



ΕΘΝΙΚΟ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

Τμήμα Φυσικής

Πτυχιακή Εργασία

**Μελέτη ασταθειών σε μαγνητισμένα ρευστά με χρήση κβαντομηχανικού φορμαλισμού**

Σοφία Ρουφάνη Σιταρένιου

A/M 1110202000163

Επιβλέπων:

Νεκτάριος Βλαχάκης

Καθηγητής

Αθήνα 2024



## Περίληψη

Στη παρούσα εργασία θα αναλυθεί ένας "νέος" τρόπος μελέτης ασταθειών σε πλάσμα βασισμένος στο βιβλίο "Magnetohydrodynamics of Laboratory and Astrophysical Plasmas" [1] των Goedbloed, Keppens και Poedts. Συγκεκριμένα, πρόκειται για μια ανάλυση που εκμεταλλεύεται εργαλεία από την Κβαντομηχανική και δημιουργεί μια μαθηματική αναλογία ανάμεσα σε ένα πρόβλημα μελέτης αστάθειας με ένα πρόβλημα Κβαντικής Μηχανικής η επίλυση του οποίου ανάγεται στην λύση της χρονοανεξάρτητης εξίσωσης Schrödinger. Θα γίνει αναφορά τόσο στην περίπτωση στατικής αδιατάραχτης κατάστασης, όσο και στάσιμης από την οποία θα προκύψει το ισχυρό εργαλείο μελέτης ασταθειών Spectral Web. Τέλος, προκειμένου να γίνει αντιληπτή η χρησιμότητα της μεθόδου, θα γίνει εφαρμογή αυτής σε ένα απλό υδροδυναμικό πρόβλημα αστάθειας Kelvin - Helmholtz.

## Abstract

In this thesis, a "new" way of studying plasma instabilities based on the book "Magnetohydrodynamics of Laboratory and Astrophysical Plasmas" [1] written by Goedbloed, Keppens and Poedts will be analyzed. Specifically, it is an analysis that exploits tools from Quantum Mechanics and creates a mathematical analogy between an instability problem and a Quantum Mechanical problem whose solution is reduced to the solution of the time-independent Schrödinger equation. Reference will be made to both the static and the stationary equilibrium states from which the powerful tool for studying instability problems called "Spectral Web" will emerge. Finally, in order to understand the usefulness of the method, it will be applied to a simple hydrodynamic problem of Kelvin - Helmholtz instability.



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Φασματική θεωρία στατικών πλασμάτων</b>	<b>9</b>
2.1	Έννοιες ευστάθειας - αστάθειας	9
2.2	Γραμμικοποίηση εξισώσεων ιδεατής ΜΥΔ	10
2.3	Τελεστής δύναμης	11
2.4	Φάσμα	13
2.5	Εκμετάλλευση μαθηματικών εργαλείων της Κβαντομηχανικής	14
2.6	Ενεργειακή Προσέγγιση	15
2.7	Ανάλυση για πλάσματα σε επαφή	17
2.7.1	Πλάσμα σε επαφή με κενό	17
2.7.2	Πλάσμα σε επαφή με πλάσμα	20
<b>3</b>	<b>Φασματική θεωρία στάσιμων πλασμάτων</b>	<b>23</b>
3.1	Εξισώσεις ισορροπίας, προσθήκη διαταραχών και γραμμικοποίηση των εξισώσεων	23
3.2	Γενικευμένος τελεστής δύναμης	24
3.3	Ενέργεια στάσιμων πλασμάτων	29
3.3.1	Διατήρηση ενέργειας	29
3.3.2	Τελεστής Doppler - Coriolis	30

3.3.3	Εκφράσεις για κινητική και δυναμική ενέργεια, Νέο ενεργειακό κριτήριο ευστάθειας . . . . .	31
3.4	Spectral Web . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Εφαρμογή της μεθόδου του Spectral Web</b>	<b>36</b>
4.1	Σύστημα εξισώσεων και οριακές συνθήκες . . . . .	37
4.2	Αδιαστατικοποίηση των εξισώσεων . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Αποτελέσματα της εφαρμογής</b>	<b>42</b>
<b>6</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>70</b>

# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Προκειμένου να αναπτύξουμε το κίνητρο της παρούσας εργασίας χρειάζεται να απαντηθούν δυο ερωτήματα: Πρώτον τι είναι οι αστάθειες και δεύτερον ποια η σημασία της μελέτης αυτών. Σαν αστάθεια ορίζουμε κάθε περίπτωση που κάποια ιδιότητα ή ένα μέγεθος μιας οποιασδήποτε ροής θα μεγαλώσει εκθετικά και χωρίς φραγμό. Μια γενική απάντηση στο γιατί η μελέτη ασταθειών είναι σημαντική είναι πως βοηθά στο να καταλάβουμε τη συμπεριφορά των ρευστών σε διάφορα συστήματα. Μελετώντας λοιπόν πως προκύπτουν αυτές οι αστάθειες αναπτύσσονται μοντέλα για την πρόβλεψη και τον έλεγχο των συμπεριφορών αυτών. Η μελέτη των ασταθειών γίνεται μέσω του γραμμικού προβλήματος, το οποίο έχει ως λύση είτε ημίτονα και συνημίτονα, δηλαδή κύματα, είτε εκθετικά, δηλαδή αστάθειες. Καθημερινά παραδείγματα εφαρμογών της μελέτης ασταθειών είναι η δομική ευστάθεια με την οποία ασχολούνται πολιτικοί μηχανικοί προκειμένου υλικά, κτήρια και εγκαταστάσεις να είναι όσο το δυνατόν πιο σταθερά, αεροναυπηγοί και ναυπηγοί που μελετώντας τις αστάθειες ροών αέρα και θάλασσας βελτιστοποιούν την κατασκευή αεροσκαφών και πλοίων αντίστοιχα. Ακόμα ένα παράδειγμα είναι οι αστάθειες σε φαινόμενα της ατμόσφαιρας, όπως βλέπουμε στην εικόνα [1.1](#), η μελέτη των οποίων είναι χρήσιμη για την πρόβλεψη του καιρού.

Στην παρούσα εργασία θα μελετηθούν αστάθειες στο πλάσμα, δηλαδή σε μαγνητισμένο ρευστό. Οι εξισώσεις φυσικής πλάσματος δεν έχουν χαρακτηριστική κλίμακα. Αυτό σημαίνει ότι οι ίδιες εξισώσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν για συστήματα τελείως διαφορετικών διαστάσεων, όπως τα εργαστηριακά και τα αστροφυσικά πλάσματα των οποίων οι κλίμακες διαφέρουν κατά αρκετές τάξεις μεγέθους. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει πως οι παρατηρήσεις των ασταθειών που αναπτύσσονται στα αστροφυσικά πλάσματα μπορούν να δώσουν πολύτιμες πληροφορίες για την διαχείριση των εργαστηριακών πλάσμάτων, για παράδειγμα στην επίτευξη ελεγχόμενης πυρηνικής σύντηξης. Αντίστροφα, η εργαστηριακή μελέτη πλάσμάτων μπορεί να μας βοηθήσει να αντιληφθούμε τους μηχανισμούς με τους οποίους πράγματα συμβαίνουν σε ρευστά αστροφυσικών κλιμάκων. Δηλαδή, υπάρχει μια συνεχής μεταφορά γνώσης από τη φύση στο εργαστήριο και από το εργαστήριο στη φύση, μια αμφίδρομη διαδικασία.

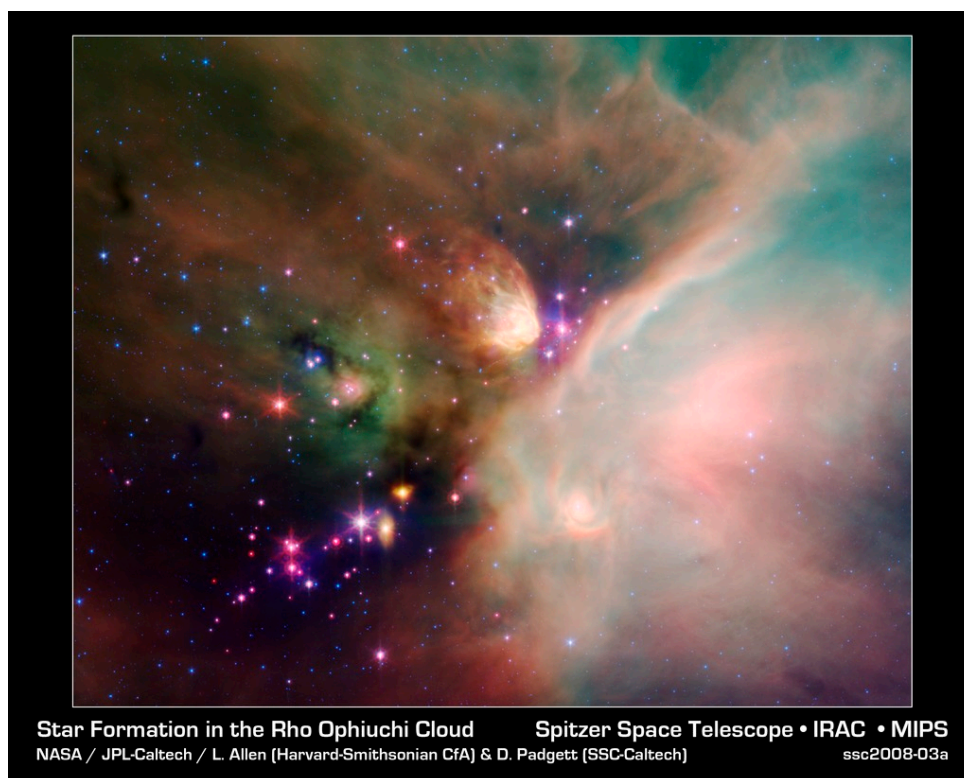


Εικόνα 1.1: Σχηματισμός στα σύννεφα λόγω αστάθειας Kelvin-Helmholtz (source: wikicommons)

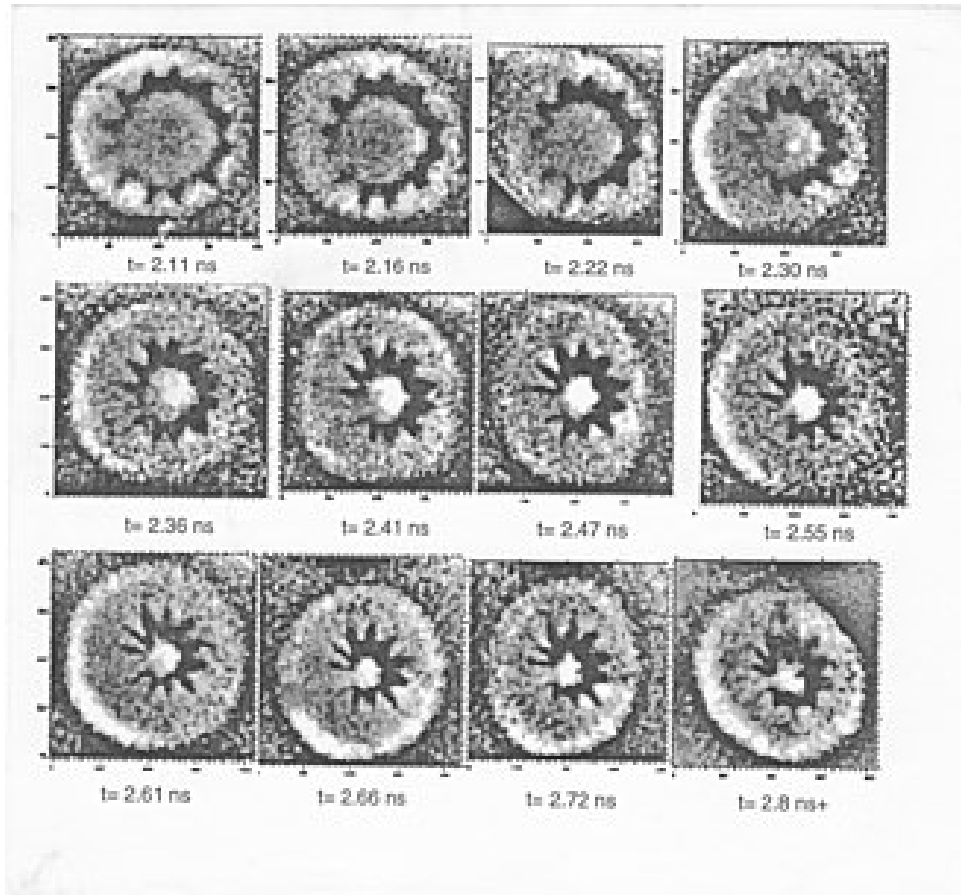
Υπάρχουν πολλά παραδείγματα ασταθειών στην αστροφυσική, καθώς το πλάσμα "γεμίζει" το σύμπαν. Κάποια από αυτά είναι η βαρυτική αστάθεια Jeans η οποία είναι υπεύθυνη για την κατάρρευση νεφών και τον σχηματισμών αστέρων όπως βλέπουμε στην εικόνα 1.2, οι διάφορες αστάθειες που αναπτύσσονται στο εσωτερικό των αστέρων και επηρεάζουν τη δομή και την εξέλιξη τους, δηλαδή αν θα καταλήξουν σε *super nova* ή μαύρες τρύπες. Ακόμα, παίζουν ρόλο στην δυναμική εξέλιξη των γαλαξιών καθώς μέσω ανάπτυξης ασταθειών γίνεται αναδιάταξη της ύλης και της ενέργειας.

Όσον αφορά εργαστηριακά πλάσματα και την μελέτη των ασταθειών τους, μια από τις μεγαλύτερες σύγχρονες προκλήσεις είναι η ελεγχόμενη πυρηνική σύντηξη. Ένα τέτοιο επίτευγμα θα έλυσε το ενεργειακό πρόβλημα της ανθρωπότητας, καθώς η σύντηξη θα αποτελούσε μια καθαρή και απεριόριστη πηγή ενέργειας. Οι αντιδραστήρες σύντηξης απαιτούν πλάσμα περιορισμένο και "σταθεροποιημένο" προκειμένου να αναπτυχθούν οι κατάλληλες συνθήκες για διατηρούμενη σύντηξη. Ένα λοιπόν από τα βασικά προβλήματα για την επίτευξη της, αποτελεί ο περιορισμός του πλάσματος, καθώς οι διάφορες αστάθειες, όπως για παράδειγμα η αστάθεια συστροφής (*kink instability*) λόγω μαγνητικού πεδίου, που αναπτύσσονται στο πλάσμα καθιστούν ιδιαίτερα δύσκολο αυτό να περιοριστεί και να μείνει "σταθερό" για το απαιτούμενο χρονικό διάστημα. Υπάρχουν διάφορες ομάδες ανά τον κόσμο που ασχολούνται με την μελέτη των εργαστηριακών πλασμάτων και των ασταθειών τους. Μία από αυτές είναι το [Bellan Plasma Group](#) στο Caltech [2] στο οποίο ασχολούνται με πειράματα μαγνητουδρودυναμικής σε διάφορες γεωμετρίες. Στόχος τους είναι να δώσουν μέσω των πειραμάτων τους χρήσιμες πληροφορίες και γνώσεις σε διεργασίες αστροφυσικών πλασμάτων, ενώ πραγματοποιούν και προσπάθειες για ελεγχόμενη πυρηνική σύντηξη. Άλλες ομάδες είναι η PPPL ([Princeton Plasma Physics](#)





Εικόνα 1.2: Σχηματισμός αστέρων (Credit: NASA/JPL-Caltech/Harvard-Smithsonian CfA)

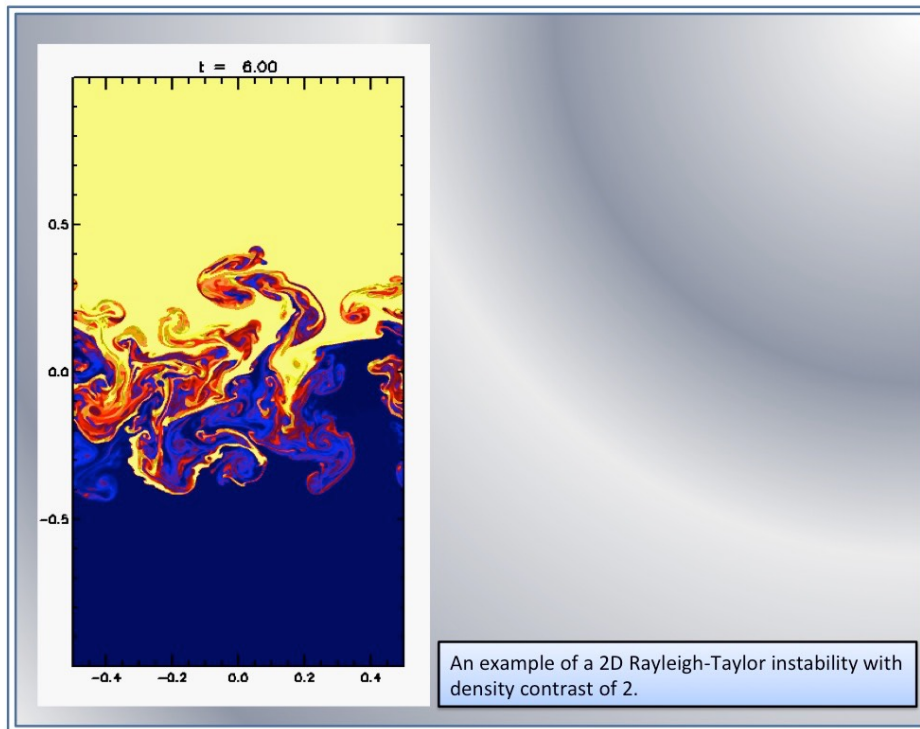


Εικόνα 1.3: Ανάπτυξη ασταθειών Rayleigh - Taylor σε αντιδράσεις πυρηνικής σύντηξης (Image credit: [Inertial confinement fusion](#))

[Laboratory](#)) [3] στην οποία ασχολούνται κυρίως με την ενέργεια που παράγεται από πυρηνική σύντηξη και η [LaPLA](#) [4] του τμήματος Ηλεκτρονικών Μηχανικών του Ελληνικού Μεσογειακού Πανεπιστημίου που εκτός από εφαρμογές πλάσματος ασχολείται και με εφαρμογές lasers.

Ακόμα, αξίζει να αναφερθεί ότι υπάρχουν ελεύθερης πρόσβασης κώδικες που λύνουν αριθμητικά το πλήρες μαγνητοϋδροδυναμικό (ΜΥΔ) πρόβλημα. Για παράδειγμα υπάρχει ο Pluto Code [5] (University of Torino) που λύνει, ανάμεσα σε άλλα, το πλήρες πρόβλημα για μεγάλα Mach numbers, εστιάζοντας κυρίως σε προσομοιώσεις αστροφυσικών ροών. Στην εικόνα 1.4 παρατηρούμε ένα στιγμιότυπο από αποτέλεσμα προσομοίωσης του κώδικα Pluto για αστάθεια τύπου Rayleigh - Taylor λόγω διαφοράς στην πυκνότητα των δυο ρευστών.

Στην συγκεκριμένη εργασία μας ενδιαφέρει η μελέτη κυμάτων και ασταθειών που αναπτύσσονται σε ρευστά, η οποία δεν απαιτεί την λύση του πλήρους προβλήματος αλλά του γραμμικού. Αυτό συνιστά μια σημαντική απλοποίηση καθώς μπορούμε να "χωρίσουμε" τα μεγέθη της ισορροπίας και τις διαταραχές. Θα παρουσιαστεί λοιπόν, ένας εναλλακτικός



Εικόνα 1.4: Προσομοίωση αστάθειας Rayleigh - Taylor (Image Credits: [The PLUTO Code](#))

τρόπος λύσης του γραμμικοποιημένου ΜΥΔ προβλήματος ασταθειών, χρησιμοποιώντας μαθηματικό φορμαλισμό Κβαντομηχανικής έναντι του "συνηθισμένου" τρόπου επίλυσης των διαταραχών [6], [7] ανάγοντας όλες τις εξισώσεις στην εξίσωση ορμής και λύνοντας με άγνωστο την ταχύτητα των διαταραχών. Σκεπτόμενοι την αναλογία της ρευστομηχανικής με την Κβαντική Μηχανική με πρώτη ματιά πρόκειται για δυο πεδία της Φυσικής αρκετά ασύμβατα. Και ενώ πράγματι από πλευράς φυσικής πραγματεύονται την μελέτη τελείως διαφορετικών πραγμάτων, καθώς στη βάση της η μελέτη ροών αποτελεί μακροσκοπική μελέτη, ενώ η Κβαντική μηχανική ασχολείται με το τι γίνεται σε μικροσκοπικό επίπεδο, προκύπτει πως τα μαθηματικά της τελευταίας μπορεί να αποτελέσουν χρήσιμο εργαλείο για την μελέτη ασταθειών τόσο μαγνητισμένων όσο και μη, ρευστών.

Μια πιο αναλυτική περιγραφή του θέματος της εργασίας και των κεφαλαίων που θα ακολουθήσουν είναι η εξής: Θα αναλυθεί η μελέτη του γραμμικοποιημένου προβλήματος διαταραχών ορίζοντας έναν τελεστή δύναμης και μια αντίστοιχη εξίσωση κίνησης. Ακόμα, θα προκύψει από αυτά μια φασματική εξίσωση, δηλαδή μια εξίσωση ιδιοτιμών με ιδιοτιμές τις τιμές της κυκλικής συχνότητας  $\omega$ , μέσω των οποίων μπορούμε να αποφανθούμε για το αν το σύστημα είναι ευσταθές ή ασταθές. Ο συγκεκριμένος φορμαλισμός βασίζεται στο βιβλίο [1]. Η ανάλυση θα ξεκινήσει με την απλή περίπτωση του στατικού πλάσματος, ενώ στην συνέχεια θα προχωρήσουμε σε διαταραχή ισορροπίας στάσιμου πλάσματος, από την οποία θα καταλήξουμε σε ένα "νέο" εργαλείο μελέτης ασταθειών, το Spectral Web. Ακόμα, τόσο για το στατικό όσο και για το στάσιμο πλάσμα θα γίνει λόγος

για την δυναμική ενέργεια των διαταραχών και για το πως το πρόσημο της μεταβολής αυτής αποτελεί ένα ισχυρό ενεργειακό κριτήριο για αστάθεια. Τέλος, θα εφαρμοστεί η μέθοδος του Spectral Web σε ένα απλό υδροδυναμικό πρόβλημα αστάθειας τύπου Kelvin-Helmholtz.

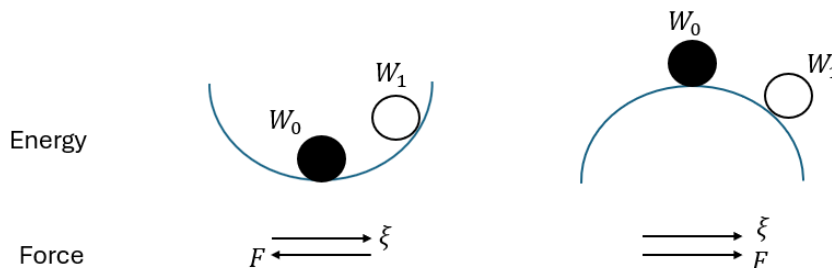
## Κεφάλαιο 2

# Φασματική θεωρία στατικών πλασμάτων

### 2.1 Έννοιες ευστάθειας - αστάθειας

Πότε ένα δυναμικό σύστημα είναι ευσταθές; Υπάρχουν δυο τρόποι να αποφανθούμε. Ο ένας εκμεταλλεύεται την ανάλυση των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σύστημα, ενώ ο άλλος βασίζεται σε ενεργειακά κριτήρια.

Παρατηρώντας την εικόνα 2.1 ένας τρόπος να καταλήξουμε στο αν ένα σύστημα είναι ευσταθές ή ασταθές, είναι να ελέγξουμε αν το διάνυσμα μετατόπισης  $\vec{\xi}$  είναι αντίρροπο ή ομόρροπο με το διάνυσμα της δύναμης  $\vec{F}$  αντίστοιχα. Ο δεύτερος τρόπος είναι να θέσουμε την θέση ισορροπίας  $W = W_0$  και  $W_0 = 0$ , τότε το  $W_1$  θα αποτελεί την δυναμική ενέργεια της διαταραχής και το πρόσημο της καθορίζει το αν θα έχουμε ευσταθές ή ασταθές σύστημα. Συγκεκριμένα, όταν  $W_1 > 0$  τότε έχουμε ευστάθεια, ενώ αν  $W_1 < 0$  τότε το σύστημα είναι ασταθές. Αυτά ονομάζονται ενεργειακά κριτήρια επιλογής και ολοκληρώνονται από το κριτήριο  $W_1 = 0$  το οποίο εκφράζει την περίπτωση οριακής ευστάθειας.



Εικόνα 2.1: Σχηματική αναπαράσταση ευστάθειας (αριστερά) και αστάθειας (δεξιά)

Σημειώνεται πως στην παραπάνω ανάλυση έχει υποτεθεί γραμμική ευστάθεια, δηλαδή ότι η μελέτη των αρχικών μη γραμμικών εξισώσεων μπορεί να απλοποιηθεί χωρίζοντας την κατάσταση ισορροπίας από τις διαταραχές.

Το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε στο παρόν κεφάλαιο, είναι μια αρχική κατάσταση στατικής ( $\vec{u} = 0$ ) ισορροπίας πλάσματος που υπόκειται σε μικρές "γραμμικές" διαταραχές. Ζητούμενο στην ανάλυση είναι αν μετά την προσθήκη διαταραχών το σύστημα αναπτύσσει αστάθειες. Η μελέτη του παραπάνω προβλήματος γίνεται με δυο τρόπους:

- ▶ Λύνοντας τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που προκύπτουν
- ▶ Χρησιμοποιώντας ενεργειακά κριτήρια

## 2.2 Γραμμικοποίηση εξισώσεων ιδεατής ΜΥΔ

Ξεκινάμε με τις εξισώσεις της ιδεατής μαγνητοϋδροδυναμικής (ΜΥΔ):

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) = -\nabla p + \vec{j} \times \vec{B} - \rho \nabla \Phi_g, \quad \vec{j} = \nabla \times \vec{B} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\vec{u} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \vec{u} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}), \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \vec{u}) \quad (2.4)$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα,  $\vec{u}$  η ταχύτητα,  $p$  η πίεση,  $\vec{j}$  το ρεύμα (πυκνότητα ρεύματος) και  $\vec{B}$  το μαγνητικό πεδίο του πλάσματος.

Αρχικά, ως απλούστευση θεωρούμε μοντέλο στο οποίο το πλάσμα περιορίζεται από τοίχο. Τότε οι συνοριακές συνθήκες του προβλήματος στο σημείο που "ακουμπά" το πλάσμα με τον τοίχο είναι:

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.5)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.6)$$

όπου  $\vec{n}$  το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα από το ρευστό προς τον τοίχο.

Για  $\vec{n}$  σταθερό (που ισχύει στο μοντέλο με τον τοίχο) οι παραπάνω εξισώσεις είναι ήδη γραμμικοποιημένες.

Έπειτα, ορίζουμε την κατάσταση της αρχικής στατικής ισορροπίας με  $\vec{u}_0 = 0$  που ικανοποιεί τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\vec{j}_0 \times \vec{B}_0 = \nabla p_0 + \rho_0 \nabla \Phi_g, \quad \vec{j}_0 = \nabla \times \vec{B}_0, \quad \nabla \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (2.7)$$

και συνοριακή συνθήκη στον τοίχο:

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_0 = 0 \quad (2.8)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις καθορίζουν μόνο μερικώς το προφίλ των  $\rho_0(\vec{r})$ ,  $p_0(\vec{r})$ ,  $\vec{j}_0(\vec{r})$ ,  $\vec{B}_0(\vec{r})$ , δηλαδή υπάρχει κάποια ελευθερία στην επιλογή των προφίλ.

Στην συνέχεια, προσθέτουμε μικρή χρονικά εξαρτώμενη διαταραχή και τότε τα μεγέθη που εξετάζουμε αποκτούν την παρακάτω μορφή:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = 0 + \vec{u}_1(\vec{r}, t)$$

$$p(\vec{r}, t) = p_0(\vec{r}) + p_1(\vec{r}, t)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0(\vec{r}) + \vec{B}_1(\vec{r}, t)$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) + \rho_1(\vec{r}, t)$$

όπου  $\vec{u}_1(\vec{r}, t)$ ,  $p_1(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{B}_1(\vec{r}, t)$ ,  $\rho_1(\vec{r}, t)$  οι διαταραχές και  $p_0(\vec{r})$ ,  $\vec{B}_0(\vec{r})$ ,  $\rho_0(\vec{r})$  τα μεγέθη ισορροπίας που ικανοποιούν τις εξισώσεις 2.7 και την συνοριακή συνθήκη 2.8.

Έπειτα, αντικαθιστούμε τα παραπάνω μεγέθη στις εξισώσεις της ιδανικής ΜΥΔ 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 και κρατάμε μέχρι και πρώτης τάξης όρους. Εκμεταλλευόμαστε επίσης τις σχέσεις της ισορροπίας 2.7, 2.8 και μετά από πράξεις προκύπτουν οι εξής γραμμικοποιημένες εξισώσεις:

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 + \vec{j}_1 \times \vec{B}_0 + \vec{j}_0 \times \vec{B}_1 - \rho_1 \nabla \Phi_g, \quad \vec{j}_1 = \nabla \times \vec{B}_1 \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = -\vec{u}_1 \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \vec{u}_1 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u}_1 \times \vec{B}_0), \quad \nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho_0 \vec{u}_1) \quad (2.12)$$

Με όμοιο τρόπο οι συνοριακές συνθήκες 2.5, 2.6 στο σημείο που είναι σε επαφή το πλάσμα με τον τοίχο γίνονται:

$$\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = 0 \quad (2.13)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad (2.14)$$

## 2.3 Τελεστής δύναμης

Στην συνέχεια, εισάγουμε το διανυσματικό πεδίο της Λαγκραζιανής μετατόπισης  $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ . Τότε η ταχύτητα είναι η Λαγκρατζιανή χρονική παράγωγος του  $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$ , δηλαδή:

$$\vec{u} = \frac{D\vec{\xi}}{Dt} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{\xi}$$

Όμως, εμείς μελετάμε το γραμμικοποιημένο πρόβλημα, επομένως κρατάμε μέχρι και πρώτης τάξης όρους, άρα:

$$\vec{u} \approx \vec{u}_1 = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}$$

Κάνοντας την παραπάνω αντικατάσταση και ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο οι εξισώσεις 2.10, 2.11, 2.12 γίνονται:

$$p_1 = -\vec{\xi} \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \vec{\xi} \quad (2.15)$$

$$\vec{B}_1 = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) \quad (2.16)$$

$$\rho_1 = -\nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) \quad (2.17)$$

Επιπλέον, η σχέση  $\nabla \cdot \vec{B}_1 = 0$  ικανοποιείται αυτόματα λόγω της 2.16. Αντικαθιστώντας τις 2.15, 2.16, 2.17 στην 2.9 προκύπτει η εξίσωση κίνησης:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = \vec{F}(p_1(\vec{\xi}), \vec{B}_1(\vec{\xi}), \rho_1(\vec{\xi})) \quad (2.18)$$

όπου  $\vec{F}$  ο τελεστής δύναμης, ο οποίος γράφεται:

$$\vec{F}(\vec{\xi}) = -\nabla \pi - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{Q}) + (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{Q} + (\nabla \Phi_g) \nabla \cdot (\rho \vec{\xi}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} \quad (2.19)$$

με  $\pi, \vec{Q}$  τις διαταραχές στην πίεση και το μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα και  $\rho, \vec{B}, p$  τις ποσότητες ισορροπίας. Δηλαδή ισχύει:

$$\pi \equiv p_1 = -\gamma p \nabla \cdot \vec{\xi} - \vec{\xi} \cdot \nabla p \quad (2.20)$$

$$\vec{Q} \equiv \vec{B}_1 = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}) \quad (2.21)$$

Το παραπάνω πρόβλημα "συνοδεύεται" από τη συνοριακή συνθήκη 2.13, η οποία λόγω της εισαγωγής του πεδίου μετατόπισης γράφεται:

$$\vec{n} \cdot \vec{\xi} = 0 \quad (2.22)$$

και εφαρμόζεται στο σημείο επαφής του ρευστού με τον τοίχο, στη συγκεκριμένη απλοϊκή περίπτωση.

Σημειώνεται ότι η συνοριακή συνθήκη 2.14  $\vec{n} \cdot \vec{B}_1 = 0$  "καλύπτεται" από την συνοριακή  $\vec{n} \cdot \vec{\xi} = 0$ . Συγκεκριμένα, βλέπουμε πως αν συνδυάσουμε την συνοριακή συνθήκη της ισορροπίας  $\vec{n} \cdot \vec{B}_0 = 0$ , την  $\vec{n} \cdot \vec{\xi} = 0$  και την 2.16  $\vec{B}_1 = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)$  έχουμε:

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_1 = \vec{n} \cdot [\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)] = \vec{n} \cdot [(\nabla \cdot \vec{B}_0) \vec{\xi} - (\nabla \cdot \vec{\xi}) \vec{B}_0] = 0$$

δηλαδή όντως ικανοποιείται αυτόματα.



Η εξίσωση 2.19 με την συνοριακή συνθήκη 2.22, σε συνδυασμό με τον καθορισμό της γεωμετρίας του πλάσματος, δίνουν την πλήρη γραμμικοποιημένη δυναμική του συστήματος.

Ακόμα, αν αναδιατάξουμε τους όρους της εξίσωσης 2.19 έχουμε:

$$\vec{F}(\vec{\xi}) = \nabla(\gamma p \nabla \cdot \vec{\xi}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{Q}) + \nabla(\vec{\xi} \cdot \nabla p) + \vec{j} \times \vec{Q} + (\nabla \Phi_g) \nabla \cdot (\rho \vec{\xi}) \quad (2.23)$$

Ο πρώτος όρος αφορά τη συμπίεστικότητα του πλάσματος και είναι άμεσα συνδεδεμένος με ακουστικά κύματα. Ο δεύτερος αποτελεί δύναμη λόγω του "bending" των δυναμικών γραμμών, ενώ ο τρίτος αποτελεί δύναμη λόγω κλίσης πίεσης. Ο τέταρτος όρος σχετίζεται με ρεύματα, ενώ ο πέμπτος είναι ο βαρυτικός όρος. Οι δυο πρώτοι όροι είναι παρόντες και σε ομογενή πλάσματα, και "παράγουν" σταθερά κύματα (Alfven, slow, fast). Οι τελευταίοι τρεις όροι υπάρχουν μόνο σε μη ομογενή πλάσματα και μπορούν να δώσουν αστάθειες.

## 2.4 Φάσμα

Εφόσον οι ποσότητες της ισορροπίας δεν εξαρτώνται από τον χρόνο, μπορούμε να θεωρήσουμε λύσεις της μορφής  $\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \hat{\xi}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$ . Τότε η εξίσωση 2.19 γίνεται:

$$\vec{F}(\vec{\xi}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} \Rightarrow \vec{F}(\hat{\xi}) = -\rho \omega^2 \hat{\xi} \quad (2.24)$$

Δηλαδή, καταλήγουμε σε ένα πρόβλημα ιδιοτιμών, όπου ο γραμμικός τελεστής  $\rho^{-1} \vec{F}$  έχει ιδιοτιμές  $\omega^2$ . Στην ιδεατή ΜΥΔ είναι δυνατή η ύπαρξη τόσο διακριτών όσο και συνεχών ιδιοτιμών. Το σύνολο των ιδιοτιμών λοιπόν, αποτελεί το φάσμα του ιδεατού πλάσματος.

Η βασική ιδιότητα που "δημιουργεί" τον παραλληλισμό με τον μαθηματικό φορμαλισμό της Κβαντικής Μηχανικής είναι πως ο τελεστής  $\rho^{-1} \vec{F}$  είναι αυτοσυζυγής. Άμεση συνέπεια αυτού είναι πως οι ιδιοτιμές  $\omega^2$  είναι πραγματικές. Συγκεκριμένα, μπορούμε να γράψουμε  $\omega = \sigma + i\nu$ . Τότε, υπάρχουν δυο περιπτώσεις:

- ▶  $\omega^2 > 0 \Rightarrow \nu = 0 \Rightarrow \sim e^{\mp i\sigma t}$ , δηλαδή κύματα άρα ευστάθεια
- ▶  $\omega^2 < 0 \Rightarrow \sigma = 0 \Rightarrow \sim e^{\pm \nu t}$ , δηλαδή εκθετική αύξηση άρα αστάθεια

Μάλιστα, βάσει των παραπάνω παρατηρήσεων και της εξίσωσης 2.24 επιβεβαιώνεται μαθηματικά η εικόνα 2.1 όσον αφορά τον σχετικό προσανατολισμό των διανυσμάτων της δύναμης  $\vec{F}$  και της μετατόπισης  $\vec{\xi}$ . Δηλαδή, όταν  $\omega^2 > 0$  και άρα έχουμε ευστάθεια, ισχύει  $\vec{F} \sim -\vec{\xi}$ , δηλαδή  $\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{\xi}$ , ενώ όταν  $\omega^2 < 0$  και άρα έχουμε αστάθεια, ισχύει  $\vec{F} \sim \vec{\xi} \Rightarrow \vec{F} \uparrow \uparrow \vec{\xi}$ . Επίσης, αφού  $\omega^2 \in \mathbb{R}$  η εναλλαγή από ευστάθεια σε αστάθεια γίνεται μέσω  $\omega^2 = 0 \Rightarrow \omega = 0$ , δηλαδή το  $\omega = 0$  αποτελεί την κατάσταση οριακής ευστάθειας.

## 2.5 Εκμετάλλευση μαθηματικών εργαλείων της Κβαντομηχανικής

Εφόσον το αρχικό μας πρόβλημα ανάγεται σε μια εξίσωση ιδιοτιμών, με τον  $\vec{F}$  να είναι γραμμικός (και αυτοσυζηγής) τελεστής, υπάρχει πλήρης αναλογία με αντίστοιχα προβλήματα ιδιοτιμών που προκύπτουν στην Κβαντική Μηχανική, με κύριο παράδειγμα την χρονοανεξάρτητη εξίσωση του Schrödinger  $H\Psi = E\Psi$ , όπου  $H$  ο γραμμικός αυτοσυζυγής τελεστής Χαμιλτονιανής,  $\Psi$  η κυματοσυνάρτηση και  $E$  οι ιδιοτιμές της ενέργειας που μπορούν να είναι είτε διακριτές αν πρόκειται για δέσμιο σύστημα με  $E < V_{max}$ , είτε συνεχείς αν πρόκειται για ελεύθερο σωματίο με  $E > V_{max}$ . Βασισμένοι σε αυτή την αναλογία, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον μαθηματικό φορμαλισμό του χώρου Hilbert, που χρησιμοποιείται στην Κβαντική Μηχανική.

Συγκεκριμένα, έστω όγκος πλάσματος  $V$ , που περικλείεται από τοίχο  $W$ . Ορίζουμε δυο διανύσματα μετατόπισης:

- ▶  $\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{r}, t)$  (στο  $V$ ) όπου  $\vec{n} \cdot \vec{\xi} = 0$  στον τοίχο  $W$
- ▶  $\vec{\eta} = \vec{\eta}(\vec{r}, t)$  (στο  $V$ ) όπου  $\vec{n} \cdot \vec{\eta} = 0$  στον τοίχο  $W$

Ορίζεται λοιπόν, εσωτερικό γινόμενο με τη συνάρτηση πυκνότητας της κατάστασης ισορροπίας  $\rho(\vec{r})$  να δρα ως βάρος:

$$\langle \vec{\xi}, \vec{\eta} \rangle = \frac{1}{2} \int \rho \vec{\xi}^* \cdot \vec{\eta} dV$$

Ακόμα ορίζεται και το μέτρο του διανύσματος  $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$  ως ακολούθως:

$$\|\vec{\xi}\| = \langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle^{1/2}$$

Έχοντας ορίσει εσωτερικό γινόμενο και μέτρο, με την πρόσθετη απαίτηση να έχουμε συναρτήσεις  $\vec{\xi}$  με πεπερασμένο μέτρο, δηλαδή  $\|\vec{\xi}\| < \infty$ , λαμβάνουμε τον διανυσματικό χώρο Hilbert. Σημειώνεται πως με όμοιο τρόπο ορίζονται τα παραπάνω μεγέθη στην Κβαντική Μηχανική με την ουσιαστική διαφορά να είναι ότι αντί για το διάνυσμα μετατόπισης  $\vec{\xi}$ , αυτά ορίζονται για την κυματοσυνάρτηση  $\Psi$  ενός σωματιδίου.

Η απαίτηση διανυσμάτων  $\vec{\xi}$  με πεπερασμένο μέτρο στην ιδεατή ΜΥΔ έχει φυσικό νόημα, καθώς η κινητική ενέργεια γράφεται:

$$K = \frac{1}{2} \int \rho \vec{u}^2 dV \approx \frac{1}{2} \int \rho \dot{\vec{\xi}}^2 dV = \langle \dot{\vec{\xi}}, \dot{\vec{\xi}} \rangle = \|\dot{\vec{\xi}}\|^2$$

Δηλαδή, η υπόθεση ότι το μέτρο του διανύσματος μετατόπισης είναι πεπερασμένο συνδέεται με το ότι πρέπει η κινητική ενέργεια των διαταραχών να είναι πεπερασμένη. Ακόμα, επειδή η συνολική ενέργεια διατηρείται, συνέπεια αυτού είναι πως πρέπει και η δυναμική ενέργεια να είναι πεπερασμένη.

Προκειμένου να ολοκληρωθεί η αναλογία με τα μαθηματικά της Κβαντομηχανικής, απαιτείται να αποδειχθεί ότι ο τελεστής  $\rho^{-1}\vec{F}$  είναι Ερμιτιανός, δηλαδή ότι ισχύει:

$$\langle \vec{\eta}, \rho^{-1}\vec{F}(\vec{\xi}) \rangle = \frac{1}{2} \int \vec{\eta}^* \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) dV = \frac{1}{2} \int \vec{\xi} \cdot \vec{F}(\vec{\eta}^*) dV = \langle \rho^{-1}\vec{F}(\vec{\eta}), \vec{\xi} \rangle \quad (2.25)$$

Η ιδέα για την απόδειξη της αυτοσυζυγίας είναι ο όρος  $\vec{\eta} \cdot \vec{F}(\vec{\xi})$  να γραφεί σε μορφή κάτι συμμετρικού ως προς την εναλλαγή των  $\vec{\xi}$ ,  $\vec{\eta}$  και κάτι ακόμα "μέσα" σε απόκλιση. Ο τελευταίος όρος λόγω του θεωρήματος Gauss κατά την ολοκλήρωση στον όγκο σε συνδυασμό με τις συνοριακές συνθήκες θα εξαφανιστεί και έτσι θα ισχύει η σχέση 2.25, δηλαδή ο τελεστής  $\vec{F}$  θα είναι αυτοσυζυγής. Η αναλυτική απόδειξη περιλαμβάνει πράξεις με διάφορες διανυσματικές ταυτότητες και εκμετάλλευση των σχέσεων ισορροπίας και δεν θα παρατεθεί στην παρούσα εργασία, αλλά μπορεί να διαβαστεί εδώ [1]. Ακολουθούν κάποια ενδιάμεσα βήματα της απόδειξης που θα χρειαστούν στην παρακάτω ανάλυση:

$$\vec{F}(\vec{\xi}) = \nabla(\gamma p \nabla \cdot \vec{\xi}) - \vec{B} \times [\nabla \times \vec{Q} + \nabla \times (\vec{j} \times \vec{\xi})] - (\nabla p) \nabla \cdot \vec{\xi} - \rho \nabla(\vec{\xi} \cdot \nabla \Phi_g) \quad (2.26)$$

Ακόμα, σε αναλογία με τα δύο διανύσματα μετατόπισης που ορίσαμε παραπάνω  $\vec{\xi}$ ,  $\vec{\eta}$ , ορίζουμε δύο διαταραχές του μαγνητικού πεδίου ως ακολούθως:

$$\vec{Q}(\vec{r}) = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}), \quad \vec{R}(\vec{r}) = \nabla \times (\vec{\eta} \times \vec{B})$$

Τότε ισχύει:

$$\int \vec{\eta} \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) dV = - \int \{ \gamma p (\nabla \cdot \vec{\xi}) \nabla \cdot \vec{\eta} + \vec{Q} \cdot \vec{R} + \frac{1}{2} (\nabla p) \cdot (\vec{\xi} \nabla \cdot \vec{\eta} + \vec{\eta} \nabla \cdot \vec{\xi}) + \frac{1}{2} \vec{j} \cdot (\vec{\eta} \times \vec{Q} + \vec{\xi} \times \vec{R}) - \frac{1}{2} (\nabla \Phi_g) \cdot [\vec{\eta} \nabla \cdot (\rho \vec{\xi}) + \vec{\xi} \nabla \cdot (\rho \vec{\eta})] \} dV + \int \vec{n} \cdot \vec{\eta} [\gamma p \nabla \cdot \vec{\xi} + \vec{\xi} \cdot \nabla p - \vec{B} \cdot \vec{Q}] dS \quad (2.27)$$

Σημειώνεται πως η παραπάνω έκφραση, που αποτελεί το τελικό στάδιο της απόδειξης αυτοσυζυγίας του τελεστή  $\vec{F}$ , είναι γενική και δεν ισχύει μόνο στην περίπτωση που το πλάσμα είναι περιορισμένο από τοίχο καθώς δεν έχει εφαρμοστεί ακόμα η αντίστοιχη συνοριακή συνθήκη. Επομένως ισχύει:

$$\int \{ \vec{\eta} \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) - \vec{\xi} \cdot \vec{F}(\vec{\eta}) \} dV = \int \{ \vec{n} \cdot \vec{\eta} [\gamma p \nabla \cdot \vec{\xi} + \vec{\xi} \cdot \nabla p - \vec{B} \cdot \vec{Q}] - \vec{n} \cdot \vec{\xi} [\gamma p \nabla \cdot \vec{\eta} + \vec{\eta} \cdot \nabla p - \vec{B} \cdot \vec{R}] \} dS$$

Με εφαρμογή λοιπόν των συνοριακών συνθηκών  $\vec{n} \cdot \vec{\eta} = 0$ ,  $\vec{n} \cdot \vec{\xi} = 0$  στον τοίχο, το παραπάνω ολοκλήρωμα μηδενίζεται, δηλαδή ισχύει η σχέση της αυτοσυζυγίας 2.25 για το συγκεκριμένο μοντέλο.

## 2.6 Ενεργειακή Προσέγγιση

Στα παραπάνω κεφάλαια ασχοληθήκαμε με το να εκφράσουμε το γενικό πρόβλημα μέσω ενός τελεστή δύναμης  $\vec{F}$ , ο οποίος μάλιστα είναι αυτοσυζυγής. Η αυτοσυζυγία του

τελεστή δύναμης είναι ισοδύναμη με την διατήρηση της ενέργειας των διαταραχών, δηλαδή  $H = K + W = const$ , όπου  $K$  η κινητική ενέργεια και  $W$  η δυναμική ενέργεια των διαταραχών. Στο κεφάλαιο 2.5 εξαγάγαμε τη σχέση για την κινητική ενέργεια, οπότε μένει να βρούμε την έκφραση για την δυναμική ενέργεια των διαταραχών, γραμμικοποιημένη, ώστε να αντιστοιχεί στην έκφραση με όρους μέχρι 1ης τάξης του  $\vec{F}$ . Αυτή θα την προσδιορίσουμε "έξυπνα" ως ακολούθως:

$$\int \dot{\vec{\xi}}^* \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) dV = \int \rho \dot{\vec{\xi}}^* \cdot \ddot{\vec{\xi}} dV = \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int \rho |\dot{\vec{\xi}}|^2 dV \right] = \frac{dK}{dt}$$

Από αρχή διατήρησης της ενέργειας και δεδομένης της αυτοσυζυγίας του  $\vec{F}$ :

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dK}{dt} = -\frac{1}{2} \int \dot{\vec{\xi}}^* \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) dV - \frac{1}{2} \int \vec{\xi}^* \cdot \vec{F}(\dot{\vec{\xi}}) dV = \frac{d}{dt} \left[ -\frac{1}{2} \int \vec{\xi}^* \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) dV \right] \Rightarrow W = -\frac{1}{2} \int \vec{\xi}^* \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) dV$$

Δηλαδή, η παραπάνω έκφραση δίνει την γραμμικοποιημένη δυναμική ενέργεια των διαταραχών. Μάλιστα, έχει μορφή τέτοια, ώστε αν βρεθεί συνάρτηση  $\vec{\xi}$ , που ικανοποιεί τις απαραίτητες συνοριακές συνθήκες, τέτοια ώστε  $W(\vec{\xi}) < 0$  τότε το σύστημα είναι σίγουρα ασταθές. Επίσης, η συγκεκριμένη μαθηματική έκφραση για τη δυναμική ενέργεια επιβεβαιώνει και την παρατήρηση για την εικόνα 2.1, δηλαδή πως αν η διαταραχή είναι σταθερή και άρα  $W > 0$  ισοδύναμα ισχύει  $\vec{\xi} \uparrow \downarrow \vec{F}$ , ενώ αν είναι ασταθής  $W < 0$  και ισοδύναμα  $\vec{\xi} \uparrow \uparrow \vec{F}$ .

Χρησιμοποιώντας την έκφραση 2.27 και θέτοντας  $\vec{\eta} = \vec{\xi}^*$ , εφαρμόζοντας παράλληλα και την συνοριακή συνθήκη στον τοίχο, προκύπτει μια πιο χρήσιμη έκφραση για την δυναμική ενέργεια:

$$W = \frac{1}{2} \int [\gamma p |\nabla \cdot \vec{\xi}|^2 + |\vec{Q}|^2 + (\vec{\xi} \cdot \nabla p) \nabla \cdot \vec{\xi}^* + \vec{j} \cdot \vec{\xi}^* \times \vec{Q} - (\vec{\xi}^* \cdot \nabla \Phi_g) \nabla \cdot (\rho \vec{\xi})] dV \quad (2.28)$$

Ο πρώτος όρος αφορά την ακουστική ενέργεια, η οποία ονομάζεται έτσι γιατί συνδέεται με τη διαταραχή της πίεσης, ο δεύτερος την μαγνητική και είναι και οι δυο θετικοί. Αυτοί οι δυο όροι είναι οι μόνοι παρόντες στα ομογενή πλάσματα, άρα έχουμε  $W > 0$  δηλαδή ευστάθεια για τα ομογενή πλάσματα. Ο τρίτος όρος είναι ενέργεια λόγω της κλίσης της πίεσης, ο επόμενος λόγω πυκνότητας ρεύματος, ενώ ο τελευταίος λόγω βαρύτητας. Οι τελευταίοι τρεις όροι αφορούν μη ομογενή πλάσματα, συνεπώς μπορούν να έχουν οποιοδήποτε πρόσημο και άρα πιθανώς να οδηγήσουν σε αστάθειες.

Προκειμένου να αποδείξουμε ότι η ενεργειακή προσέγγιση είναι ισοδύναμη με τη χρήση διαφορικών εξισώσεων, θα εξαγάγουμε την εξίσωση κίνησης και την εξίσωση ιδιοτιμών του τελεστή  $\vec{F}$  (φασματική εξίσωση) χρήση αρχών που σχετίζονται με την ενέργεια του συστήματος.

**Γραμμικοποιημένη έκφραση της αρχής του Χάμιλτον** Η εξέλιξη ενός συστήματος από την  $t_1$  έως την  $t_2$  μέσω της διαταραχής  $\vec{\xi}(\vec{r}, t)$  είναι τέτοια ώστε:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$$

όπου  $L = K - W$  με  $K = K(\dot{\vec{\xi}}) = \frac{1}{2} \int \rho \dot{\vec{\xi}}^* \cdot \dot{\vec{\xi}} dV$  και  $W = W(\vec{\xi}) = -\frac{1}{2} \int \vec{\xi}^* \cdot \vec{F}(\vec{\xi}) dV$ . Η ελαχιστοποίηση της παραπάνω έκφρασης οδηγεί όπως γνωρίζουμε στην Euler-Lagrange εξίσωση:

$$\vec{F}(\vec{\xi}) = \rho \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2}$$

δηλαδή στην εξίσωση κίνησης όπως την βρήκαμε παραπάνω χρήση διαφορικών εξισώσεων.

**Αρχή Rayleigh - Ritz [8]** Οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή  $\rho^{-1} \vec{F}$  μηδενίζουν την παράγωγο του πηλίκου Rayleigh [9] που ορίζεται ως:

$$\Lambda[\vec{\xi}] = \frac{W[\vec{\xi}]}{I[\vec{\xi}]}$$

όπου  $W[\vec{\xi}] \equiv -\langle \vec{\xi}, \rho^{-1} \vec{F}(\vec{\xi}) \rangle$ ,  $I[\vec{\xi}] \equiv \langle \vec{\xi}, \vec{\xi} \rangle$ , ενώ οι ιδιοτιμές  $\omega^2$  δίνονται από τις ακρότατες τιμές του πηλίκου.

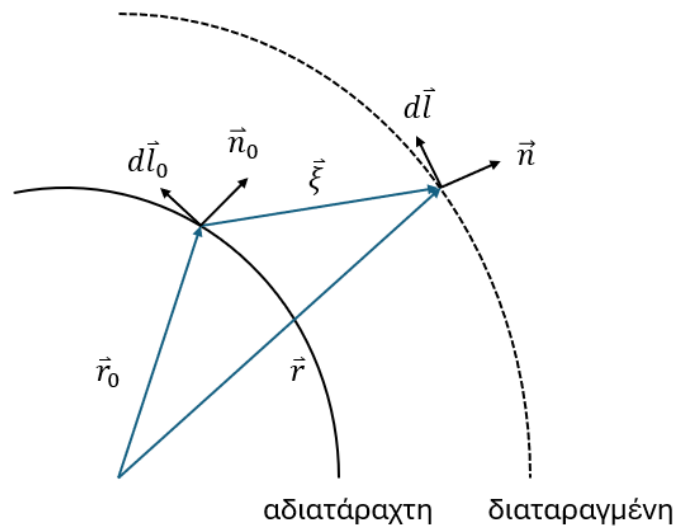
Χρησιμοποιώντας ανάλυση σε βάση πεπερασμένου υπόχωρου του χώρου Hilbert, η παραπάνω αρχή ανάγεται σε επίλυση προβλήματος ιδιοτιμών, δηλαδή ισοδυναμεί με την επίλυση της φασματικής εξίσωσης.

Η πραγματική χρησιμότητα της ενεργειακής προσέγγισης είναι η ενεργειακή αρχή, η οποία δεν έχει ανάλογο στον τρόπο με τις διαφορικές εξισώσεις και παράλληλα αποτελεί τον πιο άμεσο τρόπο να αποφανθούμε αν το σύστημα οδηγείται σε αστάθειες. Συγκεκριμένα, η ενεργειακή αρχή λέει πως ένα σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνο αν  $W[\vec{\xi}] > 0$  για όλες τις μετατοπίσεις  $\vec{\xi}(\vec{r})$  που έχουν πεπερασμένο μέτρο και υπόκεινται στις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες ανάλογα το πρόβλημα. Στην συγκεκριμένη περίπτωση που μελετάμε δηλαδή πρέπει να ισχύει  $\vec{n} \cdot \vec{\xi} = 0$  στον τοίχο. Εάν βρεθεί έστω και μια τέτοια  $\vec{\xi}(\vec{r})$ , για την οποία ισχύει ότι έχει πεπερασμένο μέτρο και ισχύουν και οι κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, τέτοια ώστε  $W[\vec{\xi}] < 0$  τότε το σύστημα είναι σίγουρα ασταθές.

## 2.7 Ανάλυση για πλάσματα σε επαφή

### 2.7.1 Πλάσμα σε επαφή με κενό

Μέχρι στιγμής έχουμε μελετήσει το πρόβλημα για το απλό μοντέλο που το πλάσμα βρίσκεται σε επαφή μόνο με τοίχο, οπότε υπάρχουν απλές συνοριακές συνθήκες μηδενισμού στο σημείο αυτό. Αν θέλουμε να επεκτείνουμε την μελέτη μας σε ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο μπορούμε να αναλογιστούμε πλάσμα σε επαφή με κενό και στο τέλος πάλι να υπάρχει ο περιορισμός του τοίχου (από την πλευρά του κενού). Τώρα, θα απαιτούνται συνοριακές συνθήκες και για την διεπιφάνεια μεταξύ πλάσματος - κενού, εκτός από εκείνες στον τοίχο. Το συγκεκριμένο μοντέλο είναι σημαντικό να μελετηθεί καθώς έχει εφαρμογή κυρίως σε εργαστηριακά πλάσματα, π.χ. σε tokamaks.



Εικόνα 2.2: Μη διαταραγμένη και διαταραγμένη επιφάνεια με τα αντίστοιχα κάθετα και παράλληλα διανύσματα σε αυτές

Αρχικά ας συμβολίσουμε με  $\hat{B}$  το μαγνητικό πεδίο ισορροπίας του κενού και με  $\hat{Q}$  την διαταραχή του μαγνητικού πεδίου του κενού. Τα "άτονα" σύμβολα συνεχίζουν να περιγράφουν τα μεγέθη του πλάσματος. Στην κατάσταση ισορροπίας το μαγνητικό πεδίο του κενού ικανοποιεί τις εξισώσεις  $\nabla \times \hat{B} = 0$  και  $\nabla \cdot \hat{B} = 0$  και τις συνοριακές συνθήκες:

- ▶  $\vec{n} \cdot \vec{B} = \vec{n} \cdot \hat{B} = 0$  στην διεπιφάνεια κενού-πλάσματος
- ▶  $[[p + \frac{1}{2}B^2]] = 0$  στην διεπιφάνεια κενού - πλάσματος
- ▶  $\vec{n} \cdot \hat{B} = 0$  στον τοίχο

Όμοια με παραπάνω, προκύπτει πως οι διαταραχές του μαγνητικού πεδίου του κενού ικανοποιούν τις εξισώσεις  $\nabla \times \hat{Q} = 0$  και  $\nabla \cdot \hat{Q} = 0$  και σίγουρα την συνοριακή συνθήκη  $\vec{n} \cdot \hat{Q} = 0$  στον τοίχο, διότι η θέση αυτού παραμένει αμετάβλητη. Προκειμένου να βρούμε τις εκφράσεις για τις συνοριακές συνθήκες στην διεπιφάνεια κενού-πλάσματος, πρέπει τα ζητούμενα μεγέθη να εκφραστούν στην διαταραγμένη διεπιφάνεια.

Βασικό για τις συνοριακές συνθήκες είναι να προσδιορίσουμε την έκφραση για το κάθετο διάνυσμα  $\vec{n}$  στην διαταραγμένη επιφάνεια. Δεδομένου ότι μελετάμε το γραμμικοποιημένο πρόβλημα, μπορούμε να γράψουμε  $\vec{n} = \vec{n}_0 + \vec{n}_{1L}$ , όπου  $\vec{n}_0$  το κάθετο στην αδιατάραχτη και  $\vec{n}_{1L}$  η διαταραχή. Ο τρόπος να υπολογίσουμε λοιπόν τη διαταραχή είναι ο εξής:

Σε 1ης τάξης διόρθωση ισχύει:

$$d\vec{l} \approx d\vec{l}_0 \cdot (\vec{I} + \nabla \xi)$$

Ακόμα, εφόσον  $\vec{n}$ ,  $d\vec{l}$  κάθετα μεταξύ τους:

$$0 = \vec{n} \cdot d\vec{l} \approx d\vec{l}_0 \cdot (\vec{I} + \nabla\vec{\xi}) \cdot (\vec{n}_0 + \vec{n}_{1L}) \approx d\vec{l}_0 \cdot [(\nabla\vec{\xi}) \cdot \vec{n}_0 + \vec{n}_{1L}]$$

όπου στην παραπάνω έκφραση έχουμε κρατήσει μόνο μέχρι και 1ης τάξης όρους και έχει επίσης χρησιμοποιηθεί πως  $\vec{n}_0 \cdot d\vec{l}_0 = 0$ . Συνεπώς, αφού  $d\vec{l}_0 \neq \vec{0}$  ισχύει  $\vec{n}_{1L} = -(\nabla\vec{\xi}) \cdot \vec{n}_0 + \vec{\lambda}$  με  $\vec{\lambda} \perp d\vec{l}_0 \Rightarrow \vec{\lambda} = \mu\vec{n}_0$ . Επίσης:

$$|\vec{n}| = |\vec{n}_0| = 1 \Rightarrow \vec{n}_0 \cdot \vec{n}_{1L} = 0 \Rightarrow \mu = \vec{n}_0 \cdot (\nabla\vec{\xi}) \cdot \vec{n}_0$$

Άρα τελικά:

$$\vec{n}_{1L} = -(\nabla\vec{\xi}) \cdot \vec{n}_0 + \vec{n}_0\vec{n}_0 \cdot (\nabla\vec{\xi}) \cdot \vec{n}_0 = \vec{n}_0 \times \{\vec{n}_0 \times [(\nabla\vec{\xi}) \cdot \vec{n}_0]\} \quad (2.29)$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει λόγω της διανυσματικής ταυτότητας  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{c}\vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b}\vec{c}$ .

Τέλος, γράφουμε τις Λαγκρανζιανές εκφράσεις για το συνολικό μαγνητικό πεδίο και την συνολική πίεση στην θέση της διαταραγμένης διεπιφάνειας  $\vec{r}$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 2.2, υπολογισμένες μέχρι και 1ης τάξης διορθώσεις:

$$\vec{B}|_{\vec{r}} \approx (\vec{B}_0 + \vec{Q} + \vec{\xi} \cdot \nabla\vec{B}_0)|_{\vec{r}_0}$$

$$p|_{\vec{r}} \approx (p_0 + \pi + \vec{\xi} \cdot \nabla p_0)|_{\vec{r}_0} = (p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \vec{\xi})|_{\vec{r}_0}$$

όπου  $\pi = -\gamma p_0 \nabla \cdot \vec{\xi} - \vec{\xi} \cdot \nabla p_0$ ,  $\vec{Q} = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)$  οι Eulerian διαταραχές.

Άρα, έχοντας τις παραπάνω εκφράσεις και τις αντίστοιχες συνοριακές συνθήκες στην ισορροπία, μπορούμε να δούμε πως μετασχηματίζονται οι συνοριακές συνθήκες στην διαταραγμένη διεπιφάνεια πλάσματος - κενού. Συγκεκριμένα:

- ▶  $0 = \vec{n} \cdot \vec{B} \approx [\vec{n}_0 - (\nabla\vec{\xi}) \cdot \vec{n}_0 + \vec{n}_0\vec{n}_0 \cdot (\nabla\vec{\xi}) \cdot \vec{n}_0] \cdot (\vec{B}_0 + \vec{Q} + \vec{\xi} \cdot \nabla\vec{B}_0) \approx -\vec{B}_0 \cdot (\nabla\vec{\xi}) \cdot \vec{n}_0 + \vec{n}_0 \cdot \vec{Q} + \vec{\xi} \cdot (\nabla\vec{B}_0) \cdot \vec{n}_0 = -\vec{n}_0 \cdot \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0) + \vec{n}_0 \cdot \vec{Q}$  η οποία ικανοποιείται αυτόματα δεδομένου του ορισμού του  $\vec{Q}$  για το πλάσμα

- ▶ Επαναλαμβάνοντας τις ίδιες πράξεις με παραπάνω για τη συνοριακή συνθήκη  $\vec{n} \cdot \hat{\vec{B}} = 0$  για το μαγνητικό πεδίο του κενού, προκύπτει η συνοριακή συνθήκη στη διεπιφάνεια

$$\vec{n} \cdot \nabla \times (\vec{\xi} \times \hat{\vec{B}}) = \vec{n} \cdot \hat{\vec{Q}} \quad (2.30)$$

όπου για απλότητα συμβολισμού το  $\vec{n}$  αποτελεί το κάθετο διάνυσμα της ισορροπίας ( $\vec{n}_0$ )

- ▶ Η τελευταία συνοριακή συνθήκη στην διαταραγμένη διεπιφάνεια είναι η συνέχεια της συνολικής πίεσης  $[[p + \frac{1}{2}B^2]] = 0$  για την οποία χρησιμοποιούμε ως δεδομένη την έκφραση στην ισορροπία  $[[p + \frac{1}{2}B^2]] = 0 \Rightarrow p + \frac{1}{2}B^2 = \frac{1}{2}\hat{B}^2$  και κρατάμε μέχρι 1ης τάξης όρους. Μετά από πράξεις, προκύπτει:

$$-\gamma p \nabla \cdot \vec{\xi} + \vec{B} \cdot \vec{Q} + \vec{\xi} \cdot \nabla(\frac{1}{2}B^2) = \hat{\vec{B}} \cdot \hat{\vec{Q}} + \vec{\xi} \cdot \nabla(\frac{1}{2}\hat{B}^2) \quad (2.31)$$

Συνοψίζοντας, για το μοντέλο πλάσμα - κενό - τοίχος έχουμε:

- Εξίσωση κίνησης για το πλάσμα

$$\vec{F}(\vec{\xi}) = -\nabla\pi - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{Q}) + (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{Q} + (\nabla\Phi_g)\nabla \cdot (\rho\xi) = \rho \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2}$$

$$\text{με } \pi = -\gamma p \nabla \cdot \vec{\xi} - \vec{\xi} \cdot \nabla p, \quad \vec{Q} = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B})$$

- Για τις διαταραχές του μαγνητικού πεδίου του κενού  $\nabla \times \hat{\vec{Q}} = 0$  και  $\nabla \cdot \hat{\vec{Q}} = 0$
- Συνοριακή συνθήκη στον τοίχο  $\vec{n} \cdot \hat{\vec{Q}} = 0$
- Συνοριακή συνθήκη για το μαγνητικό πεδίο στη διεπιφάνεια πλάσματος - κενού

$$\vec{n} \cdot \nabla \times (\vec{\xi} \times \hat{\vec{B}}) = \vec{n} \cdot \hat{\vec{Q}}$$

- Συνοριακή συνθήκη για την ολική πίεση στη διεπιφάνεια πλάσματος - κενού

$$-\gamma p \nabla \cdot \vec{\xi} + \vec{B} \cdot \vec{Q} + \vec{\xi} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} B^2 \right) = \hat{\vec{B}} \cdot \hat{\vec{Q}} + \vec{\xi} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \hat{B}^2 \right)$$

Το παραπάνω αποτελεί ένα πλήρες σύστημα εξισώσεων για την μελέτη κυμάτων και ευστάθειας του συστήματος.

## 2.7.2 Πλάσμα σε επαφή με πλάσμα

Το γενικότερο μοντέλο που μπορούμε να μελετήσουμε είναι ένα πλάσμα, έστω το πλάσμα 1, σε επαφή με ένα άλλο πλάσμα, έστω πλάσμα 2, και αυτό με τη σειρά του σε επαφή με τοίχο. Αυτή, αποτελεί την πιο γενική περίπτωση και τα μοντέλα πλάσμα-τοίχος και πλάσμα-κενό-τοίχος μπορούν να προκύψουν σαν υποπεριπτώσεις της στα κατάλληλα όρια. Το συγκεκριμένο μοντέλο έχει σημαντική εφαρμογή στην περιγραφή αστροφυσικών πλασμάτων, καθώς όλο το σύμπαν αποτελείται από πλάσμα που σε διαφορετικά σημεία έχει διαφορετική πυκνότητα, πίεση, μαγνητικό πεδίο.

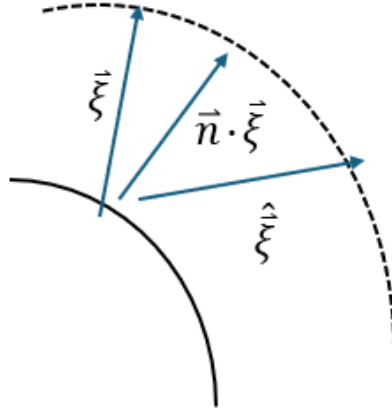
Στην ισορροπία, το δεύτερο πλάσμα, όμοια με το πρώτο, ικανοποιεί τις εξισώσεις:

$$\hat{\vec{j}} \times \hat{\vec{B}} = \nabla \hat{p} + \hat{\rho} \nabla \Phi_g, \quad \hat{\vec{j}} = \nabla \times \hat{\vec{B}}, \quad \nabla \cdot \hat{\vec{B}} = 0$$

με συνοριακή συνθήκη στον τοίχο  $\vec{n} \cdot \hat{\vec{B}} = 0$ . Στην διεπιφάνεια των δύο πλασμάτων σε ισορροπία ισχύουν οι γνωστές συνοριακές συνθήκες (ΣΣ):

$$\vec{n} \cdot \vec{B} = \vec{n} \cdot \hat{\vec{B}} = 0, \quad \llbracket p + \frac{1}{2} B^2 \rrbracket = 0$$





Εικόνα 2.3: Ασυνέχεια της παράλληλης συνιστώσας των διανυσμάτων μετατόπισης

Μετά τη διαταραχή για το δεύτερο πλάσμα ισχύει, πάλι όμοια με το πρώτο, η εξίσωση κίνησης:

$$\hat{F}(\hat{\xi}) = -\nabla\hat{\pi} - \hat{B} \times (\nabla \times \hat{Q}) + (\nabla \times \hat{B}) \times \hat{Q} + (\nabla\Phi_g)\nabla \cdot (\hat{\rho}\hat{\xi}) = \hat{\rho}\frac{\partial^2\hat{\xi}}{\partial t^2}$$

με  $\hat{\pi} = -\gamma\hat{p}\nabla \cdot \hat{\xi} - \hat{\xi} \cdot \nabla\hat{p}$ ,  $\hat{Q} = \nabla \times (\hat{\xi} \times \hat{B})$  και συνοριακή συνθήκη στον τοίχο  $\vec{n} \cdot \hat{\xi} = 0$ . Μένει λοιπόν, να προσδιορίσουμε τις συνοριακές συνθήκες στην διαταραγμένη διεπιφάνεια.

1. Στην διαταραγμένη διεπιφάνεια μεταξύ των δύο πλάσμάτων πρέπει η κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας να είναι συνεχής

$$\vec{n} \cdot [\vec{u}] = 0 \Rightarrow \vec{n} \cdot \vec{\xi} = \vec{n} \cdot \hat{\xi} \quad (2.32)$$

2. Η δεύτερη συνοριακή συνθήκη αφορά την συνέχεια της ολικής πίεσης στην διεπιφάνεια. Όπως κάναμε και παραπάνω, στην ανάλυση για πλάσμα - κενό σε επαφή, πρέπει να γράψουμε τα ενδιαφερόμενα μεγέθη, δηλαδή το μαγνητικό πεδίο και την πίεση στην διαταραγμένη διεπιφάνεια. Επειδή όμως, στην συγκεκριμένη περίπτωση χρησιμοποιούμε δυο διαφορετικά διανύσματα μετατόπισης  $\vec{\xi}, \hat{\xi}$  για τα δυο διαφορετικά πλάσματα τα οποία δεν αναφέρονται στο ίδιο σημείο, πρέπει να εκφράσουμε τα διαταραγμένα μεγέθη στην θέση  $\vec{r}_0 + (\vec{n} \cdot \vec{\xi})\vec{n}$ , καθώς, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.3, μόνο η κάθετη συνιστώσα του διανύσματος μετατόπισης είναι συνεχής. Άρα στην διαταραγμένη διεπιφάνεια, μέχρι 1ης τάξης διόρθωση, έχουμε:

$$\vec{B}|_{\vec{r}} \approx (\vec{B}_0 + \vec{Q} + (\vec{n} \cdot \vec{\xi})\vec{n} \cdot \nabla\vec{B}_0)|_{\vec{r}_0}$$

$$p|_{\vec{r}} \approx (p_0 + \pi + (\vec{n} \cdot \vec{\xi})\vec{n} \cdot \nabla p_0)|_{\vec{r}_0}$$

Και άρα, η συνοριακή συνθήκη  $[[p + \frac{1}{2}B^2]] = 0$  στην διαταραγμένη διεπιφάνεια γίνεται:

$$-\gamma p \nabla \cdot \vec{\xi} + \vec{B} \cdot \vec{Q} + \vec{n} \cdot \vec{\xi} \vec{n} \cdot \nabla(\frac{1}{2}B^2) = -\gamma\hat{p}\nabla \cdot \hat{\xi} + \hat{B} \cdot \hat{Q} + \vec{n} \cdot \hat{\xi} \vec{n} \cdot \nabla(\frac{1}{2}\hat{B}^2) \quad (2.33)$$

Συνοψίζοντας για το μοντέλο πλάσμα 1 - πλάσμα 2 - τοίχος έχουμε τα εξής:

- ▶ Εξίσωση κίνησης για το πλάσμα 1

$$\vec{F}(\vec{\xi}) = -\nabla\pi - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{Q}) + (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{Q} + (\nabla\Phi_g)\nabla \cdot (\rho\xi) = \rho \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2}$$

$$\text{με } \pi = -\gamma p \nabla \cdot \vec{\xi} - \vec{\xi} \cdot \nabla p, \vec{Q} = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B})$$

- ▶ Εξίσωση κίνησης για το πλάσμα 2

$$\hat{F}(\hat{\xi}) = -\nabla\hat{\pi} - \hat{B} \times (\nabla \times \hat{Q}) + (\nabla \times \hat{B}) \times \hat{Q} + (\nabla\Phi_g)\nabla \cdot (\hat{\rho}\hat{\xi}) = \hat{\rho} \frac{\partial^2 \hat{\xi}}{\partial t^2}$$

$$\text{με } \hat{\pi} = -\gamma\hat{p} \nabla \cdot \hat{\xi} - \hat{\xi} \cdot \nabla\hat{p}, \hat{Q} = \nabla \times (\hat{\xi} \times \hat{B})$$

- ▶ Συνοριακή συνθήκη για το διάνυσμα μετατόπισης του πλάσματος 2 στον τοίχο  $\vec{n} \cdot \hat{\xi} = 0$
- ▶ Συνοριακή συνθήκη συνέχειας της κάθετης συνιστώσας ταχύτητας στην διεπιφάνεια μεταξύ των πλάσμάτων  $\vec{n} \cdot \vec{\xi} = \vec{n} \cdot \hat{\xi}$
- ▶ Συνοριακή συνθήκη συνέχειας ολικής πίεσης στην διαταραγμένη διεπιφάνεια

$$-\gamma p \nabla \cdot \vec{\xi} + \vec{B} \cdot \vec{Q} + \vec{n} \cdot \vec{\xi} \vec{n} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} B^2 \right) = -\gamma\hat{p} \nabla \cdot \hat{\xi} + \hat{B} \cdot \hat{Q} + \vec{n} \cdot \hat{\xi} \vec{n} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \hat{B}^2 \right)$$

Σημειώνεται πως η απόδειξη του ότι ο τελεστής  $\vec{F}$  είναι αυτοσυζηγής για το μοντέλο πλάσμα - τοίχος επεκτείνεται και στα μοντέλα πλάσμα - κενό και πλάσμα - πλάσμα, χρησιμοποιώντας κάθε φορά τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες στην έκφραση 2.27. Όμοια, μπορούν να κατασκευαστούν εκφράσεις για τη δυναμική ενέργεια του συστήματος στα δύο τελευταία μοντέλα και να εφαρμοστούν οι ίδιες τεχνικές για την εκμετάλλευσή τους (πηλίκo Rayleigh, ενεργειακή αρχή κλπ.).

## Κεφάλαιο 3

# Φασματική θεωρία στάσιμων πλάσμάτων

Στην συνέχεια της ανάλυσης μας, θα εξετάσουμε πως μια στάσιμη ροή στην ισορροπία θα επηρεάσει την ανάπτυξη ασταθειών στο σύστημα. Δηλαδή, η ουσιαστική διαφορά από τα "στατικά" πλάσματα είναι πως τώρα υπάρχει αδιατάρακτη (στάσιμη) ταχύτητα  $\vec{u}$ .

### 3.1 Εξισώσεις ισορροπίας, προσθήκη διαταραχών και γραμμικοποίηση των εξισώσεων

Αρχικά, ξεκινάμε πάλι από τις μη γραμμικές εξισώσεις της ΜΥΔ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \right) + \nabla p - \vec{j} \times \vec{B} - \rho \vec{g} = 0, \quad \vec{j} = \nabla \times \vec{B} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.4)$$

Για απλότητα, θα θεωρήσουμε πως το πλάσμα βρίσκεται σε επαφή με τοίχο, και έτσι οι συνοριακές συνθήκες που συνοδεύουν το πρόβλημα είναι:

- ▶  $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$  στον τοίχο
- ▶  $\vec{n} \cdot \vec{B} = 0$  στον τοίχο

Στη συνέχεια, θεωρούμε κατάσταση στάσιμης ισορροπίας, δηλαδή  $\vec{u} \neq 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$  η οποία συνεπώς χαρακτηρίζεται από τις εξισώσεις:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.5)$$

$$\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} + \nabla p - \vec{j} \times \vec{B} - \rho \vec{g} = 0, \quad \vec{j} = \nabla \times \vec{B} \quad (3.6)$$

$$\vec{u} \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3.7)$$

$$\nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.8)$$

Έπειτα στην κατάσταση ισορροπίας προσθέτουμε μικρές Eulerian διαταραχές  $\rho_1, \vec{u}_1, p_1, \vec{B}_1$ . Έτσι, αντικαθιστούμε στις εξισώσεις της ιδανικής ΜΥΔ τα μεγέθη  $\rho + \rho_1, \vec{u} + \vec{u}_1, p + p_1, \vec{B} + \vec{B}_1$  όπου  $\rho, \vec{u}, p, \vec{B}$  τα μεγέθη τις ισορροπίας. Εκμεταλλευόμενοι λοιπόν, τις σχέσεις ισορροπίας 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 και κρατώντας μόνο 1ης τάξης όρους προκύπτουν οι εξής εξισώσεις για τις διαταραχές:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\right) \rho_1 + \rho_1 \nabla \cdot \vec{u} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}_1) = 0 \quad (3.9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\right) \vec{u}_1 + \rho \vec{u}_1 \cdot \nabla \vec{u} + \rho_1 (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \vec{g}) + \nabla p_1 + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{B}_1) - (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}_1 = 0 \quad (3.10)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\right) p_1 + \gamma p_1 \nabla \cdot \vec{u} + \vec{u}_1 \cdot \nabla p + \gamma p \nabla \cdot \vec{u}_1 = 0 \quad (3.11)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\right) \vec{B}_1 - \vec{B}_1 \cdot \nabla \vec{u} + \vec{B}_1 \nabla \cdot \vec{u} - \vec{B} \cdot \nabla \vec{u}_1 + \vec{B} \nabla \cdot \vec{u}_1 + \vec{u}_1 \cdot \nabla \vec{B} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B}_1 = 0 \quad (3.12)$$

## 3.2 Γενικευμένος τελεστής δύναμης

Στην συνέχεια, θέλουμε να ορίσουμε ένα διάνυσμα μετατόπισης  $\vec{\xi}$  το οποίο να συνδέει την αδιατάρακτη κατάσταση με την διαταραγμένη, ενώ υπάρχει ροή υποβάθρου.

Βάσει του σχήματος 3.1 ισχύει:

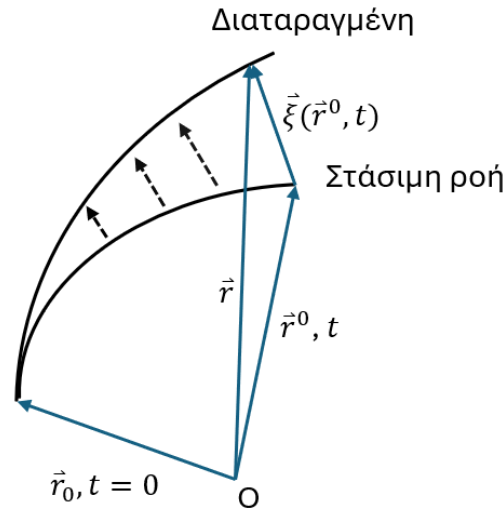
$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}^0, t) = \vec{r}^0 + \vec{\xi}(\vec{r}^0, t)$$

όπου  $\vec{r}$  η θέση του στοιχειώδους ρευστού της διαταραγμένης ροής την στιγμή  $t$  και  $\vec{r}^0$  η θέση του ίδιου στοιχειώδους ρευστού την χρονική στιγμή  $t$  εάν αυτό βρισκόταν στην αδιατάρακτη ροή.

Στις συντεταγμένες  $(\vec{r}^0, t)$  οι μεταβλητές της ισορροπίας είναι χρονοανεξάρτητες, καθώς η αδιατάρακτη επιφάνεια έχει στάσιμη ροή, δηλαδή χρονοανεξάρτητη, συνεπώς ισχύει:

$$\rho^0 = \rho^0(\vec{r}^0), \quad \vec{u}^0 = \vec{u}^0(\vec{r}^0), \quad p^0 = p^0(\vec{r}^0), \quad \vec{B}^0 = \vec{B}^0(\vec{r}^0)$$

Ως γνωστόν τα παραπάνω μεγέθη ικανοποιούν τις εξισώσεις ισορροπίας 3.5, 3.6, 3.7, 3.8 με συμβολισμό εκθέτη <sup>0</sup> σε όλες τις μεταβλητές και ακόμα  $\nabla^0 \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}^0}$ .



Εικόνα 3.1: Σχηματική αναπαράσταση αδιατάραχτης και διαταραγμένης κατάστασης με ροή υποβάθρου

Στην συνέχεια, πρέπει να γράψουμε τον τελεστή ανάδελτα  $\nabla$  στη διαταραγμένη θέση, στο σύστημα συντεταγμένων της αδιατάραχτης κατάστασης. Δηλαδή:

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \vec{r}^0}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}^0} = (\nabla \vec{r}^0) \cdot \nabla^0 = (\nabla(\vec{r} - \vec{\xi})) \cdot \nabla^0 = (\vec{I} - \nabla \vec{\xi}) \cdot \nabla^0 \quad (3.13)$$

Αυτό που μένει να υπολογίσουμε είναι η ποσότητα  $\nabla \vec{\xi}$ . Ισχύει:

$$x_j = x_j^0 + \xi_j \Rightarrow x_j^0 = x_j - \xi_j$$

Άρα:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial x_j^0}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j^0} = \left(1 - \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial x_j^0} = \frac{\partial}{\partial x_j^0} - \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j^0}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j^0} \frac{\partial x_j^0}{\partial x_j} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j^0} \left(1 - \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j}\right) \Rightarrow \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \left(1 + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j^0}\right) = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j^0} \\ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} &= \left(1 + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j^0}\right)^{-1} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j^0} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} = \left(1 + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_j^0}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j^0} \Rightarrow \nabla = (\vec{I} + \nabla^0 \vec{\xi})^{-1} \cdot \nabla^0 \quad (3.14) \end{aligned}$$

Και για  $\vec{\xi}$  μικρό (αφού διαταραχή) προκύπτει:

$$\nabla \approx \nabla^0 - (\nabla^0 \vec{\xi}) \cdot \nabla^0 \quad (3.15)$$

Η Λαγκρατζιανή χρονική παράγωγος στο ζητούμενο σύστημα συντεταγμένων εκφράζεται ως:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{\vec{r}^0} + \vec{u}^0 \cdot \nabla^0$$

Επομένως η ταχύτητα στη διαταραγμένη θέση  $\vec{r} = \vec{r}^0 + \vec{\xi}$  θα είναι:

$$\vec{u}(\vec{r}^0 + \vec{\xi}, t) = \frac{D\vec{r}}{Dt} = \frac{D\vec{r}^0}{Dt} + \frac{D\vec{\xi}}{Dt} = \vec{u}^0 + \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} + \vec{u}^0 \cdot \nabla^0 \vec{\xi}$$

όπου  $\vec{u}^0 = \vec{u}^0(\vec{r}^0)$  η ταχύτητα της ισορροπίας.

Στην συνέχεια, ακολουθούμε την ίδια διαδικασία με το προηγούμενο κεφάλαιο, δηλαδή αντικαθιστούμε στις εκφράσεις 3.9, 3.11, 3.12 την παραπάνω έκφραση για την ταχύτητα, ολοκληρώνουμε και παίρνουμε τις σχέσεις για τις διαταραγμένες ποσότητες  $\rho_1, p_1, \vec{B}_1$  κρατώντας μέχρι 1η τάξης όρους  $\vec{\xi}$  και χρησιμοποιώντας και τις σχέσεις ισορροπίας. Οι εκφράσεις που προκύπτουν για τα συνολικά μεγέθη είναι:

$$\begin{aligned} \rho &\approx \rho^0 - \rho^0 \nabla^0 \cdot \vec{\xi} \\ p &\approx p^0 - \gamma p^0 \nabla^0 \cdot \vec{\xi} \\ \vec{B} &\approx \vec{B}^0 + \vec{B}^0 \cdot \nabla^0 \vec{\xi} - \vec{B}^0 \nabla^0 \cdot \vec{\xi} \end{aligned}$$

Γενικά, ισχύει:  $f_{1L} = f_{1E} + \vec{\xi} \cdot \nabla^0 f^0$ , όπου  $f_{1L}$  η Λαγκρατζιανή διαταραχή ενός μεγέθους  $f$ ,  $f_{1E}$  η Eulerian διαταραχή και  $f^0$  το αντίστοιχο μέγεθος στην ισορροπία. Οπότε παρατηρούμε ότι οι παραπάνω εκφράσεις είναι πλήρως συμβατές με τις αντίστοιχες Eulerian για στατική ισορροπία:

$$\begin{aligned} \rho_{1E} &= -\nabla^0 \cdot (\rho^0 \vec{\xi}) \\ \pi \equiv p_{1E} &= -\gamma p^0 \nabla^0 \cdot \vec{\xi} - \vec{\xi} \cdot \nabla^0 p^0 \\ \vec{Q} \equiv \vec{B}_{1E} &= \nabla^0 \times (\vec{\xi} \times \vec{B}^0) = \vec{B}^0 \cdot \nabla^0 \vec{\xi} - \vec{B}^0 \nabla^0 \cdot \vec{\xi} - \vec{\xi} \cdot \nabla^0 \vec{B}^0 \end{aligned}$$

Τέλος, το μόνο που μένει είναι η αντικατάσταση των γραμμικοποιημένων εκφράσεων για τα διαταραγμένα μεγέθη  $\rho, p, \vec{B}, \vec{u}, \nabla$  στην εξίσωση κίνησης:

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} + \nabla p - (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} - \rho \vec{g} = 0$$

Έτσι, μετά από πράξεις και κρατώντας μέχρι και πρώτης τάξης όρους, προκύπτει η εξής γραμμικοποιημένη εξίσωση κίνησης για τις διαταραχές της στάσιμης ισορροπίας, στην οποία για απλότητα έχουμε αφήσει το συμβολισμό  $f^0$ :

$$\vec{G}(\vec{\xi}) - 2\rho \vec{u} \cdot \nabla \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.16)$$

όπου  $\vec{G}$  ο γενικευμένος τελεστής δυνάμεων που γράφεται:

$$\vec{G}(\vec{\xi}) \equiv \vec{F}(\vec{\xi}) + \nabla \cdot (\vec{\xi} \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \rho \vec{u} \vec{u} \cdot \nabla \vec{\xi}) \quad (3.17)$$

που περιλαμβάνει τον γνωστό από το πρώτο κεφάλαιο τελεστή  $\vec{F}$  για στατική ισορροπία:

$$\vec{F}(\vec{\xi}) = \nabla(\gamma p \nabla \cdot \vec{\xi}) - \vec{B} \times (\nabla \times \vec{Q}) + \nabla(\vec{\xi} \cdot \nabla p) + \vec{j} \times \vec{Q} + (\nabla \Phi_g) \nabla \cdot (\rho \vec{\xi})$$

Μάλιστα, λόγω ισορροπίας (εξίσωση  $\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$ ), ο τελευταίος όρος του τελεστή  $\vec{G}$  γίνεται:

$$-\nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u} \cdot \nabla \vec{\xi}) = -\rho (\vec{u} \cdot \nabla)^2 \vec{\xi}$$

Και τελικά, η εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$\vec{F}(\vec{\xi}) + \nabla \cdot (\vec{\xi} \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) - \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right)^2 \vec{\xi} = 0 \quad (3.18)$$

Η βασική διαφορά της παραπάνω εξίσωσης με την εξίσωση κίνησης των διαταραχών στα στατικά πλάσματα είναι η ύπαρξη του τελεστή  $\vec{u} \cdot \nabla$  ο οποίος είναι συσχετισμένος με το φαινόμενο Doppler. Μάλιστα, για πιο περίπλοκες γεωμετρίες στις οποίες ο όρος  $\vec{u} \cdot \nabla$  είναι μη μηδενικός και όταν σκεφτόμαστε το πλάσμα σε κινούμενο σύστημα συντεταγμένων προκύπτουν όροι φυγόκεντρου δύναμης και τελικά ο τελεστής  $\vec{u} \cdot \nabla$  σχετίζεται και με φαινόμενα λόγω της δύναμης Coriolis.

Για να προκύψει η φασματική εξίσωση αρκεί να αντικαταστήσουμε  $\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \hat{\xi}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$  στην εξίσωση κίνησης. Τότε:

$$\vec{G}(\hat{\xi}) + 2i\rho\omega\vec{u} \cdot \nabla \hat{\xi} + \rho\omega^2 \hat{\xi} = 0 \quad (3.19)$$

ή ισοδύναμα:

$$\vec{F}(\hat{\xi}) + \nabla \cdot (\hat{\xi} \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) + \rho(\omega + i\vec{u} \cdot \nabla)^2 \hat{\xi} = 0 \quad (3.20)$$

Το παραπάνω γίνεται πρόβλημα ιδιοτιμών, προσθέτοντας την κατάλληλη συνοριακή συνθήκη, δηλαδή στην περίπτωση πλάσματος σε επαφή με όριο (τοίχο) με την συνθήκη  $\vec{n} \cdot \hat{\xi} = 0$  στον τοίχο.

Παρατηρούμε πλέον ότι στο πρόβλημα ιδιοτιμών εκτός από όρους  $\omega^2$ , υπάρχουν και όροι  $\omega^1$ , άρα πλέον το  $\omega$  δεν είναι είτε μόνο φανταστικό είτε μόνο πραγματικό όπως στην περίπτωση του στατικού πλάσματος, αλλά είναι εν γένει μιγαδικό και με πραγματικό και με φανταστικό μέρος.

Στην συνέχεια, όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, προκειμένου να ολοκληρωθεί η αναλογία με τα μαθηματικά της Κβαντικής Μηχανικής πρέπει να αποδειχθεί ότι ο τελεστής  $\vec{G}$  είναι αυτοσυζηγής. Για την ακριβή απόδειξη βλ. [1], παρακάτω παρατίθενται μερικά χρήσιμα ενδιάμεσα βήματα που θα βοηθήσουν την περαιτέρω ανάλυση. Αρχικά, χρήση διαφόρων ανυσματικών ταυτοτήτων προκύπτει μια εναλλακτική γραφή για τον  $\vec{G}$ :

$$\vec{G}(\vec{\xi}) = \nabla(\gamma p \nabla \cdot \vec{\xi}) - \vec{B} \times [\nabla \times \vec{Q} + \nabla \times (\vec{j} \times \vec{\xi})] - (\nabla p) \nabla \cdot \vec{\xi} - \rho \nabla(\vec{\xi} \cdot \nabla \Phi_g) - \rho(\nabla \vec{\xi}) \cdot (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}) - \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u} \cdot \nabla \vec{\xi}) \quad (3.21)$$

Οι δύο πρώτοι όροι αφορούν ομογενή πλάσματα, ο τρίτος σχετίζεται με το ρεύμα, ενώ ο επόμενος αυτού με την κλίση της πίεσης. Στην συνέχεια, έχουμε τον βαρυτικό όρο, τον καινούργιο όρο λόγω κλίσης της ταχύτητας και τον τελευταίο επίσης νέο όρο που αφορά το φαινόμενο Doppler και τις δυνάμεις Coriolis. Όλοι οι όροι εκτός των πρώτων δύο μπορούν να προκαλέσουν αστάθειες στο σύστημα.

Μια χρήσιμη ποσότητα που θα μας απασχολήσει παρακάτω είναι η Eulerian διαταραχή της συνολικής πίεσης η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\Pi \equiv (p + \frac{1}{2}B^2)_{1E} = \pi + \vec{B} \cdot \vec{Q} = -\gamma p \nabla \cdot \vec{\xi} - \vec{\xi} \cdot \nabla p + \vec{B} \cdot \vec{Q} \quad (3.22)$$

Τέλος, μια χρήσιμη έκφραση που προκύπτει ως ενδιάμεσο βήμα στην απόδειξη αυτοσυζυγίας του  $\vec{G}$ , χρησιμοποιώντας την ίδια τεχνική με την απόδειξη αυτοσυζυγίας του  $\vec{F}$ , η οποία αναφέρθηκε στο κεφάλαιο 2.5, είναι:

$$\begin{aligned} \int \vec{\eta} \cdot \vec{G}(\vec{\xi}) dV = & - \int \{ \gamma p (\nabla \cdot \vec{\xi}) \nabla \cdot \vec{\eta} + \vec{Q} \cdot \vec{R} + \frac{1}{2} (\nabla p) \cdot (\vec{\xi} \nabla \cdot \vec{\eta} + \vec{\eta} \nabla \cdot \vec{\xi}) + \frac{1}{2} \vec{j} \cdot (\vec{\eta} \times \vec{Q} + \vec{\xi} \times \vec{R}) \\ & - \frac{1}{2} (\nabla \Phi_g) \cdot [\vec{\eta} \nabla \cdot (\rho \vec{\xi}) + \vec{\xi} \nabla \cdot (\rho \vec{\eta})] - \frac{1}{2} \vec{\eta} \cdot [\nabla \cdot (\vec{\xi} \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u})] - \frac{1}{2} \vec{\xi} \cdot [\nabla \cdot (\vec{\eta} \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u})] \\ & - \rho (\vec{u} \cdot \nabla \vec{\xi}) \cdot (\vec{u} \cdot \nabla \vec{\eta}) \} dV - \int [\eta_n \Pi(\vec{\xi}) - B_n \vec{\eta} \cdot \vec{Q} - j_n \vec{B} \cdot (\vec{\xi} \times \vec{\eta}) + \rho u_n (\vec{u} \cdot \nabla \vec{\xi}) \cdot \vec{\eta}] dS \quad (3.23) \end{aligned}$$

Στην παραπάνω έκφραση προκειμένου να αποδείξουμε ότι ο  $\vec{G}$  είναι αυτοσυζυγής, έχουμε γράψει την ποσότητα  $\int \vec{\eta} \cdot \vec{G}(\vec{\xi}) dV$  ως κάτι συμμετρικό ως προς τα  $\vec{\xi}$ ,  $\vec{\eta}$  και κάτι σε απόκλιση, το οποίο λόγω του θεωρήματος Gauss έχει μετατραπεί σε επιφανειακό ολοκλήρωμα, από ολοκλήρωμα σε όγκο. Οι τρεις τελευταίοι όροι στο επιφανειακό ολοκλήρωμα μηδενίζονται καθώς η ισορροπία εξασφαλίζει  $B_n = 0$ ,  $j_n = 0$ ,  $u_n = 0$  τόσο στον τοίχο, εάν έχουμε το μοντέλο πλάσματος σε επαφή με τοίχο, όσο και στην διεπιφάνεια πλάσματος - κενού ή πλάσματος - πλάσματος. Επομένως, η παραπάνω έκφραση αφήνοντας το εξωτερικό όριο ακόμα ανοιχτό, μη προσδιορίζοντας δηλαδή με τι είναι σε επαφή το πλάσμα, γίνεται:

$$\begin{aligned} \int \vec{\eta} \cdot \vec{G}(\vec{\xi}) dV = & - \int \{ \gamma p (\nabla \cdot \vec{\xi}) \nabla \cdot \vec{\eta} + \vec{Q} \cdot \vec{R} + \frac{1}{2} (\nabla p) \cdot (\vec{\xi} \nabla \cdot \vec{\eta} + \vec{\eta} \nabla \cdot \vec{\xi}) + \frac{1}{2} \vec{j} \cdot (\vec{\eta} \times \vec{Q} + \vec{\xi} \times \vec{R}) \\ & - \frac{1}{2} (\nabla \Phi_g) \cdot [\vec{\eta} \nabla \cdot (\rho \vec{\xi}) + \vec{\xi} \nabla \cdot (\rho \vec{\eta})] - \frac{1}{2} \vec{\eta} \cdot [\nabla \cdot (\vec{\xi} \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u})] - \frac{1}{2} \vec{\xi} \cdot [\nabla \cdot (\vec{\eta} \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u})] \\ & - \rho (\vec{u} \cdot \nabla \vec{\xi}) \cdot (\vec{u} \cdot \nabla \vec{\eta}) \} dV - \int \eta_n \Pi(\vec{\xi}) dS = \int [\text{symmetric in } \vec{\xi} \text{ and } \vec{\eta}] dV - \int \eta_n \Pi(\vec{\xi}) dS \quad (3.24) \end{aligned}$$

Συγκεκριμένα για το μοντέλο στο οποίο το πλάσμα ακουμπά τοίχο, ισχύει στον τοίχο  $\xi_n = \eta_n = 0$  άρα η 3.24 γίνεται:

$$\int [\vec{\eta} \cdot \vec{G}(\vec{\xi}) - \vec{\xi} \cdot \vec{G}(\vec{\eta})] dV = 0$$

Δηλαδή, με ικανοποιημένες τις "εξωτερικές" συνθήκες προκύπτει πως ο τελεστής  $\vec{G}$  είναι αυτοσυζυγής. Με όμοιο τρόπο χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες στη διαταραγμένη διεπιφάνεια αποδεικνύεται ότι ο  $\vec{G}$  είναι αυτοσυζυγής και για τα μοντέλα πλάσμα



- κενό και πλάσμα - πλάσμα, καθώς προκύπτει και το επιφανειακό ολοκλήρωμα συμμετρικό ως προς τα  $\vec{\xi}, \vec{\eta}$ . Συγκεκριμένα, για το γενικότερο μοντέλο που πλάσμα βρίσκεται σε επαφή με άλλο πλάσμα (τα μεγέθη του οποίου θα συμβολίζουμε με  $\hat{f}$ ) ισχύει στην ισορροπία η συνοριακή συνθήκη  $[[p + \frac{1}{2}B^2]] = 0$  στην διεπιφάνεια, ενώ μετά τη διαταραχή στην διαταραγμένη διεπιφάνεια ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες:

$$[[\xi_n]] = 0 \quad (3.25)$$

$$[[\Pi + \xi_n \vec{n} \cdot \nabla(p + \frac{1}{2}B^2)]] = 0 \quad (3.26)$$

Επομένως η εξίσωση 3.24 για ολοκλήρωση σε όλο τον όγκο και των δυο πλασμάτων γίνεται:

$$\begin{aligned} \int \vec{\eta} \cdot \vec{G}(\vec{\xi}) dV_{all} = & - \int \{ \gamma p (\nabla \cdot \vec{\xi}) \nabla \cdot \vec{\eta} + \vec{Q} \cdot \vec{R} + \frac{1}{2} (\nabla p) \cdot (\vec{\xi} \nabla \cdot \vec{\eta} + \vec{\eta} \nabla \cdot \vec{\xi}) + \frac{1}{2} \vec{j} \cdot (\vec{\eta} \times \vec{Q} + \vec{\xi} \times \vec{R}) \\ & - \frac{1}{2} (\nabla \Phi_g) \cdot [\vec{\eta} \nabla \cdot (\rho \vec{\xi}) + \vec{\xi} \nabla \cdot (\rho \vec{\eta})] - \frac{1}{2} \vec{\eta} \cdot [\nabla \cdot (\vec{\xi} \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u})] - \frac{1}{2} \vec{\xi} \cdot [\nabla \cdot (\vec{\eta} \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u})] \\ & - \rho (\vec{u} \cdot \nabla \vec{\xi}) \cdot (\vec{u} \cdot \nabla \vec{\eta}) \} dV - \int \eta_m \xi_n \vec{n} \cdot [[\nabla(p + \frac{1}{2}B^2)]] dS \\ & - \int \{ \gamma \hat{p} (\nabla \cdot \hat{\xi}) \nabla \cdot \hat{\eta} + \hat{Q} \cdot \hat{R} + \frac{1}{2} (\nabla \hat{p}) \cdot (\hat{\xi} \nabla \cdot \hat{\eta} + \hat{\eta} \nabla \cdot \hat{\xi}) + \frac{1}{2} \hat{j} \cdot (\hat{\eta} \times \hat{Q} + \hat{\xi} \times \hat{R}) \\ & - \frac{1}{2} (\nabla \Phi_g) \cdot [\hat{\eta} \nabla \cdot (\hat{\rho} \hat{\xi}) + \hat{\xi} \nabla \cdot (\hat{\rho} \hat{\eta})] - \frac{1}{2} \hat{\eta} \cdot [\nabla \cdot (\hat{\xi} \hat{\rho} \hat{u} \cdot \nabla \hat{u})] - \frac{1}{2} \hat{\xi} \cdot [\nabla \cdot (\hat{\eta} \hat{\rho} \hat{u} \cdot \nabla \hat{u})] \\ & - \hat{\rho} (\hat{u} \cdot \nabla \hat{\xi}) \cdot (\hat{u} \cdot \nabla \hat{\eta}) \} d\hat{V} \quad (3.27) \end{aligned}$$

### 3.3 Ενέργεια στάσιμων πλασμάτων

#### 3.3.1 Διατήρηση ενέργειας

Θα αποδείξουμε ότι η συνολική ενέργεια των κυμάτων και ασταθειών ενός στάσιμου πλάσματος διατηρείται.

Αρχικά, δεδομένης της σχέσης  $\nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$  της ισορροπίας ισχύει:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{\xi} \cdot \vec{\eta}) = \rho \vec{u} \cdot \nabla (\vec{\xi} \cdot \vec{\eta}) = \rho (\vec{u} \cdot \nabla \vec{\xi}) \cdot \vec{\eta} + \rho (\vec{u} \cdot \nabla \vec{\eta}) \cdot \vec{\xi}$$

Επομένως, βάσει της παραπάνω σχέσης ισχύει:

$$\int [\vec{\eta} \cdot (\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{\xi}) + \vec{\xi} \cdot (\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{\eta})] dV = \int \rho u_n \vec{\xi} \cdot \vec{\eta} dS = 0 \quad (3.28)$$

όπου το επιφανειακό ολοκλήρωμα μηδενίζεται διότι  $u_n = 0$  τόσο στον τοίχο αν το μοντέλο που εξετάζουμε είναι πλάσμα σε επαφή με τοίχο, όσο και στην διαταραγμένη διεπιφάνεια αν έχουμε το μοντέλο πλάσμα - κενό ή πλάσμα - πλάσμα.

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση κίνησης 3.16 από αριστερά με  $-\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}$  και ολοκληρώνοντας ως προς τον όγκο έχουμε:

$$-\int \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \cdot \vec{G}(\vec{\xi}) dV + 2 \int \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \cdot (\rho \vec{u} \cdot \nabla \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}) dV + \int \rho \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.29)$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα μηδενίζεται λόγω της 3.28 για  $\vec{\xi} = \vec{\eta} = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}$  και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι  $\vec{G}$  αυτοσυζυγής η σχέση 3.29 γράφεται:

$$\frac{d}{dt} \left[ -\frac{1}{2} \int \vec{\xi} \cdot \vec{G}(\vec{\xi}) dV + \frac{1}{2} \int \rho \left| \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right|^2 dV \right] = 0 \Rightarrow H = \int h dV = \text{const.}$$

όπου  $h = \frac{1}{2} \rho \left| \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right|^2 - \frac{1}{2} \vec{\xi} \cdot \vec{G}(\vec{\xi})$  η πυκνότητα ενέργειας. Συνεπώς, η συνολική ενέργεια διατηρείται.

### 3.3.2 Τελεστής Doppler - Coriolis

Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω, η βασική διαφορά ανάμεσα στην εξίσωση κίνησης για τα στατικά και τα στάσιμα πλάσματα είναι η ύπαρξη του τελεστή  $\vec{u} \cdot \nabla$ , που προκύπτει λόγω της ύπαρξης ροής υποβάθρου ταχύτητας  $\vec{u}$  στα στάσιμα. Σε αναλογία λοιπόν με τη Κβαντική Μηχανική, ορίζουμε τον τελεστή Doppler-Coriolis:

$$U \equiv -i\vec{u} \cdot \nabla$$

Έτσι, η εξίσωση κίνησης 3.16 για τις διαταραχές των στάσιμων πλασμάτων γίνεται:

$$\vec{G}(\vec{\xi}) - 2i\rho U \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} - \rho \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.30)$$

Ενώ η φασματική εξίσωση, που προκύπτει ως γνωστόν αντικαθιστώντας  $\vec{\xi}(\vec{r}, t) = \hat{\xi}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$ , γίνεται:

$$\vec{G}(\hat{\xi}) - 2\rho\omega U \hat{\xi} + \rho\omega^2 \hat{\xi} = 0 \quad (3.31)$$

Βασική ιδιότητα του τελεστή  $U$  είναι πως και αυτός είναι αυτοσυζυγής, κάτι που μπορούμε να δείξουμε εύκολα από τον ορισμό της αυτοσυζυγίας. Συγκεκριμένα:

$$\langle \vec{\eta}, U \vec{\xi} \rangle = \frac{1}{2} \int \rho \vec{\eta}^* \cdot U \vec{\xi} dV = \frac{1}{2} \int \rho \vec{\xi} \cdot (U \vec{\eta})^* dV = \langle U \vec{\eta}, \vec{\xi} \rangle$$

όπου η ενδιάμεση ισότητα μεταξύ των ολοκληρωμάτων προκύπτει άμεσα από το πρώτο μέλος της σχέσης 3.28. Σημειώνεται πως για την απόδειξη συζυγίας του συγκεκριμένου

τελεστή δεν χρειάστηκε η εφαρμογή συνοριακών συνθηκών, επομένως ισχύει για κάθε μοντέλο που θέλουμε να μελετήσουμε.

Συνεπώς, η δυσκολία του φασματικού προβλήματος για στάσιμα πλάσματα δεν προκύπτει από το γεγονός ότι οι τελεστές  $\vec{G}, U$  δεν είναι Ερμιτιανοί, αλλά από το ότι το πρόβλημα ιδιοτιμών είναι μη γραμμικό, έχει όρους  $\omega, \omega^2$  άρα το  $\omega$  έχει και φανταστικό και πραγματικό μέρος, και εξαρτάται από δύο, αυτοσυζυγείς όμως, τελεστές  $\vec{G}, U$ .

### 3.3.3 Εκφράσεις για κινητική και δυναμική ενέργεια, Νέο ενεργειακό κριτήριο ευστάθειας

Ως γνωστόν από την ανάλυση για στατικό πλάσμα, η έκφραση για την κινητική ενέργεια των διαταραχών, σε οποιοδήποτε μοντέλο, είναι:

$$K = \frac{1}{2} \int \rho \frac{\partial \vec{\xi}^*}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} dV_{all}$$

οπότε η απαίτηση για πεπερασμένο μέτρο του διανύσματος μετατόπισης  $\vec{\xi}$  συνδέεται άμεσα με την απαίτηση για πεπερασμένη κινητική ενέργεια.

Όμοια πάλι με τη στατική περίπτωση η έκφραση για τη δυναμική ενέργεια των διαταραχών, όπως έχει χρησιμοποιηθεί και παραπάνω, είναι:

$$W = -\frac{1}{2} \int \vec{\xi}^* \cdot \vec{G}(\vec{\xi}) dV_{all}$$

Μια αναλυτική έκφραση για την δυναμική ενέργεια προκύπτει αντικαθιστώντας  $\vec{\eta} = \vec{\xi}^*$  στην σχέση 3.27, που στην γενική περίπτωση προκύπτει:

$$W = W^p[\vec{\xi}] + W^{inter}[\xi_n] + W^{\hat{p}}[\vec{\xi}]$$

όπου  $W^p[\vec{\xi}]$  η δυναμική ενέργεια του πλάσματος,  $W^{inter}[\xi_n]$  η δυναμική ενέργεια της διεπιφάνειας και  $W^{\hat{p}}[\vec{\xi}]$  η δυναμική ενέργεια του κενού ή του δεύτερου πλάσματος ανάλογα το μοντέλο.

Συγκεκριμένα, για το μοντέλο πλάσμα-τοίχος έχουμε:

$$W^p = \frac{1}{2} \int \{ \gamma p |\nabla \cdot \vec{\xi}|^2 + |\vec{Q}|^2 + (\nabla p) \cdot \vec{\xi} \nabla \cdot \vec{\xi}^* + \vec{j} \cdot (\vec{\xi}^* \times \vec{Q}) - (\nabla \Phi_g) \cdot \vec{\xi}^* \nabla \cdot (\rho \vec{\xi}) - \vec{\xi}^* \cdot [\nabla \cdot (\xi \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u})] - \rho |\vec{u} \cdot \nabla \vec{\xi}|^2 \} dV \quad (3.32)$$

Παρατηρούμε σε σχέση με την ενέργεια στη στατική περίπτωση δύο νέους όρους, τους τελευταίους δύο, που προκύπτουν λόγω της ροής υποβάθρου  $\vec{u}$ . Στο συγκεκριμένο μοντέλο, ισχύει  $W^{inter} = 0$  καθώς  $\xi_n = 0$  στον τοίχο ο οποίος αποτελεί την "διεπιφάνεια" και επίσης η ενέργεια  $W^{\hat{p}}$  δεν ορίζεται (δεν υπάρχει) καθώς σε αυτό το μοντέλο δεν υπάρχει κενό ή δεύτερο πλάσμα.

Για το μοντέλο πλάσμα - κενό, η ενέργεια του πλάσματος είναι η ίδια που δίνεται από την σχέση 3.32, ενώ για την διεπιφάνεια ισχύει:

$$W^{inter} = \frac{1}{2} \int |\xi_n|^2 \vec{n} \cdot \llbracket \nabla(p + \frac{1}{2}B^2) \rrbracket dS \quad (3.33)$$

Τέλος, η δυναμική ενέργεια των διαταραχών του κενού είναι:

$$W^{\hat{p}} = \frac{1}{2} \int |\hat{Q}|^2 d\hat{V}$$

Στο μοντέλο που δύο πλάσματα βρίσκονται σε επαφή, η ενέργεια του πρώτου πλάσματος δίνεται από τη σχέση 3.32, η ενέργεια των διαταραχών της διεπιφάνειας από τη σχέση 3.33, ενώ για τις διαταραχές του δεύτερου πλάσματος ισχύει:

$$W^{\hat{p}} = \frac{1}{2} \int \{ \gamma \hat{p} |\nabla \cdot \hat{\xi}|^2 + |\hat{Q}|^2 + (\nabla \hat{p}) \cdot \hat{\xi} \nabla \cdot \hat{\xi}^* + \hat{j} \cdot (\hat{\xi}^* \times \hat{Q}) - (\nabla \Phi_g) \cdot \hat{\xi}^* \nabla \cdot (\hat{\rho} \hat{\xi}) - \hat{\xi}^* \cdot [\nabla \cdot (\hat{\xi} \hat{\rho} \hat{u} \cdot \nabla \hat{u})] - \hat{\rho} |\hat{u} \cdot \nabla \hat{\xi}|^2 \} d\hat{V} \quad (3.34)$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε "τετραγωνική μορφή" (αντίστοιχη "ενέργεια") για τον νέο τελεστή  $U$ , σε αναλογία με τις αντίστοιχες τετραγωνικές μορφές για τον τελεστή  $-\rho^{-1}\vec{G}$  που είναι  $W = -\frac{1}{2} \int \vec{\xi}^* \cdot \vec{G}(\vec{\xi}) dV$  και για τον μοναδιαίο τελεστή 1 που είναι  $I = \frac{1}{2} \int \rho \vec{\xi}^* \cdot \vec{\xi} dV$ . Τελικά, για τον  $U$ :

$$V = \frac{1}{2} \int \rho \vec{\xi}^* \cdot U \vec{\xi} dV$$

Μάλιστα, χρήση αυτών των τετραγωνικών μορφών και ορμώμενοι από την Κβαντική Μηχανική μπορούμε να ορίσουμε τις αντίστοιχες μέσες τιμές των τελεστών  $U$  και  $\rho^{-1}\vec{G}$  κανονικοποιώντας τις ως ακολούθως:

$$\bar{V} \equiv \frac{V}{I} = \langle U \rangle, \bar{W} \equiv \frac{W}{I} = \langle \rho^{-1}\vec{G} \rangle$$

Οι ποσότητες που ορίστηκαν παραπάνω είναι πραγματικές καθώς οι αντίστοιχοι τελεστές είναι, όπως έχει δειχθεί παραπάνω, Ερμιτιανοί.

Έτσι, ξεκινώντας από την φασματική εξίσωση, πολλαπλασιάζοντας την με  $\frac{1}{2}\vec{\xi}^*$  και ολοκληρώνοντας σε όλο τον όγκο έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{G}(\vec{\xi}) - 2\rho\omega U\vec{\xi} + \rho\omega^2\vec{\xi} = 0 &\Rightarrow \frac{1}{2} \int \vec{\xi}^* \cdot \vec{G}(\vec{\xi}) - 2\omega \frac{1}{2} \int \rho \vec{\xi}^* \cdot U \vec{\xi} \\ + \omega^2 \frac{1}{2} \int \rho \vec{\xi}^* \cdot \vec{\xi} = 0 &\Rightarrow -W - 2\omega V + \omega^2 I = 0 \Rightarrow \omega^2 - 2\bar{V}\omega - \bar{W} = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Από την σχέση 3.35 προκύπτει ένα τριώνυμο ως προς το  $\omega$  το οποίο έχει λύση:

$$\omega = \bar{V} \pm (\bar{V}^2 + \bar{W})^{1/2} \quad (3.36)$$

Σημειώνεται πως η παραπάνω έκφραση δεν λύνει το πρόβλημα ιδιοτιμών, καθώς οι μέσες τιμές απαιτούν για τον υπολογισμό τους το άγνωστο διάνυσμα  $\vec{\xi}$ . Αν υποθέσουμε πως η κυκλική συχνότητα  $\omega$  γράφεται  $\omega = \sigma + i\nu$  η λύση 3.36 μπορεί να χωριστεί σε κύματα ( $\nu = 0$ ) και αστάθειες ( $\nu \neq 0$ ). Δηλαδή:

- ▶  $\sigma = \bar{V} \pm (\bar{V}^2 + \bar{W})^{1/2}, \nu = 0$  (σταθερά κύματα)
- ▶  $\sigma = \bar{V}, \nu = \pm(-\bar{V}^2 - \bar{W})^{1/2} \Rightarrow |\omega| = (-\bar{W})^{1/2}$  (αστάθειες)

Άρα η οριακή κατάσταση, δηλαδή το σημείο στο οποίο περνάμε από ευστάθεια σε αστάθεια, δεν είναι πια στο  $\omega = 0$  ( $\sigma = 0, \nu = 0$ ) όπως στην περίπτωση του στατικού πλάσματος, αλλά στο σημείο  $\sigma = \bar{V}, \nu = 0$ . Το σημείο αυτό δεν είναι πια συγκεκριμένο στο  $\omega$ -plane καθώς εξαρτάται από τη λύση  $\vec{\xi}$ .

Έτσι, το νέο πιο "αυστηρό" αναγκαίο και επαρκές ενεργειακό κριτήριο για την ευστάθεια στάσιμου πλάσματος είναι:

$$\bar{W}[\vec{\xi}] > -\bar{V}^2[\vec{\xi}]$$

για κάθε  $\vec{\xi}$  πεπερασμένου μέτρου που ικανοποιεί τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες. Αντίστοιχα, το κριτήριο για την αστάθεια είναι  $\bar{W}[\vec{\xi}] < -\bar{V}^2[\vec{\xi}]$ . Σημειώνεται ότι το κριτήριο ευστάθειας της στατικής περίπτωσης  $\bar{W}[\vec{\xi}] > 0$  (αντίστοιχα  $\bar{W}[\vec{\xi}] < 0$  για αστάθεια) προφανώς ισχύει ακόμα, απλώς η παραπάνω ανάλυση προσφέρει ένα πιο ισχυρό νέο κριτήριο.

### 3.4 Spectral Web

Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω, ο "κλασικός" τρόπος προσδιορισμού των ιδιοτιμών  $\omega$  είναι η απευθείας λύση του προβλήματος ιδιοτιμών, δηλαδή της φασματικής εξίσωσης σε συνδυασμό με τις κατάλληλες κάθε φορά οριακές συνθήκες. Στο παρόν κεφάλαιο θα αναλυθεί ένας εναλλακτικός τρόπος εύρεσης των ιδιοτιμών  $\omega$  και συνεπώς ένας εναλλακτικός τρόπος μελέτης των ασταθειών του συστήματος.

Έστω για απλότητα πλάσμα περιορισμένο ανάμεσα σε δύο τοίχους, έναν στο  $x = x_l$  και έναν στο  $x = x_r$ . Θέλουμε να βρούμε το φάσμα του στάσιμου πλάσματος όταν αυτό υπόκειται σε μια διαταραχή, συνεπώς θέλουμε να λύσουμε τη φασματική εξίσωση:

$$\vec{G}(\vec{\xi}) - 2\rho\omega U\vec{\xi} + \rho\omega^2\vec{\xi} = 0$$

Με συνοριακές συνθήκες:

- ▶  $\vec{n} \cdot \vec{\xi}|_{x=x_l} = 0 \Rightarrow \xi_n(x_l) = 0$  (εσωτερικός τοίχος, αριστερή ΣΣ)
- ▶  $\vec{n} \cdot \vec{\xi}|_{x=x_r} = 0 \Rightarrow \xi_n(x_r) = 0$  (εξωτερικός τοίχος, δεξιά ΣΣ)

Προκειμένου να επιλύσουμε το παραπάνω πρόβλημα επιβάλλουμε την αριστερή συνοριακή συνθήκη  $\xi_n(x_l) = 0$  και "αφήνουμε" την δεξιά. Τότε, μπορούμε να το λύσουμε για αυθαίρετες μιγαδικές τιμές του  $\omega$ , κάτι το οποίο έχει ως αποτέλεσμα λύσεις  $\vec{\xi}^l(x; \omega)$  τις οποίες ονομάζουμε αριστερές λύσεις. Προφανώς, ολοκληρώνοντας από αριστερά προς τα δεξιά, η δεξιά συνοριακή συνθήκη γενικά δεν θα ικανοποιείται. Προκειμένου να καταλάβουμε ποια είναι η φυσική σημασία αυτού, επιστρέφουμε στα ενδιάμεσα βήματα της απόδειξης της αυτοσυζυγίας του  $\vec{G}$ . Συγκεκριμένα από τη σχέση 3.24:

$$\begin{aligned} \int \vec{\eta} \cdot \vec{G}(\vec{\xi}) dV &= \int [\text{symmetric in } \vec{\xi} \text{ and } \vec{\eta}] dV - \int \eta_n \Pi(\vec{\xi}) dS_{right} - \int \eta_n \Pi(\vec{\xi}) dS_{left} \\ &\Rightarrow \int \vec{\eta} \cdot \vec{G}(\vec{\xi}) dV = \int [\text{symmetric in } \vec{\xi} \text{ and } \vec{\eta}] dV - \int \eta_n \Pi(\vec{\xi}) dS_{right} \end{aligned} \quad (3.37)$$

όπου το ολοκλήρωμα στην αριστερή επιφάνεια μηδενίζεται λόγω της συνοριακής συνθήκης  $\eta_n(x_l) = 0$  και τα  $\vec{\xi}, \vec{\eta}$  είναι αριστερές λύσεις.

Αν ικανοποιούνταν και η δεξιά συνοριακή συνθήκη, το ολοκλήρωμα στη δεξιά επιφάνεια θα μηδενιζόταν και αυτό και συνεπώς ο  $\vec{G}$  θα ήταν αυτοσυζυγής. Με ανοικτό όμως το δεξί όριο, φαίνεται από την 3.37 πως ο  $\vec{G}$  δεν είναι πια αυτοσυζυγής. Πολλαπλασιάζοντας τη 3.37 με  $-\frac{1}{2}$  και αντικαθιστώντας  $\vec{\eta} = \vec{\xi}^*$  προκύπτει η εξής έκφραση για την δυναμική ενέργεια:

$$W \equiv -\frac{1}{2} \int \vec{\xi}^* \cdot \vec{G}(\vec{\xi}) dV = W^p + W_{com} \quad (3.38)$$

όπου  $W^p$  το γνωστό πραγματικό ογκικό ολοκλήρωμα για την δυναμική ενέργεια των διαταραχών του πλάσματος, ενώ  $W_{com}$  είναι το επιφανειακό μιγαδικό ολοκλήρωμα που δίνεται από τη σχέση:

$$W_{com} \equiv \frac{1}{2} \int \xi_n^* \Pi(\vec{\xi}) dS_{right} \quad (3.39)$$

και καλείται "συμπληρωματική ενέργεια" (complementary energy). Η συγκεκριμένη ενέργεια παρέχεται επιπρόσθετα από την ενέργεια του πλάσματος για να διατηρήσει την χρονική εξάρτηση  $e^{-i\omega t}$  των διαταραχών στο ανοικτό σύστημα. Συνεπώς, η μη αυτοσυζυγία του τελεστή  $\vec{G}$  συνδέεται άμεσα με το ότι η ενέργεια ενός ανοικτού συστήματος είναι μιγαδική. Σημειώνεται ότι ο παραπάνω ορισμός αφορά μόνο το μοντέλο του πλάσματος σε επαφή με τοίχο, όπου έχουμε αφήσει το δεξί άκρο ακόμα ανοικτό και πως  $\vec{\xi}$  οι "αριστερές" λύσεις όπως έχουν οριστεί παραπάνω, τις οποίες θα συμβολίζω με  $\vec{\xi}^l$ .

Ισχυριζόμαστε ότι ο προσδιορισμός των ιδιοτιμών  $\omega$  που ικανοποιούν και τη δεξιά συνοριακή συνθήκη ισοδυναμεί με την ταυτόχρονη επίλυση δύο αλγεβρικών εξισώσεων που προκύπτουν από τον μηδενισμό της συμπληρωματικής ενέργειας, τόσο του πραγματικού όσο και του φανταστικού της μέρους:

- ▶  $W_{com,2} = \frac{1}{2} \int (\xi_{n1} \Pi_2 - \xi_{n2} \Pi_1) dS_{right} = 0$  (Solution Path)
- ▶  $W_{com,1} = \frac{1}{2} \int (\xi_{n1} \Pi_1 + \xi_{n2} \Pi_2) dS_{right} = 0$  (Conjugate Path)

όπου έχει χρησιμοποιηθεί ο συμβολισμός  $f_1 = Re(f)$ ,  $f_2 = Im(f)$  για μια μιγαδική ποσότητα  $f$ . Οι ιδιοτιμές του φάσματος βρίσκονται στις τομές των λύσεων των δυο path, δηλαδή στις κοινές λύσεις των εξισώσεων  $W_{com,2}[\vec{\xi}^l(x_r; \omega)] = 0$ ,  $W_{com,1}[\vec{\xi}^l(x_r; \omega)] = 0$ .

Η κατασκευή των δύο paths στο μιγαδικό επίπεδο του  $\omega$  και η εύρεση των τομών τους παράγει το Spectral Web, δηλαδή το πλήρες φάσμα των μιγαδικών ιδιοτιμών ενός στάσιμου πλάσματος μαζί με το solution και το conjugate path.

Όπως είδαμε παραπάνω προκειμένου να προσδιορίσουμε τις ιδιοτιμές  $\omega$  και τις ιδιοσυναρτήσεις  $\vec{\xi}$  που ικανοποιούν και τη συνοριακή συνθήκη στο δεξί άκρο πρέπει να μηδενίσουμε την ενέργεια  $W_{com}$ . Από την έκφρασή της συμπληρωματικής ενέργειας 3.39 όμως παρατηρούμε πως εκείνη μηδενίζεται και όταν η ολική διαταραχή της πίεσης  $\Pi$  είναι ίση με το μηδέν στο δεξί άκρο, επομένως τότε δεν ικανοποιείται απαραίτητα η συνοριακή συνθήκη του προβλήματος για το δεξί άκρο  $\xi_n(x_r) = 0$ , οπότε η λύση που παίρνουμε είναι ψευδής (spurious root). Προκειμένου να απορρίψουμε λοιπόν αυτές τις ψευδείς λύσεις προσθέτουμε στο πρόβλημα την απαίτηση  $\Pi(\vec{\xi}^l(x_r)) \neq 0$ .

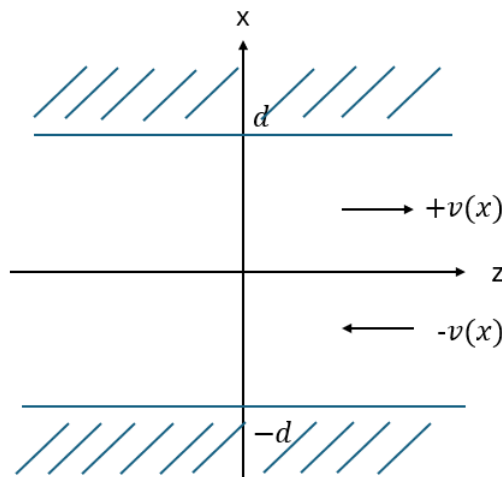
Μια σημαντική παρατήρηση είναι πως ανάλογα με το πρόβλημα που θέλουμε να μελετήσουμε μπορεί να χρειαστεί να ολοκληρώσουμε από δεξιά προς τα αριστερά, παίρνοντας έτσι τις δεξιές λύσεις  $\vec{\xi}^r$  και αφήνοντας ανοικτό το αριστερό άκρο. Ακριβώς ανάλογα ορίζεται η  $W_{com}$  σε αυτή την περίπτωση με την 3.39, με την μόνη διαφορά ένα μείον στο πρόσημο λόγω της αλλαγής στην διεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος. Μπορούμε ακόμα να συνδυάσουμε τις αριστερές και δεξιές λύσεις σε μια θέση  $x = x_{mix}$  ορίζοντας το  $\xi^{mix} = \xi^l(x = x_{mix}) = \xi^r(x = x_{mix})$  και έτσι να πάρουμε την mixed συμπληρωματική ενέργεια. Η "φυσική" σημασία της ενέργειας αυτής είναι η ίδια, αυτό που αλλάζει κάθε φορά είναι το που μένει ανοικτό το σύστημα. Με αυτόν τον τρόπο μπορούν να οριστούν αντίστοιχες συμπληρωματικές ενέργειες για τα μοντέλα πλάσμα - κενό και πλάσμα - πλάσμα και να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις τους με τον μηδενισμό αυτών των ενεργειών.

## Κεφάλαιο 4

# Εφαρμογή της μεθόδου του Spectral Web

Στο παρόν κεφάλαιο θα εφαρμόσουμε την μέθοδο μελέτης ασταθειών που αναλύθηκε παραπάνω σε ένα υδροδυναμικό, για απλότητα, πρόβλημα αστάθειας Kelvin - Helmholtz. Συγκεκριμένα, έστω ιδεατό, πολυτροπικό ρευστό με πολυτροπικό δείκτη  $\gamma$ , σταθερής πυκνότητας  $\rho$ , με προφίλ ταχύτητας  $\vec{u} = A \tanh(\tau x)\hat{z}$ , όπου  $A$  σταθερά με διαστάσεις ταχύτητας και  $\tau$  σταθερά με διαστάσεις αντίστροφου μήκους. Επιπλέον, το παρόν ρευστό περιορίζεται από τοίχο στις θέσεις  $x = d, x = -d$ .

Πρόκειται για πρόβλημα αστάθειας Kelvin Helmholtz, καθώς δεδομένης της μορφής του προφίλ ταχύτητας, τα δύο επιμέρους στρώματα  $(-d, 0), (0, d)$  έχουν αντίθετες ταχύτητες, άρα υπάρχει σχετική ταχύτητα κίνησης του ενός ως προς το άλλο.



Εικόνα 4.1: Σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος



## 4.1 Σύστημα εξισώσεων και οριακές συνθήκες

Ξεκινάμε με την φασματική εξίσωση:

$$\vec{F}(\vec{\xi}) + \rho(\omega + i\vec{u} \cdot \nabla)^2 \vec{\xi} = 0 \quad (4.1)$$

με συνοριακές συνθήκες  $\vec{n} \cdot \vec{\xi}|_{x=-d} = 0, \vec{n} \cdot \vec{\xi}|_{x=d} = 0$ .

Έστω  $\vec{\xi}(\vec{r}) = \vec{\xi}'(x)e^{ik_z z}$ . Τότε:

$$\omega + i\vec{u} \cdot \nabla = \omega - k_z u_z = \omega - k_z A \tanh(\tau x) = \tilde{\omega}(x)$$

Επομένως η 4.1 γίνεται:

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{\xi}) = -\rho\tilde{\omega}^2\vec{\xi} \Rightarrow \nabla(\gamma p \nabla \cdot \vec{\xi}) = -\rho\tilde{\omega}^2\vec{\xi} \Rightarrow \nabla(\gamma p(\frac{\partial \xi_x}{\partial x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial y} + \frac{\partial \xi_z}{\partial z})) = -\rho\tilde{\omega}^2\vec{\xi} \\ \nabla(\frac{\partial \xi'_x}{\partial x} e^{ik_z z} + 0 + \xi'_z i k_z e^{ik_z z}) = -\frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2 \vec{\xi} \Rightarrow (\frac{\partial^2 \xi'_x}{\partial x^2} e^{ik_z z} + \frac{\partial \xi'_z}{\partial x} i k_z e^{ik_z z}) \hat{x} \\ + (\frac{\partial \xi'_x}{\partial x} i k_z e^{ik_z z} + \xi'_z i k_z (i k_z) e^{ik_z z}) \hat{z} = -\frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2 \vec{\xi} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 \xi'_x}{\partial x^2} + \frac{\partial \xi'_z}{\partial x} i k_z = -\frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2 \xi'_x \\ \frac{\partial \xi'_x}{\partial x} i k_z - k_z^2 \xi'_z = -\frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2 \xi'_z \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Το κάτω σκέλος της 4.2 γίνεται:

$$\frac{\partial \xi'_x}{\partial x} i k_z = (k_z^2 - \frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2) \xi'_z \Rightarrow \xi'_z = i k_z \frac{1}{k_z^2 - \frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2} \frac{\partial \xi'_x}{\partial x} \quad (4.3)$$

Ενώ λόγω της 4.3 το πάνω σκέλος της 4.2 γράφεται:

$$\frac{\partial^2 \xi'_x}{\partial x^2} + i k_z \frac{\partial}{\partial x} (i k_z \frac{1}{k_z^2 - \frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2} \frac{\partial \xi'_x}{\partial x}) = -\frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2 \xi'_x \quad (4.4)$$

Επιπλέον, όπως γνωρίζουμε:

$$\Pi = -\gamma p \nabla \cdot \vec{\xi} = -\gamma p (\frac{\partial \xi'_x}{\partial x} e^{ik_z z} + i k_z e^{ik_z z} \xi'_z)$$

όμως  $\Pi(\vec{r}) = \Pi'(x)e^{ik_z z}$  επομένως:

$$\Pi' = -\gamma p (\frac{\partial \xi'_x}{\partial x} + i k_z \xi'_z) \quad (4.5)$$

Η οποία λόγω της 4.3 γίνεται:

$$\Pi' = -\gamma p (\frac{\partial \xi'_x}{\partial x} - k_z^2 \frac{1}{k_z^2 - \frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2} \frac{\partial \xi'_x}{\partial x}) = -\gamma p \frac{\partial \xi'_x}{\partial x} (1 - k_z^2 \frac{1}{k_z^2 - \frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2}) \quad (4.6)$$

Λύνοντας ως προς  $\frac{\partial \xi'_x}{\partial x}$ , για  $(1 - k_z^2 \frac{1}{k_z^2 - \frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2}) \neq 0$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi'_x}{\partial x} &= -\frac{\Pi'}{\gamma p} \frac{1}{1 - \frac{k_z^2}{k_z^2 - \frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2}} \Rightarrow \frac{\partial \xi'_x}{\partial x} = -\frac{\Pi'}{\gamma p} \frac{1}{\frac{k_z^2 - \frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2 - k_z^2}{k_z^2 - \frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2}} = -\frac{\Pi' k_z^2 - \frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2}{\gamma p} \Rightarrow \\ & \frac{\partial \xi'_x}{\partial x} = \left(-\frac{1}{\gamma p} + \frac{k_z^2}{\rho \tilde{\omega}^2}\right) \Pi' \quad (4.7) \end{aligned}$$

Ακόμα, η 4.4 λόγω της 4.6 γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \xi'_x}{\partial x} - \frac{k_z^2}{k_z^2 - \frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2} \frac{\partial \xi'_x}{\partial x} \right) &= -\frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2 \xi'_x \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial \xi'_x}{\partial x} \left( 1 - \frac{k_z^2}{k_z^2 - \frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2} \right) \right\} = -\frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2 \xi'_x \Rightarrow \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\Pi'}{\gamma p} \right) = -\frac{\rho}{\gamma p} \tilde{\omega}^2 \xi'_x \Rightarrow \frac{\partial \Pi'}{\partial x} = \rho \tilde{\omega}^2 \xi'_x \quad (4.8) \end{aligned}$$

Άρα, γράψαμε την αρχική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης σαν σύστημα δύο εξισώσεων πρώτης τάξης (για απλότητα  $\xi'_x \rightarrow \xi$  και  $\Pi' \rightarrow \Pi$ ):

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \left(-\frac{1}{\gamma p} + \frac{k_z^2}{\rho \tilde{\omega}^2}\right) \Pi \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x} = \rho \tilde{\omega}^2 \xi \end{cases} \quad (4.9)$$

Όμως, τα  $\xi, \Pi, \tilde{\omega}$  είναι μιγαδικές ποσότητες, επομένως γράφονται ως:

$$\xi = \xi_1 + i\xi_2, \quad \Pi = \Pi_1 + i\Pi_2, \quad \tilde{\omega} = \tilde{\sigma} + i\nu$$

όπου  $\tilde{\sigma}(x) = \sigma - k_z A \tanh(\tau x)$ .

Επομένως, το πάνω μέλος της 4.9 γίνεται:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + i \frac{\partial \xi_2}{\partial x} &= \left( -\frac{1}{\gamma p} + \frac{k_z^2}{\rho (\tilde{\sigma} + i\nu)^2} \right) (\Pi_1 + i\Pi_2) = \left( -\frac{1}{\gamma p} + \frac{k_z^2}{\rho} \frac{(\tilde{\sigma} - i\nu)^2}{(\tilde{\sigma}^2 + \nu^2)^2} \right) (\Pi_1 + i\Pi_2) \\ &= \left( -\frac{1}{\gamma p} + \frac{k_z^2}{\rho} \left[ \frac{\tilde{\sigma}^2 - \nu^2}{(\tilde{\sigma}^2 + \nu^2)^2} - i \frac{2\tilde{\sigma}\nu}{(\tilde{\sigma}^2 + \nu^2)^2} \right] \right) (\Pi_1 + i\Pi_2) \quad (4.10) \end{aligned}$$

Και κωρίζοντας πραγματικό και φανταστικό μέρος προκύπτουν οι εξής εξισώσεις:

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \left( -\frac{1}{\gamma p} + \frac{k_z^2}{\rho} \frac{\tilde{\sigma}^2 - \nu^2}{(\tilde{\sigma}^2 + \nu^2)^2} \right) \Pi_1 + \frac{k_z^2}{\rho} \frac{2\tilde{\sigma}\nu}{(\tilde{\sigma}^2 + \nu^2)^2} \Pi_2 \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = \left( -\frac{1}{\gamma p} + \frac{k_z^2}{\rho} \frac{\tilde{\sigma}^2 - \nu^2}{(\tilde{\sigma}^2 + \nu^2)^2} \right) \Pi_2 - \frac{k_z^2}{\rho} \frac{2\tilde{\sigma}\nu}{(\tilde{\sigma}^2 + \nu^2)^2} \Pi_1 \end{cases} \quad (4.11)$$

Και όμοια το κάτω μέλος της 4.9 γίνεται:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial x} + i \frac{\partial \Pi_2}{\partial x} = \rho (\tilde{\sigma} + i\nu)^2 (\xi_1 + i\xi_2) = \rho (\tilde{\sigma}^2 - \nu^2 + i2\tilde{\sigma}\nu) (\xi_1 + i\xi_2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{\partial \Pi_1}{\partial x} = \rho(\tilde{\sigma}^2 - \nu^2)\xi_1 - 2\rho\tilde{\sigma}\nu\xi_2 \\ \frac{\partial \Pi_2}{\partial x} = \rho(\tilde{\sigma}^2 - \nu^2)\xi_2 + 2\rho\tilde{\sigma}\nu\xi_1 \end{cases} \quad (4.12)$$

Έτσι, τελικά έχουμε ένα πραγματικό σύστημα 4 εξισώσεων πρώτης τάξης 4.11, 4.12.

Θέλουμε να λύσουμε το "αριστερό" πρόβλημα συνοριακών συνθηκών, δηλαδή να λύσουμε το πρόβλημα λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τις συνοριακές συνθήκες στο αριστερό άκρο  $x = -d$ . Συμβολίζουμε τις λύσεις του συγκεκριμένου προβλήματος  $\xi^l, \Pi^l$  και δεδομένης της αριστερής συνοριακής συνθήκης  $\vec{n} \cdot \xi|_{x=-d} = 0$  έχουμε τις εξής οριακές συνθήκες για το πρόβλημα των 4 εξισώσεων 1ης τάξης:

- ▶  $\xi_1^l(x = -d) = 0$
- ▶  $\xi_2^l(x = -d) = 0$
- ▶  $\Pi_1^l(x = -d) = 1$
- ▶  $\Pi_2^l(x = -d) = 0$

όπου η επιλογή για τις συνοριακές συνθήκες του  $\Pi$  είναι αυθαίρετη λόγω της γραμμικότητας του συστήματος.

Αφού λύσουμε το παραπάνω σύστημα για διάφορες τιμές των  $\sigma, \nu$  υπολογίζουμε τις ποσότητες:

- ▶  $W_{com,2} = \frac{1}{2} \int (\xi_1^l \Pi_2^l - \xi_2^l \Pi_1^l) dS_{right} = 0$  (Solution Path)
- ▶  $W_{com,1} = \frac{1}{2} \int (\xi_1^l \Pi_1^l + \xi_2^l \Pi_2^l) dS_{right} = 0$  (Conjugate Path)

όπου στη συγκεκριμένη περίπτωση τα ολοκληρώματα γίνονται με τετριμμένο τρόπο αντικαθιστώντας τις τιμές των ποσοτήτων  $\xi^l, \Pi^l$  στο άκρο  $x = d$  όπως αυτές έχουν προκύψει από την παραπάνω επίλυση. Τέλος, το ζητούμενο είναι να σχεδιάσουμε τα δύο paths σε άξονες  $(\sigma, \nu)$  και να προσδιορίσουμε τις τομές τους, δηλαδή τις ιδιοτιμές του προβλήματος που ικανοποιεί και τις δύο οριακές συνθήκες στους τοίχους. Η επίλυση του προβλήματος που περιγράφηκε θα γίνει αριθμητικά [10] συνεπώς χρήσιμη είναι η αδιαστατικοποίηση των εξισώσεων με τις οποίες θα δουλέψουμε.

## 4.2 Αδιαστατικοποίηση των εξισώσεων

Αρχικά, ορίζουμε τις μονάδες που θα χρησιμοποιήσουμε:

- ▶ Μονάδα μήκους  $l_n = \frac{1}{\tau}$

- Μονάδα ταχύτητας  $U$
- Μονάδα χρόνου  $t_n = \frac{l_n}{U}$
- Μονάδα πυκνότητας  $\rho_n$
- Μονάδα πίεσης  $p_n = \rho_n U^2$

Έτσι, οι ενδιαφερόμενες ποσότητες για το πρόβλημα μπορούν να γραφούν σαν μια αδιάστατη ποσότητα επί την αντίστοιχη μονάδα. Συγκεκριμένα:

- $\xi_i = y_i l_n \Rightarrow \xi'_i = \frac{\partial \xi_i}{\partial x} = \frac{y'_i l_n}{l_n} = y'_i$  όπου  $y_i, y'_i$  αδιάστατες ποσότητες για  $i = 1, 2$
- $p = p' \rho_n U^2$  όπου  $p'$  αδιάστατη ποσότητα
- $k_z = \frac{k'_z}{l_n} = \tau k'_z$  όπου  $k'_z$  αδιάστατη ποσότητα
- $\rho = \rho' \rho_n$  όπου  $\rho'$  αδιάστατη ποσότητα
- $\nu = \frac{\nu'}{l_n} = \frac{\nu' U}{l_n} = U \tau \nu'$  όπου  $\nu'$  αδιάστατη ποσότητα
- $\tilde{\sigma} = \sigma - k_z A \tanh(\tau x) = \tau U \sigma' - k'_z \tau A' U \tanh(\tau x) = \tau U (\sigma' - k'_z A' \tanh(\tau x)) = \tau U \tilde{\sigma}'$  όπου  $\sigma', \tilde{\sigma}'$  αδιάστατες ποσότητες
- $\Pi_i = \rho_n U^2 p_i \Rightarrow \Pi'_i = \frac{\partial \Pi_i}{\partial x} = \frac{\rho_n U^2}{l_n} p'_i$  όπου  $p_i, p'_i$  αδιάστατες ποσότητες για  $i = 1, 2$

Άρα, το πάνω μέλος της 4.11 γίνεται:

$$\begin{aligned} \xi'_1 + \left( \frac{1}{\gamma p} - \frac{k_z^2}{\rho} \frac{\tilde{\sigma}^2 - \nu^2}{(\tilde{\sigma}^2 + \nu^2)^2} \right) \Pi_1 - \frac{k_z^2}{\rho} \frac{2\tilde{\sigma}\nu}{(\tilde{\sigma}^2 + \nu^2)^2} \Pi_2 &= 0 \Rightarrow \\ \frac{y'_1 l_n}{l_n} + \left( \frac{1}{\gamma p' \rho_n U^2} - \frac{k_z'^2 \tau^2}{\rho' \rho_n} \frac{(\tau^2 U^2 \tilde{\sigma}'^2 - \tau^2 U^2 \nu'^2)}{(\tau^2 U^2 \tilde{\sigma}'^2 + \tau^2 U^2 \nu'^2)^2} \right) \rho_n U^2 p_1 - \frac{\tau^2 k_z'^2}{\rho' \rho_n} \frac{k_z'^2}{\tau^4 U^4} \frac{2\tau^2 U^2 \tilde{\sigma}' \nu'}{(\tilde{\sigma}'^2 + \nu'^2)} \rho_n U^2 p_2 &= 0 \Rightarrow \\ y'_1 + \left( \frac{1}{\gamma p'} - \frac{k_z'^2}{\rho'} \frac{(\tilde{\sigma}'^2 - \nu'^2)}{(\tilde{\sigma}'^2 + \nu'^2)^2} \right) p_1 - \frac{k_z'^2}{\rho'} \frac{2\tilde{\sigma}' \nu'}{(\tilde{\sigma}'^2 + \nu'^2)^2} p_2 &= 0 \Rightarrow \\ y'_1 + \left( M^2 - \frac{k_z'^2}{\rho'} \frac{(\tilde{\sigma}'^2 - \nu'^2)}{(\tilde{\sigma}'^2 + \nu'^2)^2} \right) p_1 - \frac{k_z'^2}{\rho'} \frac{2\tilde{\sigma}' \nu'}{(\tilde{\sigma}'^2 + \nu'^2)^2} p_2 &= 0 \quad (4.13) \end{aligned}$$

όπου  $M^2 = \frac{1}{\gamma p'}$  με  $M$  τον αριθμό Mach και έχοντας θέσει  $A' = 1$ .

Όμοια, το κάτω μέλος της 4.11 μετατρέπεται στην εξής αδιαστατικοποιημένη εξίσωση:

$$y'_2 + \frac{k_z'^2}{\rho'} \frac{2\tilde{\sigma}' \nu'}{(\tilde{\sigma}'^2 + \nu'^2)^2} p_1 + \left( M^2 - \frac{k_z'^2}{\rho'} \frac{(\tilde{\sigma}'^2 - \nu'^2)}{(\tilde{\sigma}'^2 + \nu'^2)^2} \right) p_2 = 0 \quad (4.14)$$

Εντελώς ανάλογα μετασχηματίζουμε σε αδιάστατες και τις εξισώσεις 4.12. Ξεκινώντας με το πάνω μέλος:

$$\begin{aligned}
\Pi'_1 - \rho(\tilde{\sigma}^2 - \nu^2)\xi_1 + 2\rho\tilde{\sigma}\nu\xi_2 &= 0 \Rightarrow \\
p'_1 \frac{\rho_n U^2}{l_n} - \rho_n \rho' \tau^2 U^2 (\tilde{\sigma}'^2 - \nu'^2) l_n y_1 + 2\rho' \rho_n \tau^2 U^2 \tilde{\sigma}' \nu' l_n y_2 &= 0 \Rightarrow \\
p'_1 \rho_n U^2 \tau - \frac{\rho_n \tau^2 U^2}{\tau} \rho' (\tilde{\sigma}'^2 - \nu'^2) y_1 + \frac{\rho_n \tau^2 U^2}{\tau} 2\rho' \tilde{\sigma}' \nu' y_2 &= 0 \Rightarrow \\
\rho_n U^2 \tau (p'_1 - \rho' (\tilde{\sigma}'^2 - \nu'^2) y_1 + 2\rho' \tilde{\sigma}' \nu' y_2) &= 0 \Rightarrow \\
p'_1 - \rho' (\tilde{\sigma}'^2 - \nu'^2) y_1 + 2\rho' \tilde{\sigma}' \nu' y_2 &= 0 \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Ενώ το κάτω μέλος:

$$p'_2 - 2\rho' \tilde{\sigma}' \nu' y_1 - \rho' (\tilde{\sigma}'^2 - \nu'^2) y_2 = 0 \quad (4.16)$$

Συνεπώς, το πρόβλημα ανάγεται στην αριθμητική επίλυση του συστήματος αδιαστατικοποιημένων εξισώσεων 4.13, 4.14, 4.15, 4.16 με τις αντίστοιχες αδιαστατικοποιημένες συνοριακές συνθήκες  $y_1(x = -d) = 0$ ,  $y_2(x = -d) = 0$ ,  $p_1(x = -d) = 1$ ,  $p_2(x = -d) = 0$ .

## Κεφάλαιο 5

# Αποτελέσματα της εφαρμογής

Στα παρακάτω αποτελέσματα έχω θεωρήσει  $\rho = 1, \tau = 1, d = 3$ .

Θα μελετήσουμε για διάφορες τιμές του αριθμού Mach την μορφή των solution και conjugate paths για κάποιες τιμές των  $k_z$ . Θα ελέγξουμε αν υπάρχουν τομές, αν υπάρχουν τομές αν πρόκειται για πραγματικές ή ψευδείς λύσεις, ενώ για τις πραγματικές θα χαράξουμε και τις ιδιοσυναρτήσεις των μεγεθών της Λαγκρατζιανής μετατόπισης και της ολικής πίεσης. Τέλος, για κάθε αριθμό Mach που θα μελετήσουμε θα παραθέσουμε γραφικά τη σχέση διασποράς δηλαδή το διάγραμμα της κυκλικής συχνότητας  $\omega$ , και το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος, συναρτήσει του  $k_z$ .

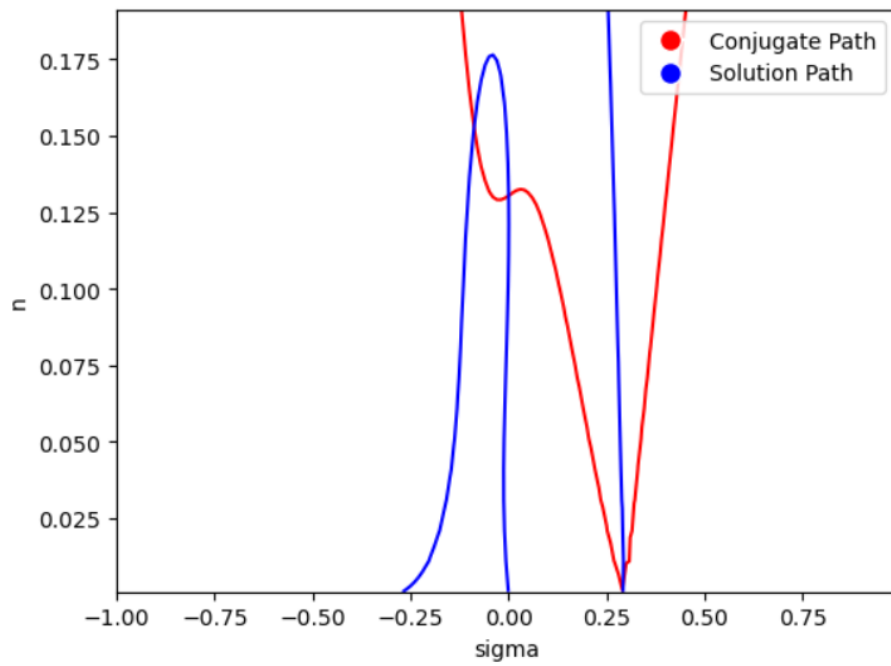
Ας ξεκινήσουμε τη μελέτη για αριθμό Mach  $M=0.01$ .

►  $k_z = 0.3$

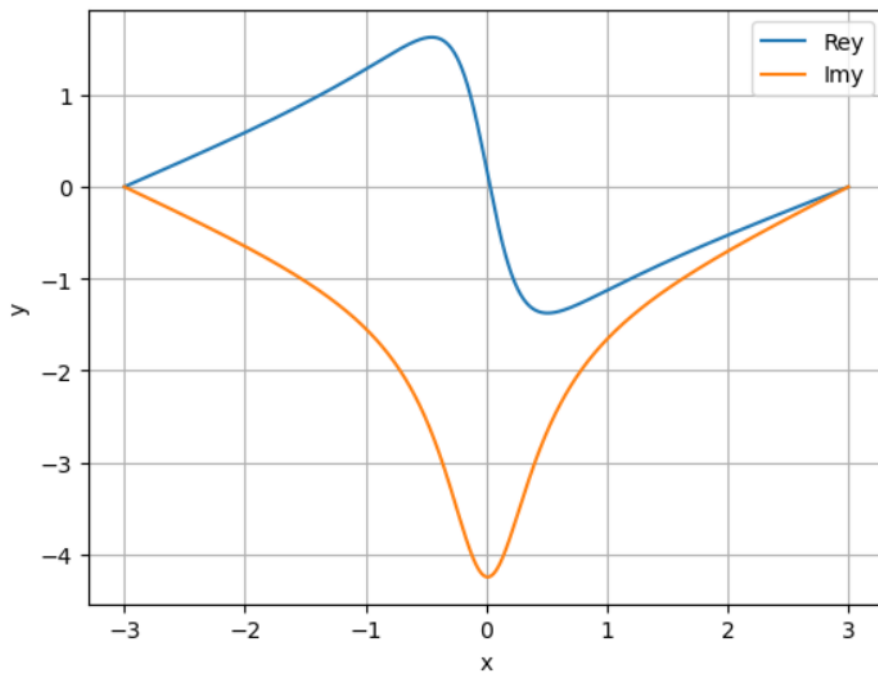
Υπάρχουν δύο σημεία τομής των paths όπως φαίνεται στην εικόνα 5.1:

$\sigma_1 = -0.08835038, n_1 = 0.152679$  (ψευδής λύση) και  $\sigma_2 = 3.2557 \times 10^{-9}, n_2 = 0.13034$  (πραγματική λύση). Εφόσον υπάρχει πραγματική λύση για αυτή θα σχεδιάσουμε τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις των πλατών  $\xi(x), \Pi(x)$ .

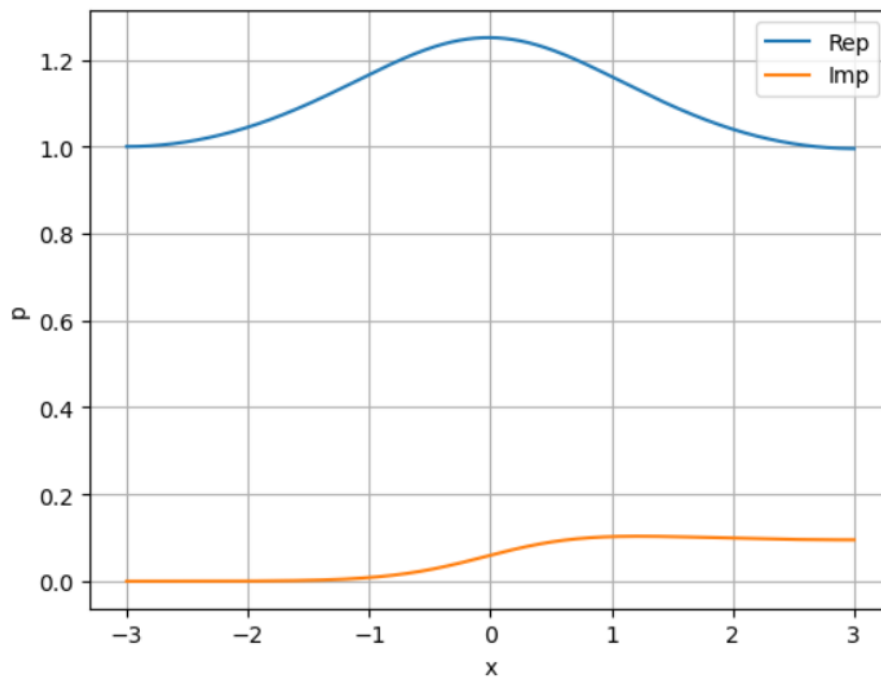
Σημειώνεται πως ο τρόπος με τον οποίο καταλαβαίνουμε αν η λύση είναι πραγματική είναι μέσω της ιδιοσυνάρτησης της Λαγκρατζιανής μετατόπισης. Εάν ικανοποιείται η συνοριακή συνθήκη στο δεξί άκρο πρόκειται για πραγματική λύση ενώ αν όχι πρόκειται για ψευδή. Ισοδύναμα μπορούμε να κοιτάξουμε την συνάρτηση της ολικής πίεσης. Εάν στο δεξί άκρο, δηλαδή στο σημείο  $x = +d$  έχει μηδενική τιμή τότε πρόκειται για ψευδή λύση.



Εικόνα 5.1: Solution και Conjugate path για  $M = 0.01, k_z = 0.3, x \in (-3, 3)$



Εικόνα 5.2: Ιδιοσυναρτήσεις της Λαγκρατζιανής μετατόπισης  $\xi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 0.01, k_z = 0.3$

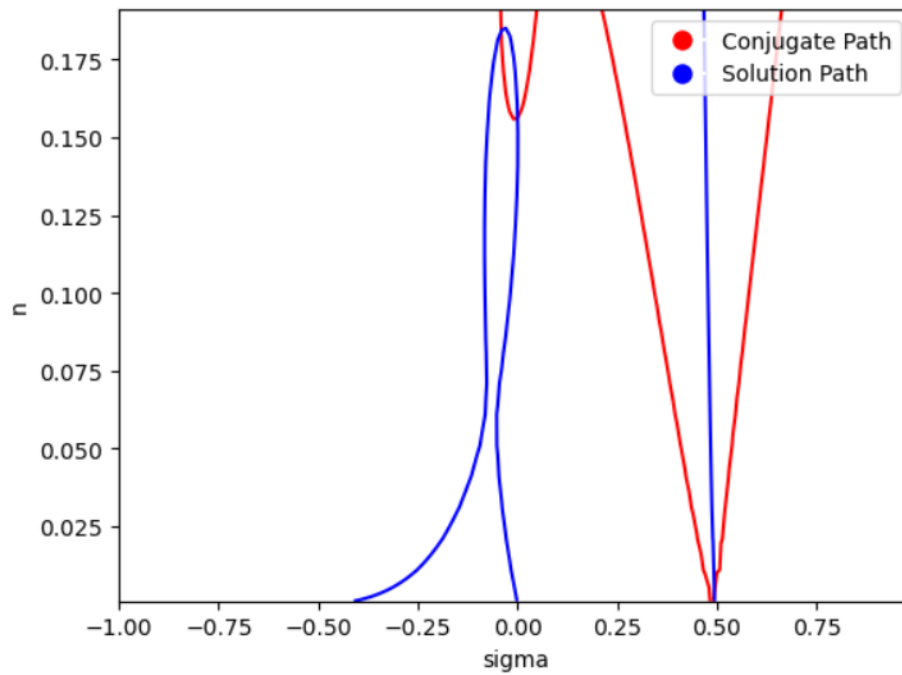


Εικόνα 5.3: Ιδιοσυναρτήσεις της διαταραχής της ολικής πίεσης  $\Pi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 0.01, k_z = 0.3$

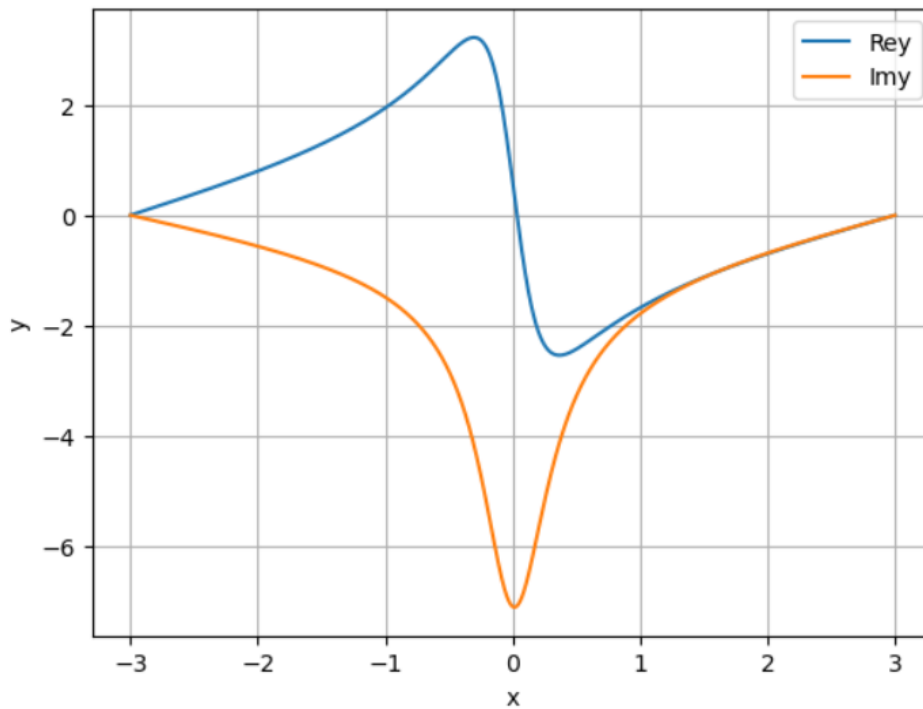
►  $k_z = 0.5$

Υπάρχουν πάλι δυο σημεία τομής 5.4, με συντεταγμένες:  $\sigma_1 = -0.04185, n_1 = 0.184237$  (ψευδής) και  $\sigma_2 = -2.83579 \times 10^{-10}, n_2 = 0.1558$  (πραγματική)

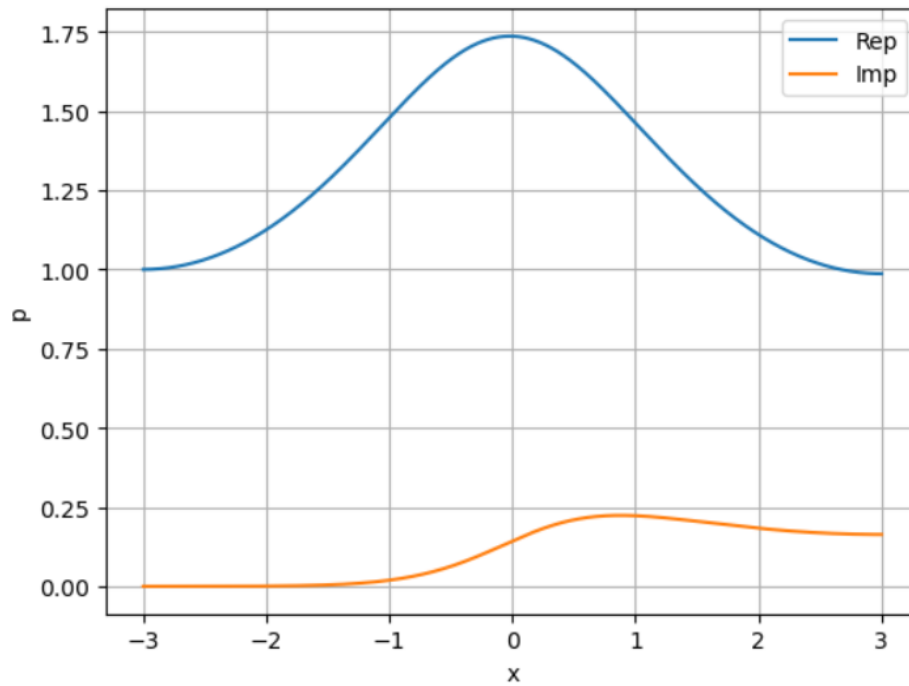




Εικόνα 5.4: Solution και Conjugate path για  $M = 0.01, k_z = 0.5, x \in (-3, 3)$



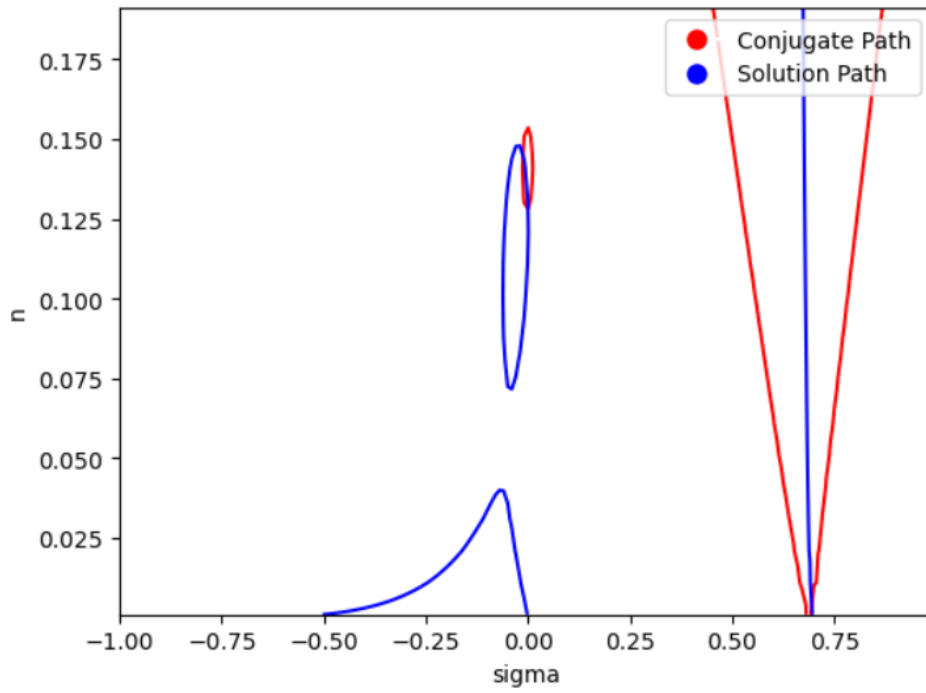
Εικόνα 5.5: Ιδιοσυναρτήσεις της Λαγκρατζιανής μετατόπισης  $\xi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 0.01, k_z = 0.5$



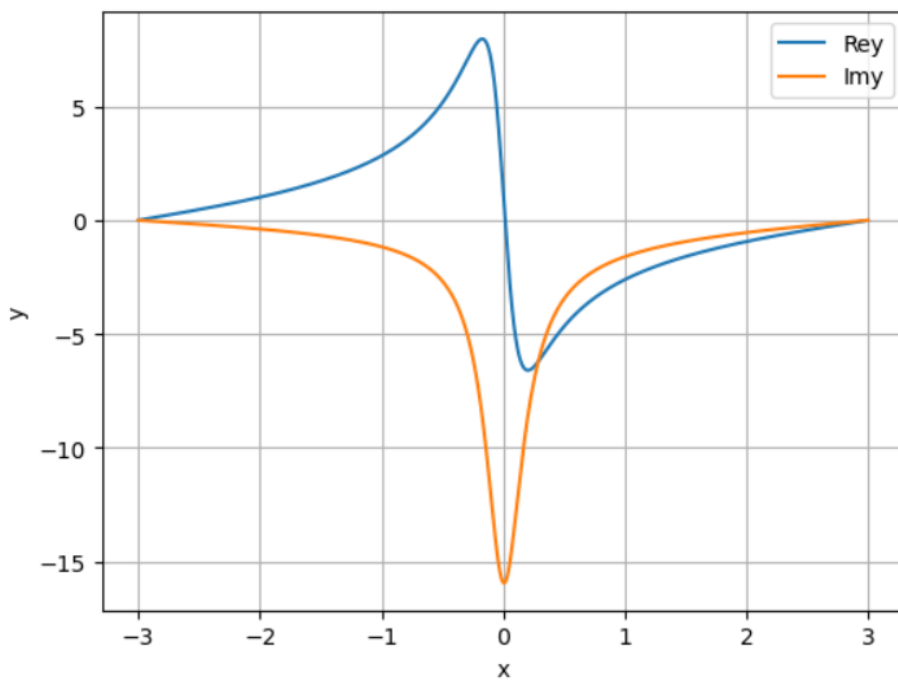
Εικόνα 5.6: Ιδιοσυναρτήσεις της διαταραχής της ολικής πίεσης  $\Pi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 0.01, k_z = 0.5$

►  $k_z = 0.7$

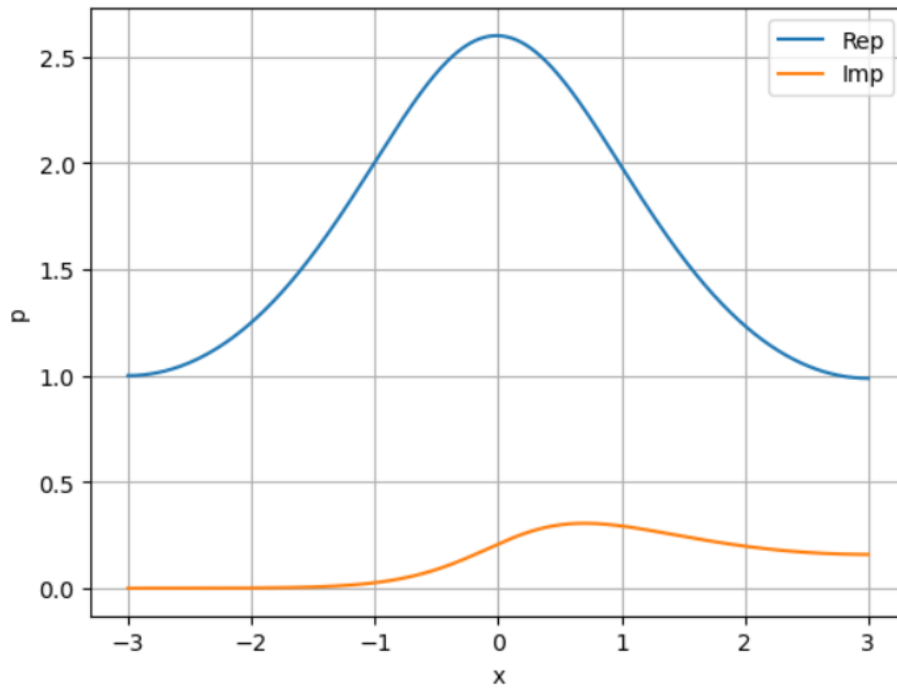
Υπάρχουν δυο σημεία τομής 5.7, δηλαδή δυο πιθανές λύσεις που αντιστοιχούν στα σημεία:  $\sigma_1 = -0.0134865, n_1 = 0.1461857$  (ψευδής) και  $\sigma_2 = 1.08211 \times 10^{-8}, n_2 = 0.127141$  (πραγματική)



Εικόνα 5.7: Solution και Conjugate path για  $M = 0.01, k_z = 0.7, x \in (-3, 3)$

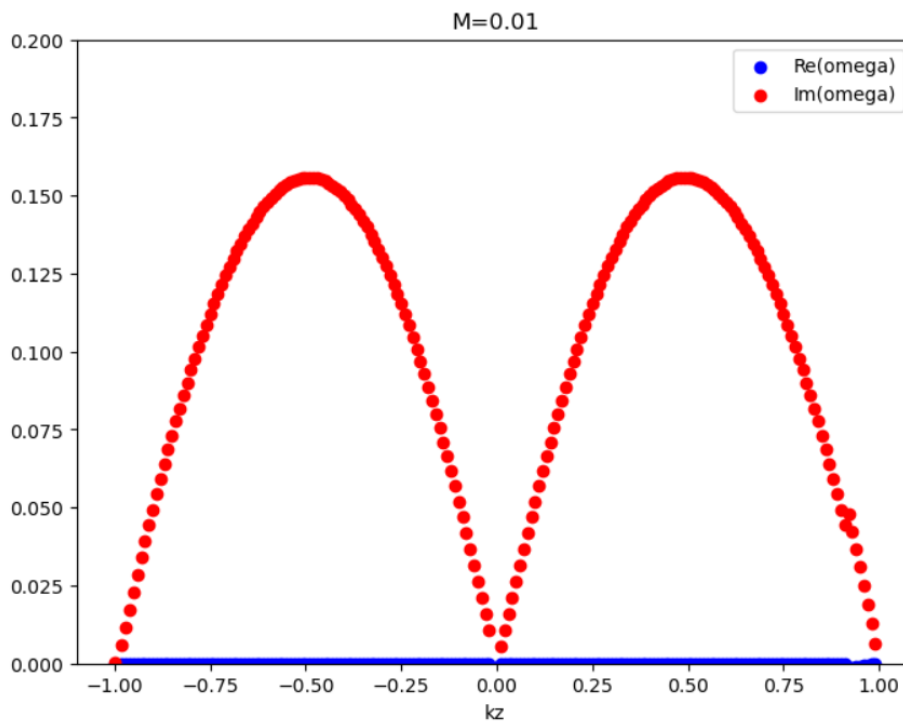


Εικόνα 5.8: Ιδiosisυναρτήσεις της Λαγκρατζιανής μετατόπισης  $\xi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 0.01, k_z = 0.7$



Εικόνα 5.9: Ιδιοσυναρτήσεις της διαταραχής της ολικής πίεσης  $\Pi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 0.01, k_z = 0.7$

Τέλος, παραθέτουμε τη γραφική απεικόνιση της σχέσης διασποράς για  $M = 0.01$ .

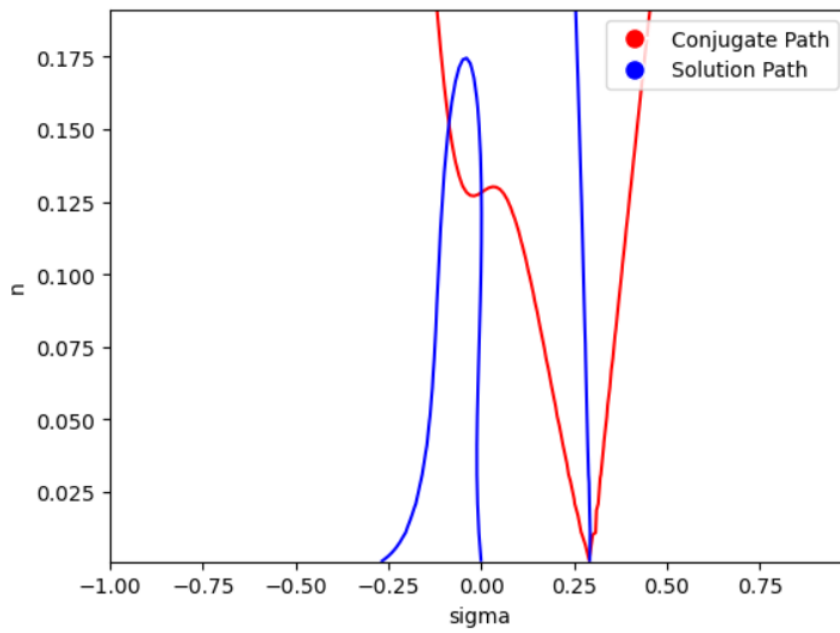


Εικόνα 5.10: Σχέση διασποράς  $\omega = \omega(k)$  για  $M = 0.01$

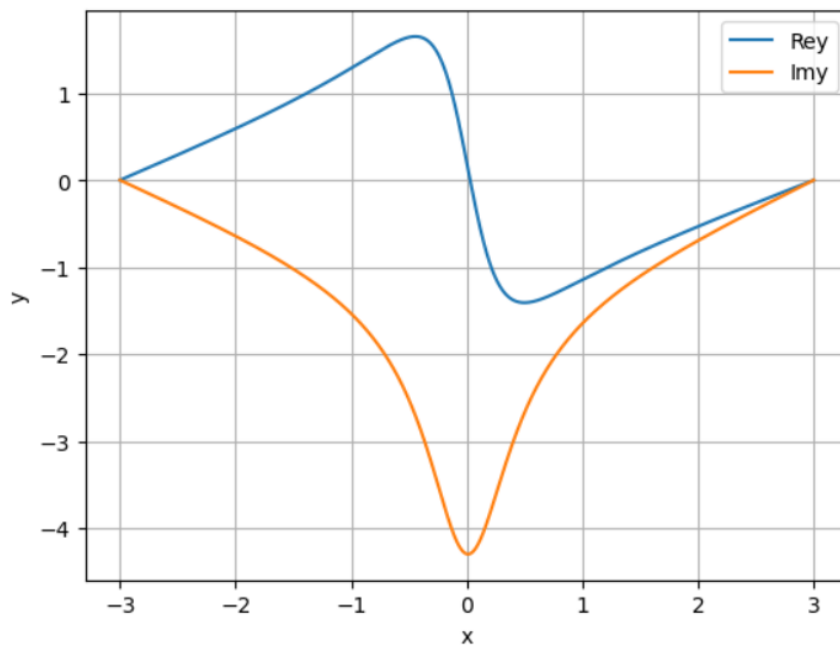
Στη συνέχεια, για  $M = 0.1$ :

►  $k_z = 0.3$

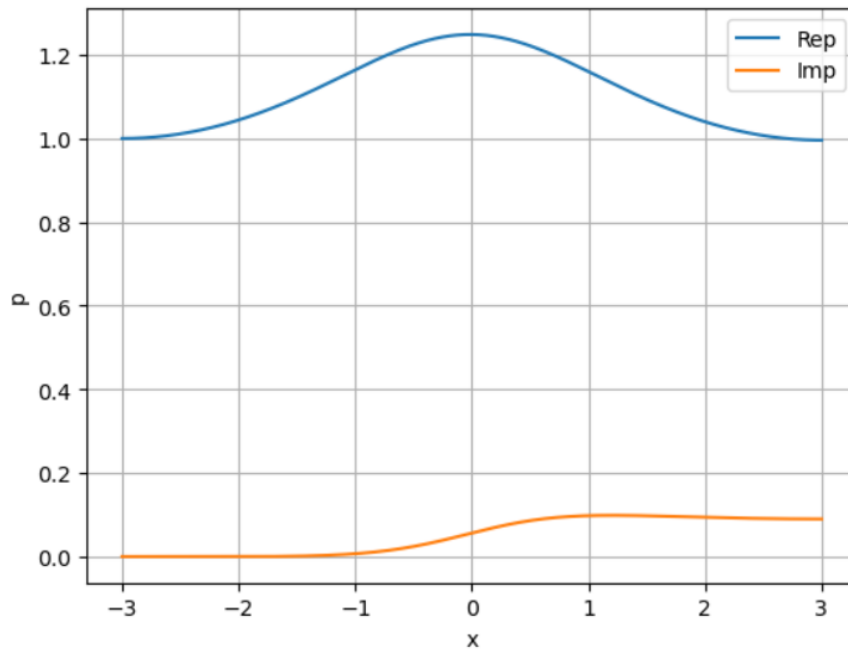
Υπάρχουν όπως φαίνεται στο σχήμα 5.11 δύο σημεία τομής του conjugate με το solution path:  $\sigma_1 = -0.087, n_1 = 0.1517$  (ψευδής) και  $\sigma_2 = 5.2688 \times 10^{-9}, n_2 = 0.128$  (πραγματική). Για κάθε  $k_z$ , για την κάθε πραγματική λύση θα παραθέσουμε τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις.



Εικόνα 5.11: Solution και Conjugate path για  $M = 0.1, k_z = 0.3, x \in (-3, 3)$



Εικόνα 5.12: Ιδιοσυναρτήσεις της Λαγκρατζιανής μετατόπισης  $\xi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 0.1, k_z = 0.3$

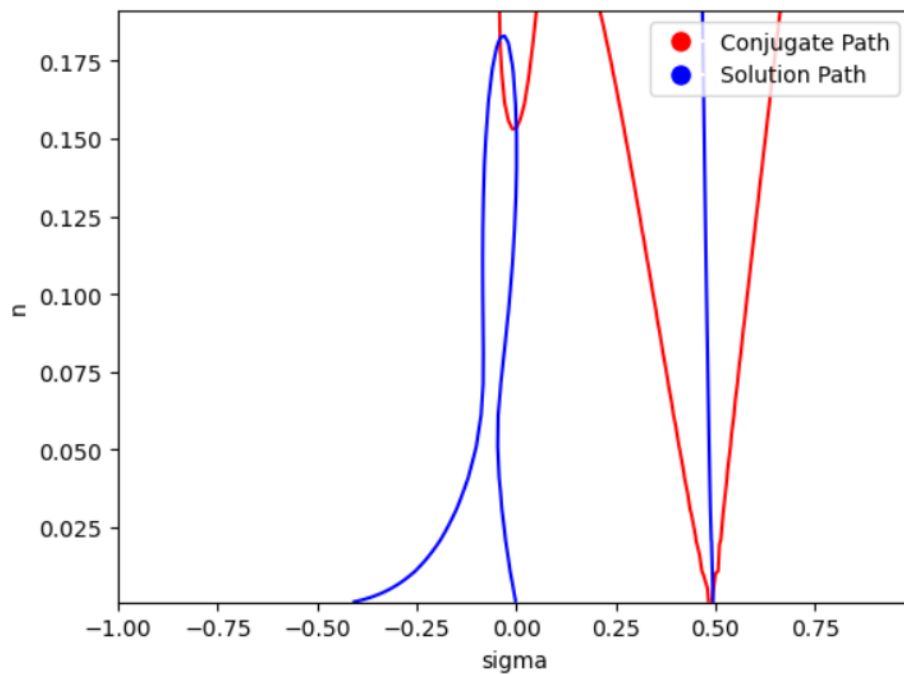


Εικόνα 5.13: Ιδιοσυναρτήσεις της διαταραχής της ολικής πίεσης  $\Pi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 0.1, k_z = 0.3$

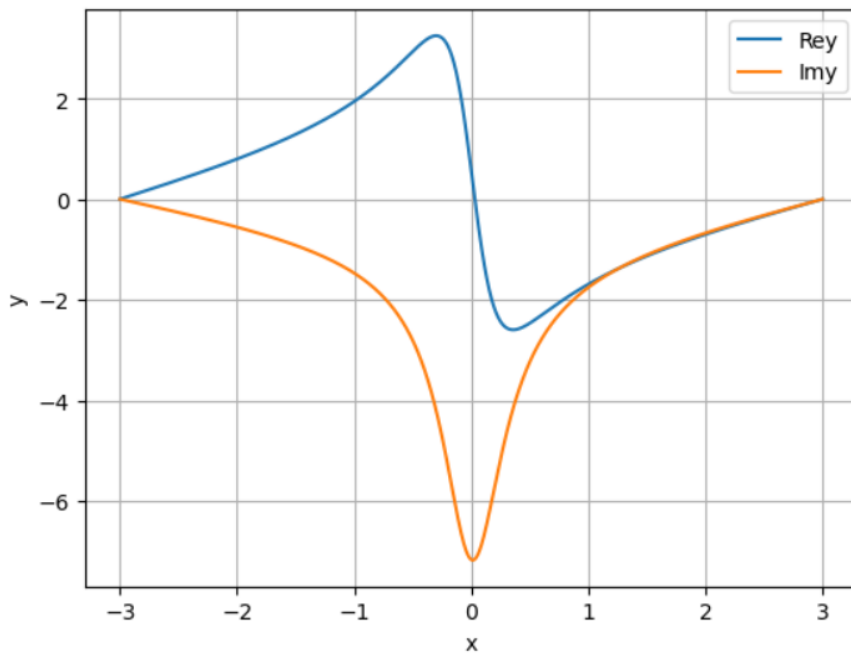
►  $k_z = 0.5$

Όμοια, με την περίπτωση του  $k_z = 0.3$ , τα  $\rho$ αίς τέμνονται σε δύο μόνο σημεία 5.14 με συντεταγμένες:

$\sigma_1 = 5.06077 \times 10^{-9}, n_1 = 0.1530621$  (πραγματική) και  $\sigma_2 = -0.041457, n_2 = 0.1822$  (ψευδής)

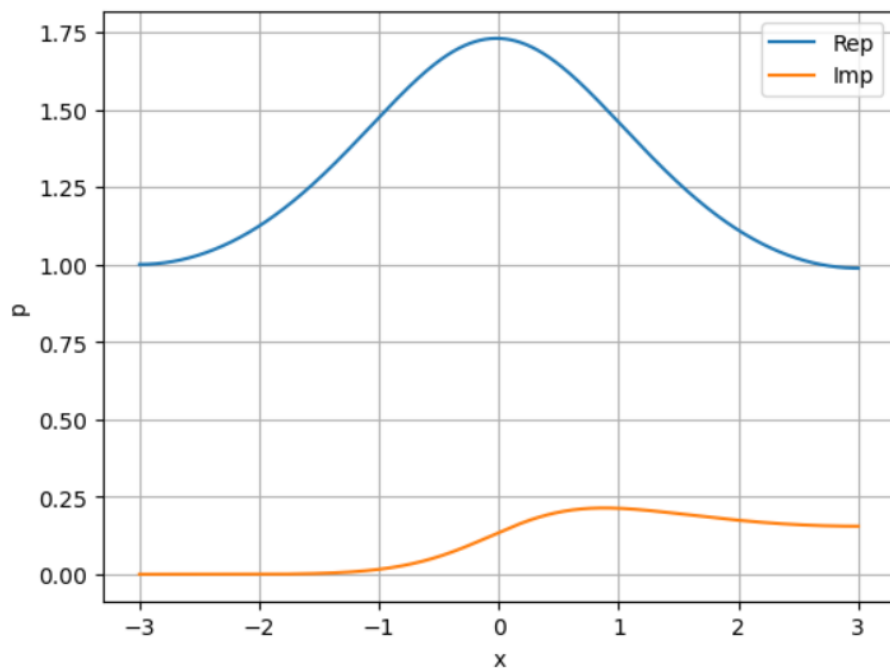


Εικόνα 5.14: Solution και Conjugate path για  $M = 0.1, k_z = 0.5, x \in (-3, 3)$



Εικόνα 5.15: Ιδιοσυναρτήσεις της Λαγκρατζιανής μετατόπισης  $\xi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 0.1, k_z = 0.5$

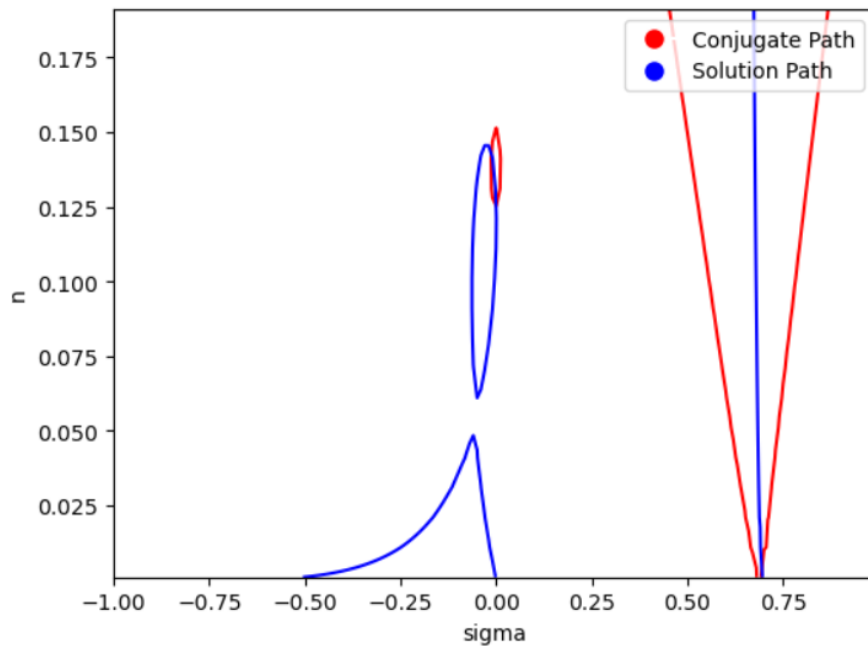




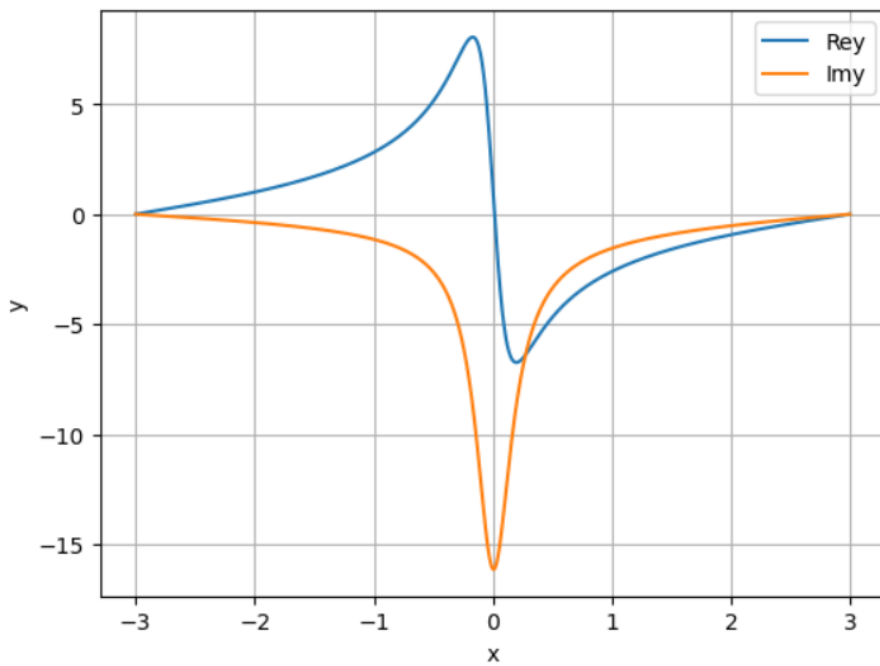
Εικόνα 5.16: Ιδιοσυναρτήσεις της διαταραχής της ολικής πίεσης  $\Pi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 0.1, k_z = 0.5$

►  $k_z = 0.7$  Υπάρχουν δύο σημεία τομής 5.17, άρα δύο λύσεις:

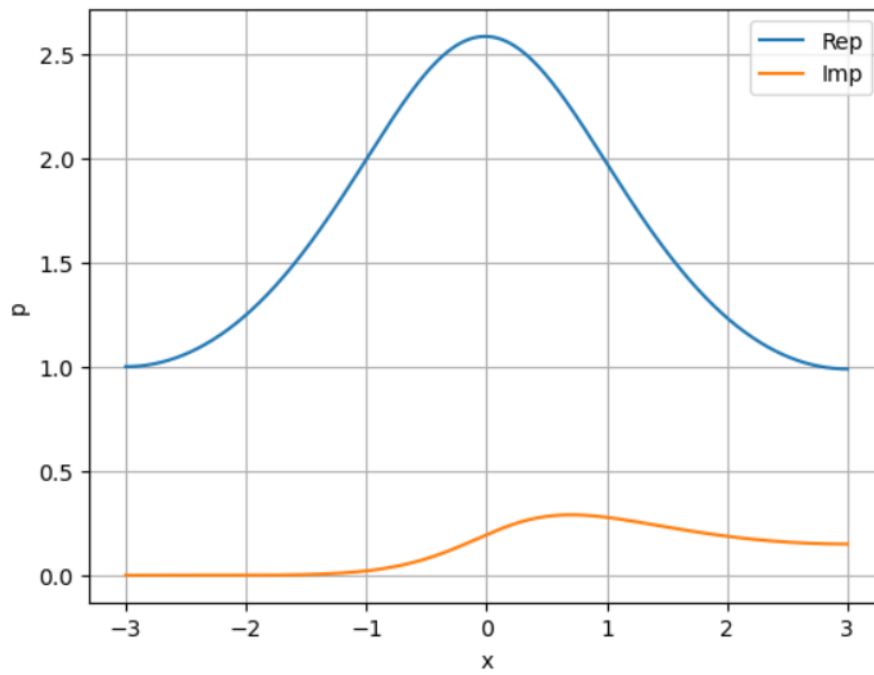
$\sigma_1 = -0.01330, n_1 = 0.143680$  (ψευδής) και  $\sigma_2 = 1.1823 \times 10^{-8}, n_2 = 0.124254$  (πραγματική)



Εικόνα 5.17: Solution και Conjugate path για  $M = 0.1, k_z = 0.7, x \in (-3, 3)$

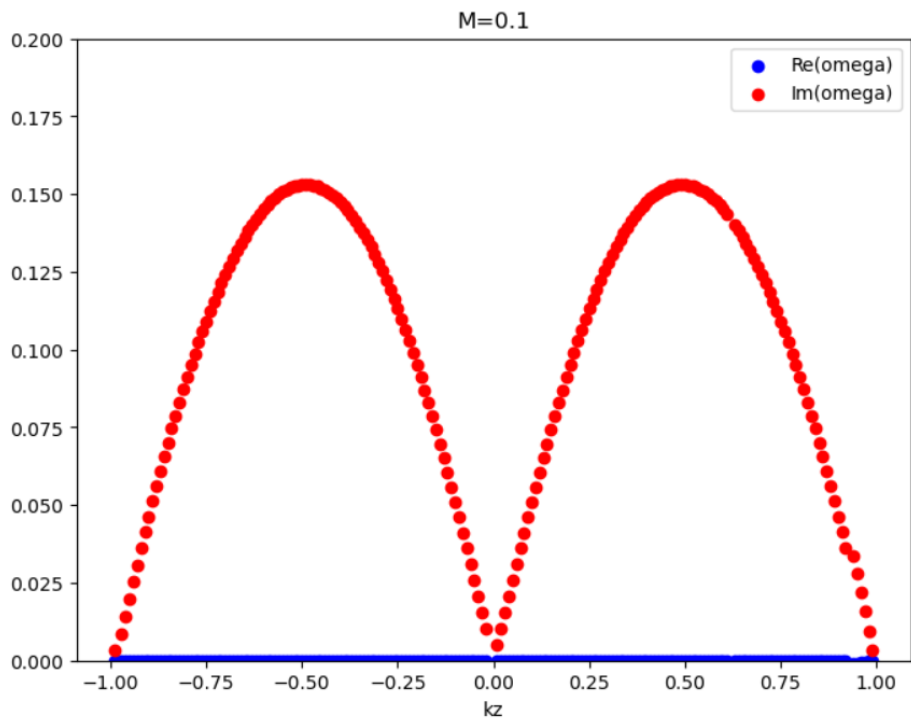


Εικόνα 5.18: Ιδιοσυναρτήσεις της Λαγκρατζιανής μετατόπισης  $\xi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 0.1, k_z = 0.7$



Εικόνα 5.19: Ιδιοσυναρτήσεις της διαταραχής της ολικής πίεσης  $\Pi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 0.1, k_z = 0.7$

Τέλος, πάλι παραθέτουμε τη γραφική απεικόνιση της σχέσης διασποράς για  $M = 0.1$ .



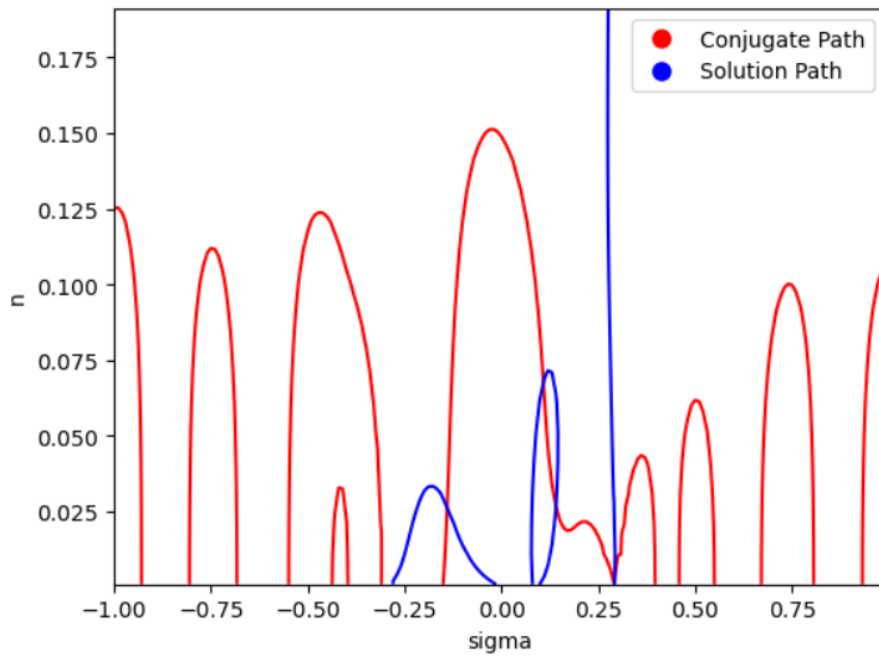
Εικόνα 5.20: Σχέση διασποράς  $\omega = \omega(k)$  για  $M = 0.1$

Τέλος, μελετάμε την περίπτωση  $M = 2$ :

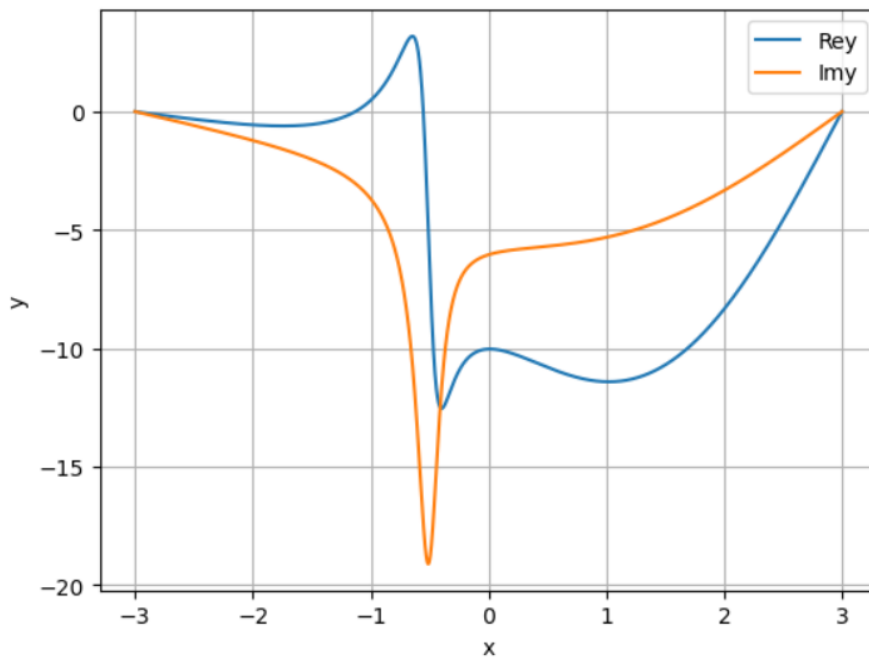
►  $k_z = 0.3$

Όπως βλέπουμε στην εικόνα 5.21 τα paths τέμνονται σε τρία σημεία με συντεταγμένες:

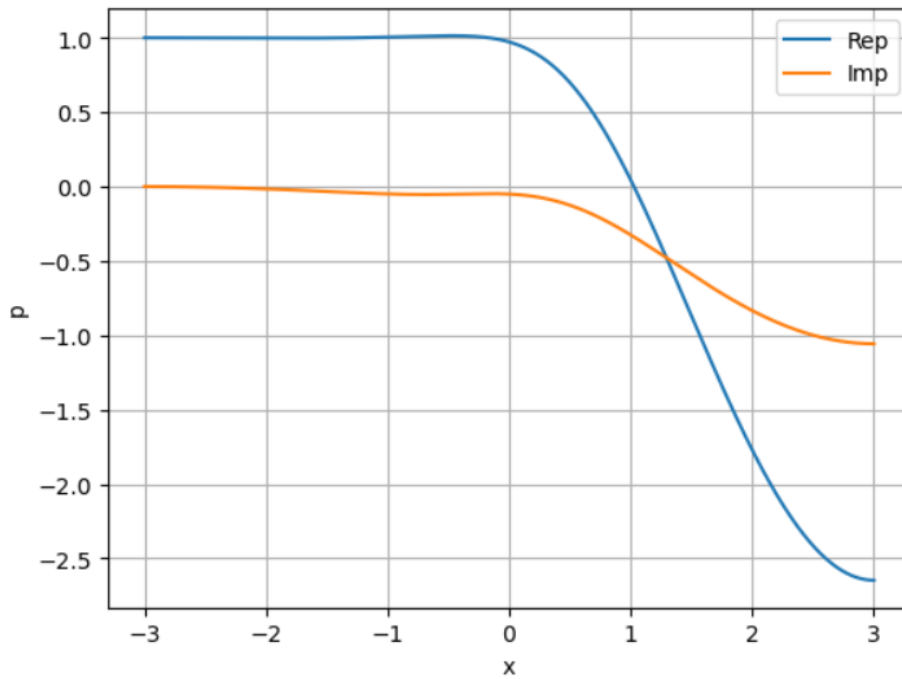
$\sigma_1 = -0.1406$ ,  $n_1 = 0.026621$  (πραγματική),  $\sigma_2 = 0.107583$ ,  $n_2 = 0.068114$  (ψευδής) και  $\sigma_3 = 0.1406026$ ,  $n_3 = 0.026621$  (πραγματική)



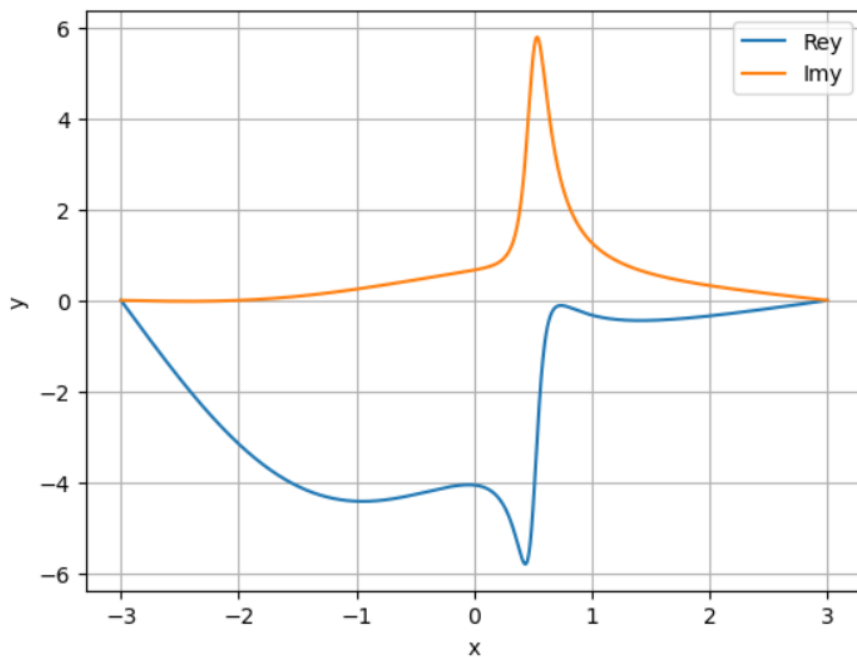
Εικόνα 5.21: Solution και Conjugate path για  $M = 2, k_z = 0.3, x \in (-3, 3)$



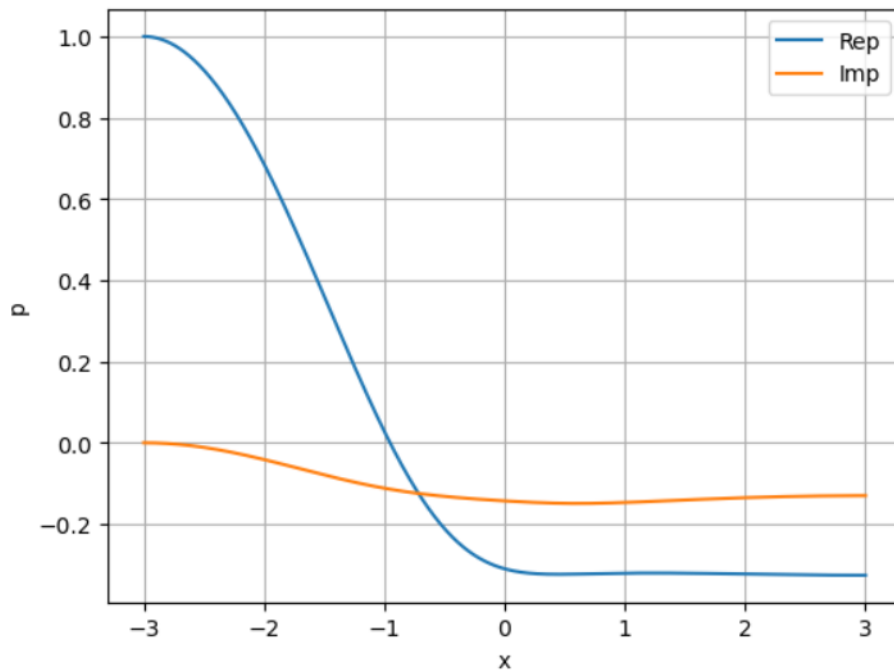
Εικόνα 5.22: Ιδιοσυναρτήσεις της Λαγκρατζιανής μετατόπισης  $\xi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 2, k_z = 0.3$ , λύση  $sigma_1 = -0.1406, n_1 = 0.026621$



Εικόνα 5.23: Ιδιοσυναρτήσεις της διαταραχής της ολικής πίεσης  $\Pi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 2, k_z = 0.3$ , λύση  $\sigma_1 = -0.1406, n_1 = 0.026621$



Εικόνα 5.24: Ιδιοσυναρτήσεις του Λαγκρατζιανής μετατόπισης  $\xi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 2, k_z = 0.3$ , λύση  $\sigma_3 = 0.1406026, n_3 = 0.026621$

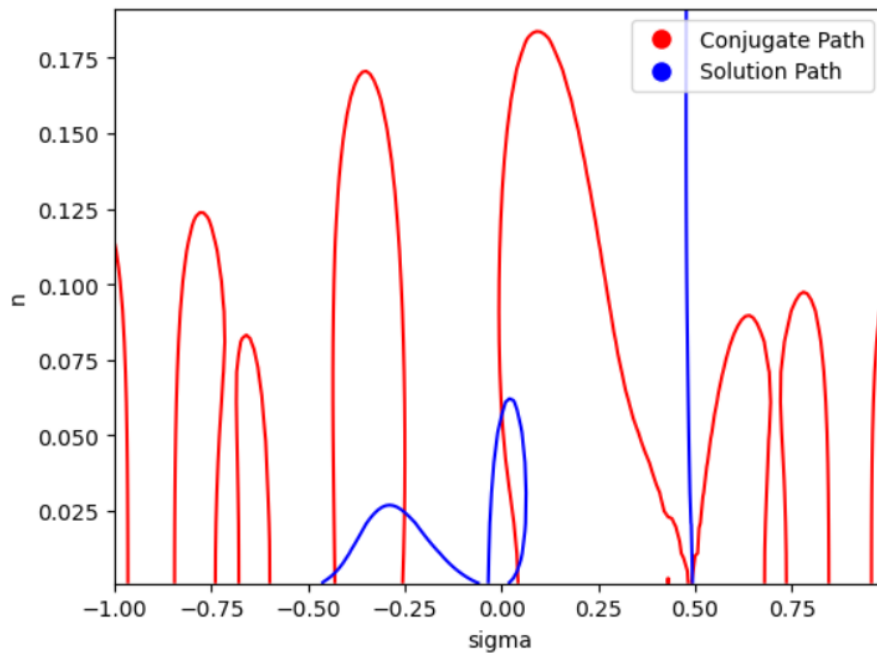


Εικόνα 5.25: Ιδιοσυναρτήσεις της διαταραχής της ολικής πίεσης  $\Pi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 2, k_z = 0.3$ , λύση  $\sigma_3 = 0.1406026, n_3 = 0.026621$

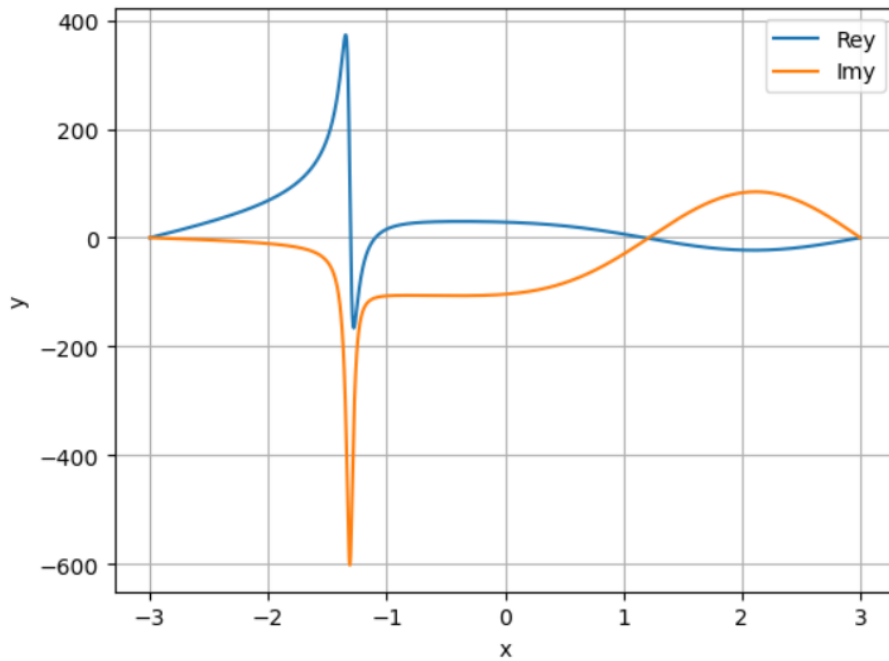
►  $k_z = 0.5$

Τα paths τέμνονται σε πέντε σημεία 5.26 με αντίστοιχες συντεταγμένες:

$\sigma_1 = -0.4322286, n_1 = 0.004345$  (πραγματική),  $\sigma_2 = -0.251341, n_2 = 0.0248849$  (ψευδής),  $\sigma_3 = -1.4957 \times 10^{-9}, n_3 = 0.0574735$  (πραγματική),  $\sigma_4 = 0.0415607, n_4 = 0.0054416$  (ψευδής),  $\sigma_5 = 0.4322286, n_5 = 0.004345$  (πραγματική)

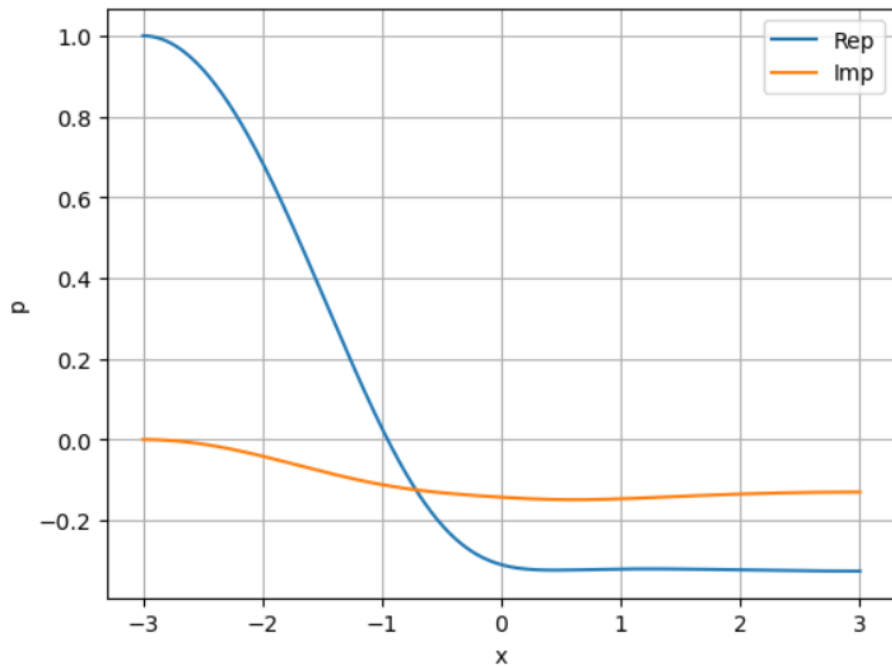


Εικόνα 5.26: Solution και Conjugate path για  $M = 2, k_z = 0.5, x \in (-3, 3)$

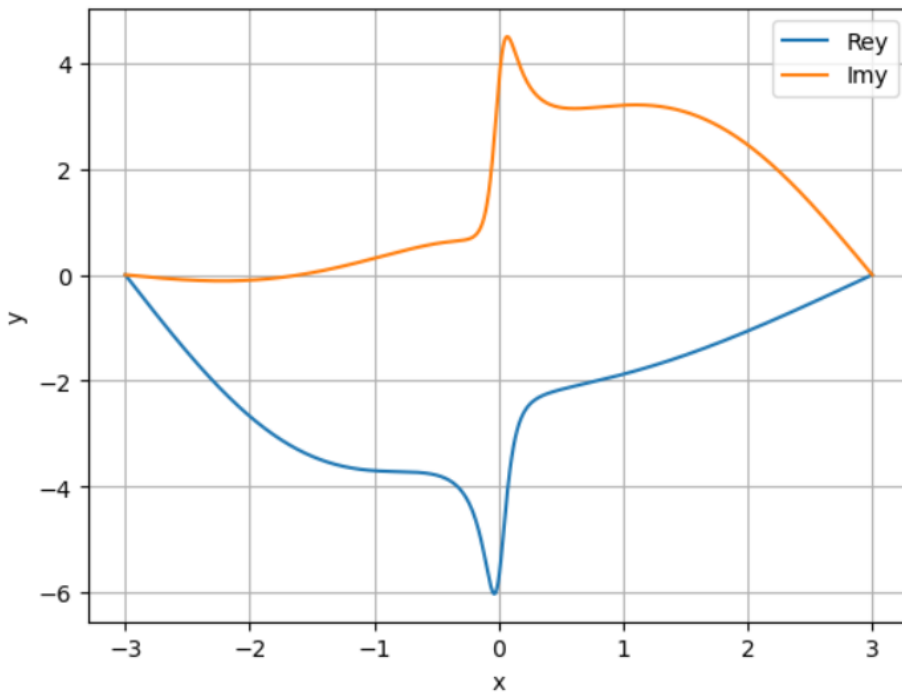


Εικόνα 5.27: Ιδιοσυναρτήσεις του Λαγκρατζιανής μετατόπισης  $\xi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 2, k_z = 0.5$ , λύση  $\sigma_1 = -0.4322286, n_1 = 0.004345$

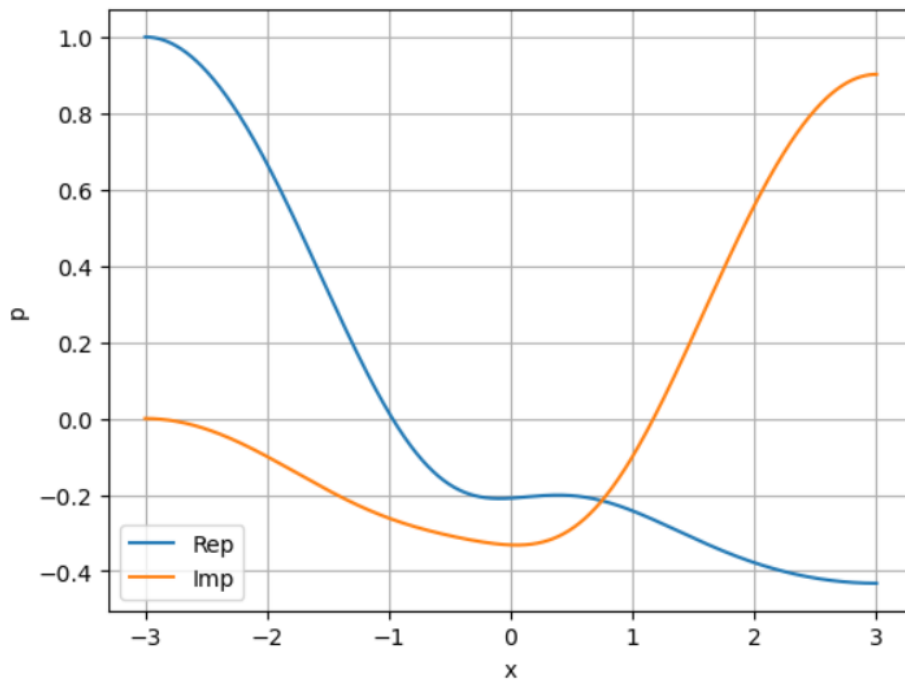




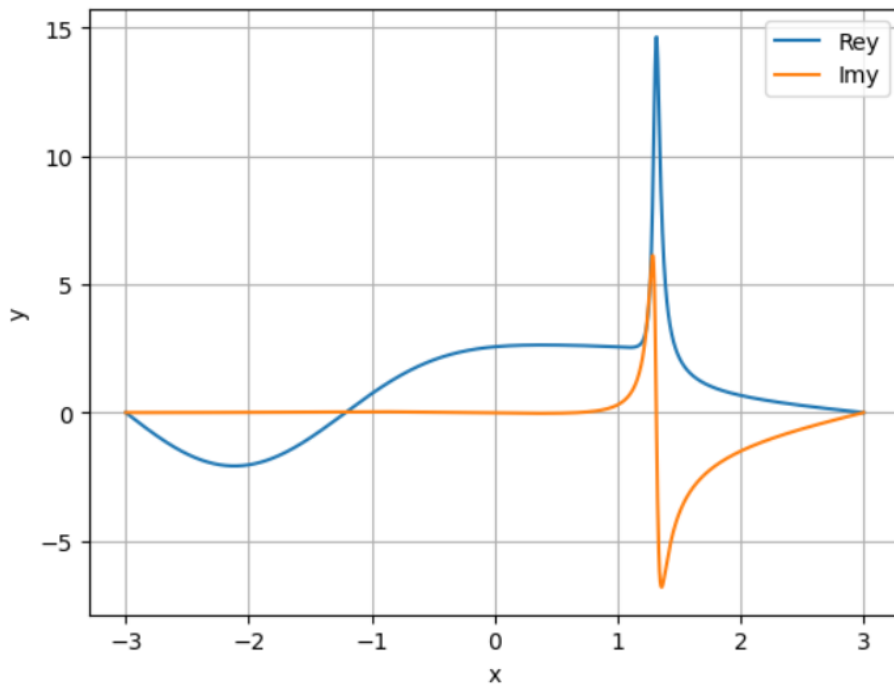
Εικόνα 5.28: Ιδιοσυναρτήσεις της διαταραχής της ολικής πίεσης  $\Pi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 2, k_z = 0.5$ , λύση  $\sigma_1 = -0.4322286, n_1 = 0.004345$



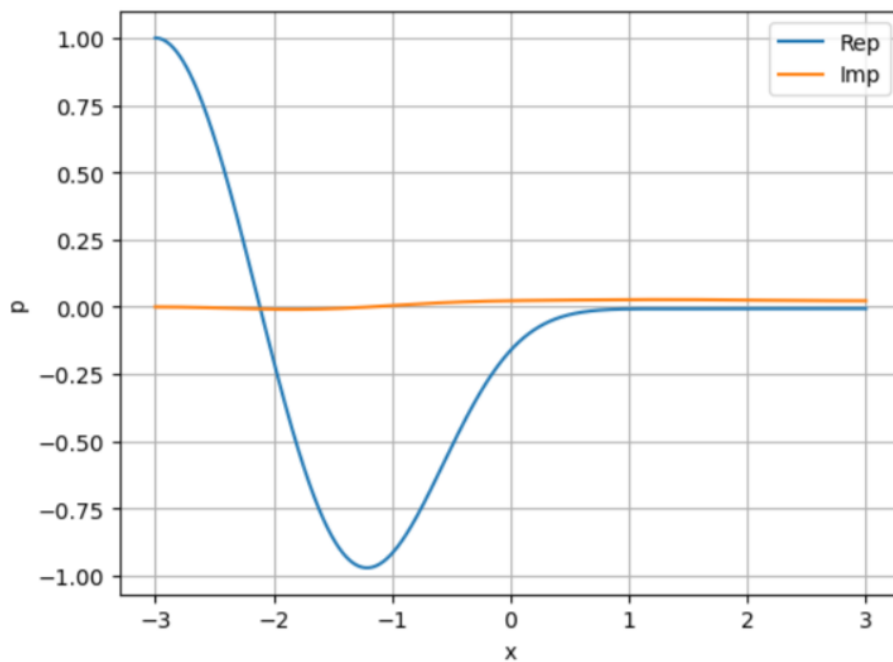
Εικόνα 5.29: Ιδιοσυναρτήσεις της Λαγκρατζιανής μετατόπισης  $\xi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 2, k_z = 0.5$ , λύση  $\sigma_3 = -1.4957 \times 10^{-9}, n_3 = 0.0574735$



Εικόνα 5.30: Ιδιοσυναρτήσεις της διαταραχής της ολικής πίεσης  $\Pi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 2, k_z = 0.5$ , λύση  $\sigma_3 = -1.4957 \times 10^{-9}, n_3 = 0.0574735$



Εικόνα 5.31: Ιδιοσυναρτήσεις της Λαγκρατζιανής μετατόπισης  $\xi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 2, k_z = 0.5$ , λύση  $\sigma_5 = 0.4322286, n_5 = 0.004345$

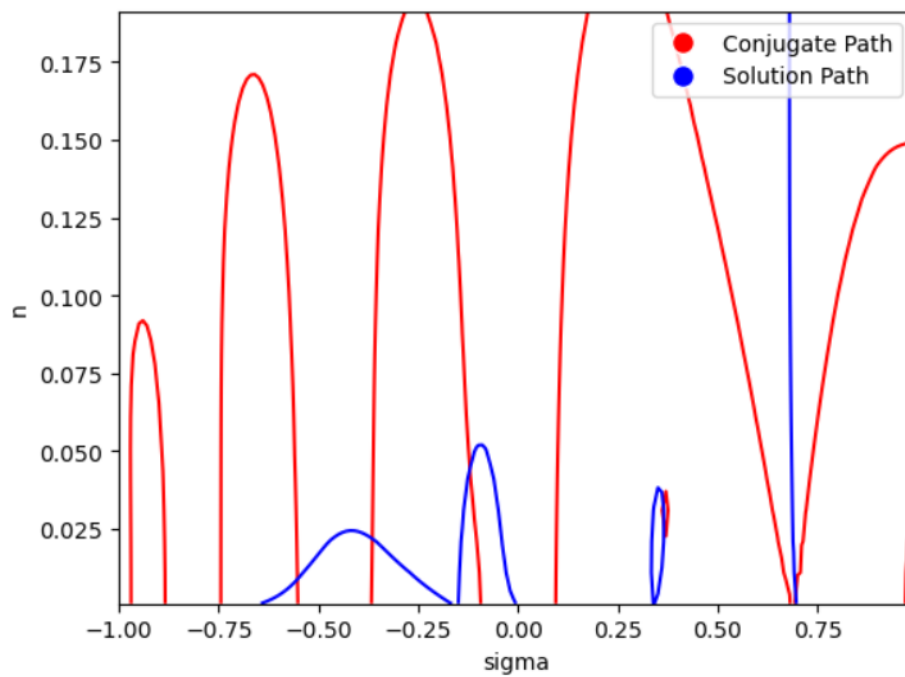


Εικόνα 5.32: Ιδιοσυναρτήσεις της διαταραχής της ολικής πίεσης  $\Pi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 2, k_z = 0.5$ , λύση  $\sigma_5 = 0.4322286, n_5 = 0.004345$

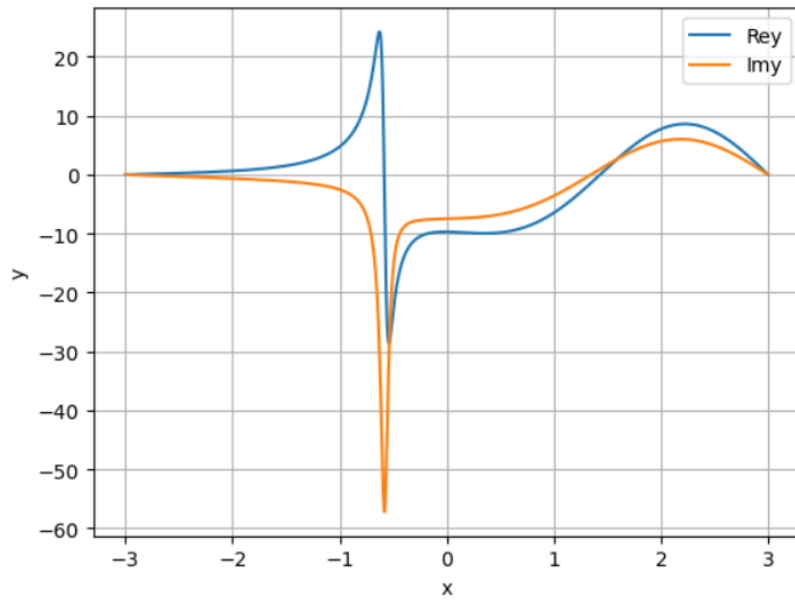
►  $k_z = 0.7$

Παρατηρούμε πως το solution και το conjugate path τέμνονται σε πέντε σημεία 5.33:

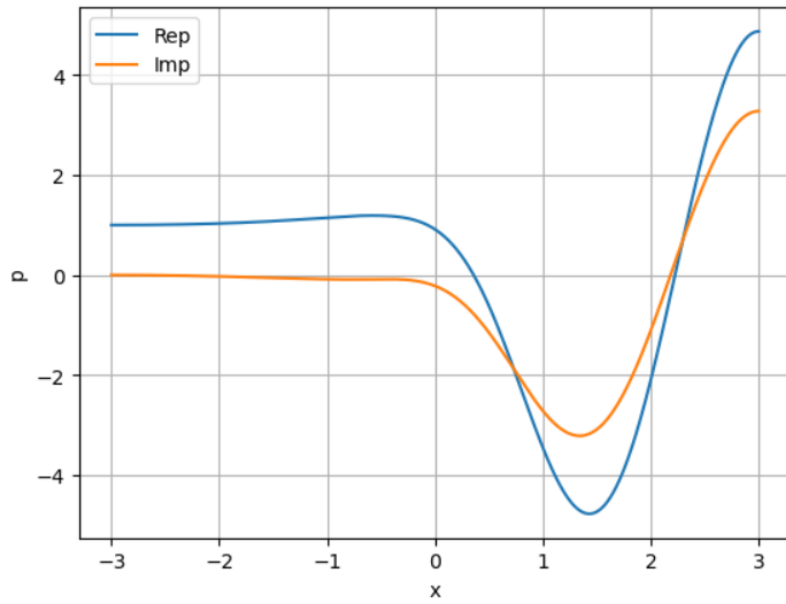
$\sigma_1 = -0.553552, n_1 = 0.008863$  (ψευδής),  $\sigma_2 = -0.36567, n_2 = 0.02197131$  (πραγματική),  $\sigma_3 = -0.12146647, n_3 = 0.0448596$  (ψευδής),  $\sigma_4 = 0.362891120, n_4 = 0.0360794$  (ψευδής),  $\sigma_5 = 0.36567107, n_5 = 0.02197132$  (πραγματική)



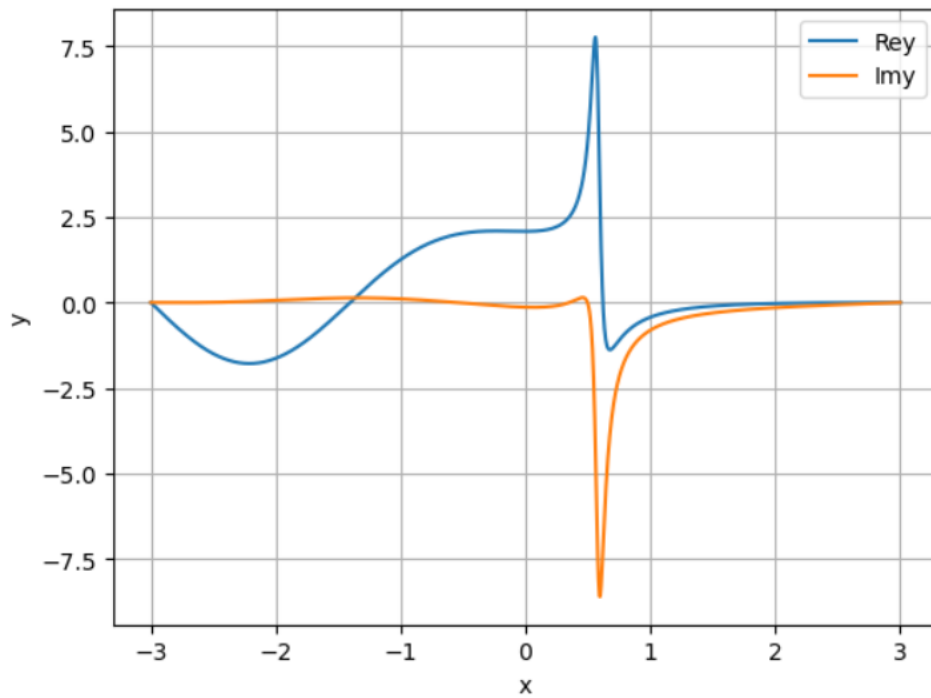
Εικόνα 5.33: Solution και Conjugate path για  $M = 2, k_z = 0.7, x \in (-3, 3)$



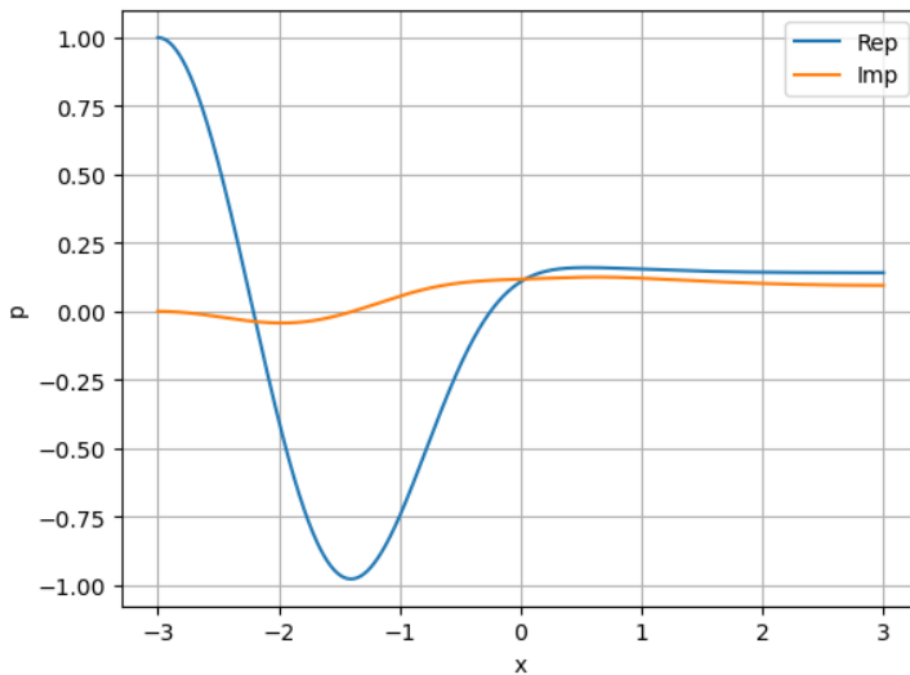
Εικόνα 5.34: Ιδιοσυναρτήσεις της Λαγκρατζιανής μετατόπισης  $\xi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 2, k_z = 0.7$ , λύση  $\sigma_2 = -0.36567, n_2 = 0.02197131$



Εικόνα 5.35: Ιδιοσυναρτήσεις της διαταραχής της ολικής πίεσης  $\Pi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 2, k_z = 0.7$ , λύση  $\sigma_2 = -0.36567, n_2 = 0.02197131$

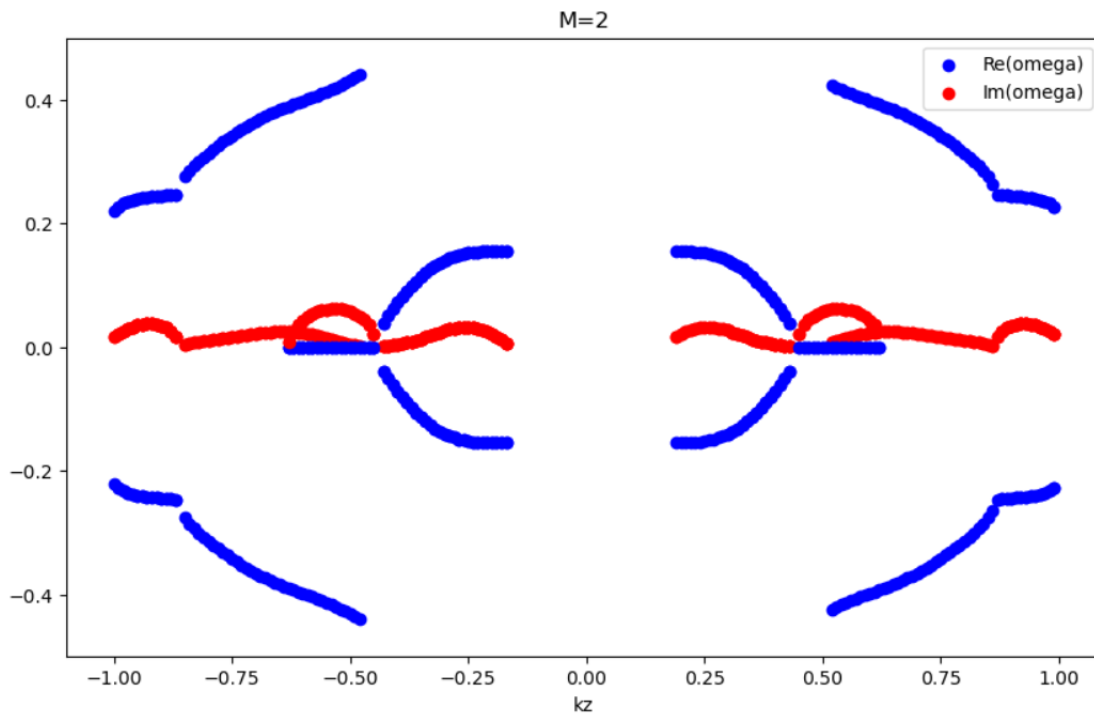


Εικόνα 5.36: Ιδιοσυναρτήσεις της Λαγκρατζιανής μετατόπισης  $\xi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 2, k_z = 0.7$ , λύση  $\sigma = 0.36567107, n = 0.02197132$



Εικόνα 5.37: Ιδιοσυναρτήσεις της διαταραχής της ολικής πίεσης  $\Pi$  (πραγματικό και φανταστικό μέρος) για  $M = 2, k_z = 0.7$ , λύση  $\sigma_5 = 0.36567107, n_5 = 0.02197132$

Τέλος, πάλι παραθέτουμε τη γραφική απεικόνιση της σχέσης διασποράς για  $M = 2$ .



Εικόνα 5.38: Σχέση διασποράς  $\omega = \omega(k)$  για  $M = 2$

Μια αρχική παρατήρηση είναι πως τα αποτελέσματα για  $M = 0.01$ ,  $M = 0.1$  είναι αρκετά παρόμοια. Συγκεκριμένα, υπάρχει ένα μόνο ασταθές mode, το οποίο αντιστοιχεί σε στάσιμο κύμα, δηλαδή  $Re(\omega) = 0$ . Όσον αφορά τις ιδιοσυναρτήσεις των πραγματικών λύσεων  $\xi$  βλέπουμε ότι υπάρχει "κορυφή" στο  $x = 0$ , δηλαδή στην διεπιφάνεια όπως και θα περιμέναμε για αστάθεια τύπου Kelvin - Helmholtz. Εάν κοιτάξουμε τη γραφική αναπαράσταση της σχέσης διασποράς  $\omega = \omega(k)$  παρατηρούμε μια αναμενόμενη μορφή αν αναλογιστούμε ότι γνωρίζουμε από την λύση του προβλήματος όταν το προφίλ ταχύτητας είναι βηματική συνάρτηση. Γνωρίζουμε λοιπόν, ότι όταν το προφίλ ταχύτητας είναι βηματική συνάρτηση το  $Im(\omega)$  είναι μια γνησίως αύξουσα συνάρτηση του  $k_z > 0$ . Όταν αντί για το συγκεκριμένο προφίλ, χρησιμοποιείται προφίλ με υπερβολική εφαπτομένη, πρακτικά "εξομαλύνεται" η ασυνέχεια της βηματικής συνάρτησης και προστίθεται ένα εύρος  $\tau (= 1)$  στο οποίο γίνεται η μετάβαση μεταξύ των δύο κλάδων. Συνεπώς για  $k_z$  μικρότερο από το συγκεκριμένο εύρος η μεταβολή δεν γίνεται αντιληπτή, επομένως το  $Im(\omega)$  αυξάνεται, παίρνει μια μέγιστη τιμή για κάποιο  $k_z$  και έπειτα μειώνεται μέχρι να μηδενιστεί. Σημειώνεται ακόμα πως στα διαγράμματα διασποράς, υπάρχει η αναμενόμενη συμμετρία για θετικά και αρνητικά  $k_z$ .

Η ύπαρξη ενός μοναδικού στάσιμου ασταθούς mode για  $M = 0.01$ ,  $M = 0.1$  επιβεβαιώνεται και από τους Drazin, Davey [11] σε μια εργασία που μελετά το πρόβλημα, όμως για

$d \rightarrow \infty$ . Συνεπώς, η επιλογή "τοιχών" στο  $d = 3$  στην παρούσα εφαρμογή δεν φαίνεται να επηρεάζει την αστάθεια για τόσο μικρούς αριθμούς Mach, ούτε να προκαλεί την παραγωγή νέων modes λόγω ανάκλασης.

Σημειώνεται πως στις εικόνες 5.10, 5.20 η ύπαρξη μικρής ασυνέχειας κοντά στο  $k_z = 0.9$  είναι αριθμητικό λάθος καθώς στον κώδικα έχει χρησιμοποιηθεί η μέθοδος μηδενισμού των  $W_{com1}, W_{com2}$  και "πιάνεται" κοντά στις πραγματικές λύσεις ένα mode ψευδών λύσεων.

Η εικόνα αλλάζει αισθητά στη μελέτη για  $M = 2$ . Τα solution και conjugate paths γίνονται πιο πολύπλοκα και με περισσότερες τομές, συνεπώς και με περισσότερες πιθανές λύσεις. Ας ξεκινήσουμε τη μελέτη ανάποδα κοιτώντας τη σχέση διασποράς 5.38 που μας δίνει μια πιο συνολική εικόνα του αποτελέσματος. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν είτε δύο είτε τρία modes για κάθε  $k_z$ . Συγκεκριμένα, τα δύο modes που υπάρχουν "πάντα" αντιστοιχούν σε συμμετρικές λύσεις ως προς το  $Re(\omega)$  και δίνουν το ίδιο  $Im(\omega)$ . Για  $k_z$  γύρω από το 0.5 (και -0.5 αντίστοιχα λόγω συμμετρίας) παρατηρούμε πως προκύπτει η ύπαρξη ενός τρίτου mode το οποίο είναι μάλιστα στάσιμο. Όσον αφορά την περιοχή  $k_z \in (0, 0.2)$ , αντιστοιχεί σε λύσεις με  $Im(\omega) = 0$  που δεν αφορούν την παρούσα μελέτη καθώς δεν πρόκειται για αστάθειες και για αυτό έχουν αγνοηθεί.

Όσον αφορά τη συμμετρία των λύσεων ως προς το  $Re(\omega)$ , δηλαδή ότι αν  $(Re(\omega), Im(\omega))$  λύση, τότε και  $(-Re(\omega), Im(\omega))$  λύση, πρόκειται για κάτι που απορρέει από την μορφή των εξισώσεων του προβλήματος και συγκεκριμένα από το γεγονός ότι το  $\tilde{\omega}$  εμφανίζεται μόνο στο τετράγωνο, σε συνδυασμό με το θεώρημα στη μιγαδική ανάλυση του Schwartz (Schwartz's reflection theorem) άμεση συνέπεια του οποίου είναι πως αν έχουμε μιγαδική εξίσωση με πραγματικούς συντελεστές και πραγματικές συνοριακές συνθήκες και  $x$  η μιγαδική λύση της τότε και το μιγαδικό συζυγές αυτής  $x^*$  είναι επίσης λύση της εξίσωσης. Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση σε αυτή τη συμμετρία είναι ότι δεν "μεταφέρεται" στην μορφή των solution και conjugate paths. Δηλαδή, ενώ οι τομές των paths δίνουν τη συμμετρική λύση, η δομή τους δεν περιλαμβάνει τη συγκεκριμένη συμμετρία για θετικές και αρνητικές τιμές του  $Re(\omega)$  (αντιστοιχεί στον "x-άξονα" στα διαγράμματα με τα solution και conjugate paths).

Αν τώρα παρατηρήσουμε τις ιδιοσυναρτήσεις του  $\xi(x)$  για τις πραγματικές λύσεις για  $M = 2$ , θα δούμε ότι τα "peaks" δεν βρίσκονται στο σημείο της διεπιφάνειας  $x = 0$  όπως θα περιμέναμε, αλλά είναι μετατοπισμένα. Αυτό σε συνδυασμό με το ότι γνωρίζουμε πως στο ίδιο πρόβλημα για βηματική συνάρτηση και άπειρο χώρο (όπου οι δύο ροές κινούνται με αντίθετη και ίση σε μέτρο ταχύτητα) για  $M > \sqrt{2}$  η αστάθεια εξαφανίζεται τελείως [12], [13], [14], μας οδηγεί στο να πιστέψουμε ότι πρόκειται για μια διαφορετική, ίσως δευτερεύουσα αστάθεια Kelvin - Helmholtz. Ενώ παρατηρούμε πως συγκριτικά με τις τιμές του  $Im(\omega)$  για  $M = 0.01, M = 0.1$  οι αντίστοιχες τιμές για  $M = 2 > \sqrt{2}$  είναι τάξη μεγέθους μικρότερες, σίγουρα δεν μπορούμε να πούμε πως η αστάθεια έχει σβήσει όπως στην κλασική περίπτωση. Το αποτέλεσμα πως η αστάθεια δεν σβήνει για αριθμό Mach μεγαλύτερο του  $\sqrt{2}$  στην περίπτωση που το προφίλ ταχύτητας είναι υπερβολική εφαπτομένη συμφωνεί με τα ευρήματα των Drazin, Davey [11] που μελέτησαν το ίδιο προφίλ αλλά σε άπειρο χώρο. Μάλιστα, σύμφωνα με τη συγκεκριμένη εργασία για  $M > \sqrt{2}$  αναμένονται



μόνο τα δύο modes που αντιστοιχούν σε  $\pm Re(\omega)$ , ενώ εμείς βρίσκουμε και ένα τρίτο στάσιμο mode για κάποια  $k_z$  το οποίο θα μπορούσε να προκύπτει λόγω ανακλάσεων στους "τοιίχους" που είναι τοποθετημένοι στο  $x = \pm 3$ .

Τέλος, σημειώνεται ότι το διάγραμμα 5.38 έχει παραχθεί με την άμεση επιβολή της δεύτερης συνοριακής συνθήκης στο δεξί άκρο, αντί της μεθόδου που έχει αναλυθεί παραπάνω, λόγω αριθμητικής δυσκολίας να "ξεχωρίσουν" οι τρεις πραγματικοί κλάδοι από εκείνους που αντιστοιχούν σε ψευδείς λύσεις.

Μια τελευταία σημείωση που αφορά όλες τις περιπτώσεις που μελετήθηκαν παραπάνω είναι πως επιβεβαιώνεται, όπως υποστηρίζεται στο βιβλίο που έχει βασιστεί η εργασία [1], ότι οι τομές των solution και conjugate paths αποτελούν εναλλάξ πραγματική ή ψευδή ρίζα όταν κοιτάμε τον άξονα των  $Im(\omega)$  (ή στα αντίστοιχα διαγράμματα το " $n$ "). Επομένως αν προσδιορίσουμε τι είναι η πρώτη κατά σειρά τομή, πραγματική ή ψευδής λύση, τότε ξέρουμε αυτόματα όλες τις υπόλοιπες λύσεις. Αυτό αναδεικνύει την χρησιμότητα της μεθόδου στο να "ενώνει" μέσω των paths και να ταξινομεί τις λύσεις.

## Κεφάλαιο 6

# Συμπεράσματα

Μετά την προσπάθεια εξαγωγής των παραπάνω αποτελεσμάτων με την "νέα" μέθοδο που παρουσιάστηκε, το συμπέρασμα είναι πως σίγουρα δεν αποτελεί τον πιο εύκολο τρόπο προσδιορισμού των ιδιοτιμών του φάσματος. Η ύπαρξη ψευδών ριζών δυσκολεύει τους υπολογισμούς και τον προσδιορισμό των modes και ως αποτέλεσμα έχει να παίρνει πολύ περισσότερο χρόνο, από άποψη περιπλοκότητας του κώδικα, από απλά την απευθείας εφαρμογή της δεύτερης συνοριακής συνθήκης.

Ακόμα κι αν δεν αποτελεί τον βέλτιστο τρόπο εύρεσης του φάσματος, η χρησιμότητα της είναι αδιαμφισβήτητη καθώς συνδέει ένα πρόβλημα Κβαντικής Μηχανικής με ένα πρόβλημα αστάθειας - πρόκειται για προβλήματα της μορφής Sturm - Liouville. Επιπλέον, αποτελεί μια προσπάθεια ένωσης όλων των ιδιοτιμών μέσω των solution και conjugate paths και ταξινόμησης τους, ακόμα κι αν για το τελευταίο υπάρχει ακόμα το "πρόβλημα" για το από που θα έπρεπε να ξεκινά η αρίθμηση.

Η σύνδεση δύο φαινομενικά ασύμβατων κλάδων της Φυσικής έχει ιδιαίτερη σημασία καθώς ανοίγει νέα ερωτήματα και ιδέες για έρευνα σε περαιτέρω αναλογίες μαθηματικές και μη. Μάλιστα, προσφέρει μια νέα οπτική και εμβάθυνση σε ένα ήδη απαιτητικό πρόβλημα, κάτι απαραίτητο για την εξέλιξη της επιστήμης και την βελτιστοποίηση των μεθόδων που χρησιμοποιούμε.

# Βιβλιογραφία

- [1] Hans Goedbloed, Rony Keppens, and Stefaan Poedts. Magnetohydrodynamics of Laboratory and Astrophysical Plasmas. Cambridge University Press, 2019.
- [2] Caltech Divison of Engineering and Applied Science. Bellan plasma group, 2024. <http://www.bellanplasmagroup.caltech.edu/>.
- [3] Princeton University U.S. Department of Energy. Princeton plasma physics laboratory, 2024. <https://www.pppl.gov/>.
- [4] Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο. ΠΜΣ "lasers, Πλάσμα Εφαρμογές (lapla)". <https://ee.hmu.gr/metaptyxiakes/pms-lasers-plasma-epharmoges-lapla/>.
- [5] Departement of Physics Torino University, INAF National Institute for Astrophysics, and the SCAI Department of CINECA. The pluto code for astrophysical gasdynamics. <https://plutocode.ph.unito.it/>.
- [6] Νεκτάριος Βλαχάκης. Δυναμική των Ρευστών. εκδόσεις ΠΑΠΑΖΗΣΗΣ, 2019.
- [7] Κανάρης Χ. Τσίγκανος. Αστροφυσική πλάσματος. Εκδόσεις UNIBOOKS, 2017.
- [8] Πέτρος Α. Καρύδης. Σημειώσεις μαθήματος Υπολογιστικές Μέθοδοι και Εφαρμογές σε Λεπτότοιχες Κατασκευές, "Η μέθοδος rayleigh-ritz".
- [9] Πέτρος Ιωάννου. Σημειώσεις διαλέξεων στο μάθημα Μηχανική II, "Το πηλίκο rayleigh", 2002.
- [10] Mohammad Abumosameh. Python code for sturm-liouville eigenvalue problems, 2022.
- [11] P. G. Drazin and A. Davey. Shear layer instability of an inviscid compressible fluid. part 3. Journal of Fluid Mechanics, 82(2):255–260, 1977.
- [12] John W. Miles. On the disturbed motion of a plane vortex sheet. Journal of Fluid Mechanics, 4(5):538–552, 1958.
- [13] RICHARD A. GERWIN. Stability of the interface between two fluids in relative motion. Rev. Mod. Phys., 40:652–658, Jul 1968.
- [14] G. Bodo, A. Mignone, and R. Rosner. Kelvin-helmholtz instability for relativistic fluids. Phys. Rev. E, 70:036304, Sep 2004.