία ZΘ

Δείγμα 7

Είναι ένα οχυρό με προμαχώνες
Κάνεις το εξάγωνο έπειτα κάνουμε
έξι ισόπλευρα τρίγωνα με τον διαβήτη,
τώρα κάνουμε το ισόπλευρο τρίγωνο
ΑΒΓ, μετά κάνουμε με το [illegible]
την γωνία 45° τη ΓΑΔ, και μετά ανοίγουμε
τον διαβήτη μεταφέρουμε το ΒΔ,
μετά κάνουμε την ευθεία ΑΕ * και
μετά ανοίγουμε τον διαβήτη
και κάνουμε την ευθεία ΕΗ,
και τον διαβήτη χωρίς να τον κουνήσεις
μετά κάνουμε το ΔΖ και τραβάω
τη [illegible] και
μετά με τον διαβήτη χωρίς να
κουνήσουμε τον διαβήτη
και [illegible]
μετά κάνουμε την ευθεία ΖΗ
και μετά χρωματίζεις με
κόκκινο τις ευθείες ΑΙΗ ΖΘΒ και
κάνουμε το ίδιο άλλες πέντε φορές

* με το μοιρογνωμόνιο στη γωνία ΓΑΔ
το 22,5 και μετά κάνουμε
το ίδιο και στη γωνία ΓΒΕ

Δείγμα 8

κάνουμε μια γραμμή με το χαρακα
περνουμε τον διαβήτη και , σημειώνομε
το μυτερό , κομμάτι στο τέλος της γραμμής
και το αλλο που φτιαχνουμε ένα
κυκλο στην αρχή της γραμμης
και το κάνουμε πάλι ανάποδα
και μετά φτιαχνω ένα
κύκλο , με το διαβήτη ,
σειμειώνουμε στο κατω αρριστερά
του τριγώνου το (Α) , στα
κάτω δεξιά του τριγώνου βάλω
το Β και , πάνω πάνω στη
μυτερή γωνία του τριγώνου
βάλω το (Γ) , παίρνω το
μοιρογνωμόνιο το και σημειώνω
στη Α γωνία ένα κυκλάκι απο
το , μοιρογνωμόνιο και βάλω
κι άλλη μια τελεία στο 45°
και αν το κάνατε σωστά βρήκατε
τη (Δ) , παίρνουμε τον διαβήτη
και βρούμε την απόσταση ΒΔ
και παίρνουμε όπως ήταν το
διαβήτη και παίρνουμε την
μυτερή πλευρά το σημειώνουμε
στο (Α) και την άλλη τη σειμειώνουμε
στη γραμμή όπως ήταν η απόσταση
του (ΒΔ) και σου βγήκε το Ε

για το Η πέρνω το μοιρογνωμόνιο
την βάλω στην Η γωνία, όπως
κάναμε με το Δ σημειώνω ως
το 22,5, για το Ζ παίρνω
το διαβήτη βλεπουμε την απόσταση
της ΑΗ και το κάνουμε το
ίδιο αλλά με ΒΖ, φτιάχνουμε
μια ευθεία γραμμή ΗΖ,
παίρνουμε το γνώμονας
βαλουμε τη γωνία του γνώμονα
στην κάθετη ευθεία και κάνουμε
μια γραμμή στη Ζ και
στην Η και τη γραμμή της
Ζ είναι Θ και της Η
είναι Ι, και στο τέλος
παίρνω μια κόκκινη ξυλομπογιά
και χρωματίζω την ΑΙΗΖΘΒ
και πρέπει να το κάνετε κι
αλλες φορες για ενα
εξαγωνιο οχυρό

Δείγμα 9

- Σχεδιάζω ένα ευθύγραμμο τμήμα Α Β.
- Σχεδιάζω ένα ισόπλευρο τρίγωνο Α Β Γ.
- Σχεδιάζω τη γωνία 45° ΓΑΔ.

- Σχεδιάζω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ
- Σχεδιάζω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ πάνω στη γραμμή ΑΓ ίσο με το ΒΔ
- Σχεδιάζω το ευθύγραμμο τμήμα ΒΕ
- Η γωνία ΕΑΔ να χωριστεί σε 2 ίσα μέρη με το ευθύγραμμο τμήμα Α Η.
- Σχεδιάζω το ευθύγραμμο τμήμα ΔΖ ίσο με το ΕΗ και σχεδιάζω την κουρτίνα ΗΖ.
- Σχεδιάζω την απόσταση ΖΘ στη γραμμή ΒΕ και σχεδιάζω την απόσταση ΗΙ κάθετα στην ΑΔ όπως στην ΖΘ.
- Πατάω την τεθλασμένη γραμμή ΑΙΗΘΖΒ με ένα κόκκινο χρώμα. Έτσι σχεδιάζω 2 ημι-προμαχώνες
- Ανοίγω τον διαβήτη όσο είναι το ευθύγραμμο τμήμα Α Β.

- Παίρνω ένα άλλο χαρτί και σχεδιάζω με τον διαβήτη έξι ισόπλευρα τρίγωνα έτσι ώστε να σχηματίζουν εξάγωνο.
- Κάνω ξετπατικοτούρα έξι φορές την τεθλασμένη γραμμή ΑΙΗΘΖΒ

Δείγμα 10

Τι είναι αυτό που εφτιαξες;

Πως μπορω να το φτιαξω κι εγώ

Έγω ξεκίνισα με το διαβήτη
αμα δεν το κανω με διαβήτη
θαμας βγεί λαθος για τι η πλευ-
ρες. Δεν θα βγουν ίσια τόρα
ξεκιναω. ✓ ενοήτε πέρνω χαρακα
η γνωμονας

Σχεδιάζω ένα ευθυγραμο ΑΒ.
Στο ΑΒ σχεδιάζω το ισο πλευρο τρι γωνο ΑΒΓ.
Σαν συνέχεια φτιαχνω την γωνια ΓΑΔ.

Με χάρακα και συνεχίζω

Σχεδιαζω το ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ,
πάνω στην γραμμή ΑΓ μίσο με το ευθύγραμο
τμημα ΒΔ. για να με τρίσω αμα είναι
σωστες χρισιμοποια το διαβήτη

Σχεδιάζω το ευθύγραμμο ΒΕ.

Η γωνία ΕΑΔ χωρίζεται σε δύο ίσες γωνίες
το ευθυγραμο ΑΗ.
Σχεδιασε το ευθυγραμμο τμήμα ΔΖ.-

Ίσο με το ΕΗ και σχεδίασε την
την κουρτίνα (ευθυγραμμο τμημα) ΗΖ

Σχεδίασε ευθυγραμμο τμημα ΔΖ ίσος
με ίσο ΕΗ, και σχεδίασε την κουρτίνα

Σχεδίασε την απόσταση ΖΘ στο
ευθυγραμμο τμημα ΒΕ και σχεδίασε
την απόσταση ΗΙ

Οταν σχεδιάσεις 6 φορές
τα τετραγωνα θα κάνεις
ένα εξαγωνο αστέρι

Δείγμα 11

Εγώ άρχισα με έναν κύκλο ~~που~~ ~~τοι~~ έκανα με τον διαβήτη. Κράτησα τον διαβίτη ίσα και μέτρισα της γωνίες. 3 Μετά το χώρισα σε έξι ίσα κομάτια.
Μετά έκανα το ΑΒ και έκανα το ΑΒΓ για να κάνω το ΑΔ πήρα το μοιρογνωμόνιο το έκανα 45° και έκανα το ΑΔ και ~~το~~ κάνω ΔΕ μέτρισα με τον διαβήτη μέτρισα το ΒΔ και το κάνουμε να γίνι ΑΕ και με τον διαβήτη που μετρίσαμε το ΒΔ ~~το~~ βάζουμε στην γωνία την μητέρη γωνία τον διαβίτη και ~~σημ~~ σημαδεύουμε το Ε ~~το~~ κάνω ΖΗ τραβάω μια γραμή από το Ζ στο Η και τα γράφω και για να πάμε Η-Ι τραβάμε μια γραμή και γράφουμε το Ι και φτιάξαμε έναν προμαχώνα με το εξάγωνο.

Και το κύκλο για να γίνι ένα εξάγωνο

Δείγμα 12

- Στην αρχή έκανα με τον διαβήτη έναν μεγάλο κύκλο.
- Και μετά το χώρισα σε ισοτρίγωνα
- Το χώρισα έτσι κρατώντας τον διαβήτη σταθερό
- Μετά μέτρησα πόσες μοίρες είναι η γωνία (Α)(Β)
- Μετά μέτρησα πόσες γωνίες είχε το σχήμα

Μετά χάραξα μια γραμμή στη μέση του σχήματος

Μετά έκανα το ευθύγραμμο τμήμα (Γ) και (Δ)

Και συνέχισα και ευθύγραμμο τμήμα (Ε) και (Ζ)

Δείγμα 13

Πρωτα σεκινισα με τα ισοπλευρα τριγονα εβαλα
6 ισοπλευρα τριγωνα για να το κανις σωστο για το
σωστο τριγωνο. κανε μια ευθια γραμμη παρε τον
διαβιτη μετρισε τι ευθια σου με το διαβιτη τωρα
το διαβητη ειναι ανιθετο κανε ενα «Χ» εστι μετα
κανε μια τελια στη μεση του «Χ» βγαλε το
«Χ» αλλα οχι το κικλο παρε τον χαρακα και
κανε 2 ευθιες και κανε το 6 φορες το ιδιο τριγωνο
μετα παρε το γωνιομονογραφο τι μπορις να κανις
στιμο γωνια 45° κανε το παλι πα' τιν αλλι μερια
και κανε το στα 6 τριγωνα Τωρα ~~τωρα~~ κωπσα
με μολιβι τη γωνια 45° σε 22,5° και απ τιν
αλλι μερια και στα 6 τριγωνα για να κανι ενα
τριγωνο προναχονα παρε τιν ευθια 22,5° σταματα
για 4 εκ. περασε τιν απεναντι ευθια μεχρι 1,6 εκ.
κανε μια ευθια μεχρι 2,4 εκ. Το ιδιο για κατω → 1,6 → 4
παλι σε ολα τα τριγωνα.

Ετσι εφτιαξες ενα εξαγονο προναχονα.

Δείγμα 14

Εγώ το Προμαχώνα τον εφτιάξα κανόντας έναν κύκλο
με τον διαβήτη μετά με το ίδιο μεγέθος του ~~διαβήτη~~ κάνεις
6 σημάδια και κάνεις μια τέλεια στο κέντρο μετά με έναν
χαράκα τράβεις γραμές στα σημάδια και τα ενώνεις
~~μ~~ την τέλεια; στο κέντρο μετά με τα ίδια τα ενώνεις
και βγαίνει ένα εξάγωνο μέτα παίρνεις τον χαράκα που έχει
έτοιμες 45 μοίρες ξαπλώνεις αυτόν τον χαράκα στην γραμμή ΑΓ
και τραβάς μια γραμμή ΑΔ; Το ίδιό και απ'την αλλή μέρια.
μετα παίρνεις το μοιρογνώμονο και τον ξαπλώνεις στην ακρή
μετράς 22,5 μοίρες ΑΗ για να μήν κάνεις το ίδιο παίρνεις
τον διαβήτη και τον ανοίγεις όσο είναι η γραμμή; που
τραβήξες και την γραμμή ΕΔ που είναι απέναντι μετά
πας στην αλλή μέρια και με τό ίδιο μέγεθος βάζεις
μια τέλεια και με τον χαράκα τραβάς την γραμμή
μέτα παίρνεις τον γνώμονα και τον ξαπλώνεις καλά
στη γραμμή ΗΙ και όταν σημαδέψεις καλά τράβας μια γραμμή
το ίδιο και απ'την αλλή μέρια. Βάζεις δυο τέλειες στις γραμμες
τις ενωνείς με τόν χαράκα το ίδιο αλλές πέντε φορές
ετσί φτιαχνεταί το οχυρό

Αυτό που εφτιάξα είναι οχυρο με προμαχώνες
του Jean Errand