ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Διδακτορική Διατριβή

Η κατανόηση της μαθηματικής έννοιας του συνόλου από μαθητές των τριών σχολικών βαθμίδων και μελλοντικούς εκπαιδευτικούς

Ιωάννης Βλάχος

Αθήνα, 2024

NATIONAL AND KAPODISTRIAN UNIVERISTY OF ATHENS

SCHOOL OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Doctoral Dissertation

Understanding the mathematical concept of set by primary and secondary students and prospective teachers

Ioannis Vlachos

Athens, 2024

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Θεοδόσιος Ζαχαριάδης, Ομότιμος Καθηγητής, ΕΚΠΑ (επιβλέπων)

Δέσποινα Πόταρη, Καθηγήτρια, ΕΚΠΑ (μέλος τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής)

Χαράλαμπος Σακονίδης, Καθηγητής, ΔΠΘ. (μέλος τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής)

Γεώργιος Ψυχάρης, Αναπληρωτής Καθηγητής, ΕΚΠΑ

Χρυσαυγή Τριανταφύλλου, Επίκουρη Καθηγήτρια, ΕΚΠΑ

Λεωνίδας Κυριακίδης, Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

Αγγελική Μάλη, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Στη μνήμη της γιαγιάς μου, Αθανασίας Σταματίου…

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Με την ολοκλήρωση της διδακτορικής μου διατριβής, αισθάνομαι βαθύτατη ευγνωμοσύνη προς την τριμελή συμβουλευτική επιτροπή μου για την αμέριστη υποστήριξη και καθοδήγηση τους καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της πολυετούς πορείας.

Ειδικότερα, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Ομότιμο Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών και Επιβλέποντα της διδακτορικής μου διατριβής Θεοδόσιο Ζαχαριάδη, του οποίου η εμπειρία και η σοφία υπήρξαν πολύτιμα για την πρόοδο της έρευνάς μου. Οι διαφωτιστικές του παρατηρήσεις και η συνεχής ενθάρρυνση ήταν καθοριστικής σημασίας για την εξέλιξή μου ως ερευνητή.

Επίσης, ευχαριστώ ιδιαίτερα τον καθηγητή του Πανεπιστημίου και μέλους της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής Χαράλαμπου Σακονίδη, του οποίου η διορατικότητα και οι καίριες συμβουλές συνέβαλαν σημαντικά στη βελτίωση της ποιότητας της εργασίας μου. Η προσέγγισή του και οι εμπεριστατωμένες του γνώσεις εμπλούτισαν τη μεθοδολογία μου και διεύρυναν τους ερευνητικούς μου ορίζοντες.

Θα ήθελα επιπλέον να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου προς την Καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αθηνών και μέλους της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής Δέσποινα Πόταρη, την οποία γνώρισα κατά την διάρκεια των προπτυχιακών μου σπουδών στο Τμήμα των Μαθηματικών και με ενέπνευσε να ακολουθήσω τον Τομέα της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω επίσης στον Καθηγητή του Πανεπιστημίου της Κύπρου Λεωνίδα Κυριακίδη, ο οποίος με βοήθησε ιδιαίτερα μεθοδολογικά και συνέβαλε καθοριστικά στη βελτίωση της ποιότητας της έρευνάς μου. Η ανιδιοτελής του υποστήριξη και οι εξειδικευμένες του συμβουλές υπήρξαν ανεκτίμητες για την πορεία και την ολοκλήρωση της διατριβής μου. Ευχαριστώ θερμά και τα υπόλοιπα μέλη της επταμελούς εξεταστικής επιτροπής, Αγγελική Μάλη, Χρυσαυγή Τριανταφύλλου και Γεώργιο Ψυχάρη που με τίμησαν με την παρουσία τους και τις εποικοδομητικές τους παρατηρήσεις.

Ακόμη, θα ήθελα να εκφράσω την ειλικρινή μου ευγνωμοσύνη προς την αγαπημένη μου σύζυγο, Χρυσούλα. Η γνωριμία μας στο μεταπτυχιακό της Διδακτικής των Μαθηματικών σηματοδότησε την αρχή ενός υπέροχου κοινού ταξιδιού. Ξεκινήσαμε μαζί, ολοκληρώσαμε το μεταπτυχιακό μαζί και προχωρήσαμε μαζί στις διδακτορικές μας σπουδές. Η υποστήριξή της, η υπομονή και η κατανόησή της καθ' όλη τη διάρκεια αυτής της διαδικασίας ήταν ανεκτίμητες. Δίπλα της βρήκα την ιδανική σύντροφο και συνοδοιπόρο στην ακαδημαϊκή μου πορεία.

Ιδιαίτερες ευχαριστίες αξίζουν στη μικρή μου κόρη Ειρήνη, που με την αθωότητα και τη χαρά της ζωής της, επέτρεψε στον μπαμπά να αφιερώσει τον απαραίτητο χρόνο στην εργασία του, θυσιάζοντας πολύτιμες στιγμές μαζί της. Η υπομονή της και η αγάπη της μου έδωσαν το κίνητρο να συνεχίσω και να ολοκληρώσω αυτό το έργο. Πριγκιπισσούλα μου, σε ευχαριστώ που μου θύμισες ότι ο κόσμος είναι μαγικός, ότι στη θάλασσα κολυμπούν γοργόνες, στα δάση ζουν νάνοι και νεράιδες, και στους ψηλούς πύργους κατοικούν πριγκίπισσες που μπορούν να κάνουν τα μαλλιά τους σκάλα για να ανέβει ο αγαπημένος τους!

Ευχαριστώ και τα υπόλοιπα μέλη της οικογένειάς μου για την αδιάκοπη υποστήριξη και ενθάρρυνση τους. Η πίστη τους σε μένα και η συναισθηματική τους ενίσχυση ήταν απαραίτητα για να φτάσω ως εδώ. Ευχαριστώ από καρδιάς τη μητέρα μου, Ασημίνα, για την αληθινή της αγάπη και την αδιάκοπη στήριξή της, τον αδερφό μου, Σωτήρη, που υπήρξε η καθημερινή μου συντροφιά και, εν αγνοία του, με δίδαξε την αξία της σκληρής προσπάθειας και της συνεχούς βελτίωσης και τον πατέρα μου, Κωνσταντίνο, που με βοήθησε να «πάρω το σεντούκι μου» και να χαράξω τη δική μου πορεία.

Τέλος, θα ήθελα να εκφράσω τις ειλικρινείς μου ευχαριστίες προς τον φίλο μου Ανδρέα, που με τίμησε ζώντας για πολλά χρόνια έναν «βίο παράλληλο» μαζί μου, τον συμμαθητή μου από τα πρώτα σχολικά χρόνια Γιώργο, που έζησε μαζί μου σαν «δεύτερος αδερφός» και τον παιδικό μου «φίλο, συναγωνιστή και αντίπαλο» Δημήτρη, με τον οποίο κατακτούσαμε τον έναν στόχο μετά τον άλλο. Επίσης, εκφράζω την ειλικρινή μου ευγνωμοσύνη στον φίλο μου Γιώργο, που πάντα έβαζε τη φιλία μας πάνω από όλα και με αγαπούσε ειλικρινά. Ευχαριστώ επίσης και τους υπόλοιπους αδερφικούς μου φίλους που με την παρουσία τους ομορφαίναν το ταξίδι μου και μου προσέφεραν στιγμές χαράς και ανάπαυλας. Η φιλία και η συντροφικότητά τους ήταν ανεκτίμητες και καθοριστικές για την ολοκλήρωση αυτής της διατριβής.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η έννοια του συνόλου είναι θεμελιώδης έννοια των Μαθηματικών αφού «σχεδόν κάθε κλάδος των μαθηματικών βασίζεται στη θεωρία των συνόλων ως μέρος της θεμελίωσής του, επομένως είναι σημαντικό να αποκτήσει κανείς τουλάχιστον κάποιες βάσεις στη Θεωρία Συνόλων προτού επιχειρήσει να ασχοληθεί με άλλους κλάδους των μαθηματικών» (Tao, 2016). Στα σχολικά μαθηματικά, οι περισσότερες έννοιες προσεγγίζονται χωρίς άμεση αναφορά στην έννοια του συνόλου. Ωστόσο, η έννοια του συνόλου χρησιμοποιείται σε διάφορα πλαίσια, κάποιες φορές με τρόπο ασυνεπή με αποτέλεσμα οι μαθητές να αναπτύσσουν λανθασμένες αντιλήψεις (Fischbein & Baltsan, 1998).

Κατά τον Cantor «με τη λέξη σύνολο εννοούμε μια οποιαδήποτε συνάθροιση σε ολότητα οριστικών και διακεκριμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας» (Μοσχοβάκης, 1993). Διαισθητικά, το σύνολο, το αντιλαμβανόμαστε ως μια *συλλογή* καλώς ορισμένων και διακεκριμένων αντικειμένων. Στην Ελληνική γλώσσα η λέξη σύνολο χρησιμοποιείται για να δηλώσει, εκτός από τη συλλογή, το *άθροισμα* ή το *πλήθος* των αντικειμένων μιας συλλογής. Ο μαθηματικός λόγος, συμπεριλαμβανομένου του λεξιλογίου, συχνά περιλαμβάνει επέκταση ή τροποποίηση της χρήσης καθημερινών λέξεων, ενώ η ανάπτυξη του μαθηματικού λόγου θα πρέπει να περιλαμβάνει την ενσωμάτωση της καθημερινής γλώσσας στον μαθηματικό λόγο της τάξης (Barwell, 2013).

Στην παρούσα διατριβή διερευνούμε τις αντιλήψεις μαθητών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, καθώς και μελλοντικών εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, για την έννοια του συνόλου και την ενδεχόμενη επίδραση της καθημερινής χρήσης της λέξης 'σύνολο' στη νοηματοδότηση αυτής της της έννοιας. Τα ερευνητικά μας ερωτήματα είναι: (α) πώς κατανοούν μαθητές διαφορετικών σχολικών βαθμίδων και μελλοντικοί εκπαιδευτικοί την έννοια του συνόλου, τις σχέσεις συνόλων, καθώς και την ισοπληθικότητα μεταξύ απειροσυνόλων και (β) πώς η νοηματοδότηση της έννοιας του συνόλου επηρεάζεται από το κοινωνικό πλαίσιο;

Στο πρώτο στάδιο της έρευνας, σχεδιάσαμε ένα ερωτηματολόγιο με βάση τη βιβλιογραφία (Fischbein & Baltsan, 1998˙ Tirosh & Tsamir, 1996˙ Bagni, 2006), το οποίο χορηγήθηκε σε 116 μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού, 127 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και 154 της Γ΄ Λυκείου από διάφορα σχολεία της Ελλάδας. Στην συνέχεια, δώσαμε το ερωτηματολόγιο σε 245 φοιτητές ενός Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης, οι οποίοι είχαν διδαχθεί βασικά στοιχεία της

Θεωρίας Συνόλων στο πλαίσιο του μαθήματος «Θεμέλια των Μαθηματικών». Στόχος μας ήταν η διερεύνηση της ύπαρξης παρανοήσεων μεταξύ των φοιτητών οι οποίες επιμένουν ακόμη και μετά την συστηματική εμπλοκή τους με την στοιχειώδη Θεωρία Συνόλων στο Πανεπιστήμιο. Με βάση τις απαντήσεις τους στο ερωτηματολόγιο, επιλέχθηκαν 5 μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού, 5 μαθητές Γ΄ Γυμνασίου και 6 μαθητές της Γ΄ Λυκείου και πραγματοποιήθηκαν ημι-δομημένες, ημι-κλινικές συνεντεύξεις (Elkind, 1964) με στόχο τη διερεύνηση της προέλευσης των αντιλήψεων τους και ιδιαίτερα της επίδρασης του διαφορετικών γλωσσικών ιδιωμάτων των μαθητών (Halliday, 1978).

Οι συχνότερες παρανοήσεις που εμφανίστηκαν μεταξύ των συμμετεχόντων που απάντησαν στο ερωτηματολόγιο της έρευνας μας ήταν (1) η αντίληψη ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να έχουν κάποια κοινή ιδιότητα, (2) η αποδοχή της συμπερίληψης μη διακεκριμένων στοιχείων, (3) η απόρριψη της ύπαρξης κενού συνόλου, (4) η απόρριψη της ύπαρξης μονοσυνόλων, (5) η σύγχυση της ισότητας με την ισοπληθικότητα, (6) η σύγχυση των εννοιών του ανήκειν και του υποσυνόλου, (7) η αντίληψη ότι το πλήθος των στοιχείων ενός απειροσυνόλου είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων κάθε γνήσιου υποσυνόλου του, (8) η αντίληψη ότι τα απειροσύνολα είναι μη-συγκρίσημα και (9) η αντίληψη ότι όλα τα απειροσύνολα είναι ισοπληθικά.

Μεταξύ των μαθητών των τριών σχολικών βαθμίδων η επίδραση της ηλικίας φάνηκε να είναι θετική στις περισσότερες περιπτώσεις αλλά όχι σε όλες. Οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί, φάνηκε να έχουν αισθητά καλύτερα αποτελέσματα στην πλειοψηφία των ερωτήσεων. Ωστόσο, ορισμένες από τις επικρατέστερες λανθασμένες αντιλήψεις οι οποίες παρατηρούνται σε μαθητές και των τριών σχολικών βαθμίδων, παρατηρούνται και στους φοιτητές-μελλοντικούς δασκάλους. Συγκεκριμένα η απαίτηση από τα στοιχεία ενός συνόλου να έχουν μία κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα, η σύγχυση των εννοιών του ανήκειν και του υποσυνόλου και η αντίληψη ότι τα απειροσύνολα είναι μη συγκρίσιμα, φαίνεται να διατηρείται παρά την συστηματική διδασκαλία στη Θεωρία Συνόλων.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων από τις συνεντεύξεις ανέδειξε ότι πολλοί μαθητές, επηρεασμένοι από τη χρήση του όρου ‘σύνολο’ στο γλωσσικό ιδίωμα της σχολικής τάξης των Μαθηματικών και στα καθημερινά γλωσσικά ιδιώματα (Halliday, 1978), αντιλαμβάνονται το σύνολο ως αριθμό και όχι ως συλλογή ή έχουν και τις δύο αντιλήψεις ταυτόχρονα. Γίνεται λοιπόν εμφανής η επιρροή της ονοματοδοσίας στην απόδοση νοήματος από τους μαθητές (Planas et al., 2022· Adler & Ronda, 2015) αλλά και η απαίτηση για ιδιαίτερη προσοχή από τους εκπαιδευτικούς όλων των βαθμίδων, όχι μόνο κατά τη διδασκαλία της έννοιας του συνόλου αλλά γενικότερα στη σωστή χρήση της λέξης ‘σύνολο’ στη σχολική τάξη.

ABSTRACT

The concept of a set is fundamental in mathematics, as "almost every other branch of mathematics relies on set theory as part of its foundation, so it is important to get at least some grounding in set theory before doing other advanced areas of mathematics." (Tao, 2016). In school mathematics, most concepts are approached without direct reference to the concept of a set. However, the concept of a set is used in various contexts, sometimes inconsistently, resulting in students developing misconceptions (Fischbein & Baltsan, 1998).

According to Cantor, "by the word 'set' we mean any collection into a whole of definite and distinct objects of our intuition or our thought" (Moschovakis, 1993). Intuitively, we perceive a set as a well-defined collection of distinct objects. In the Greek language, the word 'set' is used not only to indicate a collection but also to denote the sum or the number of objects in a collection. Mathematical discourse, including vocabulary, often involves extending or modifying the usage of everyday words, while the development of mathematical discourse should incorporate the integration of everyday language into mathematical discourse (Barwell, 2013).

In this dissertation, we investigate the conceptions of primary and secondary education students, as well as prospective teachers, regarding the set concept and the potential influence of the everyday use of the word 'set' on the understanding of the set concept. Our research questions are: (a) how do students of different school levels and prospective teachers understand the concept of set, relations between sets, and equivalence between infinite sets, and (b) how is the understanding of the concept of set influenced by the social context?

In the first stage of the research, we designed a questionnaire based on the literature (Fischbein & Baltsan, 1998; Tirosh & Tsamir, 1996; Bagni, 2006). The questionnaire was administered to 116 sixth-grade students, 127 ninth-grade students, and 154 twelfth-grade students from various schools in Greece. Subsequently, the questionnaire was given to 245 students – prospective teachers of the Department of Primary Education of Democritus University of Thrace, who had been taught basic concepts and operations of Set Theory within a Foundations of Mathematics course. Our aim was to examine whether misconceptions appear among students that persist despite their systematic engagement with elementary Set Theory. Finally, based on their questionnaire responses, 5 sixth-grade students, 5 ninth-grade students, and 6 twelfth-grade students were selected, and semi-structured, semi-clinical interviews (Elkind, 1964) were conducted to investigate the origin of their

perceptions and particularly the influence of different language registers of students (Halliday, 1978).

The most common misconceptions among the participants that answered the questionnaire of our study were (1) the perception that the elements of a set should have a common property, (2) the inclusion of indistinct elements in a set, (3) the rejection of the existence of empty sets, (4) the rejection of the existence of singletons, (5) the confusion between equality and equivalence, (6) the confusion of the concepts of belonging and subset, (7) the perception that the number of elements (cardinality) of an infinite set is greater than the number of elements of any proper subset, (8) the perception that infinite sets are incomparable, and (9) the perception that all infinite sets are equivalent.

Among students of the three school levels, age seemed to have a positive influence in most cases, but not in all cases. Prospective teachers appeared to have noticeably better results in most questions. However, some of the most prevalent misconceptions observed in students of all three school levels were also observed in prospective teachers. Specifically, the requirement for the elements of a set to have a common property, the confusion between the concepts of belonging and subset, and the perception that infinite sets are incomparable seem to persist despite systematic teaching in Set Theory.

Our qualitative analysis revealed that many students, influenced by the use of the term ‘set’ in both the mathematics classroom language register and the everyday language register (Halliday, 1978), appeared to perceive the set as a number rather than a collection, or to have both perceptions simultaneously. Thus, the influence of naming on meaning-making by students becomes apparent (Planas et al., 2022), as well as the need for particular attention from educators at all levels, not only in teaching the concept set of but also in the correct use of the word ‘set’ in the classroom.

Περιεχόμενα

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια του συνόλου επηρέασε βαθύτατα τη μαθηματική σκέψη. Σήμερα, η έννοια του συνόλου είναι αναπόσπαστο κομμάτι των Μαθηματικών αφού «σχεδόν κάθε κλάδος των μαθηματικών βασίζεται στη θεωρία των συνόλων ως μέρος της θεμελίωσής του, επομένως είναι σημαντικό να αποκτήσει κανείς τουλάχιστον κάποιες βάσεις στη Θεωρία Συνόλων προτού επιχειρήσει να ασχοληθεί με άλλους κλάδους των Μαθηματικών» (Tao, 2016).

Η σύγχρονη μελέτη της Θεωρίας συνόλων ξεκίνησε από τον Georg Cantor τον 19ο αιώνα. Κατά τον Cantor «με τη λέξη 'σύνολο' εννοούμε μια οποιαδήποτε συνάθροιση σε ολότητα, οριστικών και διακεκριμένων στοιχείων της διαίσθησης ή του στοχασμού μας» (Μοσχοβάκης, 1993). Από αυτή την περιγραφή προέκυψαν παράδοξα, η αντιμετώπιση των οποίων οδήγησε στην αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Συνόλων, σύμφωνα με την οποία το σύνολο είναι μια πρωταρχική έννοια, δηλαδή δεν υπάρχει τυπικός ορισμός της. Η έννοια του συνόλου εισάγεται άτυπα, στη φυσική γλώσσα, μέσω μιας περιγραφής. Συγκεκριμένα, στην απλοϊκή συνολοθεωρία (naive set theory), το σύνολο νοείται ως μία *συλλογή καλώς ορισμένων και διακεκριμένων στοιχείων*.

Τα μαθηματικά εξαρτώνται άμεσα από τις πρωταρχικές ιδέες, τους ορισμούς και τα αξιώματα, όταν όμως η αξιωματική θεμελίωση έχει ολοκληρωθεί και οι πρωταρχικές έννοιες έχουν αποδοθεί, μπορούν να χρησιμοποιηθούν εμμέσως, χωρίς ρητή αναφορά (Kapadia, 1976). Στα σχολικά μαθηματικά, οι περισσότερες έννοιες προσεγγίζονται χωρίς άμεση αναφορά στην έννοια του συνόλου. Ωστόσο, η έννοια του συνόλου χρησιμοποιείται σε διάφορα πλαίσια, συνήθως με τρόπο ασυνεπή (Fischbein & Baltsan, 1998). Στην Ελλάδα, το σύνολο ορίζεται για πρώτη φορά στη Γ΄ Γυμνασίου, ωστόσο, αναφορά στα σύνολα γίνεται ακόμη και στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού. Η λέξη σύνολο χρησιμοποιείται άλλοτε για να δηλώσει μια συλλογή αντικειμένων (π.χ. σύνολα αριθμών ή σύνολα σημείων) και άλλοτε για να δηλώσει έναν αριθμό (άθροισμα ή συνολικό πλήθος).

Συνήθως, οι μαθηματικοί όροι χρησιμοποιούνται με ακρίβεια στα μαθηματικά κείμενα. Μερικές φορές οι λέξεις που χρησιμοποιούνται στα Μαθηματικά για αυτούς τους όρους έχουν μια ειδική σημασία και δεν συναντώνται σε καμία άλλη περιοχή μάθησης (π.χ. το ολοκλήρωμα), αλλά συχνά είναι λέξεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν με πιο διαισθητικό τρόπο στην καθημερινή ομιλία (Cirillo, 2010). Το γεγονός ότι το σύνολο έχει μια καθημερινή-διαισθητική σημασία κάνει τη μαθηματική έννοια του συνόλου να μοιάζει απλή στη μάθηση και στη χρήση. Ωστόσο το σύνολο έχει ένα πλήθος ιδιοτήτων που δεν συμφωνούν κατ' ανάγκη με τη διαίσθηση του μαθητή.

Δεδομένου ότι οι λέξεις χρησιμεύουν ως ετικέτες για ιδέες και έννοιες, το λεξιλόγιο παίζει καθοριστικό ρόλο στο σχηματισμό, την κατανόηση και την έκφραση των εννοιών (Cirillo et al., 2010). Δεδομένης της αυξανόμενης σημασίας της γλώσσας των μαθηματικών στην ανάπτυξη της μαθηματικής επάρκειας, είναι αναμφισβήτητο ότι η αφιέρωση εκπαιδευτικού χρόνου για τη διδασκαλία του λεξιλογίου των μαθηματικών είναι ζωτικής σημασίας. Αν και η ανάγκη για διδασκαλία λεξιλογίου στα μαθηματικά είναι μεγάλη, υπάρχει περιορισμένη δημοσιευμένη έρευνα που επικεντρώνεται ειδικά σε παρεμβάσεις για την ανάπτυξη του μαθηματικού λεξιλογίου (Riccomini et al., 2015).

Έννοιες της καθομιλουμένης που είναι ήδη γνωστές στους μαθητές και έρχονται σε αντίθεση με τις αντίστοιχες επιστημονικές αποκαλούνται παρανοήσεις (Gilbert & Wats, 1983). Πρώτοι οι Linchevski και Vinner (1988) κατηγοριοποίησαν τις παρανοήσεις που εμφανίστηκαν μεταξύ εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης αναφορικά με την έννοια του συνόλου. Η λίστα τους επεκτάθηκε αργότερα από τους Fischbein και Baltsan (1998) οι οποίοι μελέτησαν επιπλέον μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και εκπαιδευτικούς. Στις έρευνες τους, ο Bagni (2006) και οι Moru και Qhobela (2013) εστίασαν στις δυσκολίες των μαθητών στη διάκριση δύο βασικών εννοιών της θεωρίας συνόλων, του ‘υποσυνόλου’ και του ‘ανήκειν’. Εκτός από τις βασικές έννοιες της Θεωρίας Συνόλων, διάφορες έρευνες έχουν εστιάσει και στις αντιλήψεις των μαθητών σε σχέση με την σύγκριση απειροσυνόλων ως προς το πλήθος των στοιχείων τους (Tsamir & Tirosh, 1992· Tirosh & Tsamir, 1996· Tsamir, 1999· Tsamir, 2001· Tsamir & Dreyfus, 2002· Dreyfus & Tsamir, 2004· Na & Lee, 2006· Moru & Qhobela, 2013).

Παρότι η έννοια του συνόλου είναι θεμελιώδης για τα Μαθηματικά και διατρέχει τη μαθηματική εκπαίδευση, η έρευνα γύρω από την έννοια του συνόλου είναι περιορισμένη. Στόχος της παρούσας διατριβής είναι η χαρτογράφηση των αντιλήψεων των μαθητών της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σχετικά με την έννοια του συνόλου. Στο πρώτο κομμάτι της μελέτης μας επιχειρούμε να συλλέξουμε τα προϋπάρχοντα ερευνητικά αποτελέσματα προκειμένου να συνθέσουμε ένα ερωτηματολόγιο που να εξετάζει τις αντιλήψεις των μαθητών σε σχέση με την έννοια του συνόλου, τις ιδιότητες των στοιχείων ενός συνόλου, τις έννοιες του ανήκειν, του υποσυνόλου, του κενού συνόλου και του απειροσυνόλου, της ισότητας μεταξύ συνόλων και της σύγκρισης απειροσυνόλων ως προς το πλήθος των στοιχείων τους. Αντί για μία απλή καταγραφή των αντιλήψεων, προχωρούμε σε στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων από τα ερωτηματολόγια και στην σύγκριση τεσσάρων εκπαιδευτικών βαθμίδων. Συγκεκριμένα μελετούμε τις αντιλήψεις των μαθητών της Στ΄ Δημοτικού, της Γ΄ Γυμνασίου και της Γ΄ Λυκείου αλλά και μιας ομάδας φοιτητών-μελλοντικών εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Η σύγκριση μεταξύ των τριών σχολικών βαθμίδων είναι άμεση. Οι συμμετέχοντες φοιτητές όμως, δεν μπορούν να συγκριθούν άμεσα με τον γενικό μαθητικό πληθυσμό δεδομένου ότι έχουν ήδη περάσει από το φίλτρο των πανελλαδικών εξετάσεων και επιπλέον έχουν διδαχθεί Θεωρία Συνόλων στα πλαίσια ενός μαθήματος του 1^{ου} έτους σπουδών τους, είναι ως εκ τούτου μια ειδική περίπτωση πληθυσμού. Ωστόσο, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εκτιμήσουμε ποιες λανθασμένες αντιλήψεις επιμένουν και ποιες υποχωρούν ωςαποτέλεσμα της συστηματικής εκπαίδευσης στη Θεωρία Συνόλων. Επιπλέον, οι φοιτητές ενός Παιδαγωγικού Τμήματος είναι εκείνοι που πρώτοι θα αναλάβουν τη μαθηματική εκπαίδευση των νεότερων μαθητών, κατά συνέπεια οι αντιλήψεις τους έχουν ξεχωριστό ενδιαφέρον.

Προκειμένου να διεισδύσουμε βαθύτερα στις αντιλήψεις των μαθητών που παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον, θα χρησιμοποιήσουμε ποιοτικές μεθόδους και συγκεκριμένα ημι-δομημένες συνεντεύξεις οι οποίες θα περιστρέφονται γύρω από υποθετικά σενάρια τα οποία πραγματεύονται την έννοια του συνόλου. Βασικότερος στόχος της ποιοτικής αυτής ανάλυσης είναι η μελέτη της επίδρασης της γλώσσας στη νοηματοδότηση της έννοιας του συνόλου, κάτι που λείπει από την προϋπάρχουσα έρευνα. Οι μαθητές όλων των βαθμίδων αναπτύσσουν διάφορα γλωσσικά ιδιώματα (Halliday, 1978). Η έννοια του συνόλου εμφανίζεται τόσο στα διάφορα καθημερινά γλωσσικά ιδιώματα και τα ιδιώματα του δημόσιου λόγου όσο και στα διάφορα ακαδημαϊκά γλωσσικά διώματα, όπως αυτό των σχολικών Μαθηματικών. Συνεπώς, οι διάφορες αποχρώσεις της έννοιας του συνόλου μέσα σε αυτά τα γλωσσικά ιδιώματα είναι αναπόφευκτο να επηρεάσουν τη νοηματοδότηση των μαθητών για τη μαθηματική έννοια του συνόλου.

2. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ - ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

2.1. Η έννοια του συνόλου

Από πολύ παλιά, οι μαθηματικοί μελετούσαν σύνολα αντικειμένων ενώ οι στοιχειώδεις έννοιες της σύγχρονης Θεωρίας Συνόλων υπονοούνται σε πολλά κλασικά κείμενα (π.χ. ακόμη και στα Στοιχεία του Ευκλείδη). Ο πρώτος που ανέδειξε, εν αγνεία του, τη δυσκολία να δοθεί ένας ορισμός για το σύνολο ήταν ο Έλληνας φιλόσοφος Επιμενίδης τον 6ο αιώνα π.Χ. Ο Επιμενίδης δήλωσε ότι: «Κρῆτες ἀεὶ ψεῦσται», δηλαδή ότι οι κάτοικοι της Κρήτης λένε πάντοτε ψέματα. Δεδομένου όμως, ότι και εκείνος ήταν κάτοικος της Κρήτης, συμπεραίνουμε ότι αν έλεγε την αλήθεια τότε έλεγε ψέματα, ενώ αντίστροφα αν έλεγε ψέματα τότε έλεγε την αλήθεια. Ο Ευβουλίδης τον 4ο αιώνα π.Χ. έθεσε το ερώτημα: «Αν κάποιος παραδεχτεί ότι αυτή τη στιγμή ψεύδεται, αυτό που λέει είναι αλήθεια ή ψέμα;». Τα «παράδοξα» αυτά ήταν στην ουσία μερικά από τα προβλήματα στα οποία προσέκρουσαν οι μαθηματικοί του 19^{ου} αιώνα κατά την εμπλοκή τους με την έννοια σύνολο (Vilenkin, 2013).

Η ιστορία της θεωρίας των συνόλων συνδέεται άμεσα με την ιστορική εξέλιξη της έννοιας του απείρου στα Μαθηματικά. Οι μαθηματικοί και οι φιλόσοφοι εμπλέκονται με τις έννοιες του απείρου και των απειροσυνόλων από τις ημέρες των αρχαίων Ελλήνων μέχρι και σήμερα. Τα παράδοξα του Ζήνωνα είναι μια από τις πρώτες ενδείξεις για τις δυσκολίες που εμφανίστηκαν. Κάποιοι Έλληνες αποδέχτηκαν το γεγονός ότι ένα σύνολο μπορεί να είναι απεριόριστα μεγάλο αλλά αρνήθηκαν την ύπαρξη ενός ολοκληρωμένου απειροσυνόλου. Κατά το Μεσαίωνα, οι γνώμες των φιλοσόφων διχάζονταν μεταξύ του εν δυνάμει και του εν ενεργεία απείρου. Γεγονός ήταν, ότι η σύγκριση ορισμένων απειροσυνόλων οδηγούσε σε παράδοξα. Ο Γαλιλαίος για παράδειγμα, στο έργο του *Two New Sciences* το 1683, παρατήρησε ότι τα σημεία δύο άνισων ευθύγραμμων τμημάτων μπορούν να τεθούν σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία και έτσι τα δύο τμήματα θα πρέπει να περιέχουν τον ίδιο αριθμό σημείων, παρότι το ένα είναι μεγαλύτερο από το άλλο. Κατά παρόμοιο τρόπο παρατήρησε ότι οι φυσικοί αριθμοί μπορούν να τεθούν σε ένα προς ένα και επί αντιστοιχία με τα τετράγωνά τους, αν και το σύνολο των τετραγώνων φυσικών αποτελεί μόνο ένα μέρος των φυσικών αριθμών. Υποστήριξε ως εκ τούτου ότι η ύπαρξη εν ενεργεία απείρων πρέπει να απορριφθεί (Eves, 1983).

Η πρώτη μαθηματική μελέτη των άπειρων συνόλων έγινε με τη σημαντική εργασία του Georg Cantor κατά τα τέλη του δέκατου ένατου αιώνα (Eves, 1983). Ο Cantor, από το 1874 με μια σειρά δημοσιεύσεων έθεσε τις βάσεις της Θεωρίας Συνόλων. Με τη λέξη *σύνολο* ο Cantor εννοούσε μια συλλογή καλώς ορισμένων και διακεκριμένων αντικειμένων της νόησής μας ή της εμπειρίας μας, για την οποία κάποιος μπορεί να αποφασίσει αν ένα δοθέν αντικείμενο ανήκει ή όχι. Μια από τις

βασικές ιδιότητες ενός συνόλου σύμφωνα με τον Cantor, είναι η ικανότητα του να ανήκει σε άλλα σύνολα. Θεώρησε επιπλέον ότι δύο σύνολα είναι ίσα όταν έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία ενώ έδωσε και τον ορισμό του κενού συνόλου, ως το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Βασικό χαρακτηριστικό του συνόλου είναι η ανεξαρτησία του από οποιαδήποτε λεκτική η θεωρητική μας επιλογή. Οποιαδήποτε λεκτική περιγραφή για την έννοια του συνόλου, δεν μπορεί στην ουσία να αποτελέσει ένα τυπικό μαθηματικό ορισμό της, αφού γίνεται δεκτή σε κάθε αξιωματική θεμελίωση ως πρωταρχική (Bagni, 2006).
Στη Θεωρία Συνόλων του, ο Cantor όρισε ένα άπειρο σύνολο ως ένα σύνολο το οποίο μπορεί να έρθει σε 1-1 και επί αντιστοιχία με κάποιο από τα γνήσια υποσύνολά του (Narli & Baser, 2008). Στα γραπτά του ανέπτυξε μια θεωρία για τους υπερ-πεπερασμένους αριθμούς, πραγματευόμενος το εν ενεργεία άπειρο, δημιουργώντας έτσι μια αριθμητική των υπερ-πεπερασμένων αριθμών, παρόμοια με εκείνη των πεπερασμένων (Eves, 1983). Οι πληθικοί αριθμοί πεπερασμένων συνόλων μπορούν να ταυτιστούν με τους ίδιους τους φυσικούς (για παράδειγμα το 0 να ταυτιστεί με το $\{\ \}$, το 1 με το σύνολο $\{\{\ \}\}$, το 2 με το $\{\{\ \},\{\{\ \}\}\}$ κ.ο.κ). Κατά τον Cantor, οι υπερ-πεπερασμένοι αριθμοί αντιστοιχούν κατά παρόμοιο τρόπο στον πληθικό αριθμό απειροσυνόλων (Eves, 1983). Στο πλαίσιο της θεωρίας του, ο Cantor απέδειξε ότι το σύνολο των ρητών αριθμών έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με το σύνολο των ακεραίων και συνεπώς με το σύνολο των φυσικών. Σύνολα με τη παραπάνω ιδιότητα χαρακτηρίζονται *αριθμήσιμα* και έχουν τον ίδιο πληθικό αριθμό, τον οποίο ονόμασε $\aleph_o$ (το εβραϊκό γράμμα άλεφ με δείκτη μηδέν). Ο Cantor απέδειξε επιπλέον, ότι το ανοικτό διάστημα (0,1) είναι μη αριθμήσιμο έχει λοιπόν ένα πληθικό αριθμό μεγαλύτερο από τον $\aleph_o$. Η τελευταία απόδειξη μάλιστα, έχει μείνει στην Ιστορία των Μαθηματικών ως *η διαγώνια μέθοδος του Cantor* (Eves, 1983).

Παρότι η έννοια του συνόλου επηρέασε σημαντικά την μαθηματική σκέψη, οι περισσότεροι σύγχρονοι του Cantor μαθηματικοί απέρριψαν αρχικά τις ιδέες του. Η θεωρία του επικρίθηκε σκληρά από τον Kronecker, τον Poincaré, και άλλους σημαντικούς μαθηματικούς της εποχής, που δεν ήταν πρόθυμοι να βουτήξουν στον κόσμο του πραγματικού – εν ενεργεία απείρου όπου, ένα σύνολο θα μπορούσε να έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων με ένα γνήσιο υποσύνολό του και ένα ευθύγραμμο τμήμα θα μπορούσε να περιέχει τον ίδιο αριθμό σημείων με ένα ευθύγραμμο τμήμα μισού μήκους ενώ, άπειρες διαδικασίες θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως ολοκληρωμένες (Narli & Baser, 2008).

Από την άλλη πλευρά, η Θεωρία Συνόλων είχε γίνει δεκτή με μεγάλο ενθουσιασμό από μερικούς διάσημους μαθηματικούς της εποχής εκείνης, όπως ο B. Russell και ο D. Hilbert (Eves, 1983). Στη δεκαετία του 1890-1900 η θεωρία του Cantor άρχισε να βρίσκει εφαρμογή στην Ανάλυση και τη Γεωμετρία. Ο Hilbert υποστήριξε ότι «κανείς δεν πρόκειται να μας στερήσει τον παράδεισο που δημιούργησε για εμάς ο Cantor». Ο R. Dedekind, φίλος του Cantor, μελέτησε και αυτός τα απειροσύνολα. Αναρωτήθηκε για τη διαφορά που έχει ένα συνεχές γεωμετρικό μέγεθος με το σύνολο των ρητών αριθμών και προσπάθησε να δώσει απάντηση στο ερώτημα αυτό (Vilenkin, 2013). Όρισε επιπλέον, το σύνολο των πραγματικών αριθμών ως σύνολο τομών (τομές Dedekind) ρητών αριθμών, ορισμός βάση του οποίου μπορούμε να αποδείξουμε ότι κάθε μη κενό άνω φραγμένο υποσύνολό των πραγματικών αριθμών έχει ελάχιστο άνω φράγμα, κάτι που γινόταν παλαιότερα αποδεκτό ως αξίωμα.

Ό,τι σχετιζόταν με την έννοια του συνόλου ήταν εντελώς καινούργιο και ξένο ενώ ερχόταν σε αντίθεση με τον αποδεκτό τρόπο σκέψης ειδικά όσον αφορά στο άπειρο. Παρόλα αυτά, όταν η μαθηματική κοινότητα εξοικειώθηκε με την έννοια, άρχισαν να φαίνονται τα πρώτα προβλήματα του συνόλου όπως το όρισε ο Cantor. Το πρώτο σημάδι των προβλημάτων στα ίδια τα θεμέλια της Θεωρίας Συνόλων ήταν ένα παράδοξο που ανακαλύφθηκε από τον ίδιο τον Cantor. Θέμα του ήταν το σύνολο όλων των υπερ-πεπερασμένων αριθμών το οποίο, εφόσον είναι καλώς διατεταγμένο, μπορούσε να περιγραφεί από κάποιον υπερ-πεπερασμένο αριθμό Ω. Αλλά τότε ο Ω πρέπει να είναι μεγαλύτερος από όλους τους υπερπεπερασμένους αριθμούς και άρα από τον εαυτό του (Vilenkin, 2013). Τα πιο τρανταχτά και διασημότερα προβλήματα, φάνηκαν με το παράδοξο του Russell: «Αν Α είναι ένα σύνολο συνόλων και κάθε στοιχείο x του συνόλου έχει την ιδιότητα ότι δεν ανήκει στον εαυτό του τότε, το Α ανήκει στο Α αν και μόνο αν το Α δεν ανήκει στο Α». Μια άλλη παρατήρησή του ήταν ότι με βάση την Θεωρία Συνόλων του Cantor, το σύνολο όλων των συνόλων είναι αδύνατο να οριστεί αφού θα πρέπει να περιέχει τον εαυτό του. Ο Russell προσπάθησε να δώσει λύση στα προβλήματα αυτά προτείνοντας μια νέα προσέγγιση για την έννοια του συνόλου (Wilder, 1965 στο Fischbein & Baltsan, 1998). Ο Ε. Zermelo είχε ένα παρόμοιο σύνολο παραδόξων, του οποίου δεν είχε δημοσιεύσει τα αποτελέσματα.

Τα προβλήματα αντιφατικότητας των συνόλων αντιμετωπίστηκαν τελικά με την αξιωματική θεμελίωση της Θεωρίας Συνόλων των Zermelo-Freankel η οποία αποκλείει τα παράδοξα του Cantor και του Russell και είναι σήμερα αποδεκτή (Vilenkin, 2013). Το 1908 ο E. Zermelo παρουσίασε σαν μια πρώτη προσπάθεια αξιωματικής θεμελίωσης της Θεωρίας Συνόλων, ένα σύστημα αξιωμάτων. Αργότερα το σύστημα του Zermelo τελειοποιήθηκε από τον A. Fraenkel. Το 1925 προστέθηκε ένα ακόμη αξίωμα, η πατρότητα του οποίου δεν είναι γνωστή.

Ο κορυφαίος ερευνητής της λογικής K. Gödel απέδειξε το 1931 το σημαντικό αποτέλεσμα της μη πληρότητας. Το 1939 απέδειξε ότι, αν το αξιωματικό σύστημα των Zermelo-Fraenkel για τη Θεωρία Συνόλων είναι συνεπές, δηλαδή δεν περικλείει λογική αντίφαση, θα εξακολουθήσει να είναι συνεπές αν προσθέσουμε το αξίωμα επιλογής ή την υπόθεση του συνεχούς. Είκασε επιπλέον, ότι και η διάψευση της υπόθεσης τους συνεχούς είναι συνεπής με τα συγκεκριμένα αξιώματα της Θεωρίας Συνόλων, κάτι που απέδειξε το 1963 ο P. Cohen (Eves, 1983).

Μια ομάδα μαθηματικών του 20ου αιώνα, κάτω από το ψευδώνυμο Nicolas Bourbaki, προσπάθησε να ανασυγκροτήσει και να οργανώσειτα μαθηματικά της εποχής με εντελώς αφηρημένο, τυπικό και παράλληλα αυτόνομο τρόπο, αδιαφορώντας τελείως για το αν τα μαθηματικά αυτού του είδους εφαρμόζονται στο πρόβλημα της γνώσης του πραγματικού κόσμου (Vilenkin, 2013). Κύρια δουλειά των Bourbaki είναι τα *Στοιχεία των Μαθηματικών* (*Éléments de mathématique*), μια σειρά βιβλίων μέσω των οποίων προσπάθησαν να θεμελιώσουν όλα τα μαθηματικά με βάση τη θεωρία συνόλων. Μόνιμη μέριμνα της ομάδας ήταν η διατήρηση της αυστηρότητας και της γενικότητας. Μη προϋποθέτοντας ιδιαίτερες γνώσεις μαθηματικών, επιχείρησαν να ξεκινήσουν από τις απαρχές των μαθηματικών και προχωρώντας αξιωματικά να παρέχουν πλήρεις αποδείξεις. Η εργασία των Bourbaki ξεκίνησε το 1935 με τη *Θεωρία Συνόλων* (*Théorie des Ensembles*) και οδήγησε στην ανακάλυψη αρκετών εννοιών και ορολογιών που εξακολουθούν να χρησιμοποιούνται μέχρι σήμερα. Επηρέασε τέλος, πολλούς κλάδους των μαθηματικών καθώς και τη μαθηματική εκπαίδευση.

2.2. Το σύνολο στη σύγχρονη μαθηματική εκπαίδευση

Από τις απαρχές της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο σχολείο, παρατηρούνται προσπάθειες μεταρρύθμισης που αποσκοπούν στην ανανέωση του τρόπου διδασκαλίας τους (Καψάλης & Λεμονίδης, 1999). Η μαθηματική εκπαίδευση έχει υποστεί παγκοσμίως αλλαγές και μεταρρυθμίσεις τα τελευταία χρόνια. Μία σημαντική μεταρρύθμιση πραγματοποιήθηκε στις ΗΠΑ στις αρχές της δεκαετίας του 1950, καθώς παρατηρήθηκε ότι η διδασκόμενη ύλη παρέμεινε σταθερή και αναλλοίωτη για αρκετές δεκαετίες.

Από τα μέσα του 1950 μέχρι τα μέσα του 1970 και αργότερα σε κάποιες περιπτώσεις, πολλές απόπειρες για αλλαγή των σχολικών μαθηματικών συνέβησαν υπό το όνομα «Νέα Μαθηματικά». Οι απόπειρες αυτές, προερχόμενες από διάφορες πηγές και παίρνοντας διάφορες μορφές, είχαν βασική κοινή συνιστώσα την επιθυμία να φέρουν τα σχολικά μαθηματικά κοντά στα μαθηματικά του πανεπιστημίου (Kilpatrick, 2012). Σημαντική ήταν η επιρροή από την ομάδα των Bourbaki η οποία, ξεκινώντας το 1930 επιχείρησε να γενικεύσει, να επισημοποιήσει και να ενοποιήσει τα «καθαρά» Μαθηματικά (Kilpatrick, 2012). Υπήρξε έντονο ενδιαφέρον, κυρίως από τους πανεπιστημιακούς καθηγητές, να ενσωματώσουν στα πανεπιστημιακά και σχολικά προγράμματα ορισμένες από τις νέες μαθηματικές ιδέες που αναπτύχθηκαν τα προηγούμενα εκατό έτη. Αυτή η κίνηση είχε μεγαλύτερη επίδραση στην πανεπιστημιακή εκπαίδευση παρά στα σχολικά Μαθηματικά (Καψάλης & Λεμονίδης, 1999).

Το 1955, η Εξεταστική Επιτροπή για την Εισαγωγή στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση στις ΗΠΑ, συνέστησε μια επιτροπή με στόχο την αξιολόγηση των Μαθηματικών που απαιτούνται για την εισαγωγή στο πανεπιστήμιο. Αυτή η επιτροπή επεσήμανε ένα αυξανόμενο χάσμα μεταξύ των εξετάσεων εισαγωγής στα αμερικανικά κολέγια και των μαθηματικών που διδάσκονται στο Λύκειο. Επιπλέον, διαπίστωσε ότι το επίπεδο μαθηματικών πολλών αποφοίτων Λυκείου ήταν χαμηλό, η κατανόησή τους ανεπαρκής και η στάση τους προς τα Μαθηματικά αρνητική (Kilpatrick, 2012). Η επιτροπή πρότεινε αλλαγές στα αμερικανικά αναλυτικά προγράμματα, συμπεριλαμβανομένης της εισαγωγής νέων θεμάτων Μαθηματικών όπως η Λογική και οι Πιθανότητες, που σχετίζονται άμεσα με τη Θεωρία Συνόλων (Kilpatrick, 2012).

Ένα σημαντικό γεγονός ήταν η διεξαγωγή ενός δωδεκαήμερου σεμιναρίου το 1959 υπό την αιγίδα του Οργανισμού Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης (ΟΟΣΑ). Κατά τη διάρκειά του προτάθηκε ένα ευρύ φάσμα μέτρων για τον εκσυγχρονισμό των σχολικών αναλυτικών προγραμμάτων, τη διδασκαλία των Μαθηματικών και την κατάρτιση των καθηγητών. Ο Jean Dieudonné, πρώην μέλος των Bourbaki, υποστήριξε ότι οι μαθητές που εισέρχονται στο πανεπιστήμιο θα έπρεπε να έχουν ήδη εξοικειωθεί με βασικές τεχνικές της Γραμμικής Άλγεβρας, της Τριγωνομετρίας και της Ανάλυσης, αλλά να είναι επίσης ικανοί στη χρήση της Μαθηματικής Λογικής (παραγωγή, επαγωγή, απαγωγή κλπ.) και να γνωρίζουν τη μέθοδο της αξιωματικής θεμελίωσης. Πρότεινε επίσης ότι η «νέα γλώσσα» των Μαθηματικών, που περιλαμβάνει τη Θεωρία Συνόλων, των Ομάδων, των Διανυσματικών Χώρων και άλλες θεωρίες, θα έπρεπε να ενσωματωθεί στα σχολικά μαθηματικά όπως έγινε από τους Bourbaki (Kilpatrick, 2012).

Παρόμοιες πρωτοβουλίες συναντάμε και στην Ευρώπη. Η Διεθνής Επιτροπή για τη Μελέτη και Βελτίωση της Διδασκαλίας των Μαθηματικών διοργάνωνε τακτικές συναντήσεις με συμμετοχή παιδαγωγών, μαθηματικών, εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, ψυχολόγων, και φιλοσόφων. Στο πρώτο βιβλίο των ιδρυτών της επιτροπής προτάθηκε η εισαγωγή των Νέων Μαθηματικών μέσω της προσαρμογής της κατάλληλης γλώσσας και την ανάδειξη δομών όπως οι Δακτύλιοι, οι Ομάδες και οι Διανυσματικοί Χώροι. Πολλοί από τους μεταρρυθμιστές του κινήματος των Νέων Μαθηματικών πίστευαν ότι όλοι οι μαθητές πρέπει να έχουν πρόσβαση στα ίδια Μαθηματικά, γι' αυτό τα Νέα Μαθηματικά θεωρούνταν ως «Μαθηματικά για όλους». Επίσης, το 1967 στο Ηνωμένο Βασίλειο ξεκίνησε η κίνηση «Μαθηματικά για την Πλειοψηφία», η οποία ασχολούνταν με τη διδασκαλία μαθητών με μέση και χαμηλή επίδοση.

Την ίδια περίοδο, ξεκίνησαν μεταρρυθμίσεις και στη Ρωσία υπό την καθοδήγηση του A. Kolmogorov. Η ομάδα του παρήγαγε ένα αναλυτικό πρόγραμμα το οποίο εγκρίθηκε επίσημα το 1968. Πολλές από αυτές τις μεταρρυθμίσεις μοιάζουν με εκείνες των χωρών του ΟΟΣΑ. Τα Νέα Μαθηματικά της Σοβιετικής Ένωσης περιείχαν στοιχεία της Στοιχειώδους Θεωρίας Συνόλων, αλλά όχι στο βαθμό που τα είχαν οι χώρες του ΟΟΣΑ. Το 1961, στην Αθήνα, πραγματοποιήθηκε ένα συνέδριο στα πλαίσια του ΟΟΣΑ με θέμα τις νέες μεθόδους διδασκαλίας των σχολικών μαθηματικών, στο οποίο συμμετείχε και η Ελλάδα, η οποία ήταν ανάμεσα στις χώρες που υιοθέτησαν τις «διδακτικές καινοτομίες».

Το 1962, οι M. Kline, G. Polya, L. Bers και M. Schiffer δημοσίευσαν ένα υπόμνημα όπου εξέφραζαν την άποψη ότι τα αναλυτικά προγράμματα δεν πρέπει να προσαρμόζονται μόνο για τους μελλοντικούς μαθηματικούς, αλλά θα πρέπει να εξυπηρετούν όλους τους μαθητές. Επίσης, υπογράμμισαν ότι οι μαθητές δεν πρέπει να εκπαιδεύονται με πρόωρη εισαγωγή σε αφηρημένες έννοιες, αλλά θα πρέπει να αντιλαμβάνονται τη σύνδεση των μαθηματικών με άλλες επιστήμες. Επίσης, επισήμαναν ότι οι τυπικές αποδείξεις θα έπρεπε να συνοδεύονται από εικασίες και διαίσθηση, ενώ τα μαθηματικά θα έπρεπε να παρουσιάζονται ιστορικά, όπως αναπτύχθηκαν.

Ο Kline συνέχισε να δημοσιεύει άρθρα και ένα βιβλίο με τίτλο «Why Johnny Can't Add: The failure of the New Math» (Γιατί ο Γιαννάκης δεν μπορεί να προσθέσει: Η αποτυχία των Νέων Μαθηματικών) (Kline, 1973). Η κριτική που ασκήθηκε από τον Kline αλλά και άλλους ερευνητές στις ΗΠΑ ήταν παρόμοια με αυτή που εκφράστηκε και σε άλλες χώρες της Δύσης και τελικά διαμόρφωσε την κοινή γνώμη.

Το κίνημα των Νέων Μαθηματικών όμως αντιμετώπισε αντίδραση και από τα ίδια του τα μέλη. Ο Beberman, το 1958 χαρακτήρισε το κίνημα ως βιαστικό και εξέφρασε την ανησυχία του ότι «κινδυνεύουμε να αναθρέψουμε μια γενιά παιδιών που θα είναι ανίκανα να κάνουν υπολογιστική αριθμητική» (Kilpatrick, 1992). Πρότεινε ότι οι αλλαγές στα αναλυτικά προγράμματα θα έπρεπε να γίνουν σταδιακά και προσεκτικά, καθώς οι δάσκαλοι της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης θα έπρεπε να επανεκπαιδευτούν, κάτι που δεν θα μπορούσε να επιτευχθεί τόσο αποτελεσματικά και γρήγορα όσο θα το επιτύγχαναν οι καθηγητές μαθηματικών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης.

Ο Davis (2003) υποστήριξε ότι, (1) δεν υπήρξε ποτέ στην ουσία ένα ενιαίο, καλά ορισμένο και αναγνωρίσιμο πρόγραμμα το οποίο θα μπορούσαμε να αποκαλέσουμε *«τα Νέα Μαθηματικά»*, (2) τα περισσότερα σχολεία επηρεάστηκαν ελάχιστα από το αποκαλούμενο «*Κίνημα των Νέων Μαθηματικών»* ενώ, (3) σε χώρες όπου, κάποια νέα προγράμματα εφαρμόστηκαν προσεκτικά από ανθρώπους που τα κατανοούσαν, τα αποτελέσματα ήταν ιδιαιτέρως θετικά. Σύμφωνα με τον Kilpatrick (2012), ιδιαίτερα το δεύτερο επιχείρημα του Davis δεν είναι και τόσο εύστοχο, δεδομένου ότι υπήρχαν χώρες όπως η Γαλλία και η Ρωσία όπου κάθε καθηγητής, κάθε μαθητής και κάθε σχολείο έπρεπε αναγκαστικά να εμπλακεί με τις μεταρρυθμιστικές προσπάθειες.

Η κίνηση των Νέων Μαθηματικών είχε μακροχρόνιες επιδράσεις στη μαθηματική εκπαίδευση παγκοσμίως. Παρότι δεν επέστρεψαν τα Μαθηματικά στο παλαιό σημείο που βρίσκονταν πριν από την έναρξη του κινήματος, πολλές από τις ιδέες και τα στοιχεία που εισήγαγε παρέμειναν στα σχολικά προγράμματα. Σύμφωνα με τον R. Kapadia (1976), η τάση στη μαθηματική εκπαίδευση ήταν η ενοποίηση των μαθηματικών ως ένα ενιαίο οικοδόμημα, αντί του παραδοσιακού διαχωρισμού σε Αριθμητική, Άλγεβρα και Γεωμετρία. Η Λογική και η Θεωρία Συνόλων επιλέχθηκαν ως το βασικό δομικό στοιχείο για την κατασκευή των σχολικών μαθηματικών προγραμμάτων. Παρότι, οι Bourbaki ξεκίνησαν το έργο τους με τη Θεωρία Συνόλων, εντούτοις πολλά από τα Μαθηματικά στο έργο τους δεν προσεγγίζονται συνολο-θεωρητικά. Εξάλλου, όταν οι πρωταρχικές έννοιες αποδοθούν και η πρωταρχική λογική έχει ολοκληρωθεί, τείνει να αγνοείται (Kapadia, 1976). Παρότι η πρωταρχική λογική δεν εφαρμόστηκε σε όλα τα μαθηματικά, η Θεωρία Συνόλων παρέμεινε σημαντική για τη σκέψη και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Ακόμη και σήμερα τα σχολικά εγχειρίδια αναφέρονται για παράδειγμα σε σύνολα αριθμών ή σύνολα σημείων (Kilpatrick, 2012).

Η δυσφορία απέναντι στα Νέα Μαθηματικά εκδηλώθηκε έντονα σε πολλές χώρες από τα μέσα της δεκαετίας του 1970. Αυτά τα μαθηματικά κατηγορήθηκαν για τη μείωση των επιδόσεων των μαθητών σε εθνικές και διεθνείς εξετάσεις. Πολλοί θεώρησαν ότι η μεταρρύθμιση ήταν ελιτιστική και απευθυνόταν μόνο στους λίγους, δηλαδή στους «καλούς μαθητές». Αυτή η δυσφορία αναδείχθηκε ως ένδειξη ενδιαφέροντος για την πλειοψηφία των μαθητών, οι οποίοι είχαν αισθανθεί παραμελημένοι κατά την προηγούμενη μεταρρύθμιση. Οι εκτιμήσεις αυτές αναδείκνυαν την ανάγκη για μια πιο ισορροπημένη προσέγγιση στη μαθηματική εκπαίδευση, η οποία θα λαμβάνει υπόψη τις ανάγκες και τις δυνατότητες όλων των μαθητών (Καψάλης & Λεμονίδης, 1999).

Η στροφή «πίσω στα βασικά» αντιπροσώπευε μια γενικότερη κίνηση που διαμορφώθηκε τη δεκαετία του 70. Η Θεωρία Συνόλων, η οποία ήταν μια βασική ιδέα των Νέων Μαθηματικών, άρχισε να εγκαταλείπεται, καθώς η έμφαση μετακινήθηκε προς τις υπολογιστικές δεξιότητες και τεχνικές, οι οποίες είχαν υποβαθμιστεί. Σε ορισμένες περιπτώσεις, αυτή η κίνηση έλαβε ακραία μορφή, η οποία μπορεί να ήταν πιο επικίνδυνη από την προηγούμενη κίνηση των Νέων Μαθηματικών την οποία προσπάθησε να αντικαταστήσει. Αυτό οδήγησε σε μια απότομη μετάβαση και σε πολλές περιπτώσεις σε υπερβολικά απλουστευμένες προσεγγίσεις στη διδασκαλία τωνΜαθηματικών, με αποτέλεσμα να χαθεί η ισορροπία μεταξύ θεωρίας και πράξης (Καψάλης & Λεμονίδης, 1999).

Η κίνηση υπέρ των Νέων Μαθηματικών επικεντρώθηκε, μεταξύ άλλων, σε ψυχολογικά δεδομένα που προέκυψαν από την έρευνα των J. Piaget και J. Bruner, τα οποία παρέμειναν σημαντικά και στη μετέπειτα εποχή των Μεταμοντέρνων Μαθηματικών. Μια βασική αφετηρία αυτών των νεότερων προσεγγίσεων είναι η αντίληψη της έννοιας του αριθμού από τα παιδιά. Αυτό υποστηρίζεται από διάφορες θεωρίες, συμπεριλαμβανομένης της θεωρίας του Piaget, που τονίζει τη σημασία των λογικών διαδικασιών για την ανάπτυξη της έννοιας του αριθμού από τα παιδιά, ενώ η καταμέτρηση θεωρείται η πλέον βασική δεξιότητα που τα οδηγεί στην κατάκτηση της έννοιας του αριθμού (Καψάλης & Λεμονίδης, 1999).

Συχνή είναι την περίοδο εκείνη η άποψη ότι κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις αριθμητικές σχέσεις, όπως τις σχέσεις ισότητας και ανισότητας μεταξύ δύο συλλογών αντικειμένων (δηλαδή δύο συνόλων), αφού ακόμα και παιδιά δύο ετών μπορούν να αναγνωρίσουν αν δύο μικρές συλλογές αντικειμένων έχουν ή δεν έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων (Καψάλης & Λεμονίδης, 1999).

Ειδικά για την Ελλάδα μπορούμε να πούμε ότι μέχρι τη δεκαετία του 1970 δινόταν έμφαση σε δεξιότητες αυτοματισμού και εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων, ενώ τα Νέα Μαθηματικά έδωσαν έμφαση στην κατανόηση μαθηματικών δομών (Καψάλης & Λεμονίδης, 1999). Το 1982-1983 συγγράφονται στη χώρα μας σχολικά βιβλία μαθηματικών, στα οποία ακολουθείται η προσέγγιση των Νέων Μαθηματικών, ενώ τα έτη 2004-2005 συγγράφονται νέα σχολικά εγχειρίδια για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο τα οποία χρησιμοποιούνται μέχρι και σήμερα (το έτος 2024) ενώ εμπλουτίζονται ανά τακτά διαστήματα αυτά του Λυκείου.

Σε όλες τις τάξεις του Δημοτικού, μεταξύ των ενδεικτικών θεμελιωδών εννοιών αναφέρεται η έννοια του συνόλου. Πολύ συχνά μάλιστα, αναφέρεται και η έννοια της ταξινόμησης με βάση κάποια χαρακτηριστικά, γεωμετρικών σχημάτων ή αριθμών. Στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου η έννοια του συνόλου συνεχίζει να αναφέρεται συνεχώς στης ενδεικτικές θεμελιώδεις έννοιες. Στους γενικούς στόχους της Α΄ Γυμνασίου αναφέρεται χαρακτηριστικά:

> «Να γνωρίσουν τα σύνολα των φυσικών, των κλασματικών και των δεκαδικών αριθμών, να μπορούν να εκτελούν με ευχέρεια τις πράξεις στα σύνολα αυτά, να γνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων και να τις εφαρμόζουν στην επίλυση εξισώσεων και προβλημάτων. Να γνωρίσουν το σύνολο των αρνητικών ρητών και κατ' επέκταση το σύνολο όλων των ρητών αριθμών και να μπορούν να επιλύουν εξισώσεις και προβλήματα στα σύνολα αυτά».

Ανάμεσα στους γενικούς στόχους της Β΄ Γυμνασίου αναφέρεται ότι οι μαθητές θα πρέπει:

> «Να γνωρίσουν το σύνολο των άρρητων αριθμών και, κατ' επέκταση το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών, τη σημασία των πράξεων, τις ιδιότητες αυτών και να μπορούν να τις χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων με εξισώσεις και ανισώσεις α΄ βαθμού».

Στη Γ΄ Γυμνασίου ορίζεται για πρώτη φορά η έννοια του συνόλου. Στους ειδικούς στόχους του Αναλυτικού Προγράμματος για τη Γ΄ Γυμνασίου αναφέρεται χαρακτηριστικά ότι, σκοπός είναι οι μαθητές:

> «Να γνωρίζουν ποιοι αριθμοί αποτελούν το σύνολο των πραγματικών αριθμών» και «να ορίζουν ένα σύνολο με περιγραφή ή αναγραφή των στοιχείων του και να το παριστάνουν με διάγραμμα Venn, να κατανοούν πότε δυο σύνολα είναι ίσα και πότε ένα σύνολο είναι υποσύνολο ενός άλλου συνόλου. Να βρίσκουν την ένωση και την τομή δυο συνόλων, καθώς και το συμπλήρωμα ενός συνόλου».

Στο Λύκειο τα σύνολα είναι κομμάτι της καθημερινότητας του μαθητή. Στην Α΄ Λυκείου, στο εισαγωγικό κεφάλαιο ορίζεται η έννοια του συνόλου. Έννοιες όπως η συνάρτηση ή ο Γεωμετρικός Τόπος ορίζονται με χρήση της έννοιας του συνόλου. Στη Γ΄ Λυκείου, η έννοια του διαστήματος χρησιμοποιείται κατά κόρον στο μάθημα της Ανάλυσης ενώ τα σύνολα χρησιμοποιούνται για να οριστεί το ενδεχόμενο στο μάθημα της Στατιστικής των Μαθηματικών του Προσανατολισμού Ανθρωπιστικών Σπουδών.

Η σύγχρονη έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών δείχνει να ενδιαφέρεται σε μεγάλο βαθμό για τον ρόλο και τη χρήση άτυπων μαθηματικών (βλέπε π.χ., Tall, 2008˙ Barwell, 2013), την χρήση των Μαθηματικών σε πρακτικά ή ρεαλιστικά πλαίσια (βλέπε π.χ., Sfard, 2008˙ Psycharis & Potari, 2019) αλλά και στη διαθεματικότητα (βλέπε π.χ. Choutou & Potari 2024). Δίνεται μεγαλύτερη έμφαση στην καλλιέργεια της μαθηματικής διαίσθησης παρά στην ανάπτυξη δεξιοτήτων αυτοματισμού ή την παλαιότερη ανάπτυξη του τυπικού μαθηματικού συλλογισμού. Στόχος είναι οι μαθητές να κάνουν μαθηματικά και όχι απλά να μαθαίνουν μαθηματικές έννοιες (βλέπε π.χ. von

Renesse & Ecke, 2016˙ Boaler, 2002). Ερευνητές επιχειρούν να παντρέψουν τα Μαθηματικά, όχι μόνο με συγγενή μαθήματα όπως η Φυσική ή η Τεχνολογία αλλά ακόμη και μαθήματα όπως τα Καλλιτεχνικά ή τη Μουσική (βλέπε π.χ. Choutou & Potari, 2024˙ Tytler, 2019˙ von Renesse & Ecke, 2016˙ An & Tillman, 2014). Παρά την σύγχρονη τάση της έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών και την συνακόλουθη προσπάθεια ενσωμάτωσης των ερευνητικών αποτελεσμάτων στη διδακτική πράξη και στην σχολική τάξη των Μαθηματικών, θεμελιώδεις έννοιες όπως αυτή του συνόλου είναι εξαιρετικά απίθανο να εγκαταλειφθούν. Σε όποιο σημείο και να πετύχει κανείς το εκκρεμές που λέγεται 'νέα τάση στη μαθηματική εκπαίδευση', η έννοια του συνόλου θα αποτελεί κομμάτι της γλώσσας των εκπαιδευτικών, των μαθητών ακόμη και των ερευνητών.

Στα επόμενα κεφάλαια θα επιχειρήσουμε να εξετάσουμε διεξοδικά την προϋπάρχουσα έρευνα σε σχέση με τις αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια του συνόλου και τη χρήση της λέξης 'σύνολο' στην καθημερινότητα των μαθητών, στον δημόσιο λόγο αλλά και στα τρέχοντα σχολικά εγχειρίδια.

2.3. Παρανοήσεις μαθητών σε σχέση με την έννοια του συνόλου

Στα σχολικά μαθηματικά, η έννοια του συνόλου χρησιμοποιείται σε διάφορα πλαίσια, συνήθως με τρόπο ασυνεπή. Ένα μεγάλο πρόβλημα για τους μαθητές είναι το γεγονός ότι η έννοια του συνόλου γίνεται δεκτή στα Μαθηματικά ως πρωταρχική (Fischbein & Baltsan, 1998). Αντί για έναν τυπικό ορισμό η έννοια του συνόλου εισάγεται άτυπα, στη φυσική γλώσσα, μέσω μιας περιγραφής. Συγκεκριμένα, στην απλοϊκή συνολοθεωρία, το σύνολο νοείται ως μία συλλογή καλώς ορισμένων και διακεκριμένων στοιχείων.

Ένα μοντέλο (Fischbein et al., 1985) έχει δύο σημασίες: (1) Ένα αρχικό αντικείμενο που χρησιμοποιείται ως πρότυπο για την ανακατασκευή όμοιων αντικειμένων ή απομιμήσεων (για παράδειγμα ένα ζωγραφικό μοντέλο) ή (2) ένα δημιούργημα που έπεται μιας έννοιας και βοηθά στην καλύτερη κατανόηση της (για παράδειγμα, στις απαρχές της ανάπτυξης της θεωρίας του ηλεκτρισμού, το ηλεκτρικό ρεύμα παρομοιάστηκε με υδάτινο ρεύμα που ρέει μέσα σε έναν πολύ στενό σωλήνα με τον νόμο του Ohm να είναι αποτέλεσμα αυτής της αναλογίας). Σύμφωνα με τους Fischbein και Baltsan (1998), όταν ο Cantor δημιουργούσε τη Θεωρία Συνόλων, είχε στον νου του την «συλλογή αντικειμένων» ως μοντέλο με τη δεύτερη έννοια.

Όροι που οι επιστήμες δανείστηκαν από την καθομιλουμένη και ορίστηκαν εκ των υστέρων αυστηρά στο εκάστοτε επιστημονικό πλαίσιο, φέρουν σιωπηρά μαζί τους ιδιότητες και περιορισμούς οι οποίες, ουδεμία σχέση δεν έχουν με τις ορθές ερμηνείες στο πλαίσιο αυτό. Ενώ σε κάποιες περιπτώσεις το εκάστοτε μοντέλο μπορεί να δίνει σωστά αποτελέσματα, εντούτοις, το ίδιο μοντέλο μπορεί να οδηγήσει σε παράδοξα, λάθη και αντιφάσεις (Fischbein & Baltsan, 1998). Οι μαθητές ξεκινούν να μαθαίνουν χτίζοντας πάνω στις έννοιες που ήδη γνωρίζουν. Μεταξύ αυτών των εννοιών υπάρχουν αυτές που έρχονται σε αντίθεση με τις αντίστοιχες επιστημονικές τις οποίες αποκαλούμε παρανοήσεις (Gilbert & Wats, 1983).

Οι Fischbein και Baltsan (1998) υποστήριξαν ότι όλες οι παρανοήσεις των μαθητών, σε σχέση με την έννοια του συνόλου, μπορούν να προβλεφθούν αν λάβουμε υπόψη το διαισθητικό μοντέλο της συλλογής που δρα σιωπηρά και υπόρρητα. Οι ερευνητές στηρίχθηκαν στην έρευνα των Linchevski και Vinner (1988) για να αναπτύξουν μια θεωρία η οποία συσχετίζει τις πιθανές παρανοήσεις των μαθητών για την έννοια του συνόλου, με τους περιορισμούς που φέρει το διαισθητικό μοντέλο της συλλογής αντικειμένων. Συγκεκριμένα, υποστήριξαν ότι:

- Ένα σύνολο δεν είναι υποχρεωτικά μια συλλογή όμοιων αντικειμένων. Τα στοιχεία δηλαδή του συνόλου δεν είναι υποχρεωτικό να μοιράζονται κάποιες κοινές ιδιότητες. Ως εκ τούτου, η έννοια του συνόλου διαφέρει από την έννοια της συλλογής όπως αυτή χρησιμοποιείται στην καθομιλουμένη.
- Στην καθημερινότητα, δύο συλλογές που έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων μπορούν να θεωρηθούν ίσες. Στα μαθηματικά από την άλλη, ίσα είναι τα σύνολα που αποτελούνται από τα ίδια ακριβώς στοιχεία. Δυο ίσα σύνολα είναι ισοπληθικά, το αντίστροφο όμως δεν ισχύει απαραίτητα.
- Τα στοιχεία ενός συνόλου στα Μαθηματικά είναι διακεκριμένα. Για παράδειγμα, δεν έχει νόημα να γράψουμε ότι το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $(\mathrm{x}-3)^2=0$ είναι το $\{3,3\}$, αντιθέτως λέμε ότι είναι το μονοσύνολο $\{3\}$ (ωστόσο, ορισμένοι ερευνητές, βλέπε Tao, 2016, ή Fischbein & Baltsan, 1998, δεν απορρίπτουν τον συμβολισμό $\{3,3\}$, απλά θεωρούν ότι $\{3,3\}=\{3\}$). Ο κανόνας αυτός έρχεται σε αντίθεση με την πρακτική σημασία της απαρίθμησης στην καθημερινότητα.
- Στη Θεωρία Συνόλων ορίζουμε το κενό σύνολο ως το σύνολο που δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Για παράδειγμα, θεωρούμε ότι το σύνολο των κοινών σημείων δύο παράλληλων ευθειών είναι το κενό. Ωστόσο, σε μία καθημερινή συζήτηση, αντί αυτού θα λέγαμε απλά ότι οι δύο ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, αφού μια συλλογή δεν μπορεί να μην περιέχει στοιχεία.
- Επιπλέον, στην καθημερινότητα, θεωρούμε το ‘0’ ως το ‘τίποτα’. Ένας μαθητής που αντιλαμβάνεται κατά τα άλλα την έννοια του κενού συνόλου, ενδέχεται να θεωρήσει το σύνολο $\{0\}$ ως κενό σύνολο.

- Γενικά, μία συλλογή στην καθημερινότητα θα πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία. Κατ’ επέκταση, ένα σύνολο που περιέχει μόνο ένα στοιχείο είναι διαισθητικά αντιφατικό.
- Αντίστοιχα, στην καθημερινότητα δεν μπορεί να νοηθεί μια συλλογή με άπειρο πλήθος στοιχείων.

Στην έρευνα τους, οι Fischbein και Baltsan (1998), μελέτησαν τις απαντήσεις μαθητών της Β΄ Γυμνασίου (grade 8) και μαθητών της Α΄ Λυκείου (grade 10), σε ένα ερωτηματολόγιο που σχεδιάστηκε με σκοπό να αναδείξει τις παραπάνω παρανοήσεις και τις συνέκριναν με τις απαντήσεις φοιτητών - μελλοντικών δασκάλων Δημοτικού και φοιτητών - μελλοντικών καθηγητών Γυμνασίου. Οι παρανοήσεις που φάνηκε να είναι ισχυρότερες για τους μαθητές ήταν, η απόρριψη μονοσυνόλων (49% για το Γυμνάσιο και 71% για το Λύκειο) και κενών συνόλων (64% για το Γυμνάσιο και 72% για το Λύκειο). Ιδιαίτερα για το κενό σύνολο, οι ερευνητές τόνισαν ότι μερικοί από τους μαθητές γνώριζαν τον όρο ‘κενό σύνολο’, αλλά τον χρησιμοποιούν τεχνικά, σε συγκεκριμένα μαθηματικά πλαίσια, όταν όμως τους ζητήθηκε να εξηγήσουν επακριβώς την έννοια του όρου, αντιλήφθηκαν την αντίφασή μίας συλλογής στοιχείων που δεν περιέχει κανένα στοιχείο. Αδυνατώντας να στηριχθούν στον τυπικό μαθηματικό συλλογισμό, αυθόρμητα, οδηγήθηκαν στο διαισθητικό μοντέλο της συλλογής που καθοδηγεί «από τα παρασκήνια» τη διαδικασία μαθηματικού συλλογισμού.

Στην ερώτηση «εξηγήστε τη σημασία της ισότητας δύο συνόλων», τα 3/4 των μαθητών της Β΄ Γυμνασίου απάντησε σωστά αλλά μόλις τα 2/5 των μαθητών της Α΄ Λυκείου απάντησε σωστά. Οι ερευνητές σημείωσαν ότι η επίδραση του μοντέλου της συλλογής και συγκεκριμένα της σύγχυσης της ισότητας συνόλων με την ισοπληθικότητα συνόλων, ήταν πολύ μεγάλη. Για παράδειγμα, ένας μαθητής απάντησε ότι «δύο ίσα σύνολα είναι δύο σύνολα με τον ίδιο αριθμό στοιχείων» ενώ άλλος απάντησε ότι ίσα είναι «δύο σύνολα των οποίων το περιεχόμενο, η ποσότητα και το πλήθος είναι τα ίδια». Οι ερευνητές δεν ανέφεραν το ποσοστό των μαθητών που εμφάνισαν την συγκεκριμένη παρανόηση αλλά μόνο το ποσοστό εκείνων που απάντησαν λάθος ή δεν απάντησαν καθόλου.

Η παρανόηση ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να έχουν μια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα εμφανίστηκε περίπου στο 1/5 των μαθητών, ενώ η παρανόηση ότι τα στοιχεία ενός συνόλου μπορεί να είναι επαναλαμβανόμενα αντί για αυστηρά διακεκριμένα, εμφανίστηκε περίπου στο 1/3 των μαθητών.

Η ιδέα ότι ένα σύνολο δεν μπορεί να έχει άπειρο πλήθος στοιχείων δεν φάνηκε σε ιδιαίτερα υψηλό ποσοστό, κάτι που οι ερευνητές αποδίδουν στην συχνή ενασχόληση των συμμετεχόντων με τα γνωστά σύνολα αριθμών (φυσικοί αριθμοί, περιττοί αριθμοί κλπ.) τα οποία είναι άπειρα.

Το συμπέρασμα των ερευνητών είναι ότι πράγματι όλες οι παρανοήσεις των μαθητών μπόρεσαν και μπορούν να προβλεφθούν αν λάβουμε υπόψη το διαισθητικό μοντέλο της συλλογής. Η δική μας υπόθεση είναι πως θα ήταν ασφαλέστερο να υποθέσουμε ότι το μοντέλο ης συλλογής ενδέχεται να είναι ένα κομμάτι της εικόνας (Tall & Vinner, 1981) που έχουν οι μαθητές/φοιτητές για την έννοια του συνόλου. Η νοηματοδότηση μιας έννοιας είναι πολύπλευρη διαδικασία και δεν μπορεί να εξηγηθεί πλήρως με τη χρήση ενός μοναδικού μοντέλου.

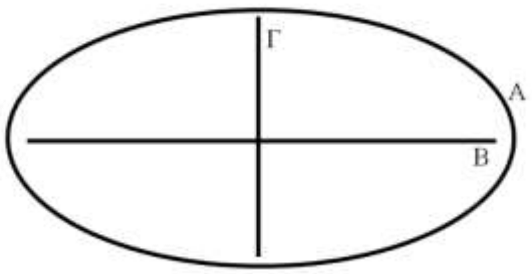
Ένα άλλο συμπέρασμα των Fischbein και Baltsan (1998), είναι πώς η τάση των μαθητών/φοιτητών «να ξεχνούν» τις τυπικές ιδιότητες των συνόλων και να τις αντικαταστούν με τις διαισθητικές ιδιότητες του μοντέλου της συλλογής, αυξάνει ανάλογα με την ηλικία και μάλιστα αυτή η συσχέτιση αυτή είναι ισχυρή. Πράγματι, τα ποσοστά των νεότερων μαθητών που μελετήθηκαν από τους Fischbein και Baltsan (1998), είχαν στις περισσότερες ερωτήσεις καλύτερα ποσοστά από τους μεγαλύτερους μαθητές, οι μελλοντικοί δάσκαλοι της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης απαντούσαν κάποιες φορές καλύτερα και κάποιες φορές χειρότερα από τους μαθητές ενώ οι μελλοντικοί καθηγητές μαθηματικών είχαν πάντοτε υψηλότερα ποσοστά σωστών απαντήσεων από τις άλλες ομάδες συμμετεχόντων. Ακόμα και στις περιπτώσεις που, με εξαίρεση τους μελλοντικούς καθηγητές μαθηματικών, η ηλικία και η τάση των συμμετεχόντων να ξεχνούν φαίνονταν να έχουν θετική συσχέτιση, δεν γίνεται καμία αναφορά στην στατιστική σημαντικότητα των αποτελεσμάτων. Είναι λοιπόν αδύνατο να δεχτούμε ή να απορρίψουμε την υπόθεση των ερευνητών με ασφάλεια.

Στην έρευνα του, ο Bagni (2006) εστίασε στις δυσκολίες των μαθητών στη διάκριση δύο βασικών εννοιών της Θεωρίας Συνόλων, το *υποσύνολο* και το *ανήκειν*. Οι έννοιες αυτές είναι συνήθως γνωστές στους μαθητές σε καθημερινά πλαίσια πριν τις διδαχθούν στο σχολείο. Η διαισθητική τους σημασία στην καθομιλουμένη τις κάνει να μοιάζουν εύκολες στην κατανόηση και εκμάθηση. Ωστόσο, οι αντίστοιχες μαθηματικές σημασίες και ο τρόπος συμβολισμού τους απαιτούν μια σύνθετη και αυστηρή εννοιολογική σύλληψη και ορίζονται αυστηρότερα μέσω μιας ακριβής λεκτικής περιγραφής. Τα διαγράμματα Venn παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση μιας εικόνας για την έννοια του συνόλου. Στα διαγράμματα Venn, τα στοιχεία ενός συνόλου παρουσιάζονται ως σημεία στο εσωτερικό του σχήματος. Ωστόσο, τα ίδια τα σύνολα θεωρούνται ως ένα είδος στοιχείου που θα μπορούσε να ανήκει σε ένα σύνολο (Tao, 2016). Για παράδειγμα, έχει νόημα να γράψει κανείς ότι $\{1\} \subseteq \{1, \{1\}\}$ αλλά και ότι $\{1\} \in \{1, \{1\}\}$. Πως θα μπορούσαμε όμως να αναπαραστήσουμε γραφικά τα στοιχεία ενός συνόλου αν ήταν και αυτά σύνολα; Το να χαράξουμε μια περιοχή μέσα στην αρχική περιοχή θα ήταν παραπλανητικό αφού θα δημιουργούσε σύγχυση της έννοιας του ανήκειν και του υποσυνόλου.

Προκειμένου να μελετήσει τους ισχυρισμούς του, ο Bagni (2006) μελέτησε τις απαντήσεις ενός δεκαπεντάχρονου μαθητή μέσω ενός προβλήματος:

> «Έστω Α το σύνολο των σημείων του επιπέδου, Β το σύνολο των σημείων δοθείσης ευθείας του επιπέδου και Γ το σύνολο των σημείων μιας ευθείας διαφορετικής από την πρώτη και κάθετη προς αυτήν. Ονομάζουμε Δ το σύνολο με στοιχεία του τα σύνολα Β, Γ. Ανήκει το Δ στο δυναμοσύνολο του Α;»

Η απάντηση είναι «όχι» διότι το Δ είναι σύνολο με στοιχεία υποσύνολα του Α. Το δυναμοσύνολο του Α περιέχει μεν σύνολα αλλά, σύνολα σημείων του επιπέδου και όχι σύνολα με στοιχεία άλλα υποσύνολα του Α. Συγκεκριμένα, είναι $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$, $\Gamma \subseteq \mathrm{A}$ και $\Delta = \{\mathrm{B}, \Gamma\}$ άρα $\Delta \subseteq \mathrm{P}(\mathrm{A})$ όμως $\Delta \notin \mathrm{P}(\mathrm{A})$, όπου $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ το δυναμοσύνολο του Α.



Σχήμα 2.1 – Διάγραμμα Venn για το πρόβλημα του Bagni (2006)

Στην προσπάθειά του να απαντήσει στο πρόβλημα, ένας δεκαπεντάχρονος μαθητής που συμμετείχε στην έρευνα του Bagni (2006), δούλεψε με διαγράμματα Venn (παραπάνω σχήμα) και ισχυρίστηκε ότι:

> «Το δυναμοσύνολο του Α περιέχει όλα τα υποσύνολα του Α. Όλα τα σχήματα του επιπέδου είναι στοιχεία του δυναμοσυνόλου του Α. Το Δ περιέχει γραμμές άρα είναι σχήμα του επιπέδου. Συνεπώς, το Δ είναι στοιχείο του δυναμοσυνόλου του Α.»

Η αυθόρμητη τάση του μαθητή ήταν να περάσει από τη λεκτική περιγραφή (πρόβλημα) στην οπτική αναπαράσταση (διάγραμμα Venn). Το γεγονός αυτό τον οδήγησε στο λανθασμένο συμπέρασμα ότι $\Delta = \mathrm{B} \cup \Gamma$ αντί του $\Delta = \{\mathrm{B}, \Gamma\}$.

Σε αντίστοιχα αποτελέσματα κατέληξαν και οι Moru και Qhobela (2013). Στη δική τους έρευνα σε πέντε καθηγητές μαθηματικών με εμπειρία διδασκαλίας που κυμαίνονταν από 1 έως 31 χρόνια, παρουσίασαν το εξής πρόβλημα:

> «Δίνεται το σύνολο $A = \{6, 7, \{8\}, 9, 10\}$. Όταν ρωτήθηκαν να δείξουν πώς το $\{8\}$ σχετίζεται με το σύνολο Α, ένας μαθητής έγραψε ότι $\{8\} \subseteq A$, ενώ ένας άλλος έγραψε ότι $\{8\} \in A$. Ποιος έχει δώσει τη σωστή απάντηση;»

Όλοι οι εκπαιδευτικοί απέτυχαν να αναγνωρίσουν το σφάλμα. Η εξήγηση που έδωσαν όλοι οι δάσκαλοι είναι ότι:

> «Οι αγκύλες χρησιμοποιούνται για την αναγραφή των στοιχείων ενός συνόλου, άρα όταν χρησιμοποιούμε αγκύλες σημαίνει ότι αναφερόμαστε σε ένα σύνολο και ένα σύνολο δεν μπορεί να είναι στοιχείο ενός άλλου συνόλου.»

Τις προηγούμενες μελέτες συμπληρώνουν οι Incikabi et al. (2012), οι οποίοι μελέτησαν τις αντιλήψεις 72 τριτοετών φοιτητών, μελλοντικών εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας μαθηματικής εκπαίδευσης, σε σχέση με τον ορισμό του συνόλου, τις μεθόδους αναπαράστασης ενός συνόλου και την σχέση του υποσυνόλου. Οι συμμετέχοντες στην έρευνα ήταν σε θέση να δώσουν παραδείγματα συνόλων, συχνά όμως αδυνατούσαν να δώσουν έναν ορισμό (μια περιγραφή) για την έννοια του συνόλου. Παρότι εμφάνιζαν συχνά την αντίληψη ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να ικανοποιούν κάποιον κανόνα, δηλαδή να έχουν κάποια κοινή ιδιότητα, δυσκολεύονταν να αναπαραστήσουν τα σύνολα με περιγραφή των στοιχείων τους, ενώ είχαν μεγαλύτερη άνεση στην αναπαράσταση των συνόλων είτε με αναγραφή των στοιχείων είτε μέσω διαγραμμάτων Venn. Μια συχνή παρανόηση των συμμετεχόντων φοιτητών ήταν ότι ένα σύνολο μπορεί πάντοτε να αναπαρασταθεί και με τους τρεις τρόπους. Τέλος, οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί παρουσίαζαν δυσκολία στον εντοπισμό στοιχείων σε ένα δεδομένο σύνολο, σε αντίθεση με την επιτυχία τους στον ορισμό υποσυνόλων.

Εκτός από τις βασικές έννοιες της θεωρίας συνόλων, διάφορες έρευνες έχουν εστιάσει και στην σύγκριση απειροσυνόλων ως προς το πλήθος των στοιχείων τους. Οι Tsamir & Tirosh (1992) μελέτησαν 32 μαθητές 13-18 ετών που χαρακτηρίστηκαν από τους καθηγητές τους ως ιδιαίτερα ικανοί. Το ερευνητικό τους εργαλείο ήταν ένα παιχνίδι με κάρτες. Το παιχνίδι είχε τρεις φάσεις κατά τις οποίες οι μαθητές έρχονταν αντιμέτωποι με δύο διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου προβλήματος:

Στην 1η φάση, οι συμμετέχοντες έλαβαν μια κάρτα με το σύνολο Α = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, ...}, δηλαδή το σύνολο των φυσικών αριθμών με αναγραφή των στοιχείων. Μέσω κατάλληλων ερωτήσεων οι ερευνητές διαπίστωσαν ότι όλοι οι συμμετέχοντες καταλαβαίνουν ποιοι αριθμοί συμπεριλαμβάνονται στο σύνολο και ποιοι όχι, αλλά και ότι αντιλαμβάνονται το νόημα των τριών τελειών στο τέλος της έκφρασης. Στη συνέχεια οι μαθητές έλαβαν μια δεύτερη ίδια κάρτα και τους ζητήθηκε να κυκλώσουν τους αριθμούς που διαιρούνται με το 4, τους οποίους αντέγραψαν σε μία τρίτη κάρτα, σχηματίζοντας το σύνολο Β, των φυσικών αριθμών που διαιρούνται με το 4. Το τελικό ερώτημα της πρώτης φάσης ήταν, εάν το σύνολο Α και το σύνολο Β έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Ο τρόπος που παρουσιάστηκε το πρόβλημα, είχε σκοπό να ενθαρρύνει την ιδέα του «μέρος - όλον», να οδηγήσει δηλαδή τους μαθητές στην ιδέα ότι κάθε σύνολο έχει μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων από κάθε γνήσιο υποσύνολό του.

Στην 2η φάση, οι μαθητές έλαβαν μια κάρτα η οποία περιείχε ένα σύνολο με άπειρα στο πλήθος ευθύγραμμα τμήματα. Το πρώτο τμήμα ήταν 1cm και κάθε επόμενο τμήμα ήταν μεγαλύτερο από το προηγούμενο κατά 1cm. Από τους μαθητές ζητήθηκε να σημειώσουν σε μια άδεια κάρτα, το σύνολο Α΄ που περιέχει τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων του προηγούμενου συνόλου. Στη συνέχεια τους ζητήθηκε να υποθέσουν ότι έχουν ένα σύνολο τετραγώνων όπου κάθε τετράγωνο έχει για πλευρά του μία από τις προηγούμενες πλευρές (1cm, 2cm, 3cm, κλπ.). Το ερώτημα που κλήθηκαν να απαντήσουν ήταν, εάν ο αριθμός των τετραγώνων της τελευταίας κάρτας είναι ίσος με τον αριθμό των ευθυγράμμων τμημάτων της πρώτης κάρτας. Τέλος, οι μαθητές έλαβαν μια άδεια κάρτα, όπου σημείωσαν το σύνολο Β΄ το οποίο περιείχε τις περιμέτρους των τετραγώνων της προηγούμενης κάρτας. Ο τρόπος που παρουσιάστηκε το πρόβλημα, είχε σκοπό να ενθαρρύνει την ιδέα της «1-1 και επί αντιστοιχίας», να οδηγήσει δηλαδή τους μαθητές στην ιδέα ότι δύο σύνολα είναι ισοπληθικά αν υπάρχει 1-1 και επί συνάρτηση που να αντιστοιχίζει τα στοιχεία τους ενός συνόλου στα στοιχεία του άλλου.

Στην 3η και τελευταία φάση, οι κάρτες Α, Β, Α΄ και Β΄, παρουσιάστηκαν ταυτόχρονα στους μαθητές. Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι μόλις 12 από τους 32 συμμετέχοντες έδωσαν συνεπείς απαντήσεις (την ίδια απάντηση στις φάσεις 1 και 2) δηλαδή απάντησαν ότι, σε κάθε περίπτωση το πλήθος των στοιχείων των δύο συνόλων είναι ίσο. Από αυτούς, 10 μαθητές είχαν την αντίληψη ότι όλα τα απειροσύνολα είναι ισοπληθικά και 2 μαθητές είχαν την αντίληψη ότι τα απειροσύνολα είναι μη συγκρίσιμα. Οι υπόλοιποι 20 μαθητές έδωσαν ασυνεπείς απαντήσεις (πλήθος στοιχείων κάρτας Α < κάρτας Β, όμως, πλήθος στοιχείων κάρτας Α΄ = κάρτας Β΄). Από αυτούς, 7 αναγνώρισαν μόνοι τους την ασυνέπεια και 13 χρειάστηκαν την προτροπή των ερευνητών. Από τους 20 μαθητές που έδωσαν ασυνεπείς απαντήσεις, οι 6 υποστήριξαν ότι τέτοιες καταστάσεις είναι επιτρεπτές στα Μαθηματικά. Από τους 14 μαθητές που αναγνώρισαν ότι οι δηλώσεις τους ήταν ασυνεπείς και θεώρησαν το γεγονός προβληματικό, οι 3 δήλωσαν ότι τα άπειρα μεγέθη είναι μη συγκρίσιμα και ανέφεραν ότι οι ιδιότητες της διάταξης (<, >, =) θα πρέπει να χρησιμοποιούνται μόνο όταν συγκρίνουμε πεπερασμένα σύνολα, 3 μαθητές είχαν την αντίληψη ότι τα απειροσύνολα είναι ισοπληθικά, 2 μαθητές επέλεξαν την «1–1 και επί αντιστοιχία» για τη σύγκριση του πληθαρίθμου των απειροσυνόλων, θεωρώντας τη δεύτερη φάση του παιχνιδιού ως μια μαθηματική απόδειξη και τέλος, 2 μαθητές χρησιμοποίησαν επιχειρήματα της μορφής «μέρος-όλον» αφού τους φάνηκε πιο «φυσιολογικό».

Οι ίδιες ερευνήτριες (Tirosh & Tsamir, 1996) μελέτησαν την επίδραση που έχουν οι διαφορετικές αναπαραστάσεις όταν οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν απειροσύνολα ως προς το πλήθος των στοιχείων τους. Η έρευνα έγινε σε 189 μαθητές Λυκείου και χρησιμοποιήθηκαν τέσσερεις διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας δραστηριότητας: οριζόντια, κατακόρυφη, σαφής-αριθμητική και γεωμετρική (όπως για παράδειγμα στον παρακάτω πίνακα) αλλά και συνδυασμούς τους.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι οι γεωμετρικές και οι κατακόρυφες αριθμητικές αναπαραστάσεις οδηγούν συχνότερα στην απάντηση ότι «τα δύο σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Οι αιτιολογήσεις που έκαναν χρήση της «1-1 και επί αντιστοίχισης», προκλήθηκαν κυρίως από τις σαφείς-αριθμητικές και τις γεωμετρικές αναπαραστάσεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι στην έρευνα των Tirosh και Tsamir (1996) δεν αναφέρεται αν οι διαφορές που προκλήθηκαν από τις διαφορετικές αναπαραστάσεις ήταν στατιστικά σημαντικές.

Πίνακας 2.1: Διαφορετικές αναπαραστάσεις – ίδια δραστηριότητα

1. Οριζόντια αναπαράσταση

   $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$.

2. Κατακόρυφη αναπαράσταση

   $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$,

   $B = \{1, 4, 9, 16, 25, \dots\}$.

3. Σαφής-αριθμητική αναπαράσταση

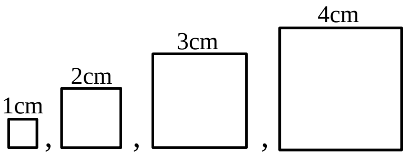
   $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$,

   $B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots\}$.

---

4. Γεωμετρική αναπαράσταση

   Θεωρούμε ένα σύνολο με άπειρα τετράγωνα: {



   , ...}.

   Έστω Α το σύνολο με τα μήκη των πλευρών των παραπάνω τετραγώνων.

   και Β το σύνολο με τα εμβαδά των παραπάνω τετραγώνων δηλαδή,

   Α={1,2,3,4,5,...} και Β={1,4,9,16,25,...}

Τις έρευνες των Tsamir και Tirosh (1992) και Tirosh και Tsamir (1996) ήρθαν να επαληθεύσουν και να συμπληρώσουν πολλές μετέπειτα έρευνες (Tsamir, 1999· Tsamir, 2001· Tsamir & Dreyfus, 2002· Dreyfus & Tsamir, 2004· Na & Lee, 2006· Moru & Qhobela, 2013). Αυτό που φαίνεται από τις έρευνες σε σχέση με τη σύγκριση του πληθαρίθμου δύο απειροσυνόλων είναι ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν 8 ειδών επιχειρήματα:

1. Όλα τα απειροσύνολα είναι ισοπληθικά.
2. Τα απειροσύνολα είναι μη συγκρίσιμα.
3. Κάθε σύνολο έχει μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων από κάθε γνήσιο υποσύνολο του.
4. Δύο σύνολα είναι ισοπληθικά αν μπορεί να βρεθεί 1–1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων τους.
5. Όταν 2 σύνολα έχουν το ίδιο εύρος αλλά διαφορετικά διαστήματα μεταξύ των στοιχείων τους, τότε αυτό με τα μεγαλύτερα διαστήματα μεταξύ των στοιχείων του, έχει μικρότερο πλήθος στοιχείων.
6. Ένα σύνολο που είναι με κάποιον τρόπο φραγμένο ή περιορισμένο, έχει μικρότερο πλήθος στοιχείων από ένα μη περιορισμένο σύνολο, όπως για παράδειγμα τα σημεία ενός ευθυγράμμου τμήματος σε σχέση με τα σημεία μιας ευθείας ή το $(0,1)$ σε σχέση με το $\mathbb{R}$.
7. Επιχειρήματα που αναφέρονται στον πληθάριθμο (το συγκεκριμένο επιχείρημα εμφανίστηκε μόνο σε έρευνες σε φοιτητές μαθηματικών), είτε διαισθητικά είτε με αναφορά στο $\aleph_0$ ή στο c.

8. Άλλες ιδέες (όπως για παράδειγμα απαντήσεις που αγνοούν ότι τα δοσμένα σύνολα έχουν άπειρα στοιχεία και τα θεωρούν πεπερασμένα ή απαντήσεις που σχολιάζουν το μέγεθος των αριθμητικών τιμών αντί για το πλήθος τους).

Από αυτά τα επιχειρήματα, τα δύο πρώτα περί μοναδικότητας ή μη συγκρισιμότητας του απείρου είναι αυτά που εμφανίζονται συχνότερα και φαίνεται να συμφωνούν περισσότερο με τη διαίσθηση. Το τρίτο είναι επίσης σύμφωνο με τη διαίσθηση αλλά δουλεύει μόνο σε περιπτώσεις που ένα σύνολο είναι υποσύνολο ενός άλλου. Το τέταρτο επιχείρημα, το οποίο είναι και το σωστό σύμφωνα με τη Θεωρία Συνόλων του Cantor, εμφανίστηκε μόνο σε περιπτώσεις που η αναπαράσταση το ευνοούσε. Για παράδειγμα, τα σύνολα $A = \{1,2,3,4,\dots\}$ και $B = \{1,4,9,16,\dots\}$ παραπέμπουν σε σχέσεις συνόλου-υποσυνόλου άρα στο τρίτο επιχείρημα, ενώ αν το δεύτερο σύνολο γραφεί στη μορφή $B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots\}$ παραπέμπει στην 1-1 και επί αντιστοίχιση. Τα τελευταία επιχειρήματα εμφανίζονται λιγότερο και μόνο σε ειδικές περιπτώσεις όπου οι αναπαραστάσεις τα προωθούν ή μεταξύ φοιτητών σε τμήματα Μαθηματικών.

2.4. Η γλωσσική διάσταση της νοηματοδότησης της έννοιας του συνόλου

Όπως είδαμε παραπάνω, πολλές έρευνες έχουν εστιάσει στη *γνωστική διάσταση* σε σχέση με την έννοια του συνόλου. Η ιδέα των Fischbein και Baltsan (1998) για τη χρήση του μοντέλου της συλλογής σαν σημείο αναφοράς για τον εντοπισμό παρανοήσεων, φαίνεται να είναι χρήσιμη. Εξάλλου, έχει τονιστεί η αποτελεσματικότητα της διάκρισης μεταξύ της εικόνας έννοιας από τον ορισμό της έννοιας (Tall & Vinner, 1981), τόσο σαν αναλυτικό μοντέλο για τον ερευνητή όσο και σαν εργαλείο πρόβλεψης, αξιολόγησης και εφαρμογής από τον εκπαιδευτικό κατά τη διδασκαλία. Το μοντέλο της συλλογής είναι πιθανότατα ένα σημαντικό κομμάτι της εικόνας έννοιας. Επιπλέον, διάφοροι ερευνητές τονίζουν τη σημασία των οπτικών αναπαραστάσεων για τη νοηματοδότηση της έννοιας του συνόλου (π.χ. Bagni, 2006˙ Tirosh & Tsamir, 1996˙ Incikabi et al., 2012, Sharif-Rasslan et al., 2014). Ωστόσο, μία διάσταση που δεν έχει μελετηθεί καθόλου σε σχέση με την έννοια του συνόλου, είναι η *γλωσσική διάσταση*.

Πολλές εμπειρικές μελέτες, επιχειρούν να συσχετίσουν τη μαθηματική ικανότητα με διαφορετικούς παράγοντες. Συχνά μελετάται το κοινωνικό υπόβαθρο, η οικονομική κατάσταση, η οικογενειακή κατάσταση, η εθνικότητα/υπηκοότητα, η μεταναστευτική κατάσταση, η διγλωσσία/πολυγλωσσία ακόμη και η ικανότητα ανάγνωσης. Οι Prediger et al. (2018) σε μία πολύ εκτεταμένη και πολύ προσεκτική στατιστική μελέτη σε 1495 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου από διάφορα σχολεία της Γερμανίας, έδειξαν ότι η «γλωσσική ικανότητα», σε ευρύτερο πλαίσιο (που περιλαμβάνει τόσο λεξιλογικές-σημασιολογικές δεξιότητες όσο και γραμματικές ικανότητες), έχει την ισχυρότερη σύνδεση με την «μαθηματική ικανότητα» ανάμεσα σε όλους τους κοινωνικούς και γλωσσικούς παράγοντες. Επιπλέον, διέκριναν τρία είδη εμποδίων στους μαθητές με χαμηλή γλωσσική ικανότητα: (1) εμπόδια ανάγνωσης (δυσκολίες στην αποκωδικοποίηση ενός κειμένου ιδιαίτερα σε προτάσεις με περίπλοκη δομή), (2) διαδικαστικά εμπόδια (δυσκολίες κατά τη διάρκεια γνωστικά απαιτητικών διαδικασιών όπως η κατασκευή ενός μοντέλου για την επίλυση ενός προβλήματος ή τη διατύπωση ενός «προσωπικού» ορισμού) και (3) εννοιολογικά εμπόδια (σχετίζονται με δυσκολίες στην εννοιολογική κατανόηση των θεμελιωδών μαθηματικών εννοιών). Ιδιαίτερα τα ευρήματα σχετικά με τα διαδικαστικά και εννοιολογικά εμπόδια φαίνεται να είναι κρίσιμα για την ακαδημαϊκή επιτυχία (Prediger et al., 2018). Τα ερευνητικά εργαλεία που χρησιμοποίησαν οι Prediger et al. (2018) ήταν ορισμένα μαθηματικά προβλήματα, τα οποία είχαν διαφορετικό βαθμό ως προς τις απαιτήσεις ανάγνωσης, τις απαιτήσεις εννοιολογικής κατανόησης αλλά και τις απαιτήσεις μαθηματικής ικανότητας. Επηρεασμένοι από την ιδέα των «γλωσσικών προκαταλήψεων» οι οποίες είναι συνήθως εμφανείς στα μαθηματικά κείμενα που δίνονται στους μαθητές (βλέπε για παράδειγμα Abedi & Lord, 2001), οι ερευνητές περίμεναν ότι τα «γλωσσικά κενά» θα ήταν μεγαλύτερα για προβλήματα με υψηλές απαιτήσεις ανάγνωσης και κατανόησης κειμένου. Αντιθέτως, αυτό που αποκάλυψε η μελέτη, ήταν ότι τα γλωσσικά κενά ήταν μεγαλύτερα για προβλήματα με υψηλές εννοιολογικές απαιτήσεις (όπως αφηρημένες έννοιες που δεν συμφωνούν με τη διαίσθηση), ακόμη και όταν οι απαιτήσεις ανάγνωσης ήταν χαμηλές. Σε παρόμοια συμπεράσματα κατέληξαν και οι Ufer & Bochnik (2020). Στην έρευνά τους φάνηκε ότι η γλωσσική επάρκεια των μαθητών δεν είχε ιδιαίτερα μεγάλο αντίκτυπο στην απόκτηση διαδικαστικών δεξιοτήτων από τους μαθητές, είχε όμως μεγάλο αντίκτυπο στην εννοιολογική κατανόηση. Τέλος, σύμφωνα με την van der Walt (2009), η συνολική γνώση του μαθηματικού λεξιλογίου μπορεί να προβλέψει τη μαθηματική επίδοση.

Αυτά τα ποσοτικά ευρήματα τονίζουν τη σημασία του κοινωνιογλωσσικού χαρακτηρισμού της σχολικής-ακαδημαϊκής γλώσσας ως «μέσου εκμάθησης» (Prediger, 2022). Εξάλλου, η ανάπτυξη της μαθηματικής γλώσσας είναι σημαντικό στοιχείο στη διδασκαλία των μαθητών, από τα πρώτα τους χρόνια και για όλη τη διάρκεια της μαθηματικής τους εκπαίδευσης (Riccomini et al., 2015). Δεδομένου ότι η κατανόηση του μαθηματικού λεξιλογίου επιτρέπει την πρόσβαση σε μαθηματικές έννοιες, είναι πολύ σημαντικό να ενσωματωθεί η γλωσσική διδασκαλία στα μαθηματικά.

Ο μαθηματικός λόγος, συμπεριλαμβανομένου του λεξιλογίου, συχνά περιλαμβάνει επέκταση ή τροποποίηση της χρήσης καθημερινών λέξεων, ενώ η ανάπτυξη του μαθηματικού λόγου θα πρέπει να περιλαμβάνει την ενσωμάτωση της καθημερινής γλώσσας στον μαθηματικό λόγο της τάξης

(Barwell, 2013). Ένας τρόπος για να εκμεταλλευτούμε την αλληλεπίδραση μεταξύ της καθημερινής γλώσσας και της μαθηματικής γλώσσας για την προώθηση της διδασκαλίας μαθηματικών εννοιών, είναι μέσω της υιοθέτησης προσεγγίσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών, που ανταποκρίνονται στη χρήση της γλώσσας των μαθητές (language responsive). Παρά την ευρέως αποδεκτή ανάγκη για διδασκαλία μαθηματικών που ανταποκρίνεται στη γλώσσα, μόνο ένας μικρός αριθμός εκπαιδευτικών είναι επαρκώς προετοιμασμένος για αυτό το έργο (Prediger, 2019). Από την άλλη μεριά, αν και η συγκεκριμένη προσέγγιση έχει κατηγορηθεί για την «αποκλειστική έμφαση στο λεξιλόγιο» ως αυτοσκοπό, δεν έχει ακόμη προκύψει μια σαφής κατανόηση των απαραίτητων συνιστωσών της διδασκαλίας των μαθηματικών που ανταποκρίνονται στη γλώσσα (Prediger, 2019). Σε κάθε περίπτωση, φαίνεται πως μία σημαντική παράμετρος, αν και όχι η μόνη, είναι να συμπεριληφθεί η έκθεση σε ετυμολογίες ή στην προέλευση των λέξεων που εκφράζουν μαθηματικές έννοιες, επειδή βοηθούν στη δημιουργία γεφυρών μεταξύ της καθημερινής γλώσσας και της μαθηματικής γλώσσας (Cirillo et al., 2010˙ Thompson & Rubenstein, 2000).

Ένα σημαντικό κομμάτι της νοηματοδότησης μιας έννοιας είναι η ονοματοδοσία (Planas et al., 2023˙ Kazima et al. 2023˙ Adler & Ronda, 2015). Οι Adler και Ronda (2015) όρισαν ως ονοματοδοσία (naming) «τη χρήση λέξεων για αναφορά σε άλλες λέξεις, σύμβολα, εικόνες, διαδικασίες ή σχέσεις» υποστηρίζοντας πως:

> Η εμπλοκή των μαθητών με μαθηματικά αντικείμενα συμβαίνει, μεταξύ άλλων, μέσω του τρόπου ονομασίας τους. Η ονοματοδοσία (naming) εστιάζει την προσοχή των μαθητών με συγκεκριμένους τρόπους. Επομένως, ένα κρίσιμο στοιχείο της ομιλίας στην τάξη των μαθηματικών είναι ο τρόπος με τον οποίο ονομάζονται τα αντικείμενα στα οποία θέλουμε να επικεντρωθούμε (Adler & Ronda, 2015, σελ. 244).

Οι Kazima et al. (2023), μελέτησαν τη σημασία της γλώσσας στη διδασκαλία και την εκμάθηση μαθηματικών εννοιών από μαθητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, σε ένα σχολείο του Μαλάουι όπου η γλώσσα διδασκαλίας είναι η αγγλική – η αποικιακή γλώσσα και όχι η μητρική γλώσσα των μαθητών και των δασκάλων. Μια πρόκληση που αντιμετώπιζαν οι καθηγητές του σχολείου ήταν ότι έπρεπε να μεταβαίνουν από την τοπική διάλεκτο στα Αγγλικά και πάλι πίσω, προκειμένου να διδάξουν τις απαιτούμενες μαθηματικές έννοιες και διαδικασίας. Συγκεκριμένα, μια τέτοια πρόκληση ήταν η χρήση της λέξης «kuchulukitsa», που σημαίνει «πολλαπλασιασμός» στην τοπική διάλεκτο. Ετυμολογικά, η συγκεκριμένη λέξη σημαίνει «φτιάχνω περισσότερα». Ωστόσο, αυτή η μετάφραση στερείται μαθηματικής ακρίβειας, καθώς ο πολλαπλασιασμός με αριθμούς μικρότερους του ενός δεν οδηγεί απαραίτητα σε περισσότερα. Τα προηγούμενα αποτελέσματα είναι αληθή ακόμα και σε περιπτώσεις όπου η γλώσσα διδασκαλίας ταυτίζεται με την ομιλούμενη, αφού η ενσωμάτωση της καθημερινής γλώσσας στον μαθηματικό λόγο μπορεί να προκαλέσει σύγχυση στους μαθητές. Για παράδειγμα, ένας όρος όπως η «διαφορά» σημαίνει «όχι το ίδιο» στην καθημερινή γλώσσα, αλλά στην αριθμητική σημαίνει «το αποτέλεσμα της αφαίρεσης» (Barwell, 2013).

2.5. Το γλωσσικό ιδίωμα – Θεωρητική πλαισίωση της έρευνας

Το θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο στηριζόμαστε στην συγκεκριμένη έρευνα προκειμένου να διερευνήσουμε την γλωσσική διάσταση της νοηματοδότησης της έννοιας του συνόλου είναι αυτό του γλωσσικού ιδιώματος (language register) του Halliday (1974, 1978). Ο Halliday υποστηρίζει ότι η γλώσσα δεν μπορεί να διαχωριστεί από το κοινωνικό πλαίσιο (social context) στο οποίο χρησιμοποιείται. Η κατασκευή νοήματος συμβαίνει σε κοινωνικά πλαίσια και η γλώσσα συμβάλει καθοριστικά τόσο στην κατασκευή όσο και στην ανταλλαγή νοήματος. Σύμφωνα με τον Halliday (1974, 1978), το πλαίσιο μιας συζήτησης καθορίζεται από τρεις βασικές πτυχές. Το *πεδίο* (field), τους *ρόλους* (tenor) και το *μέσο* (mode). Το πεδίο σχετίζεται με το θέμα συζήτησης (π.χ. μαθηματικά, πολιτική, ποδόσφαιρο), το θεσμικό πλαίσιο (π.χ. σχολείο, ραδιοφωνική εκπομπή, εστιατόριο), τη δραστηριότητα των συμμετεχόντων και τους συγκεκριμένους σκοπούς που εξυπηρετεί η χρήση της γλώσσας. Οι ρόλοι σχετίζονται με τις κοινωνικές σχέσεις μεταξύ των συνομιλητών (π.χ. καθηγητής – μαθητής, μητέρα – παιδί, συμμαθητές) και τη στάση των συνομιλητών που προκύπτει από την ανταλλαγή νοημάτων (π.χ. ομιλητής – ακροατής, συνομιλητές). Το μέσο καλύπτει το είδος της επικοινωνίας (π.χ. καθημερινή συζήτηση, συνέντευξη, διάλεξη, debate) και το μέσο επικοινωνίας (π.χ. τηλέφωνο, παρουσίαση μέσω διαφανειών, τηλεδιάσκεψη).

Η χρήση της γλώσσας διαφέρει ανάλογα με το κοινωνικό πλαίσιο και προσαρμόζεται για να εξυπηρετεί διάφορες κοινωνικές λειτουργίες. Ο Halliday (1974, 1978), τονίζει δύο βασικές διαφοροποιήσεις στη γλώσσα, τη *διάλεκτο* των συνομιλητών και το γλωσσικό τους *ιδίωμα* (language register). Η διάλεκτος είναι ιδιοσυγκρασιακό χαρακτηριστικό του ομιλητή και εκφράζει διαφορετικούς τρόπους να εκφραστούν ίδια νοήματα. Το γλωσσικό ιδίωμα αφορά στη διαμόρφωση των νοημάτων που συνήθως σχετίζονται με ένα συγκεκριμένο κοινωνικό πλαίσιο, καθώς και των λέξεων και των δομών που εκφράζουν αυτά τα νοήματα. Το γλωσσικό ιδίωμα είναι η διαφοροποίηση στη γλώσσα που προκύπτει λόγω διαφορών στο κοινωνικό πλαίσιο. Οι έννοιες του πεδίου, του ρόλου και του μέσου είναι καθοριστικοί παράγοντες του γλωσσικού ιδιώματος (χρησιμεύουν για να προβλέψουμε το γλωσσικό ιδίωμα). Οι άνθρωποι έχουν μια σειρά από γλωσσικά ιδιώματα που συνδέονται με το θέμα για το οποίο συζητούν, τους κοινωνικούς τους ρόλους αλλά και το είδος της επικοινωνίας. Οι συμμετέχοντες σε μία συζήτηση ενδέχεται να μετακινηθούν μεταξύ διαφορετικών ιδιωμάτων σαν αποτέλεσμα της αλλαγής του πεδίου αναφοράς, των ρόλων που υιοθετούνται και του μέσου επικοινωνίας. Για παράδειγμα, όταν ένας εκπαιδευτικός επιλύει ένα μαθηματικό πρόβλημα στον πίνακα, το πεδίο αναφοράς είναι τα Μαθηματικά, ο εκπαιδευτικός έχει πιθανότατα τον ρόλο της αυθεντίας και το μέσο επικοινωνίας είναι ο πίνακας και οι λεκτικές επεξηγήσεις του εκπαιδευτικού. Αν μετά το τέλος του μαθήματος ο εκπαιδευτικός αποφασίσει να συνομιλήσει με τους μαθητές για ποδόσφαιρο, τότε το θέμα της συζήτησης είναι διαφορετικό, ο εκπαιδευτικός δεν αντιμετωπίζεται πλέον ως αυθεντία και το μέσω επικοινωνίας είναι ο φυσικός διάλογος. Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι ένα κατάλληλο ιδίωμα για την πρώτη συζήτηση θα ήταν κάποιο ιδίωμα της σχολικής τάξης των Μαθηματικών, ενώ ένα κατάλληλο ιδίωμα για την δεύτερη συζήτηση θα ήταν κάποιο καθημερινό ιδίωμα ή ίσως και το ιδίωμα του ποδοσφαίρου.

Ο Halliday (1974, 1978), εισάγει την έννοια του ιδιώματος της *καθημερινής γλώσσας*. Το συγκεκριμένο ιδίωμα χρησιμοποιείται σε καθημερινές, ανεπίσημες συνομιλίες. Ορισμένες λέξεις όμως που ενυπάρχουν στο ιδίωμα της καθημερινής γλώσσας, καθώς και το νόημα τους, ενδέχεται να διαφέρουν από άνθρωπο σε άνθρωπο. Το γλωσσικό ιδίωμα που χρησιμοποιεί ένα παιδί ώστε να επικοινωνήσει με τη μητέρα του είναι διαφορετικό από αυτό που χρησιμοποιεί για να μιλήσει με τους φίλους του. Όταν κάποιος επιχειρεί να μάθει μια ξένη γλώσσα, διδάσκεται μια «επίσημη» εκδοχή της καθημερινής γλώσσας. Όλες οι διαφορετικές εκδοχές του ιδιώματος της καθημερινής γλώσσας κανονικοποιούνται σε αυτήν την «επίσημη» εκδοχή προκειμένου να διδαχθούν τόσο σε άτομα που δεν μιλούν τη γλώσσα όσο και σε νεότερους φυσικούς ομιλητές της γλώσσας (π.χ. μαθητές δημοτικού). Η συγκεκριμένη εκδοχή της γλώσσας απαντάται συνήθως σε σχολικά βιβλία, εφημερίδες και γενικότερα σε κείμενα, προφορικά ή γραπτά, τα οποία απευθύνονται στο σύνολο του πληθυσμού που ομιλεί τη γλώσσα, συνεπώς αποτελεί ένα *ιδίωμα του δημόσιου λόγου*.

Σύμφωνα με τον Halliday (1974), μπορούμε να αναφερθούμε σε ένα *ιδίωμα των μαθηματικών*, με τη έννοια των νοημάτων που ανήκουν στη γλώσσα των μαθηματικών (δηλαδή τη μαθηματική χρήση της φυσικής γλώσσας), τα οποία η γλώσσα οφείλει να εκφράζει όταν χρησιμοποιείται για μαθηματικούς σκοπούς. Η γλώσσα των σύγχρονων μαθηματικών δανείζεται σε μεγάλο βαθμό από την καθομιλουμένη. Τα σύγχρονα μαθηματικά τείνουν να επανακαθορίζουν απλές λέξεις αντί να δημιουργούν νέες για τους τεχνικούς όρους τους. Το γεγονός ότι μια έννοια όπως το σύνολο έχει ένα ακριβές μαθηματικό νόημα μπορεί να βρίσκεται κρυμμένο πίσω από την απλότητα της ίδιας της λέξης (Halliday, 1974). Η φυσική γλώσσα, αντίθετα από τα μαθηματικά, δεν είναι σαφής ή ακριβής. Μια μαθηματική έννοια μπορεί να υπάρχει ως στοιχείο στη φυσική γλώσσα, φέροντας μαζί της όλο το σημασιολογικό φορτίο που αυτή συνεπάγεται. Μια εκδοχή της γλώσσας που χρησιμοποιείται για μαθηματικούς σκοπούς, δηλαδή ένα μαθηματικό ιδίωμα, πρέπει να αναπτύξει τα κατάλληλα νοήματα, μαζί με τις λέξεις και τις δομές για να τα εκφράσει.

Ορισμένοι ερευνητές υποστηρίζουν ότι κατά τη μάθηση, τη διδασκαλία ή τη χρήση των μαθηματικών, τείνουμε να μετακινούμαστε από το καθημερινό ιδίωμα στο μαθηματικό ιδίωμα, ώστε να κατανοήσουμε και να μεταφέρουμε μαθηματικά νοήματα (π.χ. Lane et al., 2019· Moschkovich, 2003). Άλλοι ερευνητές υποστηρίζουν την ύπαρξη ενός ενδιάμεσου ιδιώματος το οποίο λειτουργεί ως γέφυρα μεταξύ της καθημερινής γλώσσας και της επίσημης μαθηματικής γλώσσας. Για παράδειγμα, η Prediger (2022) χρησιμοποιεί τον όρο «ιδιώμα της ακαδημαϊκής γλώσσας», ενώ οι Straehler-Pohl et al. (2014) μιλούν για ένα «ιδίωμα των σχολικών μαθηματικών». Τα συγκεκριμένα ιδιώματα χαρακτηρίζονται συνήθως από υψηλότερο επίπεδο επισημότητας από το ιδίωμα της καθημερινής γλώσσας και από την ύπαρξη εξειδικευμένης ορολογίας. Χρησιμοποιούνται σε εκπαιδευτικά πλαίσια όπως διαλέξεις, σχολικά μαθήματα και γενικότερα στην ομιλία εντός εκπαιδευτικών ιδρυμάτων. Σε κάθε περίπτωση, θα ήταν λάθος να θεωρήσουμε ότι το ιδίωμα το οποίο αναπτύσσει ένας εκπαιδευτικός μαζί με την σχολική του τάξη είναι μοναδικό. Παράγοντες όπως η ηλικία των μαθητών μιας σχολικής τάξης, η κοινωνικο-οικονομική τους κατάσταση, η εθνικότητα τους κλπ., μπορούν να επηρεάσουν και να διαμορφώσουν το ιδίωμα που θα αναπτυχθεί προκειμένου να ικανοποιήσει τις ανάγκες της συγκεκριμένης σχολικής τάξης. Για παράδειγμα, οι Sabra και Alshwaikh (2023) έδειξαν ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ του περιεχομένου του σχολικού βιβλίου και της γλώσσας των εκπαιδευτικών μπορεί να τους οδηγήσει στο να αναπτύξουν ένα δικό τους γλωσσικό ιδίωμα για να αναφερθούν στο περιεχόμενο. Στην συγκεκριμένοι έρευνα αναφέρεται το παράδειγμα της αλγεβρικής έκφρασης της συνάρτησης, η οποία στα Αραβικά είναι «qaa’idat al-Iqteran» και η οποία μπορεί να ερμηνευτεί τόσο ως «κανόνας», όσο και ως «βάση». Οι εκπαιδευτικοί δεν είναι απαραίτητα άριστοι γνώστες ολόκληρης της Αραβικής γλώσσας, οπότε ενδέχεται να μην γνωρίζουν και τις δύο αυτές ερμηνείες. Αν η ερμηνεία τους είναι η «βάση», μπορεί να αναπτύξουν ένα ιδίωμα γύρω από την ιδέα ότι η αλγεβρική έκφραση της συνάρτησης είναι το αντικείμενο που δημιουργεί τον πίνακα τιμών και την καμπύλη. Αν όμως η ερμηνεία τους είναι ο «κανόνας», μπορεί να αναπτύξουν ένα ιδίωμα γύρω από την ιδέα ότι η αλγεβρική έκφραση είναι ένας κανόνας με τον οποίο πρέπει να συμμορφώνονται ο πίνακας τιμών και η καμπύλη ή θα μπορούσε να θεωρηθεί ως εργαλείο αναφοράς για την επαλήθευση των αποτελεσμάτων. Σε κάθε περίπτωση, όπως τα ιδιώματα του καθημερινού λόγου ενός ατόμου επηρεάζονται από το ιδίωμα του δημόσιου λόγου, έτσι και τα ιδιώματα της μαθηματικής τάξης επηρεάζονται από το ιδίωμα των μαθηματικών, καθώς και τον τρόπο που αυτό ερμηνεύεται από τον εκπαιδευτικό και μπορούν να νοηθούν σαν μια ειδική περίπτωση μαθηματικού ιδιώματος.

2.6. Η έννοια του συνόλου στον δημόσιο λόγο

Στην τάξη, οι λέξεις που χρησιμοποιούνται στο ιδίωμα των μαθηματικών μπορεί να φέρουν μαζί τους επιπλέον σημασίες οι οποίες να εμποδίζουν τη διαδικασία μάθησης του μαθηματικού περιεχομένου, επομένως η προσεκτική ονοματοδοσία μιας μαθηματικής έννοιας είναι ζωτικής σημασίας (Planas et al., 2022). Σύμφωνα με το λεξικό του Μπαμπινιώτη (2012), ο μαθηματικός όρος 'σύνολο' προέρχεται από τη γαλλική λέξη 'ensemble', ενώ ο γλωσσολογικός όρος έχει την ίδια σημασία με την αγγλική λέξη 'group'. Μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει ανθρώπους ή αντικείμενα που τοποθετούνται μαζί, σχηματίζοντας ένα σύνολο που αντιμετωπίζεται ως μία μονάδα λόγω κάποιας κοινής ιδιότητας ή χαρακτηριστικού που τα συνδέει, ή συνδυασμό πραγμάτων που ταιριάζουν μαζί (π.χ. συνδυασμός ρούχων). Στο λεξικό της κοινής νεοελληνικής (Ίδρυμα Μανόλη Τριανταφυλλίδη, 1998) αναφέρεται ότι το σύνολο είναι «το αποτέλεσμα της συνένωσης στοιχείων ή τμημάτων που μπορούν να αποτελέσουν μία ενότητα». Συγκεκριμένα, όταν μιλάμε για πρόσωπα, το σύνολο είναι «όλα τα άτομα που αποτελούν μία μονάδα, χωρίς να εξαιρείται κανένας». Όταν μιλάμε για αντικείμενα, το σύνολο είναι «ο ολικός αριθμός ή η ολική ποσότητα πραγμάτων που ανήκουν στην ίδια κατηγορία». Στα μαθηματικά, σύνολο σημαίνει «ενότητα στοιχείων σε αριθμό άπειρο ή πεπερασμένο, τα οποία έχουν ορισμένες κοινές ιδιότητες». Τέλος, ως επίρρημα, χρησιμοποιείται για να δηλώσει την «πρόσθεση ή τον υπολογισμό όλων των στοιχείων», θα μπορούσαμε για παράδειγμα να πούμε ότι κάποιος «χρωστάει εν συνόλω ένα εκατομμύριο». Όπως γίνεται φανερό από τους παραπάνω ορισμούς, το σύνολο μπορεί να νοηθεί τόσο ως συλλογή (ομάδα, συνδυασμός, κατηγορία, ενότητα) όσο και ως αριθμός (ολικός αριθμός, ολική ποσότητα, πρόσθεση). Βασική απαίτηση των παραπάνω ορισμών είναι (α) η χωρίς εξαιρέσεις συγκέντρωση ή άθροιση όλων των εν λόγω στοιχείων και (β) η ύπαρξη κάποιας κοινής ιδιότητας. Ιδιαίτερα η απαίτηση για κοινή ιδιότητα φαίνεται ακόμη και στην περίπτωση των μαθηματικών, παρότι στην πραγματικότητα κάτι τέτοιο δεν απαιτείται σύμφωνα με τον ορισμό του Cantor.

Το νόημα μιας λέξης όμως, φαίνεται στη χρήση της στον δημόσιο λόγο. Στη συνέχεια θα δούμε τρία παραδείγματα χρήσης της έννοιας μέσα από γνωστές ελληνικές εφημερίδες:

«Ακόμα ένα κρούσμα στον Ολυμπιακό – Δώδεκα στο σύνολο» (εφημερίδα Το Βήμα, 04/01/22). Εδώ η λέξη σύνολο χρησιμοποιείται προκειμένου να δηλώσει το συνολικό πλήθος. Ο αρθρογράφος επιλέγει να χρησιμοποιήσει το σύνολο σαν ουσιαστικό αντί να χρησιμοποιήσει το επίρρημα «συνολικά».

«Το σύνολο των ασθενών ηλικίας 4-18 ετών είναι 9.377, την εβδομάδα 6-12 Δεκεμβρίου, αποτελώντας το 26% (4% αύξηση από την προηγούμενη εβδομάδα) στο σύνολο των κρουσμάτων Covid-19. Σύμφωνα με τα συγκεντρωτικά στοιχεία του ΕΟΔΥ για την εβδομάδα 6-12 Δεκεμβρίου, οι εισαγωγές νέων ασθενών ήταν 2.752, ενώ το σύνολο των εξιτηρίων λόγω ίασης ήταν 2.344» (εφημερίδα Ελεύθερος Τύπος, 15/12/21). Στο συγκεκριμένο απόσπασμα, ο αρθρογράφος χρησιμοποιεί τη λέξη «σύνολο» με δύο τρόπους. Όταν αναφέρει ότι το σύνολο των ασθενών είναι 9.377, το σύνολο νοείται ως το πλήθος, ενώ όταν γράφει ότι ο συγκεκριμένος αριθμός αποτελεί το 26% στο σύνολο των κρουσμάτων, το σύνολο νοείται ως μια συλλογή ασθενών, το 26% της οποίας αποτελούν άτομα ηλικίας 4-18 ετών.

«Οι ομιλήτριες περιέγραψαν ένα σύνολο προβλημάτων και ελλείψεων που όχι μόνο θέτουν εμπόδια στην ομαλή διεξαγωγή μαθημάτων, αλλά και ζητήματα ασφάλειας εκπαιδευτικών και μαθητών την ώρα της σχολικής διδασκαλίας» (Η Εφημερίδα των Συντακτών, 21/11/23). Εδώ το σύνολο έχει την έννοια της συλλογής, ενώ αποσαφηνίζεται η κοινή ιδιότητα που επιτρέπει την συμπερίληψη των στοιχείων (προβλήματα και ελλείψεις) στο σύνολο.

Ο δημόσιος λόγος όμως αναπαράγεται και μέσω των Μέσω Μαζικής Επικοινωνίας. Στην επόμενη εικόνα φαίνεται ένα στιγμιότυπο από την εκπομπή «Ο Τροχός της Τύχης» που αποτελεί ελληνικό τηλεπαιχνίδι που προβάλλεται στην ελληνική τηλεόραση από το 1990 από διαφορετικούς τηλεοπτικούς σταθμούς. Η συγκεκριμένη εικόνα λήφθηκε από την πιο πρόσφατη επαναφορά της εκπομπής από το τηλεοπτικό κανάλι «Star Channel» (από το 2015 έως τουλάχιστον και το 2024). Στη συγκεκριμένη εικόνα, η λέξη σύνολο επιλέγεται για να δηλώσει το άθροισμα των πόντων που συγκέντρωσαν οι αγωνιζόμενοι.

Εικόνα 2.1. Παράδειγμα όπου η λέξη σύνολο επιλέγεται για να δηλώσει το άθροισμα.

Η χρήση της λέξης με αντίστοιχο τρόπο εμφανίζεται και σε άλλα διάσημα τηλεπαιχνίδια, όπως για παράδειγμα ο Ευρωπαϊκός διαγωνισμός τραγουδιού «Eurovision» που διοργανώνεται κάθε χρόνο από την Ευρωπαϊκή Ραδιοτηλεοπτική Ένωση. Σύμφωνα με την Wikipedia, στους κανόνες του διαγωνισμού αναφέρεται ότι «στους ημιτελικούς, κάθε χώρα απονέμει ένα σύνολο πόντων με βάση τις ψήφους του κοινού της χώρας, ενώ στον τελικό, κάθε χώρα απονέμει δύο σετ πόντων, με ένα σετ να απονέμεται από τους θεατές και την επαγγελματική κριτική επιτροπή» (el.wikipedia.org/wiki/Κανονισμοί_του_Διαγωνισμού_Τραγουδιού_Eurovision). Η λέξη 'σύνολο' επιλέγεται προκειμένου να εκφράσει έναν αριθμό, δηλαδή τους πόντους που απονέμονται στον ημιτελικό, ενώ η λέξη 'σετ', η οποία είναι η αγγλική λέξη για τη μαθηματική έννοια του συνόλου, επιλέγεται για να εκφράσει τον διαχωρισμό των πόντων του τελικού σε δύο ομάδες.

2.7. Η έννοια του συνόλου στα σχολικά βιβλία

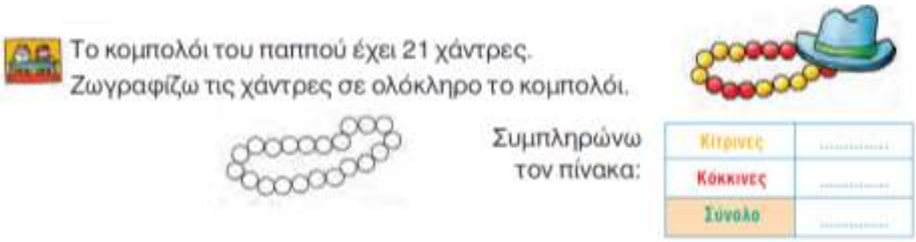
Στην Α΄ Δημοτικού, στο βιβλίο του εκπαιδευτικού, αναφέρονται τα παρακάτω:

- Σελίδα 28: «Το σύνολο των χτυπημάτων δεν θα πρέπει να ξεπερνά τον αριθμό 5». Εδώ η έννοια του συνόλου χρησιμοποιείται με την έννοια του πλήθους.
- Σελίδα 47: «Ρωτάμε τους μαθητές αν γνωρίζουν τους αριθμούς 9 και 10. Για τους περισσότερους από αυτούς είναι ασφαλώς γνωστοί. Κατόπιν τους ζητούμε να δείξουν τους αριθμούς με τα δάχτυλα των χεριών τους. Παράλληλα δείχνουμε τους συγκεκριμένους αριθμούς με τη μορφή ζαριού. Ζητούμε από τους μαθητές να σχηματίσουν τους εν λόγω αριθμούς στο αριθμητήριο, δίνοντας ιδιαίτερη έμφαση στο γεγονός ότι ο αριθμός 10 αποτελεί ένα ενιαίο σύνολο (αποτελείται από δύο ενιαία υποσύνολα, τις πεντάδες)». Το σύνολο σε αυτή την περίπτωση θα μπορούσε να ερμηνευτεί ως η συλλογή που περιέχει δύο πεντάδες ή ως το συνολικό πλήθος.
- Σελίδα 61: «Η δασκάλα καλεί τους μαθητές να της απαντήσουν στο ερώτημα πόσα είναι τα κορίτσια της τάξης, πόσα τα αγόρια και πόσα όλα τα παιδιά μαζί. Οι μαθητές μετρούν για να δώσουν τις απαντήσεις. Στη συνέχεια τους ρωτά πόσα είναι τα αγόρια μαζί με τη δασκάλα, πόσα τα κορίτσια μαζί με τη δασκάλα και πόσα όλα τα παιδιά μαζί με τη δασκάλα, πάντα δηλαδή ν + 1. Επιμένουμε στην περίπτωση αυτή να αποφύγουν οι μαθητές την καταμέτρηση και να δώσουν την απάντηση προσθέτοντας στο σύνολο των αγοριών, των κοριτσιών και όλων των παιδιών της τάξης τον αριθμό 1 (+ 1) για να καταλήξουν στον επόμενο αριθμό των επιμέρους συνόλων». Το σύνολο των αγοριών και το σύνολο των κοριτσιών θα μπορούσαν να ερμηνευθούν ως συλλογές. Ωστόσο, το να προσθέσεις σε μία συλλογή τον αριθμό 1 δεν θα είχε

νόημα στο πλαίσιο της συγκεκριμένης δραστηριότητας. Είναι λοιπόν φανερό ότι, εδώ, η λέξη ‘σύνολο’ χρησιμοποιείται ως το πλήθος των μαθητών της εκάστοτε συλλογής.

– Σελίδα 102: «Ο αριθμός των καρτών για κάθε αριθμό πρέπει να είναι από 4 για το 1, το 5 και το 6 και από 8 για το 2, το 3 και το 4, δηλαδή σύνολο 36 κάρτες». Στο τελευταίο αυτό παράδειγμα από την Α΄ Δημοτικού, το σύνολο νοείται και πάλι ως πλήθος.

Σε όλη τη Β΄ Δημοτικού βλέπουμε το σύνολο να χρησιμοποιείται σαν το *αποτέλεσμα*. Παρατίθενται ενδεικτικά δύο παραδείγματα. Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται η άσκηση 3 της σελίδας 17 από το α΄ τεύχος. Εδώ το σύνολο μπορεί να νοηθεί ως η συλλογή που περιέχει όλες τις κίτρινες και όλες τις κόκκινες χάντρες ή ως το συνολικό πλήθος των χαντρών.



Εικόνα 2.2. Διττή σημασία συνόλου (παράδειγμα σχολικού βιβλίου της Β΄ Δημοτικού).

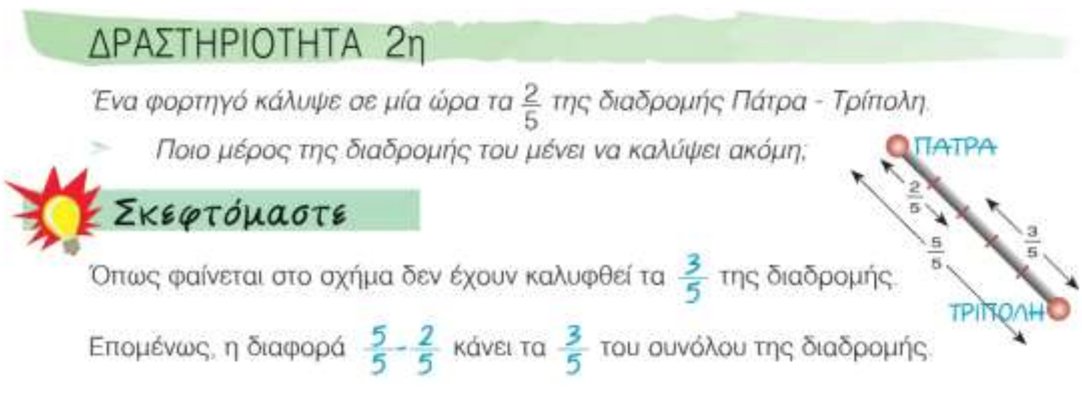
Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται η άσκηση 1 της σελίδας 22 από το β΄ τεύχος του σχολικού βιβλίου της Β΄ Δημοτικού. Εδώ η λέξη ‘σύνολο’ χρησιμοποιείται με διττό τρόπο, αφού μπορεί να ερμηνευθεί ως το σύνολο των προϊόντων τα οποία εξετάζουμε ως προς το κόστος αλλά και ως το άθροισμα των τιμών των προϊόντων (δηλαδή το συνολικό κόστος).

Εικόνα 2.3. Διττή σημασία συνόλου (παράδειγμα σχολικού βιβλίου της Β΄ Δημοτικού).

Με αντίστοιχο τρόπο χρησιμοποιείται η λέξη ‘σύνολο’ και στη Δ΄ Δημοτικού (στη Γ΄ Δημοτικού δεν γίνεται σχεδόν καθόλου αναφορά στη λέξη). Στην Ε΄ Δημοτικού στην σελίδα 62 από το βιβλίο του μαθητή, στην 4η ενότητα (Συλλογή, οργάνωση και αναπαράσταση δεδομένων), γίνεται για πρώτη φορά η χρήση της έννοιας του συνόλου με τρόπο παρόμοιο με τον τυπικό. Στην επόμενη σελίδα, προκειμένου να οριστεί η έννοια της διαμέσου σε ένα δείγμα, ζητείται από τους μαθητές να βρεθεί «ποια τιμή ή ποιες δύο τιμές βρίσκονται στη μέση της διάταξης και χωρίζουν το σύνολο των τιμών σε δυο ίσα μέρη, από τα οποία το ένα μέρος έχει τις μικρότερες τιμές και το άλλο τις μεγαλύτερες». Επίσης, στον αναστοχασμό, τίθεται το ερώτημα: «Η μέση τιμή ενός συνόλου δεδομένων είναι πάντα η τιμή ενός από τα δεδομένα;».

Στην ΣΤ΄ Δημοτικού σε πολλά σημεία του σχολικού βιβλίου, η έννοια του συνόλου χρησιμοποιείται σαν το *όλον*. Για παράδειγμα, στους στόχους του 40^{ου} κεφαλαίου στη σελίδα 95 από το βιβλίο του μαθητή, αναφέρεται η φράση «αντιλαμβάνομαι το σύνολο ως το 100% και εκτιμώ το ποσοστό», ενώ στο 47^{ο} κεφάλαιο στη σελίδα 114 αναφέρεται ότι «το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για την παρουσίαση της σχέσης του μέρους προς το σύνολο». Όπως είναι φανερό, η έννοια του συνόλου, αν και δεν έχει οριστεί ούτε έχει διδαχθεί επίσημα, χρησιμοποιείται σαν μια ήδη γνωστή έννοια. Ο μαθητής είναι αναμενόμενο να χρησιμοποιεί της αυθόρμητες αντιλήψεις του για την έννοια τις οποίες σχημάτισε είτε από την καθομιλουμένη είτε από τα Μαθηματικά των προηγούμενων τάξεων. Τέλος, τα σύνολα, ακόμη και στο Δημοτικό φαίνεται να είναι αναπόσπαστο κομμάτι από το κεφάλαιο της στατιστικής και των πιθανοτήτων.

Στην Α΄ Γυμνασίου, στο σχολικό βιβλίο, στη σελίδα 44, στη 2^{η} δραστηριότητα (εικόνα 2.4), ο συγγραφέας επιλέγει τη φράση «του συνόλου της διαδρομής» αντί για την ισοδύναμη φράση «της συνολικής διαδρομής».



Εικόνα 2.4. Το σύνολο ως αριθμός (παράδειγμα από το σχολικό βιβλίο της Α΄ Γυμνασίου).

Στη σελίδα 47, ωστόσο, σε μια δραστηριότητα που επιχειρεί να συνδέσει τη μουσική και συγκεκριμένα τον ρυθμό, με την έννοια του κλάσματος, χρησιμοποιείται η έννοια του συνόλου όπως αυτή νοείται στα Μαθηματικά. Συγκεκριμένα αναφέρεται ότι

> «Ο άνθρωπος έχει την ικανότητα να εντοπίζει και να απομονώνει τις χρονικές στιγμές. Το διάστημα που μεσολαβεί μεταξύ δύο στιγμών, δημιουργεί την αίσθηση της διάρκειας. Ο χωρισμός του χρόνου από τα γεγονότα δημιουργεί ένα πυκνό σύνολο από στιγμές».

Στη συνέχεια, στο κεφάλαιο των ποσοστών, στην σελίδα 80 αναφέρεται η φράση: «το σύνολο των πολιτών που ψήφισαν στα χωριά» ενώ στην σελίδα 83 γράφει: «επί του συνόλου υπολογίζεται ΦΠΑ 19%». Ο κύκλος, θεμελιώδης έννοια για την Α΄ Γυμνασίου, ορίζεται στην σελίδα 188 του σχολικού βιβλίου ως «το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου που απέχουν την ίδια απόσταση από ένα σταθερό σημείο Ο».

Από το πρώτο κιόλας κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου της Β΄ Γυμνασίου (σελ.11) ορίζεται η μεταβλητή ως «ένα γράμμα (π.χ. x, y, t, ...) που το χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο ενός συνόλου». Τι είναι όμως το σύνολο και τι σημαίνει η φράση «στοιχείο ενός συνόλου»; Οι συγκεκριμένες έννοιες δεν έχουν περιγραφή ποτέ πριν στους μαθητές (ακόμη και τα αναλυτικά προγράμματα και το βιβλίο του εκπαιδευτικού δεν προτείνουν στον εκπαιδευτικό να σχολιάσει ή να περιγράψει την έννοια του συνόλου όπως αυτή νοείται στα μαθηματικά).

Στην εισαγωγή του 2^{ου} κεφαλαίου (σελ.40) το σχολικό βιβλίο γράφει:

> «Μέχρι τώρα έχουμε συναντήσει φυσικούς, ακέραιους και ρητούς αριθμούς. Στους τελευταίους είχαμε εξετάσει τη δεκαδική τους παράσταση, η οποία ήταν γνωστή σε απλή ή περιοδική μορφή. Υπάρχει όμως και ένα άλλο *σύνολο αριθμών*, οι άρρητοι, τους οποίους εξετάζουμε στο κεφάλαιο αυτό».

Οι φυσικοί, οι δεκαδικοί και οι ρητοί αριθμοί όμως, δεν ορίζονται ως σύνολα αριθμών, ούτε στα αναλυτικά προγράμματα διδασκαλίας, ούτε στο εγχειρίδιο του εκπαιδευτικού ούτε στα σχολικά βιβλία.

Στην σελίδα 46, το σύνολο των ρητών αριθμών ορίζεται ως: «Το σύνολο των ρητών αριθμών, δηλαδή των αριθμών που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ ακέραιος και ν φυσικός αριθμός».

Στη σελίδα 62 του σχολικού βιβλίου, η γραφική παράσταση ορίζεται με τον εξής τρόπο:

> «Έστω ότι έχουμε μία συνάρτηση με την οποία ένα μέγεθος y εκφράζεται ως συνάρτηση ενός άλλου μεγέθους x. Ονομάζουμε γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής *το σύνολο όλων των σημείων του επιπέδου* με συντεταγμένες (x, y)».

Η επόμενη αναφορά στην έννοια του συνόλου γίνεται στο κεφάλαιο της Στατιστικής (σελ.86) όπου ορίζεται η έννοια του πληθυσμού ως «ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία μελετάμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό τους». Η έννοια του συνόλου εμφανίζεται για τελευταία φορά με την τυπική της σημασία, στην σελίδα 104 όπου αναφέρεται ότι «Για να βρούμε τη μέση τιμή ενός συνόλου παρατηρήσεων, προσθέτουμε όλες τις παρατηρήσεις και διαιρούμε με το πλήθος των παρατηρήσεων αυτών». Από το σημείο αυτό και έπειτα, επανέρχεται η χρήση του συνόλου με διττό τρόπο (όπως και στο παράδειγμα της εικόνας 3) προωθώντας ενδεχομένως το νόημα του συνόλου ως το άθροισμα ή το αποτέλεσμα. Σαν παράδειγμα δίνουμε την εφαρμογή 2 της σελίδας 109 (εικόνα 2.5).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2

Ο διπλανός πίνακας δείχνει τον αριθμό των τερμάτων που πέτυχε μια ομάδα ποδοσφαίρου στους 15 πρώτους αγώνες πρωταθλήματος.

α) Πόσα τέρματα έχει πετύχει συνολικά η ομάδα αυτή και στους 15 αγώνες;

β) Ποιος είναι ο μέσος αριθμός τερμάτων που πετυχαίνει η ομάδα αυτή σε κάθε αγώνα;

Τέρματα	Αγώνες
0	1
1	4
2	3
3	5
4	2
ΣΥΝΟΛΟ	15

Λύση: α) Σε 1 αγώνα έχει πετύχει 0 τέρματα, άρα σύνολο $1 \cdot 0 = 0$.
Σε 4 αγώνες έχει πετύχει 1 τέρμα, άρα σύνολο $4 \cdot 1 = 4$.
Σε 3 αγώνες έχει πετύχει 2 τέρματα, άρα σύνολο $3 \cdot 2 = 6$.
Σε 5 αγώνες έχει πετύχει 3 τέρματα, άρα σύνολο $5 \cdot 3 = 15$.
Σε 2 αγώνες έχει πετύχει 4 τέρματα, άρα σύνολο $4 \cdot 2 = 8$.

Οπότε, συνολικά έχει πετύχει:
$1 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = 0 + 4 + 6 + 15 + 8 = 33$ τέρματα.

Εικόνα 2.5. Διττή σημασία του συνόλου (παράδειγμα από το σχολικό βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου).

Στη Γ΄ Γυμνασίου ορίζεται για πρώτη φορά η έννοια του συνόλου. Στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών, στους στόχους για το κεφάλαιο των Πιθανοτήτων, σημειώνεται ότι οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να ορίζουν ένα σύνολο με περιγραφή ή αναγραφή των στοιχείων του και να το παριστάνουν με διάγραμμα Venn, να κατανοούν πότε δυο σύνολα είναι ίσα και πότε ένα σύνολο είναι υποσύνολο ενός άλλου συνόλου και να βρίσκουν την ένωση και την τομή δυο συνόλων, καθώς και το συμπλήρωμα ενός συνόλου.

Στην σελίδα 160 του σχολικού βιβλίου δίνεται η παρακάτω περιγραφή για την έννοια του συνόλου:

> «Σε πολλές περιπτώσεις συνηθίζουμε να συλλέγουμε ή να επιλέγουμε διάφορα αντικείμενα και να τα ταξινομούμε σε ομάδες ή κατηγορίες. Για παράδειγμα, τα βιβλία μιας βιβλιοθήκης ανάλογα με το περιεχόμενό τους ταξινομούνται σε ιστορικά, λογοτεχνικά, ιατρικά κ.τ.λ. Σε κατηγορίες επίσης, ταξινομούμε τους αριθμούς (φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί, άρρητοι,

πραγματικοί, θετικοί, αρνητικοί κ.τ.λ.), τα γράμματα της αλφαβήτου (φωνήεντα, σύμφωνα, μικρά, κεφαλαία κ.τ.λ.) και κάθε ομάδα αντικειμένων τα οποία διακρίνονται μεταξύ τους με απόλυτη σαφήνεια. Ομάδες ή κατηγορίες, όπως οι παραπάνω, ονομάζονται στα Μαθηματικά, σύνολα. Κάθε αντικείμενο που περιέχεται σ' ένα σύνολο ονομάζεται στοιχείο του συνόλου».

Αξίζει εδώ να σημειώσουμε ότι σε όλα τα παραδείγματα που δίνονται παραπάνω, τα στοιχεία των συνόλων έχουν κάποια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα (ομοειδή στοιχεία). Επιπλέον, οι λέξεις που επιλέγονται για να περιγραφεί το σύνολο είναι η «ομάδα» και η «κατηγορία». Τέλος ορίζονται οι έννοιες του κενού συνόλου, της τομής και της ένωσης συνόλων και του συμπληρώματος ενός συνόλου. Όλες οι παραπάνω έννοιες είναι απαραίτητες για τον ορισμό της έννοιας του ενδεχομένου και κατ' επέκταση της έννοιας της πιθανότητας.

Στην σελίδα 13 του σχολικού βιβλίου της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου ορίζεται η έννοια του συνόλου. Συγκεκριμένα αναφέρεται ότι:

> «Πολλοί άνθρωποι συνηθίζουν να συλλέγουν διάφορα πράγματα, όπως π.χ. γραμματόσημα, νομίσματα, πίνακες ζωγραφικής, εφημερίδες, βιβλία κτλ. Οι περισσότεροι συλλέκτες ταξινομούν τις συλλογές τους σε κατηγορίες, π.χ. «γραμματόσημα που προέρχονται από την ίδια χώρα», «νομίσματα του περασμένου αιώνα», «πίνακες της αναγέννησης» κτλ. Επίσης από αρχαιοτάτων χρόνων οι άνθρωποι ενδιαφέρθηκαν για τους αριθμούς και τους ταξινόμησαν σε κατηγορίες, όπως είναι π.χ. «οι άρτιοι αριθμοί», «οι πρώτοι αριθμοί» κτλ.».
>
> Συλλογές ή κατηγορίες όπως οι παραπάνω ή ακόμη ομάδες αντικειμένων, ομοειδών ή όχι, που μπορούμε με κάποιο τρόπο να τα ξεχωρίσουμε, ονομάζονται στα Μαθηματικά σύνολα.
>
> Σύμφωνα με τον μεγάλο μαθηματικό Cantor: *Σύνολο είναι κάθε συλλογή αντικειμένων, που προέρχονται από την εμπειρία μας ή τη διανόησή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο*.
>
> Τα αντικείμενα αυτά, που αποτελούν το σύνολο, ονομάζονται στοιχεία ή μέλη του συνόλου».

Σε αυτό το σημείο, το σύνολο περιγράφεται πλήρως ενώ τονίζεται ότι τα στοιχεία του συνόλου δεν είναι κατ' ανάγκη ομοειδή, αρκεί να είναι διακεκριμένα και καλώς ορισμένα.

Η προσέγγιση που ακολουθείται στη συνέχεια είναι ανάλογη με τη Γ΄ Γυμνασίου. Ορίζονται δηλαδή οι απαραίτητες έννοιες ώστε να οριστούν στη συνέχεια η έννοιες του ενδεχομένου και της πιθανότητας.

Στο κεφάλαιο «διάταξη πραγματικών αριθμών», (σελ.57 του σχολικού βιβλίου της Α΄ Λυκείου), ορίζεται το κλειστό διάστημα [α, β] ως «το σύνολο των πραγματικών αριθμών x με $α \leq x \leq β$». Αντίστοιχα δίνονται οι ορισμοί για τα διαστήματα $[α, +\infty)$ και $(-\infty, α]$ ως τα σύνολα των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $α \leq x$ και $x \leq α$ αντίστοιχα.

Στη Α΄ Λυκείου ορίζεται και η έννοια της συνάρτησης με χρήση συνόλων. Η συνάρτηση είχε οριστεί και στη Β΄ Γυμνασίου χωρίς χρήση της έννοιας του συνόλου. Στην σελίδα 146 του σχολικού βιβλίου της Α΄ Λυκείου δίνεται ο παρακάτω ορισμός:

> «Συνάρτηση από ένα σύνολο Α σε ένα σύνολο Β λέγεται μια διαδικασία (κανόνας) με την οποία κάθε στοιχείο του συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο του συνόλου Β».

Η έννοια του συνόλου στη Γεωμετρία της Β΄ Λυκείου, χρησιμοποιείται άλλοτε με την τυπική της σημασία, όπως για παράδειγμα στη σελίδα 129 όπου αναφέρεται ότι «Το σύνολο των ευθειών του χώρου, που τέμνουν κάθετα μία ευθεία ξ σε ένα σημείο της Ο, βρίσκονται στο κάθετο επίπεδο της ξ στο Ο», άλλοτε ως αριθμός, όπως για παράδειγμα στη σελίδα 179 όπου αναφέρεται ότι «κάθε έδρα του κανονικού πολυέδρου έχει ν κορυφές και το σύνολο των επίπεδων γωνιών όλων των εδρών του είναι νΕ (όπου Ε το πλήθος των εδρών)» και άλλοτε με την έννοια της συνένωσης στοιχείων που μπορούν να αποτελέσουν μία ενότητα, όπως φαίνεται στη σελίδα 145 όπου αναφέρεται ότι «τα πολύεδρα αποτελούνται από τμήματα επιπέδων, κατάλληλα τοποθετημένα, ώστε να σχηματίζουν ένα κλειστό στερεό σύνολο».

Η έννοια του συνόλου χρησιμοποιείται συστηματικά σε όλη την έκταση του βιβλίου των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου και μάλιστα με την τυπική της σημασία. Στο βιβλίο 'Μαθηματικά – Στοιχεία Στατιστικής και Πιθανοτήτων' του Προσανατολισμού Ανθρωπιστικών Σπουδών, το σύνολο χρησιμοποιείται με την τυπική μαθηματική σημασία σε όλο το κεφάλαιο των Πιθανοτήτων, αλλά αντιμετωπίζεται και πάλι με διττό τρόπο, στο κεφάλαιο της στατιστικής, σε πίνακες συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων κλπ., για να δηλώσει το συνολικό πλήθος των παρατηρήσεων μιας έρευνας. Επιπλέον, σε κάποιες ασκήσεις χρησιμοποιείται ξεκάθαρα ως αριθμός, όπως για παράδειγμα στην άσκηση 3 της σελίδας 62, όπου ζητείται από τους μαθητές: «Αν το σύνολο των κλήσεων είναι 60.400, να γίνει πίνακας συχνοτήτων».

2.8. Η παρούσα έρευνα

Όταν μαθαίνουμε, διδάσκουμε ή χρησιμοποιούμε μαθηματικά, τείνουμε να μεταβαίνουμε από την καθημερινή – φυσική γλώσσα, το «καθημερινό ιδίωμα», στο «ιδίωμα των μαθηματικών», για ανάγνωση, γραφή, έκφραση, αναπαράσταση και, κυρίως, κατανόηση, κατασκευή και μετάδοση μαθηματικού νοήματος. Λέξεις που χρησιμοποιούνται με συγκεκριμένο – τυπικό τρόπο στα μαθηματικά ιδιώματα, έρχονται μερικές φορές σε αντίθεση με τη χρήση αυτών των λέξεων στα «καθημερινά ιδιώματα» (Gough, 2007). Η έννοια του συνόλου στα μαθηματικά νοείται ως μια συλλογή αντικειμένων, η καθημερινή της σημασία όμως, παραπέμπει συχνά στην έννοια του αριθμού (του πλήθους ή του αθροίσματος).

Η εναλλαγή μεταξύ των καθημερινών ιδιωμάτων και των μαθηματικών ιδιωμάτων μπορεί να οδηγήσει σε απώλεια μαθηματικού νοήματος και παρανόηση των μαθηματικών εννοιών (Lane et al., 2019, Moschkovich, 2003). Η δημιουργία ενός ενδιάμεσου ιδιώματος που γεφυρώνει το χάσμα μεταξύ της καθομιλουμένης και της μαθηματικής γλώσσας είναι αναπόφευκτη. Οι καθηγητές και οι μαθητές, προκειμένου να ανταλλάξουν πληροφορίες, να *μιλήσουν μαθηματικά* και να κατασκευάσουν νόημα, θα οδηγηθούν φυσικά στην κατασκευή ενός *ιδιώματος της σχολικής τάξης*. Ωστόσο, αυτή κατασκευή δεν γίνεται συνειδητά. Είναι πολύ πιθανό, τόσο οι μαθητές όσο και οι εκπαιδευτικοί, να μετακινούνται μεταξύ των διαφορετικών ιδιωμάτων στα οποία έχουν πρόσβαση (και τα οποία είναι σίγουρα περισσότερα από τα τρία που προαναφέρθηκαν). Επιπλέον, το νόημα μιας λέξης μπορεί να είναι διττό ακόμη και σε ένα συγκεκριμένο γλωσσικό ιδίωμα. Όπως η έννοια του τύπου μίας συνάρτησης στην έρευνα των Sabra και Alshwaikh (2023) μπορούσε να νοηθεί είτε ως κανόνας, είτε ως βάση, έτσι και η έννοια του συνόλου στα ίδια τα σχολικά εγχειρίδια, όπως είδαμε, μπορεί να νοηθεί τόσο ως συλλογή όσο και ως αριθμός.

Στη δική μας έρευνας μελετάμε τη νοηματοδότηση της έννοιας του συνόλου από μαθητές διαφορετικών βαθμίδων και μελλοντικούς εκπαιδευτικούς. Επιπλέον, θα επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε το γλωσσικό ιδίωμα μέσα στο οποίο η έννοια του συνόλου νοηματοδοτείται, κάνοντας χρήση του πεδίου αναφοράς, των ρόλων που υιοθετούνται από τους εκάστοτε συνομιλητές και του μέσου επικοινωνίας και να εξετάσουμε την επιρροή του εκάστοτε ιδιώματος στη νοηματοδότηση της έννοιας.

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

3.1. Τα ερευνητικά μας ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα της παρούσας διατριβής είναι:

α. Πώς κατανοούν μαθητές διαφορετικών σχολικών βαθμίδων και μελλοντικοί εκπαιδευτικοί την έννοια του συνόλου και τις ιδιότητές του και αν υπάρχουν διαφοροποιήσεις μεταξύ τους.

β. Πώς η νοηματοδότηση της έννοιας του συνόλου επηρεάζεται από το κοινωνικό πλαίσιο;

3.2. Μέθοδος ανάλυσης ποσοτικών δεδομένων

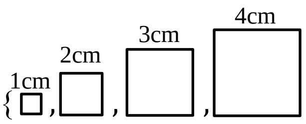
Για το πρώτο μας ερευνητικό ερώτημα συνθέσαμε ένα ερωτηματολόγιο το οποίο στηρίχθηκε στην προϋπάρχουσα έρευνα (Moru & Qhobela, 2013˙ Incikabi et al., 2012˙ Bagni, 2006˙ Na & Lee, 2006˙ Tsamir & Dreyfus, 2002˙ Dreyfus & Tsamir, 2004˙ Tsamir, 2001˙ Tsamir, 1999˙ Fischbein & Baltsan, 1998˙ Tirosh & Tsamir, 1996˙ Tsamir & Tirosh, 1992˙ Linchevski & Vinner, 1988˙). Το ερωτηματολόγιο διανεμήθηκε σε 116 μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού, 127 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και 154 μαθητές της Γ΄ Γενικού Λυκείου (συνολικά 397 συμμετέχοντες) από διάφορα σχολεία της Ελλάδας. Από τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου, το 27,3% είχε επιλέξει για το 1ο Πεδίο, Ανθρωπιστικών, Νομικών και Κοινωνικών Σπουδών, το 25,3% το 2ο Πεδίο Τεχνολογικών και Θετικών Σπουδών, το 27,9% το 3ο Πεδίο Σπουδών Υγείας και Ζωής και το 19,5% το 4ο πεδίο Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής. Επιπλέον, το ερωτηματολόγιο δόθηκε σε 245 φοιτητές ενός Παιδαγωγικού Τμήματος, δηλαδή μελλοντικούς εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, σαν ενδιάμεση γραπτή εξέταση στο πλαίσιο ενός μαθήματος Θεμελίων των Μαθηματικών.

Όλοι οι συμμετέχοντες ήταν είτε ομιλητές της ελληνικής γλώσσας είτε δίγλωσσοι που γεννήθηκαν στην Ελλάδα, με τα ελληνικά να είναι μία από τις κύριες γλώσσες τους. Η γλώσσα και οι συμβολισμοί στα ερωτηματολόγια των τριών βαθμίδων διέφεραν ελαφρώς, προκειμένου να ανταποκρίνονται καλύτερα στο λεξιλογικό επίπεδο του τυπικού μαθητή της εκάστοτε βαθμίδας. Το ερωτηματολόγιο των μαθητών Δημοτικού περιείχε ερωτήσεις που εξετάζουν την έννοια του συνόλου και την ισότητα μεταξύ συνόλων ενώ τα ερωτηματολόγια των μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου καθώς και των μελλοντικών εκπαιδευτικών περιείχαν επιπλέον ερωτήσεις σχετικά με τις πράξεις μεταξύ συνόλων, τις σχέσεις εγκλεισμού και τη σύγκριση του πληθαρίθμου απειροσυνόλων όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 3.1: Ερωτηματολόγιο – συνοπτική παρουσίαση

1.	Πως αντιλαμβάνεστε την έννοια «σύνολο» στα Μαθηματικά;	Εισαγωγική ερώτηση για τη μελέτη των αντιλήψεων σχετικά με την *έννοια/φύση του συνόλου*.
2.	Πιστεύετε ότι οι παρακάτω ομάδες αποτελούν ένα σύνολο; α) Οι μαθητές του σχολείου που είναι άνω των 17 ετών. β) Τα ιστορικά βιβλία μιας βιβλιοθήκης. γ) Οι ψηλοί μαθητές μίας τάξης. δ) 2, 4, 6, 8 ε) α, β, γ, δ στ) 2, 4, α, β	Τα ερωτήματα (α) – (γ) εξετάζουν τις αντιλήψεις των συμμετεχόντων σχετικά με την ιδιότητα των στοιχείων ενός συνόλου να είναι *καλώς ορισμένα*. Τα ερωτήματα (δ) – (στ) εξετάζουν την αντίληψη ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να είναι *ομοειδή* (Linchevski & Vinner, 1988, Fischbein & Baltsan, 1998, Incikabi et al., 2012).
3.	Πιστεύετε ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να έχουν κάποια κοινή ιδιότητα;	Η ερώτηση εξετάζει την αντίληψη ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να έχουν κάποια *κοινή ιδιότητα* (Linchevski & Vinner, 1988, Fischbein & Baltsan, 1998, Incikabi et al., 2012).
4.	Κυκλώστε όποιες από τις παρακάτω απαντήσεις νομίζετε ότι είναι σωστές. Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τα γράμματα της λέξης «ΘΑΛΑΣΣΑ» είναι το: {4}, {7}, {Θ,Α,Λ,Σ}, {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ}.	Η ερώτηση θα μας βοηθήσει να ελέγξουμε τις αντιλήψεις των συμμετεχόντων σχετικά με τη *φύση* του συνόλου αλλά με την ιδιότητα των στοιχείων ενός συνόλου να είναι *διακεκριμένα* (Linchevski & Vinner, 1988, Fischbein & Baltsan, 1998).
5.	Μπορεί καθεμιά από τις παρακάτω συλλογές να αποτελέσει σύνολο; Επιλέξτε τη σωστή απάντηση: α) Οι φυσικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 8 και μικρότεροι από το 10. β) Οι φυσικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 8 και μικρότεροι από το 9.	Το ερώτημα (α), το οποίο πήραμε από την έρευνα των Fischbein και Baltsan (1998), εξετάζει αν οι συμμετέχοντες δέχονται η απορρίπτουν την ιδέα του *μονοσυνόλου*, ενώ το ερώτημα (β) είναι η προέκταση του (α) για την ιδέα του *κενού* συνόλου.
6.	Ορίζουν οι παρακάτω συλλογές στοιχείων ένα σύνολο; Αν ναι, να γράψετε πόσα στοιχεία θα έχει το κάθε σύνολο, αλλιώς να γράψετε «όχι» και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. α) Η συλλογή 2 , 4 , 6 , 8 , 10, . . . β) Όλοι οι φυσικοί αριθμοί που περιέχουν το ψηφίο 8.	Η συγκεκριμένη ερώτηση, αλλά και η διατύπωσή της, πάρθηκε από την έρευνα των Fischbein και Baltsan (1998) και εξετάζει αν οι συμμετέχοντες δέχονται η απορρίπτουν την ιδέα του *απειροσυνόλου*. Ως σωστή δεχόμαστε την απάντηση «Ναι, άπειρα στοιχεία». Οι μαθητές που απαντούν ναι, χωρίς αιτιολόγηση και εκείνοι που απαντούν όχι θα κωδικοποιηθούν ξεχωριστά.

7.	Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες: α) {1,2,3,4}={4,3,2,1} β) {1,2,3,4}={α,β,γ,δ} γ) {1,2,3,4}={1,2,7}	Η ερώτηση 7α εξετάζει αν οι συμμετέχοντες θεωρούν ότι τα στοιχεία ενός συνόλου είναι διατεταγμένα. Η ερώτηση 7β εξετάζει αν οι συμμετέχοντες θεωρούν ότι δύο σύνολα είναι ίσα αν είναι ισοπληθικά (Linchevski & Vinner, 1988, Fischbein & Baltsan, 1998). Η ερώτηση 7γ εξετάζει αν οι μαθητές θεωρούν ότι δύο αριθμο-σύνολα είναι ίσα αν τα στοιχεία τους έχουν το ίδιο άθροισμα.
8.	Αν $A = \{1, 2, 3\}$ και $B = \{3, 4, 5, 6\}$, τότε να γράψετε το σύνολο Δ που έχει για στοιχεία του όλα τα στοιχεία του συνόλου Α και όλα τα στοιχεία του συνόλου Β.	Η συγκεκριμένη ερώτηση θα μας βοηθήσει να ελέγξουμε τις αντιλήψεις των συμμετεχόντων σχετικά με την *ένωση* δύο συνόλων και ιδιαίτερα με την ιδιότητα των στοιχείων ενός συνόλου να είναι *διακεκριμένα*. Ως σωστή δεχόμαστε την απάντηση $\Delta = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Η απάντηση $\Delta = \{1, 2, 3, 3, 4, 5, 6\}$ μας δείχνει ότι ο μαθητής δέχεται την συμπερίληψη επαναλαμβανόμενων στοιχείων και άρα κωδικοποιείται ξεχωριστά. Οποιαδήποτε άλλη απάντηση θεωρείτε λανθασμένη.
9.	Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ): α) $\{1\} \in \{1,2,3,4,5\}$ β) $\{1\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ γ) $\{4\} \in \{1,2,3,\{4\},5\}$ δ) $\{4\} \subseteq \{1,2,3,\{4\},5\}$ ε) $\{\{1,2\},\{3,4,5\}\} = \{1,2,3,4,5\}$ στ) $\varnothing = \{\varnothing\}$ ζ) $\varnothing = \{\ \}$ η) $\varnothing = \{0\}$ θ) $\varnothing = 0$	Τα ερωτήματα (α) – (δ) εξετάζουν τις αντιλήψεις των συμμετεχόντων σχετικά με τις έννοιες του *ανήκειν* και του *υποσυνόλου* στις ειδικές περιπτώσεις όπου έχουμε μονοσύνολα στο αριστερό μέρος της έκφρασης ή/και σύνολα που περιέχουν άλλα σύνολα ως στοιχεία τους. Τα ερωτήματα (στ) – (θ) εξετάζουν αν οι συμμετέχοντες έχουν τις αναγραφόμενες αντιλήψεις. Τέλος, αποφασίσαμε να μην αναλύσουμε τις απαντήσεις των συμμετεχόντων στο ερώτημα (ε) .
10.	Στις παρακάτω περιπτώσεις, να συγκρίνετε τα σύνολα Α και Β ως προς το πλήθος των στοιχείων τους: α) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$	Η ερώτηση 10 περιέχεται στην έρευνα των Tirosh και Tsamir (1996) και προωθεί την εμφάνιση των συχνότερων αντιλήψεων σε σχέση με τη σύγκριση του πληθαρίθμου των απειροσυνόλων (Tsamir & Tirosh, 1992˙ Tirosh & Tsamir, 1996˙ Tsamir, 1999˙

β) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, $B = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$ γ) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, $B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots\}$. δ) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, $B = \{$  $, \ldots\}$	Tsamir, 2001˙ Tsamir & Dreyfus, 2002˙ Dreyfus & Tsamir, 2004˙ Na & Lee, 2006˙ Moru & Qhobela, 2013). Συγκεκριμένα, τα δύο πρώτα υποερωτήματα περιέχουν δύο σύνολα A και B για τα οποία ισχύει $B \subseteq A$. Στο ερώτημα (γ) δίνονται τα ίδια υποσύνολα με το ερώτημα (β) όμως τώρα τα στοιχεία του συνόλου B είναι γραμμένα έτσι ώστε να γίνεται εμφανέστερη η 1-1 και επί αντιστοιχία με τα στοιχεία του A. Τέλος, στο ερώτημα (δ) δίνονται δύο ξένα σύνολα για τα οποία υπάρχει μία εμφανής 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων τους.
11. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες: α) Το πλήθος των στοιχείων ενός απειροσυνόλου είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων κάθε υποσυνόλου του. β) Όλα τα απειροσύνολα είναι ίσα ως προς το πλήθος των στοιχείων τους. γ) Τα απειροσύνολα δεν είναι συγκρίσιμα ως προς το πλήθος των στοιχείων τους.	Όπως και η προηγούμενη, η ερώτηση 11 εξετάζει τις συχνότερες αντιλήψεις σε σχέση με τη σύγκριση του πληθαρίθμου των απειροσυνόλων (Tsamir & Tirosh, 1992˙ Tirosh & Tsamir, 1996˙ Tsamir, 1999˙ Tsamir, 2001˙ Tsamir & Dreyfus, 2002˙ Dreyfus & Tsamir, 2004˙ Na & Lee, 2006˙ Moru & Qhobela, 2013).

Την περίοδο που διεξήχθη η έρευνα, σύμφωνα με τα αναλυτικά προγράμματα, οι μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού δεν είχαν διδαχθεί την έννοια του συνόλου. Οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου προτείνεται να διδαχθούν την έννοια του συνόλου (με εξαίρεση τις πράξεις μεταξύ συνόλων) για δύο διδακτικές ώρες, σαν εισαγωγή στην έννοια της πιθανότητας. Ωστόσο, το κεφάλαιο των πιθανοτήτων είναι το τελευταίο κεφάλαιο της διδακτέας ύλης και κατά κανόνα παραλείπεται από την πλειοψηφία των εκπαιδευτικών. Οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου είχαν διδαχθεί την έννοια του συνόλου στο εισαγωγικό κεφάλαιο της Άλγεβρας Α΄ Λυκείου (δύο χρόνια πριν συμμετάσχουν στην έρευνα). Συγκεκριμένα, οι μαθητές διαπραγματεύονται την έννοια του συνόλου καθώς και τις σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων, για δύο διδακτικές ώρες, σύμφωνα με τις οδηγίες των αναλυτικών προγραμμάτων σπουδών. Παρότι κάποιοι εκπαιδευτικοί επιλέγουν να προσπεράσουν το συγκεκριμένο κεφάλαιο και να αντιμετωπίσουν το σύνολο μέσω ειδικών περιπτώσεων στα επόμενα κεφάλαια (σύνολα λύσεων ανισοτήτων, πεδία ορισμού, σύνολα σημείων του επιπέδου κλπ.), αρκετοί εκπαιδευτικοί αναφέρονται έστω και συνοπτικά στην έννοια του συνόλου. Οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί που συμμετέχουν στην έρευνά μας είχαν διδαχθεί βασικές έννοιες και πράξεις της Θεωρίας Συνόλων χωρίς ιδιαίτερη έμφαση στην άρση τυχών παρανοήσεων που εμφανίζονται στην βιβλιογραφία.

Για το πρώτο μας ερευνητικό ερώτημα θα εξετάσουμε αν οι διαφορές στην διδασκαλία της έννοιας του συνόλου μεταξύ των διαφορετικών βαθμίδων αντικατοπτρίζεται και στις αντιλήψεις των συμμετεχόντων ανά βαθμίδα. Τα δεδομένα μας αναλύθηκαν με το στατιστικό πρόγραμμα IBM SPSS Statistics 28.0. Η εκπαιδευτική βαθμίδα του εκάστοτε συμμετέχοντα καθώς και οι λέξεις που χρησιμοποίησε στην ερώτηση 1 προκειμένου να περιγράψει την έννοια του συνόλου μετρούνται σε ονομαστική κλίμακα (οι τιμές απεικονίζουν κατηγορίες που δεν διέπονται από την ιδιότητα της διάταξης ή της απόστασης). Οι ερωτήσεις 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11 θεωρούνται ισοδιαστημικές αφού επιδέχονται μόνο τις τιμές 0 (λάθος) και 1 (σωστό). Οι ερωτήσεις 6 και 8 διαφέρουν από τις προηγούμενες διότι εμπεριέχουν ενδιάμεσες καταστάσεις. Για παράδειγμα, οι μαθητές που στην ερώτηση 6 θα απαντήσουν «όχι» ή που δεν θα απαντήσουν, θα πάρουν την τιμή 0, εκείνοι που θα απαντήσουν «ναι», χωρίς αιτιολόγηση, θα πάρουν 1 και εκείνοι που θα απαντήσουν «ναι, άπειρα» θα πάρουν 2. Συνεπώς, οι ερωτήσεις αυτές θεωρούνται διατακτικές. Για τις ισοδιαστημικές μας μεταβλητές χρησιμοποιούμε την στατιστική μέθοδο One-way ANOVA υπό τη μηδενική υπόθεση ότι «οι μέσες τιμές των διαφορετικών βαθμίδων είναι ίσες» (δηλαδή ότι τα ποσοστά σωστών απαντήσεων δεν εξαρτώνται από την εκπαιδευτική βαθμίδα). Ως δείκτης στατιστικής σημαντικότητας (p-value) θεωρήθηκε το 0,05. Στις περιπτώσεις όπου $p<0,05$, θα πρέπει να απορρίψουμε τη μηδενική μας υπόθεση (δηλαδή να υποθέσουμε ότι τα ποσοστά σωστών απαντήσεων εξαρτώνται από την εκπαιδευτική βαθμίδα) ενώ στις περιπτώσεις στις οποίες ο δείκτης στατιστικής σημαντικότητας είναι μεγαλύτερος του 0,05 δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση. Για τις διατακτικές μεταβλητές χρησιμοποιούμε το μη-παραμετρικό κριτήριο Kruskal-Wallis για τις τέσσερεις εκπαιδευτικές βαθμίδες, υπό τη μηδενική υπόθεση «οι μέσοι των διαφορετικών βαθμίδων είναι ίσοι». Αν το τεστ είναι στατιστικά σημαντικό, θα αναλύσουμε περαιτέρω τα δεδομένα εξετάζοντας τις μέσες κατατάξεις (mean ranks) ανα βαθμίδα χρησιμοποιώντας το κριτήριο Mann-Whitney.

3.3. Μέθοδος ανάλυσης ποιοτικών δεδομένων

Η ανάλυση των ποσοτικών μας δεδομένων οδήγησε στον προσδιορισμό και την καταγραφή μίας σειράς παρανοήσεων από τους συμμετέχοντες. Ωστόσο, σε αρκετές περιπτώσεις δεν ήταν δυνατό να προσδιοριστούν οι αιτίες που οδηγούσαν στην εμφάνιση ορισμένων παρανοήσεων ή ακόμη και οι ίδιες οι παρανοήσεις που οδηγούσαν τους μαθητές σε λανθασμένες απαντήσεις. Για να εξετάσουμε βαθύτερα τις αντιλήψεις των μαθητών (πρώτο ερευνητικό ερώτημα) αλλά και τη νοηματοδότηση της έννοιας του συνόλου μέσα στα διαφορετικά γλωσσικά ιδιώματα των μαθητών (δεύτερο ερευνητικό ερώτημα), επιλέξαμε να εμπλουτίσουμε τα ποσοτικά μας δεδομένα χρησιμοποιώντας ποιοτικές μεθόδους. Συγκεκριμένα, πραγματοποιήσαμε ημι-δομημένες, ημι-κλινικές συνεντεύξεις (Elkind, 1964) με 5 μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού, 5 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και 6 μαθητές της Γ΄ Λυκείου (συνολικά 16 συμμετέχοντες), οι οποίοι είχαν προηγουμένως συμπληρώσει το ερωτηματολόγιο. Οι συγκεκριμένοι μαθητές επιλέχθηκαν επειδή γνωρίζαμε το εκπαιδευτικό τους υπόβαθρο και κρίναμε ότι θα μας παρέχουν ενδιαφέρουσες εισηγήσεις που θα φωτίσουν την κατανόησή μας σχετικά με τις αντιλήψεις τους για την έννοια του συνόλου.

Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, οι μαθητές της ΣΤ΄ έλαβαν 4 κάρτες, ενώ οι μαθητές του Γυμνασίου και του Λυκείου έλαβαν 6. Κάθε κάρτα περιείχε μία υποθετική συνομιλία (σενάριο) μεταξύ ενός/μίας δασκάλου/δασκάλας και των μαθητών του/της, όπου το θέμα συζήτησης ήταν η έννοια του συνόλου και η ισότητα συνόλων. Χρησιμοποιήθηκαν κυρίως ανοιχτές ερωτήσεις οι οποίες προέρχονταν είτε από μια λίστα ερωτήσεων που είχε συνταχθεί από τους ερευνητές είτε από αυθόρμητες αλλά στοχευμένες ερωτήσεις, στηριζόμενες σε απρόσμενες/πρωτότυπες απαντήσεις από τους συμμετέχοντες.

Συγκεκριμένα, στην πρώτη κάρτα του Δημοτικού, μία υποθετική δασκάλα θέτει στους μαθητές της το ερώτημα «αν τα μολύβια, οι γόμες, οι ξύστρες, τα βιβλία, τα τετράδια και το κολατσιό ενός μαθητή αποτελούν ένα σύνολο αντικειμένων». Για την πρώτη κάρτα του Γυμνασίου και του Λυκείου, μια υποθετική καθηγήτρια Μαθηματικών ρώτησε στην τάξη «αν ο αριθμός 1, ο αριθμός 2, το γράμμα α και το γράμμα β μπορούν να είναι τα στοιχεία ενός συνόλου». Ο στόχος των σεναρίων είναι να εξεταστούν οι αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τη φύση του συνόλου. Ορισμένοι μαθητές ενδέχεται να βλέπουν το σύνολο ως το πλήθος των στοιχείων μιας συλλογής αντικειμένων και όχι ως την ίδια την συλλογή. Επιπλέον, κάποιοι μαθητές ενδέχεται να έχουν την αντίληψη ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να είναι ομοειδή ή να διέπονται από κάποια κοινή ιδιότητα (Incikabi et al., 2012˙ Fischbein & Baltsan, 1998˙ Linchevski & Vinner, 1988). Τέλος, ορισμένοι μαθητές έχουν συχνά αντιφατικές αντιλήψεις για μία έννοια (Tsamir & Dreyfus, 2002˙ Tsamir & Tirosh, 2006), ενδέχεται λοιπόν να βλέπουν το σύνολο τόσο ως μια συλλογή αντικειμένων όσο και ως το πλήθος των στοιχείων μιας συλλογής αντικειμένων. Οι υποθετικοί μαθητές των σεναρίων εκφράζουν αυτές τις αντιλήψεις.

Στο δεύτερο σενάριο, μια υποθετική εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές της να προσδιορίσουν «το σύνολο των γραμμάτων της λέξης θάλασσα». Ο στόχος του σεναρίου, το οποίο ήταν κοινό για όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες, είναι να εξεταστούν οι αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τη έννοια του συνόλου και ειδικότερα με την συμπερίληψη μη διακεκριμένων στοιχείων σε ένα σύνολο (Fischbein & Baltsan, 1998˙ Linchevski & Vinner, 1988). Οι υποθετικοί μαθητές του σεναρίου δίνουν απαντήσεις που παραπέμπουν στην ιδέα του πλήθους για την έννοια του συνόλου, της συλλογής διακεκριμένων στοιχείων ή της συλλογής στοιχείων όχι απαραίτητα διακεκριμένων.

Στο τρίτο υποθετικό σενάριο, ο υποθετικός δάσκαλος μιας ΣΤ΄ Δημοτικού, ζήτησε από τους μαθητές «να βρουν το σύνολο των φυσικών αριθμών που είναι μεγαλύτεροι από το 8 και μικρότεροι από το 9». Για τους μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου, ένας υποθετικός καθηγητής ζητάει από τους μαθητές του να προσδιορίσουν το σύνολο των λύσεων μιας αδύνατης εξίσωσης. Στόχος του συγκεκριμένου σεναρίου είναι να εξετάσει αν οι μαθητές που συμμετέχουν στην συνέντευξη έχουν την αντίληψη ότι ένα σύνολο δεν μπορεί να είναι κενό (Fischbein & Baltsan, 1998). Δύο επιπλέον αντιλήψεις που μπορούν να ερευνηθούν με αφετηρία το παραπάνω σενάριο είναι (α) η αντίληψη ότι το σύνολο που δεν περιέχει στοιχεία είναι το 0 ή το {0} και (β) η αντίληψη ότι ένα σύνολο δεν μπορεί να περιέχει μόνο ένα στοιχείο (Fischbein & Baltsan, 1998).

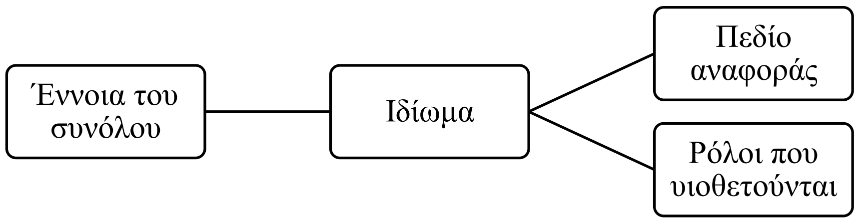
Στο τέταρτο σενάριο, το θέμα συζήτησης της υποθετικής εκπαιδευτικού με τους μαθητές της είναι αν «τα σύνολα {1, 2, 3, 4,} και {α, β, γ, δ} είναι ίσα ή όχι». Στόχος του συγκεκριμένου σεναρίου είναι η μελέτη των αντιλήψεων των μαθητών σχετικά με την ισότητα των συνόλων. Ορισμένοι μαθητές θεωρούν ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να είναι ομοειδή ή έστω να διέπονται από κάποια κοινή ιδιότητα (Incikabi et. al, 2012˙ Fischbein & Baltsan, 1998˙ Linchevski & Vinner, 1988). Μαθητές που έχουν αυτή την αντίληψη ενδέχεται να απαντήσουν ότι τα δύο σύνολα είναι μη συγκρίσιμα. Επιπλέον, όπως αναφέραμε παραπάνω, ορισμένοι μαθητές ενδέχεται να αντιλαμβάνονται το σύνολο ως το πλήθος των στοιχείων μιας συλλογής αντικειμένων. Μαθητές που έχουν αυτή την αντίληψη ενδέχεται να απαντήσουν ότι τα δύο σύνολα είναι ίσα αφού έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Το ίδιο ενδέχεται να απαντήσουν και οι μαθητές που βλέπουν το σύνολο σαν συλλογή, αφού στην καθημερινότητα δύο συλλογές μπορούν να θεωρηθούν ίσες αν περιέχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων (Fischbein & Baltsan, 1998). Μια επιπλέον αντίληψη που μπορούμε να εξετάσουμε με αφετηρία το συγκεκριμένο σενάριο είναι η αντίληψη ότι το σύνολο είναι το άθροισμα των στοιχείων μιας συλλογής αντικειμένων, εφόσον τα στοιχεία αυτά είναι αριθμοί.

Στο πέμπτο σενάριο, το οποίο δόθηκε μόνο στους μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, μια υποθετική καθηγήτρια μαθηματικών έθεσε στους μαθητές της το εξής ερώτημα: «Είναι σωστό να πω ότι το σύνολο {1, 2} ανήκει στο σύνολο {1, 2, 3, 4, 5};». Οι απαντήσεις των υποθετικών μαθητών εκφράζουν διαφορετικές αντιλήψεις σχετικά με τις έννοιες του ανήκειν και του υποσυνόλου. Η συζήτηση με τους συμμετέχοντες στοχεύει να εξηγήσει τις παρανοήσεις που εμφανίστηκαν στη βιβλιογραφία (Moru & Qhobela, 2013˙ Bagni, 2006) αλλά και ενδεχομένως να φανερώσει νέες αντιλήψεις σχετικά με τις δύο έννοιες.

Τέλος, στο έκτο σενάριο το οποίο δόθηκε μόνο στους μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου, μια υποθετική καθηγήτρια Μαθηματικών ζήτησε από τους μαθητές της να συγκρίνουν τα σύνολα Α = {1, 2, 3, 4, 5, ...} και Β = {1, 4, 9, 16, 25, ...} ως προς το πλήθος των στοιχείων τους. Οι απαντήσεις των υποθετικών μαθητών εκφράζουν τις τρεις κυριότερες παρανοήσεις των μαθητών σε σχέση με την πληθικότητα των απειροσυνόλων που αναδείχθηκαν από τη βιβλιογραφία (Moru & Qhobela, 2013˙ Na & Lee, 2006˙ Dreyfus & Tsamir, 2004˙ Tsamir & Dreyfus, 2002˙ Tsamir, 2001˙ Tsamir, 1999˙ Tirosh & Tsamir, 1996˙ Tsamir & Tirosh, 1992), δηλαδή τη μοναδικότητα του απείρου, τη μη-συγκρισιμότητα των απείρων και την σχέση μέρος-όλον, αλλά και την σωστή αντίληψη ότι δύο σύνολα είναι ίσα αν μπορεί να βρεθεί 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων τους.

Για την ανάλυση των δεδομένων από τις συνεντεύξεις υιοθετήσαμε μια «συμβατική» προσέγγιση ανάλυσης περιεχομένου (Hsieh & Shannon, 2005). Η προσέγγιση αυτή επικεντρώνεται στα γλωσσικά χαρακτηριστικά της επικοινωνίας, δίνοντας έμφαση στο περιεχόμενο του κειμένου και στο γενικότερο πλαίσιο. Η ανάλυση ξεκίνησε με την προσεκτική ανάγνωση όλων των συλλεγμένων δεδομένων. Στη συνέχεια, τα δεδομένα εξετάστηκαν λέξη προς λέξη για τον εντοπισμό και την κωδικοποίηση επαναλαμβανόμενων θεμάτων ή μοτίβων, υπογραμμίζοντας αρχικά λέξεις και εκφράσεις που αποκαλύπτουν το ιδίωμα μέσα στο οποίο νοηματοδοτείται η έννοια του συνόλου αλλά και τον προσδιορισμό του εκάστοτε νοήματος της έννοιας του συνόλου μέσα σε αυτό το ιδίωμα.

Για τον προσδιορισμό του ιδιώματος μελετήσαμε το πεδίο αναφοράς και τους ρόλους που υιοθετούνται από τους συνομιλητές (το αναλυτικό μας εργαλείο φαίνεται στο δίκτυο του παρακάτω σχήματος). Για τον προσδιορισμό του πεδίου εστιάσαμε στο θέμα της συζήτησης, το οποίο μπορεί να μετακινείται κατά την επικοινωνία (μπορεί για παράδειγμα να ξεκινήσει από τα σχολικά μαθηματικά, όπως τη λύση μιας εξίσωσης και στη συνέχεια να πάει σε καθημερινά πλαίσια, όπως την συζήτηση γύρω από το νόημα της λέξης ‘σύνολο’ σε μια καθημερινή αγοραπωλησία). Για τον προσδιορισμό των ρόλων που υιοθετούν οι συμμετέχοντες εστιάζουμε στην σχέση μεταξύ ερευνητή και μαθητή (π.χ. ορισμένοι μαθητές αντιμετωπίζουν τον ερευνητή σαν αυθεντία, άλλοι σαν καθηγητή μαθηματικών ο οποίος τους εξετάζει, ενώ άλλοι σαν έναν απλό ενήλικα που τους παίρνει συνέντευξη) και τον βαθμό βεβαιότητας που φαίνεται από τις απαντήσεις του εκάστοτε μαθητή. Το μέσο επικοινωνίας παραμένει σταθερό σε όλες τις συνεντεύξεις, αφού είναι σε κάθε περίπτωση ο προφορικός λόγος (με ελάχιστα παραδείγματα γραπτού λόγου ή χειρονομιών), με μικρές διαφορές να παρατηρούνται κυρίως στο είδος και των βαθμό της συμμετοχής των συμμετεχόντων (π.χ. κλειστές απαντήσεις, μονόλογος, διάλογος), για τον λόγο αυτό δεν θα μελετηθεί.



Σχήμα 3.1. Ερευνητικό εργαλείο ποιοτικής ανάλυσης

Στη συνέχεια, οι κωδικοί οργανώθηκαν σε κατηγορίες βάσει των σχέσεων και των συνδέσεων τους. Οι αναδυόμενες κατηγορίες οδήγησαν στον σχεδιασμό ενός ξεχωριστού δικτύου για κάθε συμμετέχοντα, μέσω του οποίου παρακολουθούνται οι μετακινήσεις του σε διαφορετικά γλωσσικά ιδιώματα αλλά και η εξέλιξη της έννοιας σαν αποτέλεσμα αυτών των μετακινήσεων. Ο συνδυασμός των δικτύων οδήγησε στον σχεδιασμό ενός συνδυαστικού δικτύου για τα ιδιώματα που αναδύονται από τις συνεντεύξεις.

Τέλος, αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις χρησιμοποιήθηκαν για να φωτίσουμε σημεία στα οποία η στατιστική ανάλυση των ποσοτικών μας δεδομένων δεν ήταν σε θέση να μας δώσει επαρκείς πληροφορίες, συγκεκριμένα για τις έννοιες του *ανήκειν*, του *υποσυνόλου* και του *κενού* συνόλου.

4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

4.1. Η νοηματοδότηση της έννοιας του συνόλου – Ποσοτικά αποτελέσματα.

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την έννοια του συνόλου, τις σχέσεις μεταξύ συνόλων συνόλων, τις έννοιες του ανήκειν και του υποσυνόλου και την πληθικότητα των απειροσυνόλων.

4.1.1. Αντιλήψεις των συμμετεχόντων για την έννοια του συνόλου

Δυο από τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου, οι οποίες εστίαζαν στην έννοια του συνόλου χρησιμοποιήθηκαν για τη χαρτογράφηση των αντιλήψεων των μαθητών για την έννοια του συνόλου στα μαθηματικά: 'πώς αντιλαμβάνεστε την έννοια «σύνολο» στα μαθηματικά;' (ερώτηση 1) και 'ποιο είναι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης «ΘΑΛΑΣΣΑ»' (ερώτηση 4). Η ανάλυση των απαντήσεων μας οδήγησε στη διάκριση των μαθητών σε τρεις κατηγορίες με βάση τις αντιλήψεις τους: (α) τους μαθητές που αποδίδουν στο σύνολο το νόημα της *συλλογής* αντικειμένων, (β) εκείνους που αποδίδουν στο σύνολο το νόημα του *αριθμού* και (γ) εκείνους που υιοθετούν ταυτόχρονα και τις δύο αντιλήψεις. Συγκεκριμένα, οι μαθητές που στην ερώτηση 1 χρησιμοποιούν λέξεις όπως ομάδα, κατηγορία ή συλλογή ή ακόμη και φράσεις όπως «το να βάζεις πολλά πράγματα, όλα μαζί», καθώς και μαθητές που στην ερώτηση 4 απάντησαν ότι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης θάλασσα είναι το {Θ, Α, Λ, Σ} ή το {Θ, Α, Α, Α, Λ, Σ, Σ}, μπορούμε να πούμε ότι ανήκουν στην πρώτη κατηγορία, η οποία βλέπει το σύνολο ως συλλογή. Από την άλλη μεριά, μαθητές που στην ερώτηση 1 χρησιμοποιούν λέξεις όπως πλήθος, άθροισμα, αποτέλεσμα ή φράσεις όπως «το πόσα είναι όλα μαζί», αλλά και μαθητές που στην ερώτηση 4 απάντησαν ότι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης θάλασσα είναι το 7 ή το 4, φαίνεται να βλέπουν το σύνολο ως *αριθμό*. Η τρίτη κατηγορία αποτελείται από τους μαθητές που έδωσαν κάποιον συνδυασμό των παραπάνω απαντήσεων, όπως για παράδειγμα εκείνους που στην ερώτηση 4 απάντησαν ότι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης θάλασσα είναι το 7 και το {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ} ή εκείνους που στην ερώτηση 1 χρησιμοποίησαν τη λέξη 'πλήθος' αλλά στην ερώτηση 4 μας είπαν ότι τι σύνολο των γραμμάτων της λέξης 'ΘΑΛΑΣΣΑ' είναι το {Θ, Α, Λ, Σ}.

Όπως φαίνεται στον πίνακα 1 πολύ από τους μαθητές αντιλαμβάνονται το σύνολο ως αριθμό ή έχουν μία διττή εικόνα για την έννοια του συνόλου, ένα φαινόμενο που δεν εκλείπει ούτε στις μεγαλύτερες σχολικές βαθμίδες. Περίπου το 1/3 των μαθητών στο τέλος του Δημοτικού και στο τέλος του Γυμνασίου φαίνεται να νοηματοδοτεί την έννοια του συνόλου αποκλειστικά ως συλλογή. Ένα μικρότερο ποσοστό φαίνεται να τη νοηματοδοτεί ως αριθμό και περίπου οι μισοί μαθητές αυτών των τάξεων έχουν διαμορφώσει μια μικτή αντίληψη. Τα 2/3 των μαθητών της Γ΄ Λυκείου αποδίδουν στην έννοια αποκλειστικά το νόημα της συλλογής, το 1/20 ως αριθμό και περίπου το 1/4 έχει μικτή αντίληψη. Η νοηματοδότηση της έννοιας φαίνεται να εξελίσσεται ουσιαστικά μόνο μεταξύ των μελλοντικών εκπαιδευτικών, αφού περίπου το 85% βλέπει το σύνολο ως συλλογή και μόλις ένας εμφανίζει μία διττή αντίληψη.

Πίνακας 4.1

Αντιλήψεις για τη φύση του συνόλου (ερωτήσεις 1 και 4)

Βαθμίδα	Δημοτικό	Γυμνάσιο	Λύκειο	Φοιτητές
Συλλογή	35,1%	34,9%	66,9%	84,5%
Αριθμός	20,2%	13,5%	5,2%	0,4%
Συλλογή & Αριθμός	44,7%	51,6%	27,9%	15,1%

Αν δώσουμε 2 βαθμούς στους συμμετέχοντες που αποδίδουν στο σύνολο μόνο το νόημα της συλλογής, 1 βαθμό σε εκείνους που έχουν μικτή εικόνα και 0 βαθμούς σε όσους βλέπουν το σύνολο αποκλειστικά ως αριθμό, τότε παρατηρούνται στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των βαθμίδων (H_3 = 135,890, p<0,001). Συγκεκριμένα, η μέση κατάταξη των μελλοντικών εκπαιδευτικών είναι σημαντικά υψηλότερη από τις υπόλοιπες βαθμίδες και ακολουθούσαν οι μαθητές Λυκείου. Οι διαφορές των μαθητών Γυμνασίου και των μαθητών Δημοτικού δεν είναι στατιστικά σημαντικές (p=0,539).

Πίνακας 4.2

Kruskal-Wallis Test για τη μέση κατάταξη συμμετεχόντων σε σχέση με την φύση ενός συνόλου

Τάξη	N	Mean Rank
Δημοτικό	116	226,29
Γυμνάσιο	127	233,99
Λύκειο	154	338,44
Φοιτητές	245	396,24

Αν κοιτάξουμε τις λέξεις που επέλεξαν να χρησιμοποιήσουν οι συμμετέχοντες της κάθε εκπαιδευτικής βαθμίδας (πίνακας 4.3), παρατηρούμε ότι για τις δύο νεότερες εκπαιδευτικές βαθμίδες, η συχνότερη λέξη που χρησιμοποιήθηκε ήταν το ‘άθροισμα/αποτέλεσμα’. Η λέξη ‘συλλογή’ χρησιμοποιήθηκε ελάχιστα ακόμη και από τους μαθητές του Λυκείου, ενώ η λέξη που προτιμήθηκε για να αποδώσει στο σύνολο το νόημα της συλλογής αντικειμένων, ήταν η λέξη ‘ομάδα’. Ιδιαίτερα στο Λύκειο, η λέξη ομάδα χρησιμοποιήθηκε από τους μισούς περίπου μαθητές.

Το γεγονός ότι οι μαθητές δεν χρησιμοποιούν σχεδόν καθόλου τη λέξη συλλογή θα μπορούσε να οδηγήσει στην υπόθεση ότι οι μαθητές δεν διδάχθηκαν ποτέ τον ορισμό του συνόλου όπως αυτός αναφέρεται στα σχολικά βιβλία. Αν δούμε τα ποσοστά των φοιτητών, στους οποίους δόθηκε ο ορισμός του Cantor για το σύνολο, οι μισοί περίπου υιοθέτησαν τη χρήση της λέξης 'συλλογή'. Ωστόσο, ακόμη και σε αυτούς, η λέξη 'ομάδα' είχε αρκετά υψηλό ποσοστό (περίπου 25%). Η επιλογή της λέξης 'ομάδα' ενδέχεται να σχετίζεται με την αντίληψη ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να είναι όμοια ή να συνδέονται από κάποια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα (συζητείται στην συνέχεια, βλ. πίνακα 4.6 και διάγραμμα 4.2).

Τέλος, οι λέξεις που παραπέμπουν στο νόημα του συνόλου ως αριθμός εμφανίζονται σε μικρότερα ποσοστά στο Λύκειο από ότι στις μικρότερες εκπαιδευτικές βαθμίδες και σε ακόμη μικρότερα ποσοστά μεταξύ των φοιτητών. Κάποιοι συμμετέχοντες χρησιμοποίησαν παραπάνω από δύο από τις παρακάτω λέξεις, ενώ υπήρχαν και συμμετέχοντες των οποίων οι απαντήσεις ήταν εκτός θέματος ή διατυπωμένες με τρόπο που δεν επέτρεπε μια ασφαλή κωδικοποίηση, για παράδειγμα «νομίζω ότι τα στοιχεία ενός συνόλου πρέπει να έχουν μια κοινή ιδιότητα» ή «κάτι που είναι συγκεντρωμένο».

Πίνακας 4.3

Λέξεις που χρησιμοποίησαν οι συμμετέχοντες για να ορίσουν την έννοια του συνόλου (ερώτηση 1)

Βαθμίδα	Δημοτικό	Γυμνάσιο	Λύκειο	Φοιτητές
Συλλογή	0,0%	1,9%	5,7%	48,5%
Ομάδα	18,9%	38,5%	45,1%	25,3%
Κατηγορία	0,0%	3,8%	4,1%	2,2%
Πλήθος	1,1%	8,7%	9,8%	5,2%
Άθροισμα/Αποτέλεσμα	43,2%	39,4%	11,5%	1,7%
Όλα μαζί/ολότητα	8,4%	1,9%	3,3%	17,9%
Εκτός θέματος/ακατανόητο	21,6%	12,6%	23,4%	18,8%
Δεν απάντησε	18,1%	18,1%	20,8%	6,5%

Στη δεύτερη ερώτηση του ερωτηματολογίου μας ρωτήσαμε τους μαθητές: «πιστεύετε ότι οι παρακάτω ομάδες αποτελούν ένα σύνολο;» Σκοπός τις ερώτησης είναι η μελέτη των αντιλήψεων των συμμετεχόντων σχετικά με την απαίτηση για τα στοιχεία ενός συνόλου να είναι *καλώς ορισμένα*. Τα ερωτήματα 2α και 2β έχουν ένα σαφές κριτήριο για την συμπερίληψη των στοιχείων ενώ το 2γ όχι (πίνακας 4.4). Συνεπώς, η μόνη συλλογή που δεν είναι καλά ορισμένη είναι η 2γ.

Τα ποσοστά σωστών απαντήσεων των συμμετεχόντων στα ερωτήματα 2α, 2β, 2γ ανα βαθμίδα φαίνονται στον πίνακα 4.4. Όπως βλέπουμε, στην ερώτηση 2γ τα ποσοστά σωστών απαντήσεων είναι μικρότερα από αυτά των ερωτημάτων 2α και 2β σε κάθε βαθμίδα. Στο ερώτημα 2α παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ($F_{3,638}$ = 9,805, p < 0,001). Το δείγμα χωρίστηκε σε δύο ομοιογενείς ομάδες. Το Δημοτικό είχε τη χαμηλότερη επίδοση ενώ οι άλλες τρεις βαθμίδες δεν είχαν διαφορές μεταξύ τους (p = 0,169). Στο ερώτημα 2β δεν παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ($F_{3,638}$ = 1,318, p = 0,267). Στο ερώτημα 2γ παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ($F_{3,638}$ = 31,468, p < 0,001). Το Λύκειο απάντησε χειρότερα από όλες τις άλλες βαθμίδες και ακολουθούσε το Γυμνάσιο. Το Δημοτικό απάντησε καλύτερα από τους μεγαλύτερους μαθητές ενώ οι φοιτητές είχαν την καλύτερη επίδοση από όλες τις βαθμίδες. Συγκεκριμένα, το δείγμα χωρίστηκε σε τρεις ομοιογενείς ομάδες. Το Λύκειο και το Γυμνάσιο ομαδοποιήθηκαν μαζί (p = 0,988). Το Γυμνάσιο ομαδοποιήθηκε επιπλέον μαζί με το Δημοτικό (p = 0,093), ενώ οι φοιτητές αποτέλεσαν μόνοι τους την τρίτη ομάδα.

Πίνακας 4.4

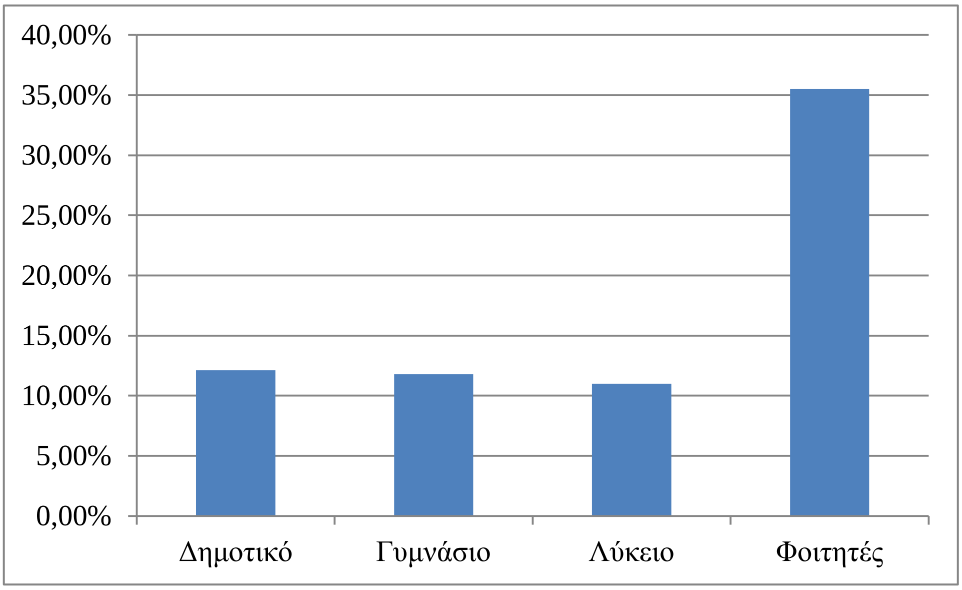
Ποσοστά σωστών απαντήσεων στα ερωτήματα 2α, 2β, 2γ ανά βαθμίδα

Βαθμίδα / Ερώτημα	Δημοτικό	Γυμνάσιο	Λύκειο	Φοιτητές
2α) Οι μαθητές του σχολείου που είναι άνω των 17 ετών	62,1%	79,5%	89,0%	78,4%
2β) Τα ιστορικά βιβλία μιας βιβλιοθήκης	82,8%	78,7%	83,1%	75,9%
2γ) Οι ψηλοί μαθητές μίας τάξης	39,7%	26,0%	24,0%	64,1%

Προκειμένου να θεωρήσουμε ότι ένας μαθητής έχει πλήρη κατανόηση της απαίτησης για τα στοιχεία ενός συνόλου να είναι καλώς ορισμένα, θα πρέπει να απαντάει «σωστό» στο 2α και στο 2β, αλλά «λάθος» στο 2γ. Στο παρακάτω ιστόγραμμα φαίνονται τα ποσοστά των συμμετεχόντων που απάντησαν επιτυχώς και στα τρία ερωτήματα. Όπως βλέπουμε, περίπου το 90% των μαθητών όλων των σχολικών βαθμίδων φαίνεται να μην μπορούν να διακρίνουν πότε τα στοιχεία ενός συνόλου είναι καλά ορισμένα. Τα ποσοστά σωστών απαντήσεων των φοιτητών είναι πολύ υψηλότερα, αλλά ακόμη και εκεί τα 2/3 απαντούν λάθος σε τουλάχιστον μία ερώτηση.

Διάγραμμα 4.1

Ποσοστά συμμετεχόντων που απάντησαν σωστά στα ερωτήματα 2α, 2β, 2γ ανά βαθμίδα.



Όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, αν δώσουμε 0 βαθμούς σε εκείνους που δεν απάντησαν σωστά σε κανένα από τα ερωτήματα 2α, 2β, 2γ, 1 βαθμό σε εκείνους που απάντησαν σωστά σε ένα από τα τρία ερωτήματα, 2 σε εκείνους που απάντησαν σωστά σε δύο ερωτήματα και 3 σε όσους απάντησαν σωστά σε όλα τα ερωτήματα, τότε οι φοιτητές απαντούν πολύ καλύτερα από τις τρεις σχολικές βαθμίδες (H_3 = 32,632, p<0,001). Οι διαφορές μεταξύ όλων των βαθμίδων σε ζευγάρια, όπως προκύπτουν με χρήση του Mann-Whitney test, δείχνουν ότι οι μαθητές Λυκείου απαντούν λίγο καλύτερα από τους νεότερους μαθητές αλλά οι διαφορές δεν είναι στατιστικά σημαντικές (p=0,180 με το Γυμνάσιο και p=0,185 με το Δημοτικό), ενώ η μέση κατάταξη των μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου είναι η ίδια (p = 0,991).

Πίνακας 4.5

Kruskal-Wallis Test για τη μέση κατάταξη συμμετεχόντων στα ερωτήματα 2α, 2β, 2γ

Τάξη	N	Mean Rank
Δημοτικό	116	285,16
Γυμνάσιο	127	285,34
Λύκειο	154	306,81
Φοιτητές	245	366,68

Ένα κυρίαρχο στοιχείο της νοηματοδότησης της έννοιας του συνόλου από τους μαθητές φαίνεται να είναι η ιδέα ότι τα στοιχεία ενός συνόλου πρέπει να είναι όμοια (να διέπονται από μια κοινή ιδιότητα). Αυτή η αντίληψη εξετάσθηκε μέσω των ερωτημάτων 2δ, 2ε και 2στ (πίνακας 4.6), αλλά και μέσω της ερώτησης 3 (Διάγραμμα 4.2).

Στα ερωτήματα 2δ και 2ε δίνονταν δύο σύνολα ομοειδών στοιχείων, το {2, 4, 6, 8} και το {α, β, γ, δ}. Στο ερώτημα 2στ όμως, δίνονταν το σύνολο {2, 4, α, β} που περιέχει ανόμοια στοιχεία, δηλαδή δύο αριθμούς και δύο γράμματα. Όπως βλέπουμε στον πίνακα 4.5, τα ποσοστά σωστών απαντήσεων στο 2στ ήταν πολύ χαμηλότερα σε σχέση με τα ερωτήματα 2δ και 2ε, σε κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα, άρα πράγματι η συγκεκριμένη ερώτηση δυσκόλεψε περισσότερο τους συμμετέχοντες.

Στο ερώτημα 2δ παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ($F_{3,638}$ = 14,486, p < 0,001). Το δείγμα χωρίστηκε σε δύο ομοιογενείς ομάδες. Οι φοιτητές είχαν την καλύτερη επίδοση ενώ οι άλλες τρεις βαθμίδες δεν είχαν διαφορές μεταξύ τους (p = 0,351). Επίσης, στο ερώτημα 2ε παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ($F_{3,638}$ = 16,372, p < 0,001). Το δείγμα χωρίστηκε πάλι σε δύο ομοιογενείς ομάδες με τους φοιτητές να έχουν την καλύτερη επίδοση και τις άλλες τρεις βαθμίδες να μην έχουν διαφορές μεταξύ τους (p = 0,100). Στο ερώτημα 2στ που φάνηκε να δυσκολεύει όλους τους συμμετέχοντες, δεν παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των τεσσάρων βαθμίδων (p = 0,167).

Πίνακας 4.6

Ποσοστά σωστών απαντήσεων στα ερωτήματα 2δ, 2ε, 2στ ανά βαθμίδα

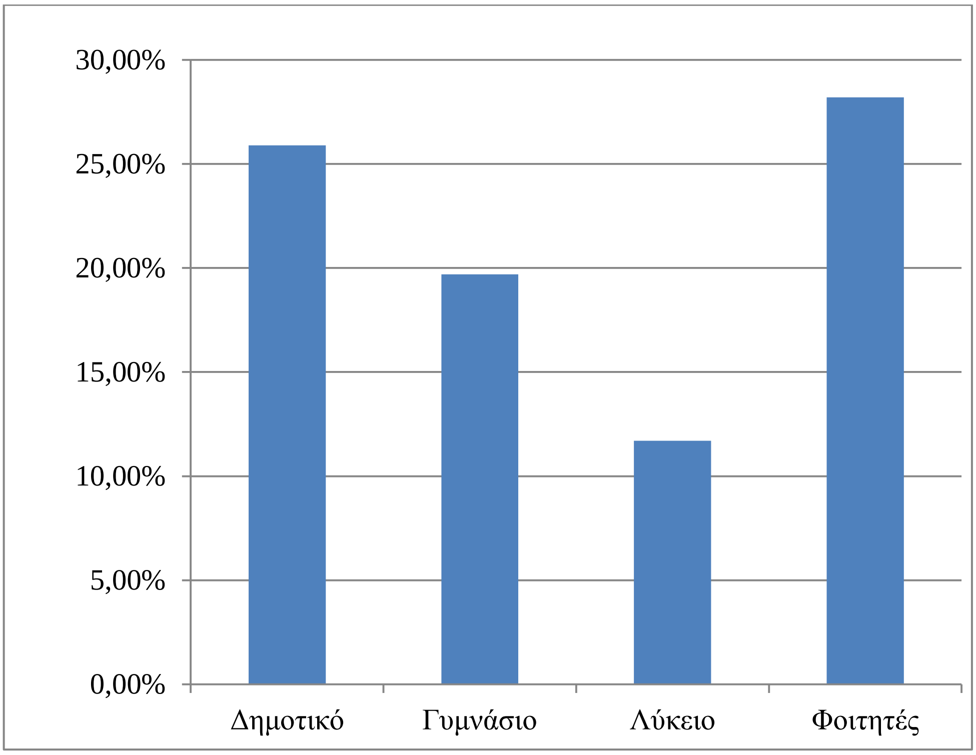
Ερώτημα \ Βαθμίδα	Δημοτικό	Γυμνάσιο	Λύκειο	Φοιτητές
2δ) 2, 4, 6, 8	65,5%	68,5%	74,0%	90,6%
2ε) α, β, γ, δ	52,6%	60,6%	65,6%	84,1%
2στ) 2, 4, α, β	21,6%	22,8%	18,8%	28,2%

Στην ερώτηση 3, ρωτήσαμε τους συμμετέχοντες αν πιστεύουν ότι «τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να έχουν κάποια κοινή ιδιότητα». Όπως φαίνεται στο παρακάτω ιστόγραμμα, η παρανόηση ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να έχουν κάποια κοινή ιδιότητα όχι απλώς δεν εκλείπει όσο προχωρούμε από το Δημοτικό προς το Λύκειο, αλλά αντιθέτως γίνεται ισχυρότερη.

Οι διαφορές που παρατηρήθηκαν ήταν στατιστικά σημαντικές ($F_{3,638}$ = 5,541, p = 0,267). Συγκεκριμένα, το δείγμα χωρίστηκε σε δύο ομοιογενείς υπο-ομάδες. Η πρώτη υπο-ομάδα περιλάμβανε το Λύκειο και το Γυμνάσιο (p = 0, 425), ενώ η δεύτερη υπο-ομάδα περιλάμβανε πάλι το Γυμνάσιο, μαζί με το Δημοτικό και τους φοιτητές (p = 0,371). Σε γενικές γραμμές θα λέγαμε ότι το Λύκειο απαντά χειρότερα από όλες τις βαθμίδες, ακολουθεί το Γυμνάσιο, ενώ το Δημοτικό μαζί με τους φοιτητές έχει την καλύτερη επίδοση.

Διάγραμμα 4.2

Ποσοστά σωστών απαντήσεων στην ερώτηση 3 ανά βαθμίδα.



Όπως προέκυψε από τα αποτελέσματα μας, οι ερωτήσεις 2στ και 3 που εξετάζουν την εμφάνιση της ίδιας αντίληψης, έχουν σχετικά υψηλή συσχέτιση μεταξύ τους (συντελεστής συσχέτισης = 0,321, p <0,001), κάτι που εξηγεί τα ιδιαίτερα χαμηλά ποσοστά στην ερώτηση 2στ για όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες. Συγκεκριμένα, το 76% των όλων των συμμετεχόντων ήταν συνεπές, δηλαδή απαντούσε σωστά και στις δύο ερωτήσεις ή λάθος και στις δύο ερωτήσεις, ενώ το 24% απαντούσε σωστά σε μία από τις δύο ερωτήσεις όμως λάθος στην άλλη.

Το 65% όλων των συμμετεχόντων απάντησε λάθος και στις δύο ερωτήσεις. Οι συγκεκριμένοι συμμετέχοντες φαίνεται να θεωρούν ότι η συλλογή {2, 4, α, β} δεν θα μπορούσε να θεωρηθεί ως σύνολο αφού περιέχει ανόμοια στοιχεία, δηλαδή αριθμούς και γράμματα του ελληνικού αλφαβήτου, ενώ οι συλλογές (1, 2, 3, 4} και {α, β, γ, δ} μπορούν να θεωρηθούν ως σύνολο αφού έχουν *όμοια στοιχεία*, δηλαδή στοιχεία που έχουν την *κοινή ιδιότητα* να είναι όλα αριθμοί ή όλα γράμματα αντίστοιχα.

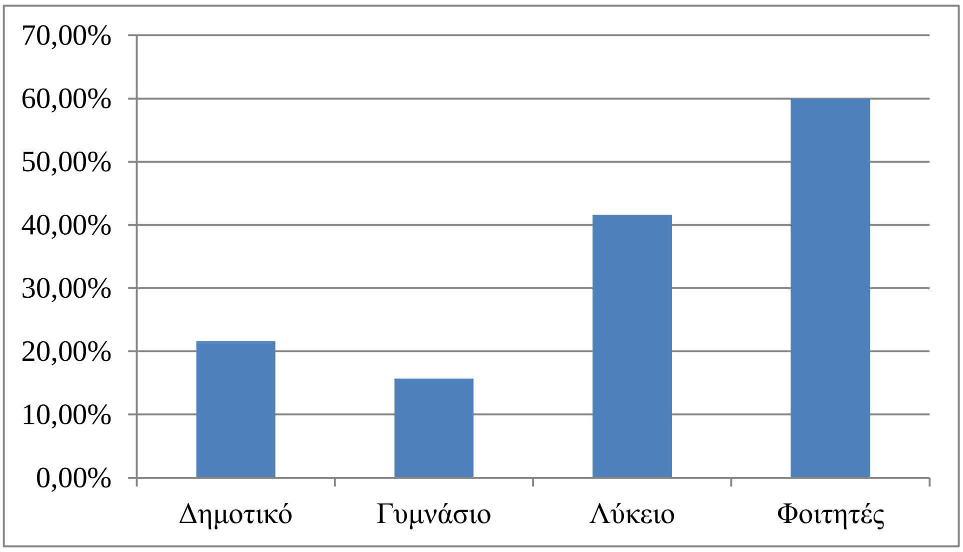
Στην ερώτηση 4 ζητήσαμε από τους μαθητές να προσδιορίσουν το σύνολο των γραμμάτων της λέξης ΘΑΛΑΣΣΑ. Οι μαθητές είχαν τέσσερεις επιλογές, (α) το {4}, (β) το {7}, (γ) το {Θ,Α,Λ,Σ} και (δ) το {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ} και έπρεπε να επιλέξουν όσες από αυτές θεωρούσαν ότι είναι σωστές. Η συγκεκριμένη ερώτηση, χρησιμοποιήθηκε για να προσδιορίσουμε τις αντιλήψεις των συμμετεχόντων για τη φύση του συνόλου (πίνακας 4.1) αλλά και για την ιδιότητα των στοιχείων ενός συνόλου να είναι διακεκριμένα. Οι μαθητές που απάντησαν σωστά στην συγκεκριμένη ερώτηση, δηλαδή εκείνοι που απάντησαν ότι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης 'ΘΑΛΑΣΣΑ' είναι το {Θ,Α,Λ,Σ}, θεωρούμε ότι αντιλαμβάνονται το σύνολο ως συλλογή διακεκριμένων στοιχείων.

Όπως φαίνεται στο παρακάτω ιστόγραμμα, το Γυμνάσιο είχε το χαμηλότερο ποσοστό σωστών απαντήσεων αφού μόλις το 15,7% των μαθητών απάντησαν σωστά στην συγκεκριμένη ερώτηση. Περίπου το 1/5 των μαθητών του Δημοτικού και λίγο λιγότεροι από τους μισούς μαθητές Λυκείου απάντησαν σωστά στην ερώτηση 4. Την καλύτερη επίδοση είχαν οι φοιτητές με ποσοστών 60% σωστών απαντήσεων.

Στην ερώτηση 4 παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των βαθμίδων ($F_{3,638}$ = 34,071, p < 0,001). Συγκεκριμένα, το δείγμα χωρίστηκε σε τρεις ομοιογενείς ομάδες. Το Δημοτικό και το Γυμνάσιο ομαδοποιήθηκαν μαζί (p=0,754). Το Λύκειο αποτέλεσε μόνο του τη δεύτερη ομάδα με σημαντικά καλύτερη επίδοση από τις προηγούμενες βαθμίδες και οι αποτέλεσαν μόνοι τους την τρίτη ομάδα έχοντας την καλύτερη επίδοση.

Διάγραμμα 4.3

Ποσοστά σωστών απαντήσεων στην ερώτηση 4 ανά βαθμίδα.



Μέσω των ερωτήσεων 4 και 8, μπορούμε να εξετάσουμε τα ποσοστά των μαθητών που απαιτούν από τα στοιχεία ενός συνόλου να είναι διακεκριμένα (ανεξαρτήτως από το αν βλέπουν το σύνολο ως συλλογή ή ως αριθμό).

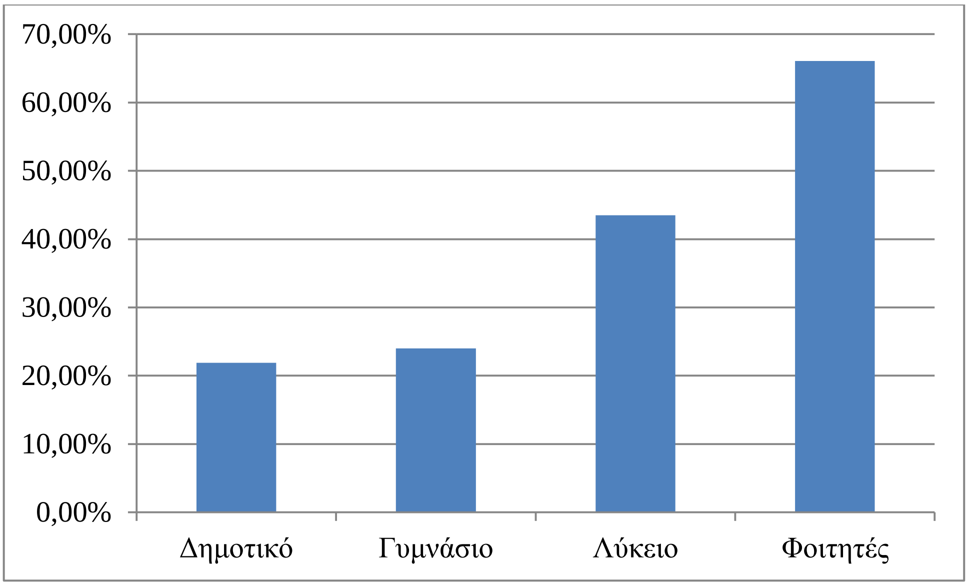
Στην ερώτηση 4, υποθέτουμε ότι οι συμμετέχοντες που μεταξύ των επιλογών τους στην ερώτηση 4 απάντησαν ήταν είτε το {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ} είτε το {7}, έχουν την παρανόηση ότι τα στοιχεία ενός συνόλου δεν χρειάζεται να είναι διακεκριμένα, ενώ όσοι δεν επιλέγουν καμία από τις δύο αυτές απαντήσεις (επιλέγουν το {Θ,Α,Λ,Σ} ή/και το {4}) δεν έχουν την συγκεκριμένη παρανόηση. Στο παρακάτω ιστόγραμμα φαίνονται τα ποσοστά των εκείνων που απαιτούν από τα στοιχεία ενός συνόλου να είναι διακεκριμένα.

Μόλις το 21,9% των μαθητών του Δημοτικού, το 24% των μαθητών Γυμνασίου και λίγο λιγότεροι από τους μισούς μαθητές Λυκείου φαίνεται να έχουν την τυπική μαθηματική αντίληψη για την συμπερίληψη διακεκριμένων στοιχείων σε ένα σύνολο. Τα 2/3 των συμμετεχόντων φοιτητών φαίνεται να έχει την συγκεκριμένη αντίληψη.

Στην συγκεκριμένη περίπτωση εμφανίστηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές ($F_{3,634}$=35,256, $p<0{,}001$). Οι μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού και της Γ΄ Γυμνασίου οποίοι ομαδοποιήθηκαν σε μία ομοιογενή ομάδα (p=0,986), ενώ οι απαντήσεις των μαθητών της Γ΄ Λυκείου και των φοιτητών διέφεραν τόσο από τις νεότερες βαθμίδες όσο και μεταξύ τους και κατηγοριοποιήθηκαν ξεχωριστά.

Διάγραμμα 4.4

Ποσοστά συμμετεχόντων που απαιτούν από τα στοιχεία ενός συνόλου να είναι διακεκριμένα ανά βαθμίδα.



Στην $8^η$ ερώτηση του ερωτηματολογίου, ζητήσαμε από τους συμμετέχοντες να προσδιορίσουν το σύνολο Δ που έχει για στοιχεία του όλα τα στοιχεία του συνόλου Α={1,2,3} και όλα τα στοιχεία του συνόλου Β={3,4,5,6}. Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο της μεθοδολογίας, οι μαθητές του Δημοτικού δεν εξετάστηκαν στην συγκεκριμένη ερώτηση. Στον πίνακα 4.7 βλέπουμε ότι το 1/3 των μαθητών Γυμνασίου δέχεται την συμπερίληψη μη διακεκριμένων στοιχείων εντός του συνόλου. Το αντίστοιχο ποσοστό για τους μαθητές Γυμνασίου είναι πολύ χαμηλό ενώ για του φοιτητές είναι αμελητέο.

Οι μαθητές που δεν απάντησαν στην συγκεκριμένη ερώτηση θεωρήθηκαν ότι απαντούν λάθος. Αν όμως θεωρήσουμε τους συγκεκριμένους μαθητές ως ελλείπουσες τιμές και δούμε μαζί τις ερωτήσεις 4 και 8, βλέπουμε ότι το 56,3% των μαθητών Γυμνασίου που δέχεται την συμπερίληψη μη διακεκριμένων στοιχείων στην ερώτηση 4, δέχεται την συμπερίληψη μη διακεκριμένων στοιχείων και στην ερώτηση 8. Το αντίστοιχο ποσοστά για το Γυμνάσιο ήταν μόλις το 10,2% και για τους φοιτητές το αμελητέο ποσοστό του 0,8% (2 φοιτητές).

Πίνακας 4.7

Απαντήσεις συμμετεχόντων στην ερώτηση 8

Βαθμίδα	Γυμνάσιο	Λύκειο	Φοιτητές
Σωστό {1,2,3,4,5,6}	26,8%	61,7%	93,1%
Απαντά {1,2,3,3,4,5,6}	30,7%	8,4%	0,8%
Λάθος	42,5%	29,9%	6,1%

Με την ερώτηση 8 εξετάσαμε επιπλέον και την κατανόηση των συμμετεχόντων σε σχέση με την έννοια της *ένωσης*. Παρότι η έννοια της ένωσης χρησιμοποιείται στα Μαθηματικά με τρόπο που αναμένεται να συμφωνεί με τη διαίσθηση των μαθητών, είδαμε ότι το 42,5% των μαθητών του Γυμνασίου και το 29,9% των μαθητών Λυκείου απάντησε λάθος στην συγκεκριμένη ερώτηση. Για παράδειγμα, κάποιοι μαθητές πρόσθεταν τα αντίστοιχα στοιχεία των δύο συνόλων και απαντούσαν ότι το σύνολο Δ θα είναι το {4,6,8,6} ή το {6,8,10}. Οι περισσότεροι όμως μαθητές που απάντησαν λάθος, έδωσαν απαντήσεις όπως «όχι» ή «δεν ξέρω» ή απέφυγαν να απαντήσουν. Γενικά οι φοιτητές απαντούν πολύ καλύτερα από τους μαθητές Λυκείου, οι οποίοι απαντούν πολύ καλύτερα από τους μαθητές Γυμνασίου (H_2=154,673, $p<0,001$).

Το υπο-ερώτημα 8β με το οποίο επιχειρήσαμε να εξετάσουμε τις αντιλήψεις των συμμετεχόντων σε σχέση με την έννοια της τομής δύο συνόλων, θεωρήθηκε ακατάλληλο. Η τομή των συνόλων που δόθηκαν στους συμμετέχοντες στο 8β ήταν κενή, κάτι που οδήγησε σε μια σειρά από απαντήσεις των συμμετεχόντων που δεν σχετίζονταν με την έννοια της τομής. Για τον λόγο αυτό αποφασίσαμε να μην αναλύσουμε το συγκεκριμένο ερώτημα.

Στοχεύοντας στο να εξετάσουμε αν υπάρχουν διαφορές μεταξύ των τεσσάρων βαθμίδων σε σχέση με την κατανόηση της έννοιας του συνόλου ως (1) *συλλογή*, (2) *καλώς ορισμένων* και (3) *διακεκριμένων* στοιχειών, τα οποία (4) δεν έχουν κατ' ανάγκη κάποια *κοινή ιδιότητα*, δώσαμε 0 βαθμούς σε όσους βλέπουν το σύνολο αποκλειστικά ως αριθμό, 1 βαθμό σε εκείνους που έχουν μεικτή εικόνα και 2 βαθμούς στους συμμετέχοντες που αποδίδουν στο σύνολο μόνο το νόημα της συλλογής (αντιλήψεις για την φύση του συνόλου), επιπλέον δώσαμε 1 βαθμό σε όσους απάντησαν σωστά και στα τρία ερωτήματα 2α, 2β, 2γ (διάκριση καλώς ορισμένων στοιχείων), 1 βαθμό σε όσους απάντησαν σωστά στην ερώτηση 3 (μη απαίτηση για κοινή ιδιότητα μεταξύ των στοιχείων ενός συνόλου) και 1 βαθμό σε όσους απάντησαν σωστά στην ερώτηση 4 (διάκριση διακεκριμένων στοιχείων), με αποτέλεσμα να εμφανιστούν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των βαθμίδων (H_3 = 172,057, $p<0{,}001$). Συγκεκριμένα, η μέση κατάταξη των μαθητών Δημοτικού δεν διαφέρει από εκείνη των μαθητών Γυμνασίου ($p=0{,}649$), οι μαθητές Λυκείου έχουν σημαντικά καλύτερη μέση κατάταξη από τους νεότερους μαθητές ($p<0{,}001$) και οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί έχουν την καλύτερη μέση κατάταξη ($p<0{,}001$).

Πίνακας 4.8
Kruskal-Wallis Test για τη μέση κατάταξη συμμετεχόντων σε σχέση με την έννοια του συνόλου

Τάξη	N	Mean Rank
Δημοτικό	116	224,78
Γυμνάσιο	127	213,45
Λύκειο	154	308,05
Φοιτητές	245	431,76

4.1.2. Αντιλήψεις των συμμετεχόντων σχετικά με το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου.

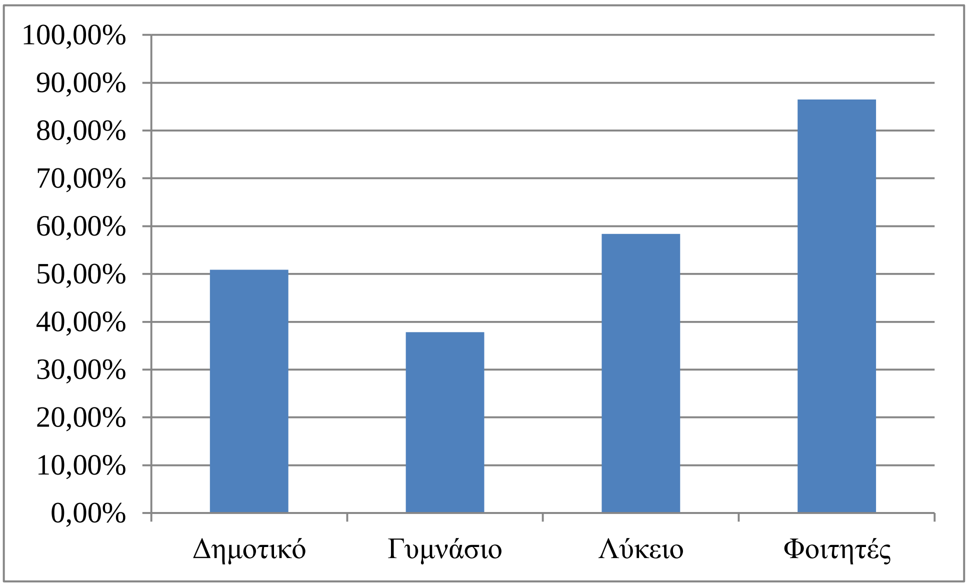
Με τις ερωτήσεις 5 και 6 του ερωτηματολογίου και με τα υποερωτήματα 9στ έως 9θ, επιχειρήσαμε να προσδιορίσουμε τις αντιλήψεις των συμμετεχόντων σχετικά με τις έννοιες του *κενού συνόλου*, του *μονοσυνόλου* και του *απειροσυνόλου*, οι οποίες χρησιμοποιούνται ευρέως στα Μαθηματικά αλλά σχεδόν ποτέ στην καθομιλουμένη.

Στο παρακάτω ιστόγραμμα φαίνονται τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων των συμμετεχόντων ανά βαθμίδα, στο ερώτημα 5α στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να απαντήσουν αν «οι φυσικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 8 και μικρότεροι από το 10» αποτελούν ένα σύνολο. Τα ποσοστά των μαθητών που είχαν την αντίληψη ότι ένα σύνολο δεν μπορεί να έχει μόνο ένα στοιχείο ήταν αρκετά υψηλά, ιδιαίτερα για τους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου. Περίπου οι μισοί μαθητές Δημοτικού, τα 2/3 των μαθητών του Γυμνασίου και λίγο λιγότεροι από τους μισούς μαθητές Λυκείου απορρίπτουν την ύπαρξη μονοσυνόλων.

Στο ερώτημα 5α παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των βαθμίδων ($F_{3,638}$ = 40,265, p<0,001). Συγκεκριμένα, το δείγμα χωρίστηκε σε τρεις ομοιογενείς ομάδες. Οι μαθητές Δημοτικού ομαδοποιήθηκαν μία φορά με τους μαθητές Γυμνασίου (p=0,093) και μία με τους μαθητές Λυκείου (p=0,538), ενώ οι φοιτητές αποτέλεσαν μόνοι τους την τρίτη ομάδα. Οι μαθητές Λυκείου απαντούν σημαντικά καλύτερα από εκείνους του Γυμνασίου και οι φοιτητές καλύτερα από όλες τις βαθμίδες.

Διάγραμμα 4.5

Ποσοστά σωστών απαντήσεων στην ερώτηση 5α ανά βαθμίδα.

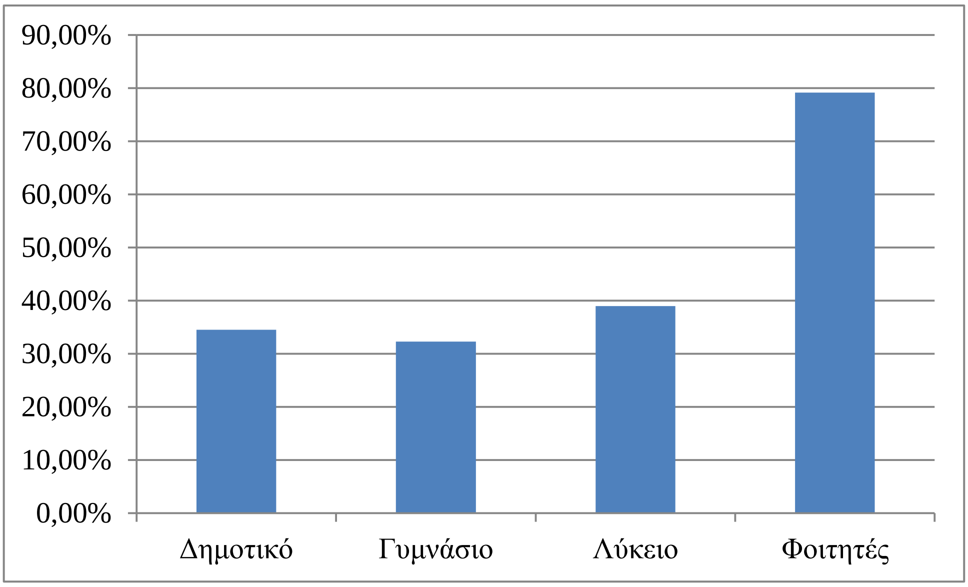


Στο διάγραμμα 4.6 φαίνονται τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων των συμμετεχόντων ανά βαθμίδα, στο ερώτημα 5β στο οποίο ζητείται από τους μαθητές να απαντήσουν αν «οι φυσικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 8 και μικρότεροι από το 9» αποτελούν ένα σύνολο. Όπως φαίνεται από τις απατήσεις των μαθητών, περίπου το 1/3 σε κάθε σχολική βαθμίδα έχει την αντίληψη ότι ένα σύνολο δεν μπορεί να είναι κενό. Οι πολύ μικρές διαφορές στις απαντήσεις των μαθητών δεν ήταν στατιστικά σημαντικές αφού οι τρεις βαθμίδες ομαδοποιούνται μαζί σε μία ομοιογενή υπο-ομάδα του πληθυσμού (p=0,658). Οι φοιτητές αποτελούν μόνοι τους μία ομοιογενή υπο-ομάδα ($F_{3,638}$ = 47,439, p<0,001).

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι μαθητές Λυκείου έρχονται σε επαφή με την έννοια του κενού ανεξαρτήτως του προσανατολισμού σπουδών που θα επιλέξουν. Είναι λοιπόν πολύ πιθανό για αυτούς τους μαθητές, παρότι γνωρίζουν την ύπαρξη του κενού, να μην θεωρούν ότι το κενό είναι ένα σύνολο, αλλά να βλέπουν το κενό σαν μια ανεξάρτητη μαθηματική οντότητα. Από την άλλη μεριά, οι φοιτητές φαίνεται να είναι εξοικειωμένοι με την έννοια του κενού συνόλου αφού απαντούν πολύ καλύτερα από τους μαθητές Λυκείου.

Διάγραμμα 4.6

Ποσοστά σωστών απαντήσεων στην ερώτηση 5β ανά βαθμίδα.



Στα ερωτήματα 9στ έως 9θ του ερωτηματολογίου (πίνακας 4.9), δώσαμε στους μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου και τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς τέσσερεις εκφράσεις που περιείχαν το σύμβολο «∅» και τους ζητήσαμε να τις χαρακτηρίσουν ως αληθείς ή ψευδείς. Οι μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού δεν εξετάστηκαν στην συγκεκριμένη ερώτηση καθώς το σύμβολο «∅» δεν εμφανίζεται σε καμία τάξη του Δημοτικού.

Σε όλα τα ερωτήματα εμφανίστηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές (στο 9στ $F_{2,523}$=13,776, στο 9ζ $F_{2,523}$=38,934, στο 9η $F_{2,523}$=33,895, στο 9θ $F_{2,523}$=26,309, p<0,001). Στο ερώτημα 9στ το δείγμα χωρίστηκε σε δύο ομοιογενείς υπο-ομάδες, η μία αποτελούνταν από το Γυμνάσιο και το Λύκειο (p=0,063 που είναι λίγο μεγαλύτερο από το όριο του 0,05) και η άλλη από τους φοιτητές. Στα υπόλοιπα ερωτήματα οι τρεις βαθμίδες ομαδοποιήθηκαν ξεχωριστά. Γενικά, οι φοιτητές είχαν την καλύτερη επίδοση σε όλα τα ερωτήματα, ακολουθούσαν οι μαθητές Λυκείου και στο τέλος ήταν οι μαθητές Γυμνασίου.

Πίνακας 4.9

Ποσοστά σωστών απαντήσεων στα ερωτήματα 9στ, 9ζ, 9η και 9θ ανά βαθμίδα

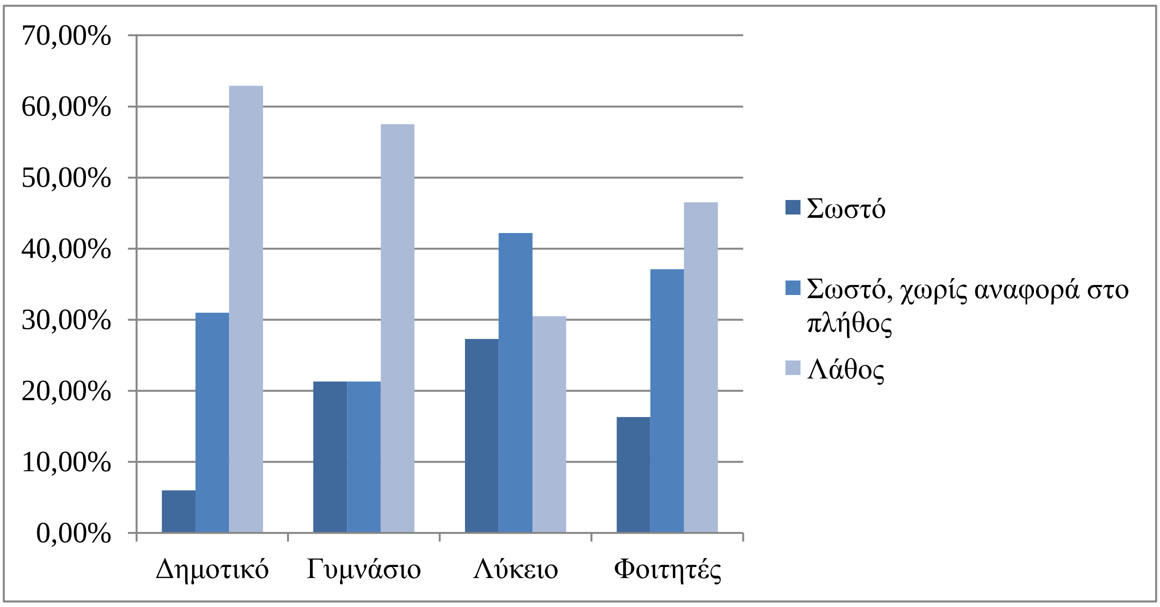
Βαθμίδα / Ερώτημα	Γυμνάσιο	Λύκειο	Φοιτητές
9στ) $\varnothing = \{\varnothing\}$	43,3%	55,8%	70,2%
9ζ) $\varnothing = \{\ \}$	41,7%	61,0%	83,3%
9η) $\varnothing = \{0\}$	52,8%	64,3%	72,6%
9θ) $\varnothing = 0$	42,5%	61,7%	78,4%

Στην ερώτηση 6, η οποία αποτελεί ακριβή μετάφραση μιας ερώτησης του ερωτηματολογίου των Fischbein και Baltsan (1998), εξετάζουμε το ποσοστό των συμμετεχόντων που έχουν την αντίληψη ότι το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου πρέπει να είναι πεπερασμένο. Αυτό που τους ζητήσαμε να απαντήσουν ήταν, αν «η συλλογή 2 , 4 , 6 , 8 , 10, . . .» ορίζει ένα σύνολο και αν «όλοι οι φυσικοί αριθμοί που περιέχουν το ψηφίο 8» ορίζουν ένα σύνολο και αν ναι, να γράψουν πόσα στοιχεία θα έχει το εκάστοτε σύνολο, αλλιώς να εξηγήσουν γιατί πιστεύουν ότι δεν ορίζουν ένα σύνολο. Θεωρούμε πλήρη την απάντηση των μαθητών/φοιτητών οι οποίοι: (α) απαντούν καταφατικά και (β) δηλώνουν ότι το σύνολο θα έχει άπειρα στοιχεία. Προφανώς, οι συγκεκριμένοι μαθητές/φοιτητές δεν έχουν την συγκεκριμένη αντίληψη. Αν κάποιος δώσει σωστή απάντηση χωρίς όμως να κάνει αναφορά στο πλήθος, αν για παράδειγμα στο ερώτημα 6α απαντήσει απλώς «Ναι», ή «Ναι, {2,4,6,8,10,...}», ή «Όλοι οι ζυγοί», ή ακόμη και «$\{x \in \mathbb{N} | x$, άρτιος$\}$», θεωρούμε ότι δεν έχει την εν λόγω αντίληψη, ωστόσο θεωρούμε την απάντηση μη πλήρη αφού δεν έκανε ρητή αναφορά στο πλήθος των στοιχείων. Ένας περιορισμός της συγκεκριμένης ερώτησης είναι ότι, στην περίπτωση που λάβουμε την απάντηση «Ναι» χωρίς κάποια αιτιολόγηση, δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την εμφάνιση ή μη εμφάνιση της αντίληψης. Στην περίπτωση που λάβουμε την απάντηση «Όχι», χωρίς κάποια αιτιολόγηση, θεωρούμε την απάντηση λανθασμένη, πάλι όμως δεν μπορούμε να αποφανθούμε για την εμφάνιση ή μη εμφάνιση της αντίληψης. Υπήρχαν μαθητές/φοιτητές που έδιναν απαντήσεις όπως «Ναι, διότι όλοι οι αριθμοί είναι άρτιοι» και άλλοι που απαντούσαν «Όχι, διότι το σύνολο δεν είναι καλά ορισμένο», εστίαζαν δηλαδή σε παράγοντες διαφορετικούς από το πλήθος των στοιχείων ή δεν αναγνώριζαν τη σημασία από τις τρεις τελείες στο τέλος της συλλογής αριθμών, δίνοντας απαντήσεις όπως «{2,4,6,8,10}» ή «Ναι, 5 στοιχεία».

Στους μαθητές που απάντησαν πλήρως δώσαμε 2 βαθμούς, σε αυτούς που απάντησαν σωστά, χωρίς να κάνουν αναφορά στο πλήθος των στοιχείων δώσαμε 1 βαθμό και σε αυτούς που απάντησαν λάθος 0. Τα αντίστοιχα ποσοστά φαίνονται στο παρακάτω ιστόγραμμα.

Διάγραμμα 4.6

Απαντήσεις συμμετεχόντων στην ερώτηση 6α ανά βαθμίδα



Η μέση κατάταξη των μαθητών Λυκείου ήταν στην υψηλότερη θέση, ακολουθούσαν οι φοιτητές, μετά το Γυμνάσιο και τέλος το Δημοτικό (H_3 = 35,735, p<0,001). Όπως προέκυψε από τις συγκρίσεις των βαθμίδων ανά δύο με χρήση του Mann-Whitney test, οι διαφορές μεταξύ των μαθητών Λυκείου και των φοιτητών ήταν στατιστικά σημαντικές (p<0,001), οι διαφορές μεταξύ των φοιτητών και των μαθητών Γυμνασίου δεν ήταν στατιστικά σημαντικές (p=0,259), οι διαφορές μεταξύ Γυμνασίου και Δημοτικού δεν ήταν στατιστικά σημαντικές (p=0,097) και οι διαφορές μεταξύ φοιτητών και Δημοτικού ήταν στατιστικά σημαντικές (p<0,001).

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, τα αποτελέσματα σε αυτή την ερώτηση είναι πολύ πιθανό να δείχνουν κάτι διαφορετικό από αυτό που η ερώτηση υποτίθεται ότι εξετάζει. Για παράδειγμα, οι μικρότεροι μαθητές ενδέχεται να απαντούν λάθος σε μεγαλύτερο ποσοστό επειδή απλά ερμηνεύουν λάθος την ερώτηση. Ένα άλλο στοιχείο που μας οδηγεί σε αυτό το συμπέρασμα είναι το πολύ μεγάλο ποσοστό μαθητών και φοιτητών που δεν απάντησαν στη ερώτηση. Το 12,9% των μαθητών Δημοτικού, το 30,7% των μαθητών Γυμνασίου, το 20,8% των μαθητών Λυκείου και το 19,6% των φοιτητών δεν απάντησε στην συγκεκριμένη ερώτηση. Οι μαθητές αυτοί έχουν συμπεριληφθεί στις λάθος απαντήσεις.

Πίνακας 4.10

Kruskal-Wallis Test για τη μέση κατάταξη συμμετεχόντων στο ερώτημα 6α

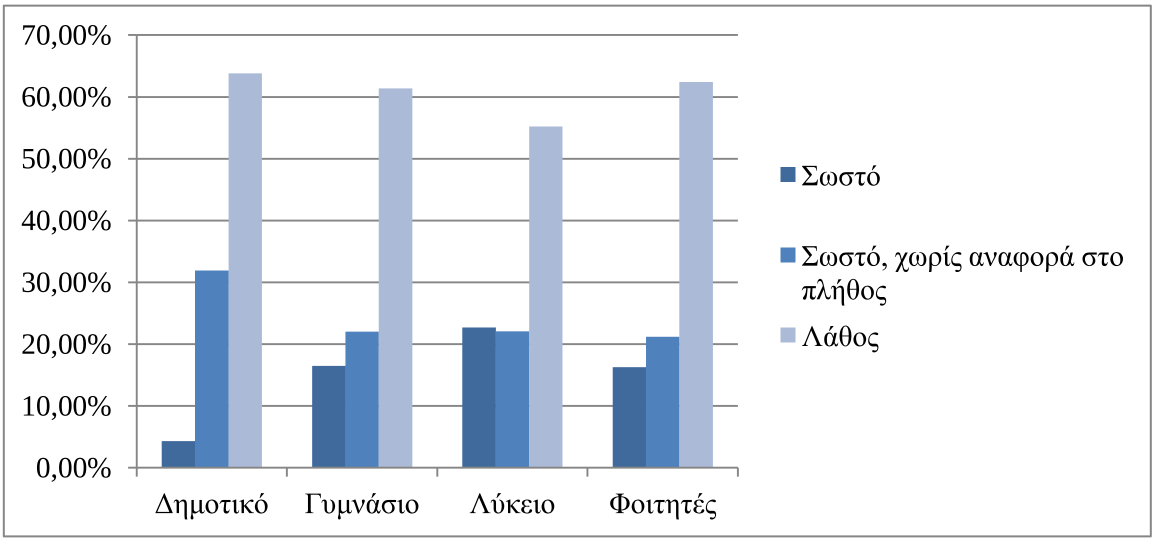
	Τάξη	N	Mean Rank
Ε6α	Δημοτικό	116	261,60
	Γυμνάσιο	127	301,44
	Λύκειο	154	382,42
	Φοιτητές	245	321,97

Παρόλο που το υποερώτημα 6β μελετά την εμφάνιση της ίδιας αντίληψης με το υποερώτημα 6α, μόνο τα ποσοστά των μαθητών του Δημοτικού ήταν συνεπή στα δύο ερωτήματα. Ιδιαίτερα οι μαθητές Λυκείου και οι φοιτητές είχαν πολύ υψηλότερα ποσοστά λάθος απαντήσεων στο 6β σε σχέση με το 6α. Τα ποσοστά των συμμετεχόντων που δεν απάντησαν είναι και εδώ ιδιαίτερα υψηλά (12,9% για το Δημοτικό, 26% για το Γυμνάσιο, 23,4% για το Λύκειο και 23,3% για τους φοιτητές). Οι συμμετέχοντες αυτοί έχουν συμπεριληφθεί στις λάθος απαντήσεις.

Όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, η μέση κατάταξη των μαθητών Λυκείου ήταν στην υψηλότερη θέση, όμως εδώ ακολουθούσε το Γυμνάσιο, μετά οι φοιτητές και τέλος το Δημοτικό ενώ τα αποτελέσματα του Kruskal-Wallis test δεν ήταν στατιστικά σημαντικά (H_3=5,769, p=0,123). Όπως προέκυψε από τις συγκρίσεις των βαθμίδων ανά δύο με χρήση του Mann-Whitney test, οι μόνες διαφορές που ήταν στατιστικά σημαντικές ήταν εκείνες του Λυκείου με το Δημοτικό (p=0,017).

Διάγραμμα 4.7

Απαντήσεις συμμετεχόντων στην ερώτηση 6β ανά βαθμίδα



Πίνακας 4.11

Kruskal-Wallis Test για τη μέση κατάταξη συμμετεχόντων στο ερώτημα 6β

	Τάξη	N	Mean Rank
Ε6β	Δημοτικό	116	298,87
	Γυμνάσιο	127	320,70
	Λύκειο	154	345,33
	Φοιτητές	245	317,65

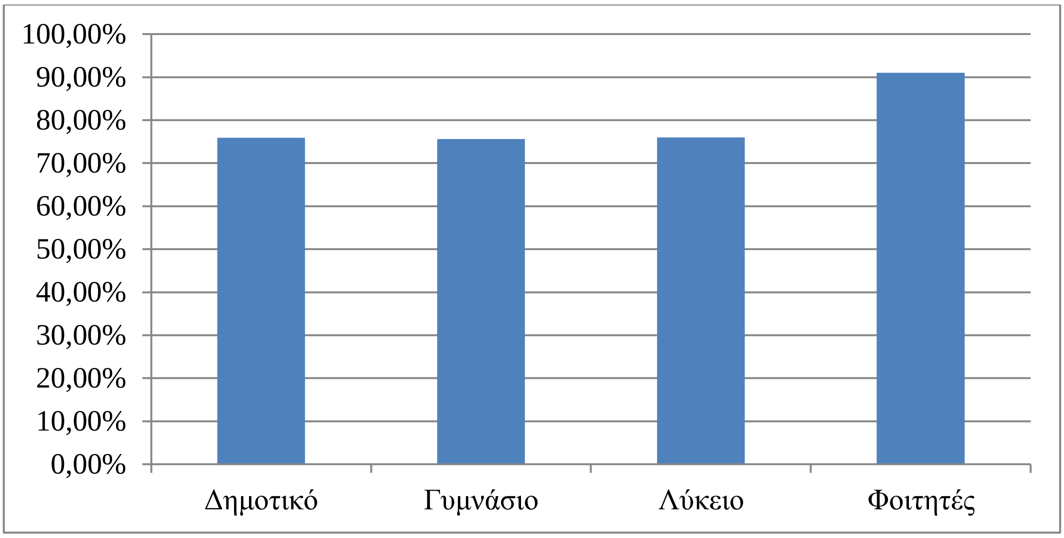
Τα παραπάνω θα μπορούσαν να χαρακτηριστούν σαν ένα σημαντικό εύρημα. Οι μαθητές Λυκείου φαίνεται να δέχονται την ύπαρξη απειροσυνόλων σε μεγαλύτερο ποσοστό από τους φοιτητές, παρότι οι δεύτεροι έχουν λάβει συστηματική εκπαίδευση πάνω στη Θεωρία Συνόλων. Επιπλέον, τα ποσοστά των μαθητών που φαίνεται να μην δέχονται την ύπαρξη των απειροσυνόλων είναι πολύ μεγάλα παρά το γεγονός ότι τα περισσότερα σύνολα τα οποία συναντά κανείς στη μαθηματική εκπαίδευση είναι τα γνωστά απειροσύνολα αριθμών (φυσικοί αριθμοί, ρητοί αριθμοί, άρρητοι αριθμοί και πραγματικοί αριθμοί). Όμως, υπάρχει και ένας διαφορετικός τρόπος να δούμε τα δεδομένα μας. Αν θεωρήσουμε ότι οι συμμετέχοντες που έδωσαν την απάντηση «Ναι, άπειρα» αλλά και απαντήσεις όπως «Ναι, {2,4,6,8,10,...}», ή «Όλοι οι ζυγοί», ή ακόμη και «$\{x \in \mathbb{N} | x,$άρτιος$\}$», σε τουλάχιστον μία από τις ερωτήσεις 6α και 6β, δεν έχουν την αντίληψη ότι το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου πρέπει να είναι πεπερασμένο, τότε το 18,1% των μαθητών Δημοτικού, το 38,6% των μαθητών Γυμνασίου, το 50,6% των μαθητών Λυκείου και το 55,5% των φοιτητών εμπίπτουν σε αυτήν την κατηγορία. Αν υποθέσουμε ότι κάποιος έχει την αντίληψη ότι το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου πρέπει να είναι πεπερασμένο μόνο όταν απαντά «Όχι, διότι το πλήθος των στοιχείων είναι άπειρο» ή κάτι αντίστοιχο, τότε βλέπουμε ότι μόλις 1 μαθητής του Δημοτικού (ποσοστό 0,8%), 3 μαθητές Γυμνασίου (2,4%), 2 μαθητές Λυκείου (1,3%) και 6 φοιτητές (2,5%) έχουν την συγκεκριμένη αντίληψη. Όλοι οι υπόλοιποι μαθητές απάντησαν μονολεκτικά «Ναι» ή «Όχι», δεν απάντησαν καθόλου ή έδωσαν απαντήσεις που δεν μας επιτρέπουν μία ασφαλή κατηγοριοποίηση.

4.1.3. Αντιλήψεις των συμμετεχόντων σχετικά με την ισότητα μεταξύ δύο συνόλων.

Στο ερώτημα 7α (διάγραμμα 4.8), οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν το σύνολο {1,2,3,4} με το σύνολο {4,3,2,1}. Ένας μαθητής που απαντά λάθος στην συγκεκριμένη ερώτηση, υποθέτουμε ότι θεωρεί πως τα στοιχεία ενός συνόλου είναι διατεταγμένα. Η ερώτηση δεν φάνηκε να δυσκολεύει τους μαθητές, αφού περισσότεροι από τα 3/4 έδωσαν σωστή απάντηση. Αυτό ενδέχεται να ενισχύεται από το γεγονός ότι αρκετοί μαθητές αντιλαμβάνονται το σύνολο ως αριθμό. Αν κάποιος βλέπει το σύνολο ως άθροισμα τότε η αντιμεταθετική ιδιότητα της πρόσθεσης του εξασφαλίζει την ισότητα, ενώ αν κάποιος βλέπει το σύνολο ως πλήθος τότε τα δύο σύνολα είναι ίσα αφού είναι ισοπληθικά. Τα ποσοστά των μαθητών των τριών σχολικών βαθμίδων πρακτικά ταυτίζονται (το κριτήριο Scheffe τα ομαδοποιεί μαζί, με p=1,000). Ακόμη καλύτερη ήταν η εικόνα για τους φοιτητές αφού τα 9/10 απάντησαν σωστά στην συγκεκριμένη ερώτηση και οι διαφορές από τις άλλες βαθμίδες ήταν στατιστικά σημαντικές ($F_{3,638}$= 8,025, p < 0,001).

Διάγραμμα 4.8

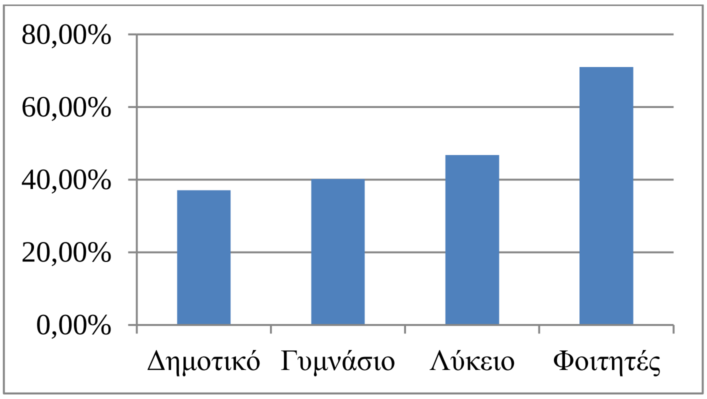
Ποσοστά σωστών απαντήσεων στην ερώτηση 7α ανά βαθμίδα.



Στο ερώτημα 7β (διάγραμμα 4.9) ρωτήσαμε τους μαθητές αν το σύνολο {1,2,3,4} είναι ίσο με το σύνολο {α,β,γ,δ}. Τα ποσοστά σωστών απαντήσεων σε αυτό το ερώτημα είναι πολύ χαμηλότερα από τα αντίστοιχα ποσοστά του προηγούμενου ερωτήματος. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί ενδεχομένως να εξηγηθεί αν αναλογιστούμε ότι οι μαθητές που βλέπουν το σύνολο ως αριθμό, δεν έχουν την επιλογή να σκεφτούν με όρους αθροίσματος και αν σκεφτούν με όρους πλήθους αντικειμένων, τότε οι συλλογές είναι και πάλι ισοπληθικές. Επιπλέον, ακόμη και αν κάποιος μαθητής αποδίδει στο σύνολο το νόημα της συλλογής, ενδέχεται να ταυτίζει την ισότητα με την ισοπληθικότητα, ένα αποτέλεσμα το οποίο υποστηρίζουν και οι έρευνες των Linchevski και Vinner (1988) και των Fischbein και Baltsan (1998). Οι διαφορές μεταξύ των τριών σχολικών βαθμίδων δεν είναι στατιστικά σημαντικές (το κριτήριο Scheffe τους ομαδοποιεί μαζί, με p=0,389). Τέλος, τα ποσοστά σωστών απαντήσεων για τους φοιτητές είναι και πάλι χαμηλότερα από τα αντίστοιχα ποσοστά τους στο ερώτημα 7α, είναι όμως σημαντικά υψηλότερα από αυτά των μαθητών Λυκείου ($F_{3,638}$ = 19,757, p < 0,001).

Διάγραμμα 4.9

Ποσοστά σωστών απαντήσεων στην ερώτηση 7β ανά βαθμίδα.

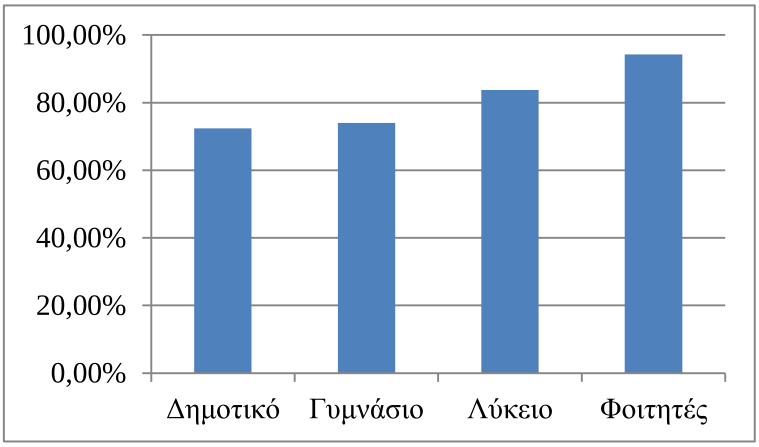


Στο ερώτημα 7γ (διάγραμμα 4.10) οι μαθητές καλούνται να συγκρίνουν το σύνολο {1,2,3,4} με το σύνολο {1,2,7}. Κάποιος που απαντά ότι {1,2,3,4} = {1,2,7}, υποθέτουμε ότι βλέπει το σύνολο ως αριθμό και συγκεκριμένα ως άθροισμα, τουλάχιστον για την ειδική περίπτωση των αριθμοσυνόλων ή απλά απαντά στην τύχη. Η ερώτηση δεν φάνηκε να δυσκολεύει τους μαθητές αφού περίπου τα 3/4 των μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου και τα 4/5 των Μαθητών Λυκείου απάντησαν σωστά. Ωστόσο, το ποσοστό των μαθητών που απαντούν λάθος στην συγκεκριμένη ερώτηση δεν είναι σε καμία περίπτωση αμελητέο. Τέλος, σχεδόν όλοι οι φοιτητές απαντούν σωστά στην συγκεκριμένη ερώτηση.

Το ANOVA test βρήκε στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των βαθμίδων ($F_{3,638}$=14,085, p<0,001). Το κριτήριο Scheffe χώρισε το δείγμα μας σε δύο ομοιογενείς υπο-ομάδες. Η πρώτη αποτελείται από τις τρεις σχολικές βαθμίδες (p=0,060 που είναι λίγο μεγαλύτερο από το όριο του 0,05). Η δεύτερη ομάδα περιέχει πάλι τους μαθητές Λυκείου μαζί με τους φοιτητές (p=0,096).

Διάγραμμα 4.10

Ποσοστά σωστών απαντήσεων στην ερώτηση 7γ ανά βαθμίδα.



4.1.4. Αντιλήψεις των συμμετεχόντων σχετικά με τις έννοιες του ανήκειν και του υποσυνόλου.

Με τις ερωτήσεις 9α, 9β, 9γ και 9δ εξετάζουμε αν οι συμμετέχοντες μπορούν να διακρίνουν την έννοια του του *ανήκειν* και την έννοια του *υποσυνόλου* στην ειδική περίπτωση που το ένα σύνολο περιέχει μόνο ένα στοιχείο και στην περίπτωση που ένα σύνολο περιέχει κάποιο άλλο σύνολο ως στοιχείο του. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται τα ποσοστά ορθών απαντήσεων των συμμετεχόντων ανά εκπαιδευτική βαθμίδα.

Στο ερώτημα 9α λιγότεροι από το 1/3 των μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου απάντησαν σωστά, ενώ μόνο οι μισοί φοιτητές φαίνεται να αναγνωρίζουν ότι $\{1\}\notin\{1,2,3,4,5\}$. Το ANOVA Test βρήκε στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των βαθμίδων ($F_{2,523}$=13,253, p<0,001). Το κριτήριο Scheffe χώρισε το δείγμα μας σε δύο ομοιογενείς υπο-ομάδες. Η πρώτη ομάδα αποτελείται από το Γυμνάσιο και το Λύκειο (p=0,988) και η δεύτερη από τους φοιτητές. Συνεπώς, οι φοιτητές έχουν την καλύτερη επίδοση, ενώ οι μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου έχουν την ίδια επίδοση.

Τα ποσοστά σωστών απαντήσεων στα ερωτήματα 9β είναι γενικά υψηλότερα από το προηγούμενο ερώτημα. Λίγο λιγότεροι από τους μισούς μαθητές Γυμνασίου και λίγο περισσότεροι από τους μισούς μαθητές Λυκείου και φοιτητές απαντούν σωστά στο συγκεκριμένο ερώτημα. Το γεγονός αυτό ενδέχεται να οφείλεται στο ότι οι μαθητές που συγχέουν τις έννοιες του ανήκειν και του υποσυνόλου μπορεί να επιλέγουν την απάντηση «Σωστό» και στα δύο ερωτήματα με αποτέλεσμα να απαντούν λανθασμένα στην 9α και σωστά στην 9β. Το ANOVA Test βρήκε στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των βαθμίδων ($F_{2,523}$=6,612, p=0,001). Το κριτήριο Scheffe χώρισε το δείγμα μας σε δύο ομοιογενείς υπο-ομάδες. Η πρώτη ομάδα αποτελείται από το Γυμνάσιο και η δεύτερη από τους μαθητές Λυκείου και τους φοιτητές (p=0,597). Δηλαδή η μαθητές Γυμνάσιο έχουν χαμηλότερη επίδοση από τους μαθητές Λυκείου και τους φοιτητές, οι οποίοι δεν διαφέρουν μεταξύ τους.

Περίπου οι μισοί μαθητές τις δευτεροβάθμιας και τα 3/4 των φοιτητών απαντούν σωστά στο ερώτημα 9γ. Το ANOVA Test βρήκε στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των βαθμίδων ($F_{2,523}$=13,857, p<0,001). Το κριτήριο Scheffe χώρισε το δείγμα μας σε δύο ομοιογενείς υπο-ομάδες. Η πρώτη ομάδα αποτελείται από το Γυμνάσιο και το Λύκειο (p=0,331) και η δεύτερη από τους τους φοιτητές. Συνεπώς, οι φοιτητές έχουν την καλύτερη επίδοση, ενώ οι μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου έχουν μεταξύ τους την ίδια επίδοση.

Το 9δ είναι το ερώτημα που δυσκόλεψε περισσότερο τους συμμετέχοντες φοιτητές αφού μόνο το 1/3 φαίνεται να αναγνωρίζει ότι το μονοσύνολο $\{4\}$ δεν είναι υποσύνολο του $\{1,2,3,\{4\},5\}$, διότι το πρώτο σύνολο περιέχει τον αριθμό 4 ενώ το δεύτερο όχι. Το μοτίβο που εμφανίστηκε μεταξύ των ερωτημάτων 9α και 9β εμφανίζεται και μεταξύ των 9γ και 9δ. Οι συμμετέχοντες που επιλέγουν την απάντηση «Σωστό» και στις δύο περιπτώσεις, απαντούν σωστά στο 9γ αλλά λάθος στο 9β, κάτι που εξηγεί εν μέρει τη διαφορά μεταξύ των ποσοστών μεταξύ των δύο ερωτημάτων. Το ANOVA Test δεν βρήκε στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των βαθμίδων ($F_{2,523}$=0,799, p=0,450) που σημαίνει πως η επίδοση όλων των συμμετεχόντων για την συγκεκριμένη ερώτηση ήταν παρόμοια, ανεξαρτήτως της εκπαιδευτικής βαθμίδας.

Πίνακας 4.12

Ποσοστά σωστών απαντήσεων στις ερωτήσεις 9α – 9δ ανά βαθμίδα

Βαθμίδα / Ερώτημα	Γυμνάσιο	Λύκειο	Φοιτητές
9α) $\{1\} \in \{1,2,3,4,5\}$	30,7%	29,9%	51,8%
9β) $\{1\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$	42,5%	56,5%	62,0%
9γ) $\{4\} \in \{1,2,3,\{4\},5\}$	52,8%	44,8%	69,8%
9δ) $\{4\} \subseteq \{1,2,3,\{4\},5\}$	39,4%	37,0%	33,1%

Αν κοιτάξουμε συνδυαστικά τα ερωτήματα 9α έως 9δ θα δούμε ότι μόλις το 7,3% των μαθητών Γυμνασίου, το 7,5% των μαθητών Λυκείου και το 15,3% των μελλοντικών εκπαιδευτικών απάντησαν σωστά και στα τέσσερα ερωτήματα. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με την ιδιαιτερότητα των συγκεκριμένων ερωτημάτων (τόσο οι μαθητές Γυμνασίου όσο και οι μαθητές Λυκείου ενδέχεται να έρχονται αντιμέτωποι με παρόμοια ερωτήματα για πρώτη φορά) δεν μας επιτρέπουν να καταλήξουμε σε ασφαλή συμπεράσματα για τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τος έννοιες του ανήκειν και του υποσυνόλου. Προκειμένου να διεισδύσουμε βαθύτερα στις αντιλήψεις τους θα χρησιμοποιήσουμε ποιοτικές μεθόδους (κεφάλαιο 4.3).

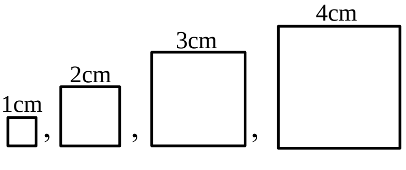
4.1.5. Αντιλήψεις των συμμετεχόντων σχετικά με την ισοπληθικότητα δύο απειροσυνόλων.

Με τις ερωτήσεις 10 και 11 εξετάζουμε τις αντιλήψεις των συμμετεχόντων σχετικά με το πλήθος των στοιχείων των απειροσυνόλων. Την ερώτηση 10 δανειστήκαμε από τις έρευνες των Tsamir και Tirosh (Tsamir & Tirosh, 1992˙ Tirosh & Tsamir, 1996). Τα δύο πρώτα υποερωτήματα περιείχαν δύο σύνολα Α και Β για τα οποία ισχύει Β ⊆ Α. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, οι συγκεκριμένες ερωτήσεις προωθούν την ιδέα του «μέρος-όλον» και οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Α είναι μεγαλύτερο από εκείνων του συνόλου Β (βλέπε π.χ. Tsamir & Tirosh, 1992˙ Tirosh & Tsamir, 1996). Στο ερώτημα (γ) δίνονται τα ίδια υποσύνολα με το ερώτημα (β) όμως τώρα τα στοιχεία του συνόλου Β είναι γραμμένα έτσι ώστε να γίνεται εμφανέστερη η 1-1 και επί αντιστοιχία με τα στοιχεία του Α. Τέλος, στο ερώτημα (δ) δίνονται δύο ξένα σύνολα για τα οποία υπάρχει μία εμφανής 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων τους. Σύμφωνα με την προϋπάρχουσα έρευνα, τα δύο τελευταία απειροσύνολα προωθούν την ιδέα της ισοπληθικότητας των δύο συνόλων (βλέπε π.χ. Tsamir & Tirosh, 1992˙ Tirosh & Tsamir, 1996).

Όπως φαίνεται στον πίνακα 4.13, η πλειοψηφία των μαθητών όλων των βαθμίδων απαντά λάθος σε όλα τα ερωτήματα. Οι ερωτήσεις 10γ και 10δ φαίνεται ότι πράγματι οδήγησαν τους μαθητές Λυκείου και τους φοιτητές σε μεγαλύτερα ποσοστά σωστών απαντήσεων κάτι που δεν φαίνεται να ισχύει για τους μαθητές Γυμνασίου. Το ANOVA Test βρήκε στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των βαθμίδων μόνο για το υποερώτημα 10γ ($F_{2,523}$=8,427, p<0,001) για το οποίο το δείγμα μας χωρίστηκε σε δύο ομοιογενείς υπο-ομάδες. Η πρώτη ομάδα αποτελείται από το Γυμνάσιο και το Λύκειο (p=0,128) και η δεύτερη από το Λύκειο και τους φοιτητές (p=0,148). Οι διαφορές στα ερωτήματα 10α, 10β και 10δ δεν ήταν στατιστικά σημαντικές (p=0,163, p=0,204 και p=0,081, αντίστοιχα).

Πίνακας 4.13

Ποσοστά σωστών απαντήσεων στις ερωτήσεις 10α, 10β, 10γ και 10δ ανά βαθμίδα

Ερώτημα \ Βαθμίδα		Γυμνάσιο	Λύκειο	Φοιτητές
10α)	$A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$	35,4%	25,3%	28,2 %
10β)	$A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, $B = \{1,4,9,16,25, \ldots\}$	29,9%	20,8%	24,1%
10γ)	$A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, $B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots\}$	26,8%	37,7%	48,2%
10δ)	$A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$, $B = \{$  $, \ldots \}$	29,9%	34,4%	41,2 %

Στην ερώτηση 11, δόθηκαν στους συμμετέχοντες τρεις εσφαλμένες εκφράσεις (πίνακας 4.13) οι οποίες φαίνεται από την προϋπαρχουσα βιβλιογραφία ότι εμφανίζονται συχνά ανάμεσα στους μαθητές (Tsamir & Tirosh, 1992˙ Tirosh & Tsamir, 1996˙ Tsamir, 1999˙ Tsamir, 2001˙ Tsamir & Dreyfus, 2002˙ Dreyfus & Tsamir, 2004˙ Na & Lee, 2006˙ Moru & Qhobela, 2013) και τους ζητήσαμε να τις χαρακτηρίσουν ως αληθείς ή ψευδείς.

Όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα, μόλις το 1/3 των μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου αλλά και των φοιτητών απαντούν σωστά στην ερώτηση 11α, κάτι που μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα 2/3 των συμμετεχόντων έχουν την παρανόηση ότι το πλήθος των στοιχείων ενός απειροσυνόλου είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων κάθε γνήσιου υποσυνόλου του. Τα ποσοστά των μαθητών του Γυμνασίου και του Λυκείου ταυτίζονται ενώ οι φοιτητές παρουσιάζουν μικρές διαφορές οι οποίες δεν είναι στατιστικά σημαντικές ($F_{2,523}$=1,910, p=0,149).

Με το ερώτημα 11β εξετάζουμε την εμφάνιση της αντίληψης ότι όλα τα απειροσύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων. Λίγο περισσότεροι από τους μισούς μαθητές Γυμνασίου, λίγο λιγότεροι από τους μισούς μαθητές Λυκείου και περίπου το 1/3 των φοιτητών φαίνεται να έχει την συγκεκριμένη παρανόηση. Η ανάλυση μας έδειξε ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των απαντήσεων στο ερώτημα 11β ($F_{2,523}$=12,398). Συγκεκριμένα, το δείγμα χωρίστηκε σε δύο ομοιογενείς ομάδες, το Γυμνάσιο μαζί με το Λύκειο ήταν στην ίδια ομάδα (p=0,097), και οι φοιτητές ήταν μόνοι τους στην άλλη ομάδα.

Στο ερώτημα 11γ οι μαθητές Γυμνασίου έχουν τα χαμηλότερα ποσοστά εμφάνισης της αντίληψης ότι τα απειροσύνολα είναι μη συγκρίσιμα (δηλαδή τα υψηλότερα ποσοστά σωστών απαντήσεων στον πίνακα 12), ακολουθούν οι μαθητές Λυκείου και στο τέλος βρίσκονται οι συμμετέχοντες φοιτητές. Η ανάλυση ANOVA έδειξε ότι οι διαφορές ήταν στατιστικά σημαντικές ($F_{2,523}$=3,120, p=0,045), ωστόσο το κριτήριο Scheffe ομαδοποίησε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες μαζί (p=0,052 που είναι πολύ κοντά στο όριο του 0,05 που χρησιμοποιείται από το κριτήριο). Σε κάθε περίπτωση, το να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση δεν φαίνεται ιδιαίτερα ασφαλής επιλογή.

Πίνακας 4.14

Ποσοστά σωστών απαντήσεων στις ερωτήσεις 11α, 11β και 11γ ανά βαθμίδα

Ερώτημα \ Βαθμίδα		Γυμνάσιο	Λύκειο	Φοιτητές
11α)	Το πλήθος των στοιχείων ενός απειροσυνόλου είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων κάθε υποσυνόλου του.	29,9%	29,9%	38,0 %
11β)	Όλα τα απειροσύνολα είναι ίσα ως προς το πλήθος των στοιχείων τους.	45,7%	57,1%	71,0%
11γ)	Τα απειροσύνολα δεν είναι συγκρίσιμα ως προς το πλήθος των στοιχείων τους.	42,5%	32,5%	29,8%

4.2. Κοινωνιογλωσσικές επιδράσεις στη νοηματοδότηση της έννοιας του συνόλου

Θέλοντας να διερευνήσουμε περαιτέρω την αλληλεπίδραση μεταξύ της νοηματοδότησης της έννοιας του συνόλου και της χρήσης της λέξης στην καθημερινή ζωή αλλά και στο σχολικό πλαίσιο προχωρήσαμε σε κλινικού τύπου συνεντεύξεις με μαθητές που συμμετείχαν στο ποσοτικό μέρος της έρευνας. Στόχος των ημι-δομημένων συνεντεύξεων ήταν η ανίχνευση των πόρων νοηματοδότησης. Στη συνέχεια αναλύονται αποσπάσματα των συνεντεύξεων που αναδεικνύουν τέτοιους πόρους 'δανεισμού', αρχικά με μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού, στην συνέχεια της Γ΄ Γυμνασίου και τέλος της Γ΄ Λυκείου.

4.2.1. Ανάλυση συνεντεύξεων με μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού

α) Αντώνης

Ο παρακάτω διάλογος είναι ένα απόσπασμα της συζήτησης του ερευνητή με τον Αντώνη. Ο ερευνητής έχει συνεργαστεί στο παρελθόν με τον Αντώνη και γνωρίζει ότι η επίδοσή του στα σχολικά Μαθηματικά είναι σχετικά καλή, είναι ιδιαίτερα ευφυής και τείνει να απαντά αυθόρμητα και χωρίς δισταγμό:

1.	Ερευνητής:	Πώς αντιλαμβάνεσαι την έννοια του συνόλου στα Μαθηματικά;
2.	Αντώνης:	Την αντιλαμβάνομαι ως, ότι δύο αριθμοί όταν προστίθενται βγάζουν έναν αριθμό που αυτό είναι το σύνολο.
	...	...
3.	Αντώνης:	Δεν συμφωνώ με κανέναν απ΄ τους δύο γιατί θα μπορούσε εεε, βασικά συμφωνώ με τη Δήμητρα.
4.	Ερευνητής:	Α, δηλαδή; Για εξήγησέ το.
5.	Αντώνης:	Εεε, ότι δεν μπορεί να είναι ένα σύνολο από τη στιγμή που τα περισσότερα είναι πράγματα και το άλλο είναι κάτι, τέλος πάντων, φαΐ, είναι ένα…, όχι πράγμα, κάτι που καταναλώνεται.
6.	Ερευνητής:	Τρόφιμο;
7.	Αντώνης:	Ναι, ναι, ναι δεν ταιριάζουν, δεν είναι το ίδιο.
8.	Ερευνητής:	ΟΚ, αν σου έλεγα να τα βάλεις... αν θα μπορούσαν να ανήκουν σε δύο διαφορετικά σύνολα, ποια σύνολα θα ήταν αυτά;
9.	Αντώνης:	Το ένα θα ήταν των τροφίμων και το άλλο θα ήταν των πραγμάτων.
10.	Ερευνητής:	ΟΚ και η απάντηση θα ήταν δηλαδή ένα σύνολο πραγμάτων ή θα έλεγες 13 αντικείμενα, βγάζω την τυρόπιτα έξω και η τυρόπιτα 1 αντικείμενο.

11. Αντώνης: Ναι...

12. Ερευνητής: Οπότε θα έλεγες ότι το ένα σύνολο είναι 13 και το άλλο σύνολο είναι 1 ή θα έλεγες ότι το ένα είναι σύνολο από γραφική ύλη και το άλλο είναι σύνολο από...

13. Αντώνης: Το πρώτο, το πρώτο, το πρώτο.

14. Ερευνητής: Θα έλεγες τον αριθμό δηλαδή των αντικειμένων;

15. Αντώνης: Ναι.

... ...

16. Αντώνης: Συμφωνώ πιο πολύ με τον Γιώργο (το σύνολο των γραμμάτων της λέξης «θάλασσα» είναι {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ}) αλλά δεν ξέρω γιατί δεν τα έχει στη σειρά δηλαδή δεν τα έχει Θ, Α, Λ, Α, Σ, Σ, Α.

17. Ερευνητής: Μόνο αυτό; Εσύ τι απάντησες στο ερωτηματολόγιο, νομίζω είπες και {7} και {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ}.

18. Αντώνης: Ναι, ναι νομίζω αυτό.

19. Ερευνητής: Δηλαδή εεε, περίμενε, μεταξύ των δύο ποιο είναι πιο σωστό; Να πω ότι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης «ΘΑΛΑΣΣΑ» είναι 7 ή να πω ότι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης «ΘΑΛΑΣΣΑ» είναι Θ, Α, Λ, Α, Σ, Σ, Α;

20. Αντώνης: Νομίζω είναι το 7 γιατί με το 7 μπορείς να κάνεις ένα σύνολο.

21. Ερευνητής: Δηλαδή; Δεν το κατάλαβα.

22. Αντώνης: Ωωω, ναι. Λάθος, λάθος! Εεε και τα δύο σωστά είναι.

... ...

23. Ερευνητής: Άρα, ένα σύνολο πόσα στοιχεία πρέπει να έχει για να έχει νόημα;

24. Αντώνης: Πρέπει να έχει τουλάχιστον 2 αριθμούς...

25. Ερευνητής: Ναι...

26. Αντώνης: Εεε... και πρέπει να έχει και ένα αποτέλεσμα.

... ...

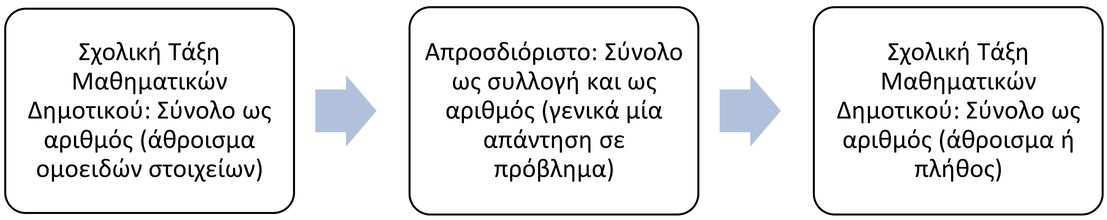
27. Αντώνης: Ναι, γιατί καταρχάς το σύνολο του {α,β,γ,δ} είναι 4 αριθμοί ενώ εδώ πέρα (στο {1,2,3,4}) άμα προσθέσουμε 1+2+3+4 θα μας βγει 10.

Στις δύο πρώτες γραμμές ο ερευνητής καθοδηγεί την συζήτηση και την πλαισιώνει στο πεδίο των Μαθηματικών. Ο Αντώνης απαντά με βεβαιότητα ότι το σύνολο είναι το άθροισμα. Η ομιλία του μαθητή σε αυτό το σημείο δεν μοιάζει φυσική αλλά θυμίζει τον τρόπο που απαντούν οι νεότεροι μαθητές όταν καλούνται να απαντήσουν σε ερώτηση του δασκάλου τους όταν εξετάζονται. Αρχικά επαναλαμβάνει τη φράση «την αντιλαμβάνομαι ως», όμως στη συνέχεια κόβει την πρόταση και ξεκινάει με τον σύνδεσμο «ότι». Οι νεότεροι μαθητές έχουν την τάση να ξεκινούν της επεξηγηματικές προτάσεις τους, ή ακόμη και τις ερωτήσεις τους προς τους δασκάλους, με τη χρήση του «ότι» ακόμη και όταν αυτό είναι συντακτικά λάθος. Η γλώσσα λοιπόν του μαθητή δείχνει πως, για τον ίδιο, ο ερευνητής δεν έχει τόσο τον ρόλο του συντονιστή της συνέντευξης όσο τον ρόλο του δασκάλου-εξεταστή. Σε αυτό το σημείο της συνέντευξης, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι ο μαθητής αντλεί το νόημα του συνόλου ως το άθροισμα, από το ιδίωμα των σχολικών Μαθηματικών.

Στη συνέχεια, σχολιάζεται το πρώτο (γρ. 3-15) και το δεύτερο (γρ. 16-22) υποθετικό σενάριο και το θέμα συζήτησης είναι η έννοια του συνόλου σε πλαίσια που δεν είναι εγγενώς μαθηματικά. Το πεδίο της συζήτησης αλλάζει και έρχεται πιο κοντά στην καθημερινή εμπειρία του μαθητή, αφού το θέμα του πρώτου σεναρίου είναι ένα σύνολο πραγμάτων και τροφίμων. Ο μαθητής χρησιμοποιεί τη γλώσσα με πιο φυσικό τρόπο, ωστόσο οι απαντήσεις του χαρακτηρίζονται από έναν βαθμό αβεβαιότητας. Το νόημα που αποδίδεται στην έννοια του συνόλου είναι και εδώ αυτό του αριθμού και συγκεκριμένα του πλήθους. Από τη γραμμή 8 έως τη γραμμή 15 οι ρόλοι μοιάζουν να αλλάζουν. Ο ερευνητής προσπαθεί να ερμηνεύσει τις απαντήσεις του μαθητή με αποτέλεσμα να σχηματίζει μεγαλύτερες προτάσεις από εκείνον και ο οποίος με τη σειρά του απαντά συχνά μονολεκτικά. Σε αυτό το σημείο, ο Αντώνης μοιάζει να βλέπει τις ερωτήσεις του ερευνητή σαν κλειστού τύπου και να επιλέγει απλά την απάντηση που του φαίνεται σωστή, χωρίς ωστόσο να είναι πάντα βέβαιος.

Στις γραμμές 16 έως 22 ο ερευνητής αντιπαραβάλει την προφορική απάντηση του μαθητή με την απάντηση που είχε δώσει στο παρελθόν στο ερωτηματολόγιο παίρνοντας τον ρόλο του εξεταστή. Ο μαθητής φαίνεται να επηρεάζεται από τις ερωτήσεις του ερευνητή, προσπαθώντας μάλλον να απαντήσει «σωστά» παρά να εξηγήσει πως αντιλαμβάνεται την έννοια του συνόλου, ένας ρόλος που διατηρεί και στη συνέχεια της συνέντευξης και ο οποίος εξηγεί εν μέρη την αβεβαιότητα που χαρακτηρίζει ορισμένες από τις απαντήσεις του. Συγκεκριμένα, στη γραμμή 16 ο μαθητής δηλώνει ότι συμφωνεί «πιο πολύ» με την απάντηση {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ}. Αυτό που του προκαλεί αβεβαιότητα είναι η σειρά των γραμμάτων. Ο ερευνητής του υπενθυμίζει ότι η ίδια ερώτηση υπήρχε και στο ερωτηματολόγιο και την είχε απαντήσει διαφορετικά. Η παρέμβαση του ερευνητή στρέφει την προσοχή του Αντώνη στην απάντηση «7» με αποτέλεσμα να δώσει μια ασαφή επεξήγηση (λέει ότι «με το 7 μπορείς να κάνεις ένα σύνολο») θέλοντας ενδεχομένως να υπερασπιστεί την προηγούμενη απάντησή του. Όταν στην γραμμή 21 ο ερευνητής δηλώνει ότι δεν κατάλαβε την απάντησή του, επανέρχεται στην αρχική απάντηση, πιθανότατα υποθέτοντας ότι είναι αυτή που ο ερευνητής θα ήθελε να ακούσει. Οι απαντήσεις του μαθητή θα μπορούσαν να ερμηνευθούν ως απόδοση διπλού νοήματος στην έννοια του συνόλου ή ως ταύτιση των δύο απαντήσεων. Γενικά, κάποιοι μαθητές ταυτίζουν το 7 με το {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ} αφού βλέπουν το σύνολο σαν μια απάντηση σε ένα πρόβλημα. Για εκείνους, τόσο ο αριθμός 7 όσο και η συλλογή των γραμμάτων απαντούν σωστά στο πρόβλημα. Η αβεβαιότητα του μαθητή και ο ρόλος που αποφάσισε να υιοθετήσει σε αυτό το κομμάτι της συνέντευξης τον οδηγούσαν σε σύντομες απαντήσεις οι οποίες μάλλον απέβλεπαν στο να βρουν τη σωστή απάντηση και όχι στο να προσδιορίσουν με σαφήνεια τις αντιλήψεις του. Το γεγονός αυτό δεν μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε με κάποια ασφάλεια το γλωσσικό ιδίωμα από το οποίο αντλεί τα διάφορα νοήματα.

Στο απόσπασμα των γραμμών 23-26, η συζήτηση περιστρέφεται και πάλι γύρω από ένα μαθηματικό πρόβλημα, δηλαδή το τρίτο σενάριο. Η συζήτηση κλείνει με τη σύγκριση δύο συνόλων. Ο μαθητής φαίνεται σίγουρος για την απάντησή του χωρίς να αντιλαμβάνεται ότι δίνει στην έννοια του συνόλου δύο διαφορετικές αποχρώσεις (άθροισμα και πλήθος). Το ιδίωμα που φαίνεται να υιοθετεί ο μαθητής εδώ είναι αυτό των σχολικών Μαθηματικών. Το νόημα που αποδίδει στην έννοια είναι αυτό του αριθμού. Συγκεκριμένα, όταν του δίνεται μία συλλογή αριθμών το σύνολο νοείται ως το άθροισμά τους, ενώ όταν του δίνεται μία συλλογή γραμμάτων το σύνολο νοείται ως το πλήθος τους.



Εικόνα 4.1. Μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων και εξέλιξη νοηματοδότησης – Αντώνης

β) Γεράσιμος

Ο ερευνητής και ο Γεράσιμος έχουν συνεργαστεί ξανά στο παρελθόν. Η επίδοσή του στα σχολικά Μαθηματικά είναι ιδιαίτερα καλή, είναι ιδιαίτερα ευφυής, διασκεδάζει να ασχολείται με μαθηματικούς γρίφους και δραστηριότητες, τείνει ωστόσο να απαντά διστακτικά. Ο παρακάτω διάλογος είναι ένα απόσπασμα της συζήτησης του ερευνητή με τον Γεράσιμο:

1. Ερευνητής: Εσύ τι πιστεύεις (για το σενάριο 1);
2. Γεράσιμος: Ότι... αποτελούν αλλά... όχι, επειδή είναι εδώ φαΐ και...
3. Ερευνητής: Κάτσε, από τις απαντήσεις που διάβασες, υπήρχε ο Γιώργος (σύνολο 14 αντικείμενα) και η Δήμητρα (ανόμοια άρα δεν αποτελούν), με ποιον θα συμφωνούσες;
4. Γεράσιμος: Η Δήμητρα δεν είναι αυτή που λέει ότι το φαΐ δεν μετράει;
5. Ερευνητής: Ναι... άρα;
6. Γεράσιμος: Εεε...
7. Ερευνητής: Περίμενε, πες μου πώς καταλαβαίνεις την έννοια «σύνολο»;
8. Γεράσιμος: Πολλά ποσά μαζί, δηλαδή... πολλά ποσά μαζί και τα προσθέτουμε.
9. Ερευνητής: Πολλά ποσά μαζί και τα προσθέτουμε, ωραία άρα αν σε ρωτούσα αυτό (ο ερευνητής δείχνει την ερώτηση της δασκάλας του σεναρίου);
10. Γεράσιμος: Άρα με τον Γιώργο (14 αντικείμενα).
11. Ερευνητής: Με τον Γιώργο που λέει ότι το σύνολο είναι 14 αντικείμενα. Η Δήμητρα του λέει ότι δεν σε ρώτησε πόσα είναι και ότι η σωστή απάντηση είναι πως δεν αποτελούν ένα σύνολο γιατί το ένα είναι φαγητό και τα άλλα είναι... γραφική ύλη ας πούμε. Σχολίασέ τους και τους δύο. Στον Γιώργο τι θα έλεγες;
12. Γεράσιμος: Ότι τα μπέρδεψε λίγο. Μέτρησε απλά τα αντικείμενα και του το εξήγησε η Δήμητρα.
13. Ερευνητής: Εσύ τι θα απαντούσες στην ίδια ερώτηση;
14. Γεράσιμος: Τη Δήμητρα.

... ...

15. Ερευνητής: Άρα σε αυτό που μου είπες πριν ότι είναι πολλά πράγματα μαζί που τα προσθέτουμε;
16. Γεράσιμος: Πολλά ποσά μαζί.
17. Ερευνητής: Αν δεν είναι ποσά; Μπορούμε να έχουμε ένα σύνολο που να μην περιέχει ποσά αλλά να περιέχει άλλα πράγματα;
18. Γεράσιμος: Εεε... μου φαίνεται όχι, ή γίνεται;
19. Ερευνητής: Γιατί εδώ πέρα λέμε για μολύβια και γόμες, δεν είναι ποσά αυτά.
20. Γεράσιμος: Άρα... γίνεται;

...	...

21. Ερευνητής: Στο σχολείο την έχεις δει τη λέξη αυτήν;
22. Γεράσιμος: Ναι, το έχουμε κάνει.
23. Ερευνητής: Ααα, θυμάσαι κάποια άσκηση που να έχεις δει και να χρειαζόταν η λέξη σύνολο να μου δώσεις ένα παράδειγμα;
24. Γεράσιμος: Ε, είχε μερικές.
25. Ερευνητής: Φτιάξε μια άσκηση που να είχε μέσα τη λέξη σύνολο, όπως τη θυμάσαι, να τη λύσω εγώ.
26. Γεράσιμος: Όχι, καμιά δυο είχε, δεν θυμάμαι καμία.
27. Ερευνητής: Και τι εννοούσε όταν έλεγε σύνολο σε αυτές τις ασκήσεις;
28. Γεράσιμος: Εεε... ότι, όλα τα ποσά μαζί.
29. Ερευνητής: Όλα τα ποσά μαζί.
30. Γεράσιμος: Ναι αλλά όχι να τα προσθ... δηλαδή... πως να το εξηγήσω;
31. Ερευνητής: Ωραία, όλα τα ποσά μαζί. Εσύ πώς τη χρησιμοποιείς τη λέξη; Τη λες καθόλου καθημερινά;
32. Γεράσιμος: Σύνολο;
33. Ερευνητής: Ναι, μπορεί να τύχει να το πεις;
34. Γεράσιμος: Πολύ σπάνια.
35. Ερευνητής: Ε φτιάξε μια πρόταση να σε ακούσω.
36. Γεράσιμος: Εεε... το σύνολο των μαθητών μιας τάξης είναι 20.

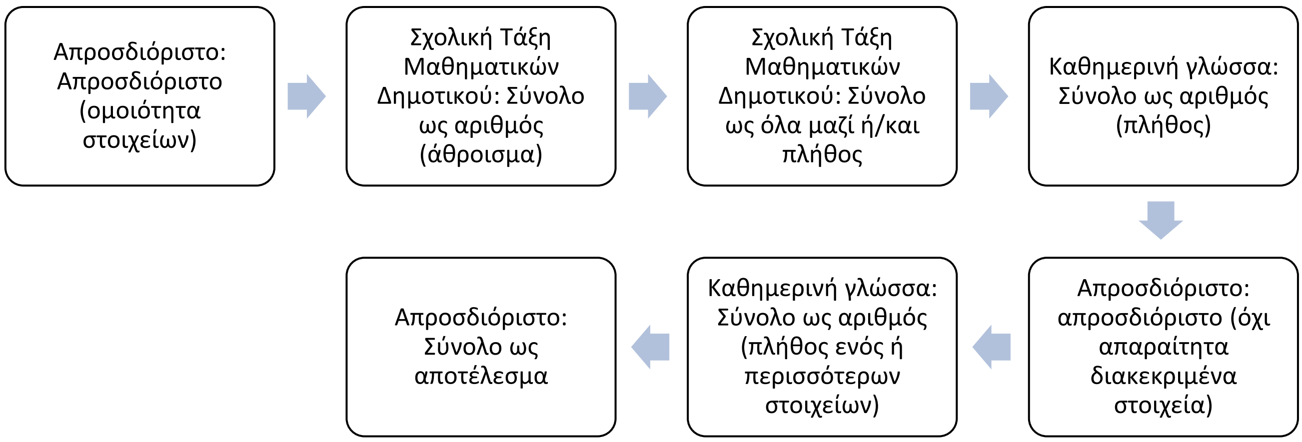
Στο παραπάνω απόσπασμα, ο Γεράσιμος φαίνεται να προσπαθεί να βρει την σωστή απάντηση, όπως θα έκανε αν τον εξέταζε ο δάσκαλος στο σχολείο. Στα μάτια του μαθητή ο ερευνητής φαίνεται να είναι περισσότερο αξιολογητής παρά κάποιος που του παίρνει συνέντευξη με σκοπό να δει τον τρόπο σκέψης του.

Το πλαίσιο της συζήτησης για τον μαθητή φαίνεται αρχικά να καθορίζεται από τον ρόλο του ερευνητή ως μαθηματικού. Στη γραμμή 2, ο μαθητής δηλώνει πως τα αντικείμενα του πρώτου σεναρίου αποτελούν ένα σύνολο αλλά αμέσως το αναιρεί λέγοντας «όχι, επειδή είναι εδώ φαΐ». Στο σημείο αυτό δεν είναι εφικτό να προσδιορίσουμε το ιδίωμα το οποίο επικαλείται ο μαθητής ούτε το νόημα που αποδίδει στην έννοια, παρά μόνο ότι απαιτεί από τα στοιχεία του συνόλου να είναι ομοειδή. Στη γραμμή 7 ο ερευνητής ρωτάει τον μαθητή πως αντιλαμβάνεται την έννοια του συνόλου. Ο μαθητής κάνει λόγο για «ποσά» και για «πρόσθεση», όροι που χρησιμοποιούνται συνήθως ιδίωμα των σχολικών Μαθηματικών. Το νόημα που αποδίδει εδώ στην έννοια φαίνεται να είναι αυτό του αριθμού.

Ακολούθως, ο ερευνητής προσπαθεί να βοηθήσει τον μαθητή να αλλάξει τη στάση του και να εκφράσει ελεύθερα τις σκέψεις του. Τον προτρέπει να πάρει τον ρόλο του σχολιαστή (γρ. 11) και να μιλήσει για τις απαντήσεις των υποθετικών μαθητών, ωστόσο ο μαθητής αρκείται στην απάντηση «τα μπέρδεψε». Στη γραμμή 13 του ζητάει να απαντήσει ο ίδιος την ερώτηση σαν να ήταν ένας από τους μαθητές του σεναρίου. Αντί να απαντήσει στην ερώτηση, επιλέγει μία από τις δύο υπάρχουσες επιλογές. Αυτό δείχνει πως ο μαθητής παραμένει στον ρόλο του ως κάποιος που εξετάζεται προφορικά και δεν αλλάζει τη στάση του.

Στη γραμμή 21 ο ερευνητής τοποθετεί την συζήτηση στο πλαίσιο των σχολικών Μαθηματικών και ο μαθητής δηλώνει ότι είχε εμπλακεί με ορισμένες ασκήσεις που μιλούν για σύνολα στα πλαίσια του μαθήματος των Μαθηματικών στο σχολείο. Όταν στη γραμμή 25 ο ερευνητής προσπαθεί να αντιστρέψει τους ρόλους και να δώσει την ευκαιρία στον μαθητή να χρησιμοποιήσει την έννοια του συνόλου χωρίς να νιώθει ότι εξετάζεται, ο μαθητής προσπαθεί να αποφύγει την συζήτηση λέγοντας ότι «καμιά δυο είχε, δεν θυμάμαι», δηλαδή επιμένει στη διατήρηση του ρόλου του εξεταζόμενου. Στην γραμμή 28 δηλώνει ότι στο πλαίσιο της σχολικής τάξης ο όρος ‘σύνολο’ είχε το νόημα του αριθμού.

Τέλος, ο ερευνητής προσπαθεί να μετακινήσει τον Γεράσιμο σε κάποιο καθημερινό πλαίσιο (γρ. 31) σε μια προσπάθεια να τροποποιήσει το πεδίο της συζήτησης ή τους ρόλους που υιοθετούνται. Ο μαθητής παρουσιάζει αντίσταση στην αλλαγή (γρ. 34) και ο ερευνητής του ζητά να φτιάξει μια πρόταση με τη λέξη ‘σύνολο’ όπως θα τη χρησιμοποιούσε στην καθημερινότητα. Ο μαθητής σχηματίζει μια πρόταση χρησιμοποιώντας το σύνολο ως το πλήθος των μαθητών μιας τάξης. Πιθανότατα, το νόημα που αποδίδει ο μαθητής στα καθημερινά γλωσσικά ιδιώματα είναι πάλι το νόημα του αριθμού. Σε κάθε περίπτωση, θεωρεί ότι για να μιλάμε για σύνολο θα πρέπει να παίρνουμε «όλα μαζί» τα στοιχεία. Οι μετακινήσεις μεταξύ γλωσσικών ιδιωμάτων και της αντίστοιχης νοηματοδότησης για τον Γεράσιμο καθ’ όλη την συνέντευξη φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα.



Εικόνα 4.2. Μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων και εξέλιξη νοηματοδότησης – Γεράσιμος

γ) Αλβέρτος

Οι επόμενοι τρεις μαθητές έχουν μόλις αποφοιτήσει από το Δημοτικό και θα φοιτήσουν την τρέχουσα χρονιά στην Α΄ Γυμνασίου, στο σχολείο που εργάζεται τη δεδομένη στιγμή ο ερευνητής. Έχουν χαρακτηριστεί όλοι ως ιδιαίτερα ικανοί από τους δασκάλους τους στην ΣΤ΄ Δημοτικού. Ιδιαίτερα ο Αλβέρτος ήταν άριστος στα σχολικά Μαθηματικά και ιδιαίτερα ευφυής με πολύ συγκροτημένη σκέψη αναλογικά με την ηλικία του. Ένα απόσπασμα της συζήτησής μας με τον Αλβέρτο φαίνεται παρακάτω:

1. Ερευνητής: Ποια θα ήταν η δική σου απάντηση;
2. Αλβέρτος: Εγώ θα έλεγα ότι είναι ένα σύνολο το μολύβι, οι γόμες και οι ξύστρες, τα βιβλία, τα τετράδια, αλλά το κολατσιό δεν πιστεύω ότι είναι, γιατί είναι φαγητό, είναι κάτι διαφορετικό.
3. Ερευνητής: Για να αποτελούν ένα σύνολο τι πρέπει να συμβαίνει;
4. Αλβέρτος: Πρέπει να έχουν μια σχέση μεταξύ τους.
5. Ερευνητής: Δηλαδή;
6. Αλβέρτος: Να έχουν σχέση με το σχολείο, με την τάξη, τώρα... ανάλογα!
7. Ερευνητής: Γιατί χρειάζεται να έχουν κάποια σχέση;
8. Αλβέρτος: Για να θεωρούνται σύνολα.
9. Ερευνητής: Αυτό το έχεις μάθει στο σχολείο ή έτσι το καταλαβαίνεις από μόνος σου;
10. Αλβέρτος: Έτσι το καταλαβαίνω.
11. Ερευνητής: Δηλαδή, αν σε ρωτούσα τι είναι το σύνολο, τι θα απαντούσες;
12. Αλβέρτος: Ότι είναι... το πρώτο πράγμα που σκέφτομαι είναι ένα αποτέλεσμα κάποιας πράξης, αλλά πιο πολύ, μου φαίνεται πιο σωστό ότι είναι μια συγκέντρωση

κάποιων αντικειμένων, αριθμών, κάτι, που έχουν μια σχέση μεταξύ τους.

13. Ερευνητής: Μια συγκέντρωση αντικειμένων που έχουν μια σχέση μεταξύ τους. Πριν που έλεγες το αποτέλεσμα μιας πράξης, ποιας πράξης εννοούσες;

14. Αλβέρτος: Μπορεί να είναι το αποτέλεσμα μιας πράξης, πρόσθεσης, τα πάντα.

15. Ερευνητής: Εκτός από πρόσθεση, μπορεί να είναι το αποτέλεσμα άλλης πράξης;

16. Αλβέρτος: Πολλαπλασιασμού.

17. Ερευνητής: Να ήταν το αποτέλεσμα αφαίρεσης ή διαίρεσης;

18. Αλβέρτος: Όχι.

19. Ερευνητής: Εσύ τι θα απαντούσες αν ήσουν ένας τέταρτος μαθητής; Θα συμφωνούσες με κάποιον από τους παραπάνω ή θα έλεγες κάτι διαφορετικό;

20. Αλβέρτος: Είμαι ανάμεσα σε δύο απαντήσεις, σε αυτήν του Ανδρέα και της Εύης.

21. Ερευνητής: Άρα ότι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης είναι το 7 και ότι είναι το {Θ,Α,Λ,Σ}.

22. Αλβέρτος: Ναι, αλλά πιο σωστό μου ακούγεται το {Θ,Α,Λ,Σ}.

23. Ερευνητής: Ωραία, άρα μάλλον σκέφτεσαι το σύνολο με δύο τρόπους όπως μου είπες και πριν; Αν είναι το αποτέλεσμα πρόσθεσης ή πολλαπλασιασμού, θα έλεγες 7;

24. Αλβέρτος: Ναι.

25. Ερευνητής: Ενώ, αν είναι συγκέντρωση πραγμάτων.

26. Αλβέρτος: Αν ήταν συγκέντρωση γραμμάτων, θα ήταν το {Θ,Α,Λ,Σ}.

27. Ερευνητής: Ωραία και γιατί όχι το {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ};

28. Αλβέρτος: Γιατί αυτά τα γράμματα μπορείς να τα βάλεις όσες φορές θέλεις για να φτιάξεις μια λέξη.

29. Ερευνητής: Αυτό γιατί το πιστεύεις; Πώς σου έχει δημιουργηθεί αυτή η αντίληψη; Πώς σου ήρθε στο μυαλό αυτή η ιδέα;

30. Αλβέρτος: Απλά μου φαίνεται πιο σωστό.

31. Ερευνητής: Μπορεί να το έχετε πει στο σχολείο παλιότερα; Αν παίζαμε κάποιο παιχνίδι που κάνεις αναγραμματισμούς, με αυτά τα 4 μόνο δεν θα μπορούσες να γράψεις τη λέξη ΘΑΛΑΣΣΑ, ενώ με αυτά θα μπορούσες. Εσύ όμως λες ότι μπορείς να πάρεις όσες φορές θέλεις το καθένα. Αυτό εννοώ, από που σου έχει έρθει αυτή η ιδέα;

32. Αλβέρτος: Ναι, τώρα που το ξανασκέφτομαι δεν μου ακούγεται και τόσο σωστό.

33. Ερευνητής: Γιατί; Λογικά είναι και τα δύο. Το θέμα είναι, πώς σου δημιουργήθηκε.

34. Αλβέρτος: Τώρα σκέφτηκα τα χαρτιά που παίζουμε, την τράπουλα και σκέφτομαι ότι πιο

σωστή απάντηση είναι του Γιώργου.

35. Ερευνητής: Επειδή υπάρχουν πολλοί άσσοι, πολλά δύο, πολλά τρία κλπ.;

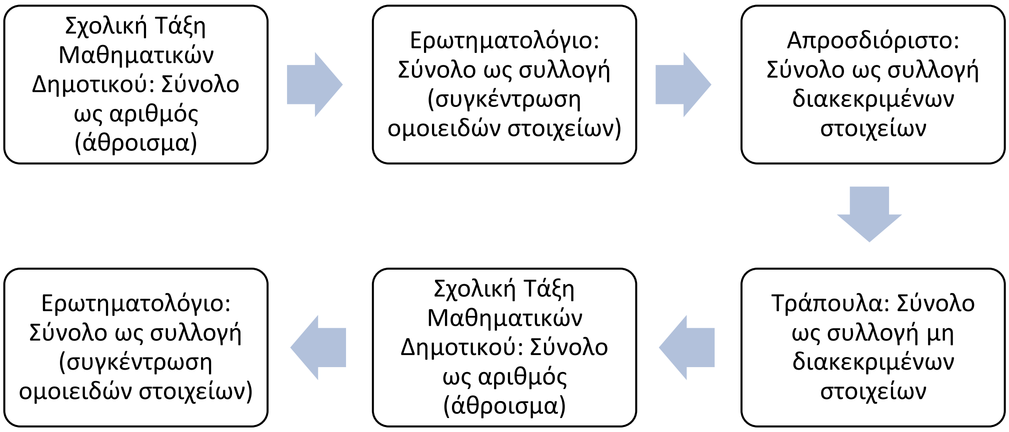
36. Αλβέρτος: Ναι.

37. Ερευνητής: Βέβαια είναι λίγο διαφορετικά. Έχει διαφορετικό σχέδιο το καθένα.

38. Αλβέρτος: Ναι αλλά δεν μπορείς να ρίξεις το ίδιο χαρτί όσες φορές θες.

Τα σενάρια που διαβάζει ο μαθητής εμπλέκουν εκπαιδευτικούς και μαθητές σε μία τάξη Μαθηματικών. Παρότι τα υποθετικά πρόσωπα στο πρώτο σενάριο σχολιάζουν χειραπτικά υλικά και φαγητά και το αν αυτά μπορούν να συμπεριληφθούν στο ίδιο σύνολο, ο μαθητής αντιμετωπίζει το σενάριο σαν ένα πρόβλημα Μαθηματικών. Αξίζει να τονιστεί ότι ο μαθητής έχει απαντήσει πρόσφατα στο ερωτηματολόγιο και τώρα διαβάζει τα σενάρια, οπότε φαίνεται να τροποποιεί τις απαντήσεις του ώστε να ταιριάζουν στο πεδίο που τα ερευνητικά υλικά υπαγορεύουν. Στη γραμμή 12 μας λέει ότι «το πρώτο πράγμα που σκέφτομαι» είναι ότι το σύνολο είναι το αποτέλεσμα κάποιας πράξης, αλλά του φαίνεται σωστότερο να πει ότι το σύνολο είναι «μια συγκέντρωση αντικειμένων». Πιθανότατα, παρότι η αυθόρμητη αντίληψη του είναι αυτή του συνόλου ως αριθμός, στην προσπάθεια του να νοηματοδοτήσει την έννοια του συνόλου στο πεδίο του ερωτηματολογίου, αποφασίζει να δει το σύνολο σαν συλλογή. Οι απαντήσεις του θα μπορούσαν να φανερώνουν την αλληλεπίδραση δύο διαφορετικών ιδιωμάτων. Στο πρώτο, αυτό της σχολικής τάξης των Μαθηματικών του Δημοτικού, το σύνολο νοείται ως ένας αριθμός (το αποτέλεσμα της πρόσθεσης). Στο δεύτερο, το οποίο μοιάζει να είναι το ιδίωμα του ερωτηματολογίου το οποίο ο μαθητής προσπαθεί να υιοθετήσει, το σύνολο έχει την έννοια της συλλογής (μίας συγκέντρωσης αντικειμένων).

Στη γραμμή 20, ο μαθητής φαίνεται να απαντάει στο ίδιο πλαίσιο, δηλαδή προσπαθεί να δώσει απάντηση σε ένα πρόβλημα Μαθηματικών. Ωστόσο, δέχεται ότι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης θάλασσα είναι τόσο το {7} όσο και το {Θ,Α,Λ,Σ}, αντλώντας πιθανότατα τα νόηματα που αποδίδει στις έννοιες τόσο από το ιδίωμα των σχολικών Μαθηματικών όσο και από αυτό των Μαθηματικών του ερωτηματολογίου. Ο λόγος που επιλέγει το {Θ,Α,Λ,Σ}, δηλαδή μία συλλογή διακεκριμένων στοιχείων, αντί για το {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ}, που είναι μία συλλογή μη διακεκριμένων στοιχείων, είναι ότι «αυτά τα γράμματα μπορείς να τα βάλεις όσες φορές θέλεις». Στη γραμμή 31, ο ερευνητής μετακινεί τη συζήτηση σε ένα καθημερινό πλαίσιο όταν αναφέρει «ένα παιχνίδι με αναγραμματισμούς». Η αντίληψη του μαθητή φαίνεται να μετακινείται μαζί με το πεδίο συζήτησης αφού τελικά αποφασίζει ότι το {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ} «του ακούγεται πιο σωστό», αιτιολογώντας στη γραμμή 38 ότι αν συζητάμε στο πλαίσιο του παιχνιδιού της τράπουλας, τότε «δεν μπορείς να ρίξεις το ίδιο χαρτί όσες φορές θες». Σε αυτό το σημείο το νόημα του συνόλου ως συλλογή μη διακεκριμένων στοιχείων, φαίνεται να αντλείται από κάποιο καθημερινό πλαίσιο. Όλες οι εκτιμώμενες μετακινήσεις του Αλβέρτου στα διαφορετικά ιδιώματα μαζί με τα αντίστοιχα νοήματα που αποδίδονται στην έννοια, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 4.3. Μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων και εξέλιξη νοηματοδότησης – Αλβέρτος

δ) Βαλάντης

Σύμφωνα με τον δάσκαλό του στην ΣΤ΄ Δημοτικού, ο Βαλάντης είχε πολύ καλή επίδοση στα Μαθηματικά. Πριν την συνέντευξη, μας δήλωσε ότι τα Μαθηματικά είναι το αγαπημένο του μάθημα και φάνηκε χαρούμενος με την ιδέα του να συμμετάσχει στην έρευνα. Ο παρακάτω διάλογος είναι ένα απόσπασμα της συνέντευξης του Βαλάντη:

1. Ερευνητής: Ο Γιώργος λέει, έχω 3 μολύβια, 1 γόμα, 1 ξύστρα, 4 βιβλία, 4 τετράδια και 1 τυρόπιτα άρα σύνολο 14 αντικείμενα.
2. Βαλάντης: Ναι, εγώ πιστεύω ότι αυτό είναι ένα σύνολο.
3. Ερευνητής: Το σύνολο είναι τα ίδια τα αντικείμενα ή το 14 που λέει στο τέλος;
4. Βαλάντης: Εεε, τα 14 αντικείμενα που λέει στο τέλος.
5. Ερευνητής: Η Δήμητρα λέει ότι η τυρόπιτα είναι φαγητό ενώ τα άλλα είναι πράγματα που βάζεις στη σχολική τσάντα άρα δεν μπορεί να ανήκουν στο ίδιο σύνολο. Τι θα απαντούσες στη Δήμητρα.
6. Βαλάντης: Έχει δίκιο, αλλά που αλλού να τη βάλω την τυρόπιτα;
7. Ερευνητής: Μπορούμε λοιπόν να τα βάλουμε όλα στο ίδιο σύνολο;
8. Βαλάντης: Όχι γιατί η τυρόπιτα είναι κάτι διαφορετικό από ότι η γόμα η ξύστρα και το μολύβι.

   ... ...

9. Ερευνητής: Αν σε ρωτούσε ένα παιδάκι τι είναι το σύνολο τι θα του έλεγες;

10. Βαλάντης: Να παίρνεις όλα τα πράγματα από ένα σημείο και να τα προσθέτεις. Ό,τι βγάλεις θα είναι το σύνολο των αντικειμένων.

11. Ερευνητής: Α, ότι βγάλεις θα είναι το σύνολο.

12. Βαλάντης: Ναι, το άθροισμα θα είναι το σύνολο.

... ...

13. Ερευνητής: Αυτό το έχεις δει στο σχολείο;

14. Βαλάντης: Όχι δεν το έχω δει πουθενά. Έτσι πιστεύω εγώ, δηλαδή δεν έχω διαβάσει κάποια θεωρία ούτε τίποτα.

15. Ερευνητής: Μήπως έχεις δει κάποια άσκηση που χρησιμοποιούσε τη λέξη σύνολο και κατάλαβες ότι αυτό εννοούσε;

16. Βαλάντης: Όχι, όχι δεν έχω δει ποτέ τίποτα.

17. Ερευνητής: Έχεις ακούσει κάπου αλλού τη λέξη;

18. Βαλάντης: Όχι, ακόμη και ο αδερφός μου που πάει Δευτέρα Λυκείου...

19. Ερευνητής: Γενικά λέω, σε άσχετη συζήτηση.

20. Βαλάντης: Όχι γιατί συζητούμε για άκυρα πράγματα παρά...

21. Ερευνητής: Και που την ξέρεις τη λέξη; Μπορείς να σκεφτείς κάπου να χρησιμεύει να το πεις ας πούμε;

22. Βαλάντης: Συνολικά υπάρχουν 15 σακουλάκια καφέ. Τόσο είναι το σύνολο του καφέ που έχουμε στο μαγαζί.

... ...

23. Ερευνητής: Δηλαδή να γράφει (του δείχνω μια απόδειξη) καφές, πορτοκαλάδα, τσάι. Το σύνολο θα ήταν ποίο;

24. Βαλάντης: Το α.

25. Ερευνητής: Το α; Δηλαδή;

26. Βαλάντης: Το σύνολο της πορτοκαλάδας του καφέ και του τσαγιού είναι ο αριθμός α.

27. Ερευνητής: Ααα, μου λες ένα αποτέλεσμα που απλά δεν ξέρεις ποιο είναι.

28. Βαλάντης: Ναι.

29. Ερευνητής: Δεν θα μπορούσα να πω ότι το σύνολο των αντικειμένων είναι 3; Να μετρήσω το πόσα είναι;

30. Βαλάντης: Ναι, θα μπορούσαμε αλλά δεν θα ξέραμε πόσο κόστιζαν.

... ...

31.	Ερευνητής:	Έχεις δει καμία άσκηση στο σχολείο που να χρησιμοποιούσε έτσι το σύνολο; Μήπως κάπου το έχεις ξανακούσει έτσι και υπάρχει στο πίσω μέρος του μυαλού σου;
32.	Βαλάντης:	Νομίζω το έχω ακούσει σε ασκήσεις με αριθμητικές παραστάσεις.
33.	Ερευνητής:	Δηλαδή, ο δάσκαλος το έλεγε έτσι;
34.	Βαλάντης:	Εεε, το συνολικό κόστος της παρένθεσης είναι 10 για παράδειγμα.

Πεδίο αναφοράς

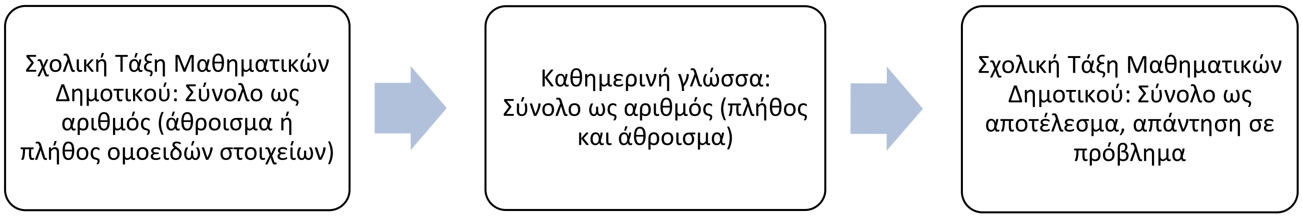
Στο πρώτο απόσπασμα (γραμμές 1-8) το θέμα της συζήτησης καθορίζεται από το πρώτο υποθετικό σενάριο και ο μαθητής απαντά όπως θα απαντούσε στην σχολική τάξη. Ο μαθητής φαίνεται να υιοθετεί τον ρόλο μαθητή που επιλύει κάποιο πρόβλημα μαθηματικών. Το ιδίωμα που φαίνεται να αξιοποιείται από τον μαθητή είναι αυτό της σχολικής τάξης των Μαθηματικών, μέσα στο οποίο το σύνολο έχει το νόημα του αριθμού (πλήθος αντικειμένων).

Στο δεύτερο απόσπασμα (γραμμές 9-12) ο ερευνητής παρακινεί τον μαθητή να αλλάξει τον ρόλο του και να προσποιηθεί ότι εξηγεί σε ένα νεότερο παιδί τι σημαίνει η λέξη ‘σύνολο’, μετακινώντας την συζήτηση σε ένα καθημερινό πλαίσιο. Παρότι ο μαθητής τροποποιεί ελαφρώς τη γλώσσα του και υιοθετεί ενδεχομένως κάποιο καθημερινό γλωσσικό ιδίωμα, η νοηματοδότηση της έννοιας του συνόλου ως πλήθος δεν αλλάζει. Ο μαθητής επιλέγει τον όρο ‘άθροισμα’, φαίνεται όμως να αναφέρεται στη διαδικασία του να συγκεντρώνεις κάποια στοιχεία και να μετράς το πλήθος τους.

Στο τρίτο και το τέταρτο απόσπασμα (γραμμές 13-30) ο ερευνητής επιχειρεί να δώσει στην συνέντευξη τον χαρακτήρα μιας καθημερινής συζήτησης. Ο μαθητής φαίνεται να αντιστέκεται στον ρόλο του ως απλού συνομιλητή, διατηρώντας την απόσταση που ενδεχομένως αισθάνεται λόγο της ιδιότητας του ως μαθητής και της ιδιότητας του ερευνητή ως μαθηματικού. Δίνει μη ολοκληρωμένες απαντήσεις που μάλλον σκοπεύουν στο να αποφύγει την ερώτηση παρά στο να διαφωτίσουν τον ερευνητή, όπως για παράδειγμα όταν λέει ότι «όχι, ακόμη και ο αδερφός μου που πάει Δευτέρα Λυκείου...» ή «όχι γιατί συζητούμε για άκυρα πράγματα παρά...».

Συγκεκριμένα, στο τρίτο απόσπασμα (γραμμές 13-22), προκειμένου να προσδιορίσει την προέλευση των αντιλήψεων και των εικόνων του μαθητή, ο ερευνητής του ζητάει να προσπαθήσει να προσδιορίσει αν αυτά που δηλώνει τα έχει δει στο σχολείο ή κάπου αλλού. Το πεδίο αναφοράς μετακινείται, αρχικά στη σχολική τάξη και στη συνέχεια σε ένα καθημερινό πλαίσιο. Παρά την ενδεχόμενη αλλαγή του γλωσσικού ιδιώματος που αξιοποιείται από τον Βαλάντη, το νόημα που αποδίδει στην έννοια του συνόλου δεν φαίνεται να επηρεάζεται. Στο τέταρτο απόσπασμα (γραμμές 23-30) η συζήτηση μετακινείται και πάλι σε ένα καθημερινό πλαίσιο το οποίο αναδεικνύει μια αντίφαση στη νοηματοδότηση της έννοιας από μεριάς του μαθητή. Το σύνολο θα μπορούσε να έχει το νόημα του συνολικού πλήθους, ωστόσο, το γεγονός ότι σε κάθε αντικείμενο αντιστοιχεί και μία τιμή οδηγεί τον μαθητή στην απόδοση του νοήματος του αθροίσματος των τιμών για την έννοια του συνόλου.

Τέλος, στη γραμμή 31, ο ερευνητής ρωτάει τον μαθητή αυτό που τον ρώτησε και στη γραμμή 13, δηλαδή αν έχει συναντήσει την έννοια του συνόλου στο σχολείο. Ενώ αρχικά απαντά αρνητικά, στη συνέχεια δηλώνει ότι την έχει συναντήσει στην αριθμητική. Το σύνολο έχει το νόημα του τελικού αποτελέσματος, νόημα που φαίνεται να αντλείται πάλι από το ιδίωμα της σχολικής τάξης των Μαθηματικών. Όπως φαίνεται από τα αποσπάσματα, ο μαθητής αντιλαμβάνεται την έννοια του συνόλου σαν έναν αριθμό σε κάθε γλωσσικό ιδίωμα, αλλά το ακριβές νόημα που αποδίδει στην έννοια μεταβάλλεται από τη μετακίνηση μεταξύ ιδιωμάτων.



Εικόνα 4.4. Μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων και εξέλιξη νοηματοδότησης – Βαλάντης

ε) Βλάσσης

Ο Βλάσσης είναι συμμαθητής του Αλβέρτου και του Βαλάντη. Είχε άριστη επίδοση σε όλα τα μαθήματα στο Δημοτικό και έχει ιδιαίτερα ανεπτυγμένο προφορικό λόγο για την ηλικία του. Ο παρακάτω διάλογος είναι ένα απόσπασμα της συνέντευξης του Βλάσση:

1. Βλάσσης: Εγώ συμφωνώ με τον Γιώργο.
2. Ερευνητής: Ο οποίος λέει «σύνολο 14 αντικείμενα».
3. Βλάσσης: Ναι.
4. Ερευνητής: Άρα, τι θα έλεγες ότι σημαίνει η λέξη σύνολο;
5. Βλάσσης: Σύνολο είναι το πλήθος όλων των αντικειμένων που έχει.
6. Ερευνητής: Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ή γενικά;
7. Βλάσσης: Γενικά.
8. Ερευνητής: Τι θα έλεγες λοιπόν ότι είναι ένα σύνολο γενικά.
9. Βλάσσης: Ένα σύνολο θα έλεγα γενικά ότι είναι όσα αντικείμενα έχει, παραδείγματος

χάριν πάνω σε ένα τραπέζι έχει τόσα αντικείμενα και θα έλεγα ότι είναι το πλήθος, πόσα αντικείμενα έχει πάνω στο τραπέζι.

10. Ερευνητής: ΟΚ, αυτό το έχεις ξανακούσει; Θυμάσαι κάπου στο σχολείο, κάποιο πρόβλημα ή κάποιον δάσκαλο να σχολιάζει τι είναι το σύνολο ή το έτσι το αντιλαμβάνεσαι μόνος σου;

11. Βλάσσης: Νομίζω ότι το θυμάμαι από την Πέμπτη με Τετάρτη Δημοτικού.

12. Ερευνητής: Μπορείς να μου δώσεις ένα παράδειγμα;

13. Βλάσσης: Θυμάμαι ένα, ότι ο Νίκος έχει 4 μολύβια, η Μαρία έχει 8 μαρκαδόρους και έλεγε για παράδειγμα, βρες μου το σύνολο και έπρεπε εμείς να προσθέσουμε πόσα έχει ο Νίκος και πόσα έχει η Μαρία.

... ...

14. Ερευνητής: Άρα θα έλεγες ότι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης θάλασσα είναι το {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ};

15. Βλάσσης: Ναι.

16. Ερευνητής: Πώς χρησιμοποιείς την έννοια «σύνολο» εδώ; Γιατί δεν συμφωνείς δηλαδή με τον Ανδρέα που λέει ότι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης είναι 7;

17. Βλάσσης: Εεε, γιατί... ο Ανδρέας πάλι σωστά το λέει αλλά, απλώς ο Γιώργος το λέει πιο... λέει όλα τα γράμματα που περιέχει η λέξη θάλασσα ενώ ο Ανδρέας λέει κατευθείαν ότι η θάλασσα είναι 7 γράμματα.

18. Ερευνητής: Μήπως το έχουν λίγο διαφορετικά στο μυαλό τους;

19. Βλάσσης: Ναι, είναι διαφορετικά αλλά έχει διατυπωθεί σωστά.

20. Ερευνητής: Δηλαδή, πώς νομίζεις ότι το σκέφτεται ο Γιώργος;

21. Βλάσσης: Ο Γιώργος το λέει γράμμα-γράμμα και βγάζει το σύνολο 7 ενώ ο Ανδρέας, χωρίς να πει τα γράμματα, λέει ότι είναι 7, το κάνει στο μυαλό του. Ε, και οι δύο είναι σωστοί...

22. Ερευνητής: Δεν λέει όμως τη λέξη 7 ο Γιώργος. Λέει ότι το σύνολο των γραμμάτων είναι το Θ, το Α, το Α, το α, το Λ, το Σ και το Σ χωρίς να αριθμεί πόσα είναι.

23. Βλάσσης: Όχι, γιατί νομίζω ότι περιμένει από την κυρία να υπολογίσει το σύνολο.

... ...

24. Ερευνητής: Και για ποιο λόγο κάνει λάθος η Εύη που λέει ότι το σύνολο των γραμμάτων που χρειάζομαι για να γράψω τη λέξη είναι το Θ, το Α, το Λ και το Σ;

25. Βλάσσης: Δεν είναι σωστή γιατί δεν απαντάει όλο το σύνολο, απλώς λέει τα γράμματα που επαναλαμβάνονται και τα γράμματα που υπάρχουν στη λέξη, μόνο αυτά και επαναλαμβάνονται.

26. Ερευνητής: Αυτό πάλι το έχεις δει στο σχολείο ή έτσι το καταλαβαίνεις εσύ;

27. Βλάσσης: Έτσι το καταλαβαίνω εγώ και έτσι πιστεύω ότι είναι.

... ...

28. Βλάσσης: Το σύνολο εγώ θα απαντούσα 17. Το σύνολο δηλαδή την πρόσθεση.

29. Ερευνητής: Α, του 8 και του 9.

30. Βλάσσης: Ναι δηλαδή αν πούμε το σύνολο του 8 και του 9, προσθετέος α προσθετέος β και βγάζεις σύνολο.

... ...

31. Ερευνητής: Άρα, μήπως το σύνολο τελικά δεν είναι το πλήθος αλλά το άθροισμα;

32. Βλάσσης: Ναι.

33. Ερευνητής: Στο πρώτο όμως σενάριο είχες αντικείμενα. Πώς θα τα αθροίσεις τα αντικείμενα;

34. Βλάσσης: Με πρόσθεση.

35. Ερευνητής: Δεν μπορείς να προσθέσεις την τυρόπιτα με το μολύβι. Μάλλον είχες άλλη έννοια για το σύνολο στο πρώτο.

36. Βλάσσης: Ναι, εκεί ήταν το πλήθος ενώ τώρα είναι το άθροισμα γιατί έχουμε αριθμούς.

... ...

37. Ερευνητής: Μπορείς να μου δώσεις ένα παράδειγμα από την καθημερινότητα που να χρησιμοποιείς τη λέξη σύνολο;

38. Βλάσσης: Το σύνολο των ευρώ. Είσαι σε ένα μαγαζί και πρέπει να βρεις το σύνολο από ότι αγόρασες, δηλαδή τα αντικείμενα, αλλά τα αντικείμενα έχουν την τιμή τους, οπότε τους αριθμούς και από τους αριθμούς βγάζεις το σύνολο.

39. Ερευνητής: Έχει νόημα να πω το σύνολο εννοώντας την τιμή αλλά έχει νόημα να πω και το πόσα αντικείμενα αγόρασες; Θα τα έλεγες και τα δύο σύνολο; Δηλαδή και ως άθροισμα και ως πλήθος;

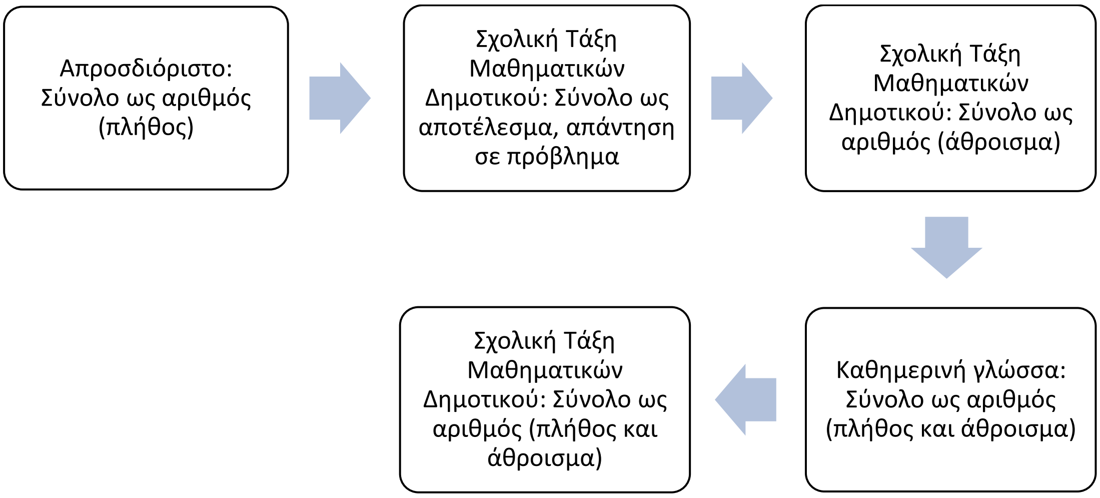
40. Βλάσσης: Ναι, γιατί πρέπει να τα πεις και τα δύο για να καταλάβεις πόσα είναι.

Στο πρώτο απόσπασμα (γραμμές 1-13) συζητείται το πρώτο σενάριο το οποίο φαίνεται να ωθεί τον Βλάσση την καταμέτρηση των στοιχείων. Ο Βλάσσης, σε αντίθεση με τους περισσότερους μαθητές, παίρνει τον ρόλο του συμμετέχοντα σε συνέντευξη και όχι του μαθητή που εξετάζεται από τον δάσκαλο. Ωστόσο, για τον ίδιο το θέμα της συζήτησης φαίνεται να είναι το νόημα του όρου 'σύνολο' συγκεκριμένα στο πλαίσιο της τάξης των Μαθηματικών. Στη γραμμή 10 ο ερευνητής ζητάει από τον Βλάσση αν μπορεί να προσδιορίσει την προέλευση της νοηματοδότησης του για την έννοια του συνόλου και ο Βλάσσης δηλώνει ότι έτσι χρησιμοποιούνταν η έννοια στις προηγούμενες τάξεις του Δημοτικού. Στη γραμμή 13 μάλιστα, μας δίνει και ένα παράδειγμα άσκησης στα πρότυπα του μαθήματος των Μαθηματικών στο Δημοτικό. Το νόημα που αποδίδει στην έννοια του συνόλου είναι αυτό του αριθμού και συγκεκριμένα του πλήθους, νόημα που πιθανότατα αντλείται από το ιδίωμα των Μαθηματικών της σχολικής τάξης.

Στο δεύτερο σενάριο (γρ. 14-27), ο μαθητής ταυτίζει το 7 με το {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ} βλέποντας ενδεχομένως το σύνολο σαν μια απάντηση σε ένα πρόβλημα. Για εκείνον, τόσο ο αριθμός 7 όσο και η συλλογή των γραμμάτων απαντούν σωστά στο πρόβλημα. Είναι πιθανό το νόημα που αποδίδει ο μαθητής στην έννοια να περιέχει το «πλήθος» των στοιχείων, δηλαδή των γραμμάτων, αλλά και την απαίτηση για τα γράμματα να είναι «όλα μαζί».

Στο επόμενο απόσπασμα (γρ. 28-36), που διαπραγματεύεται το σύνολο των φυσικών αριθμών που είναι μεγαλύτεροι του 8 και μικρότεροι του 9, ο μαθητής δυσκολεύεται από τη μη ύπαρξη τέτοιων αριθμών, αλλά προκειμένου να δώσει μια απάντηση αποφασίζει να συμπεριλάβει τους αριθμούς 8 και 9 στο σύνολο. Είναι συνηθισμένο για μαθητές Δημοτικού αλλά και μεγαλύτερους μαθητές να αναζητούν μια ικανοποιητική λύση σε ένα πρόβλημα μαθηματικών με αποτέλεσμα να υποθέτουν συνθήκες που δεν υπάρχουν ή να αξιοποιούν τα δεδομένα με τρόπο που δεν βγάζει νόημα στο πλαίσιο του προβλήματος. Για τον μαθητή, η απάντηση «δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο» δεν μοιάζει να είναι αποδεκτή. Θα μπορούσε ωστόσο να δώσει την απάντηση «0», να προσδιορίσει δηλαδή το πλήθος των ζητούμενων φυσικών αριθμών. Όπως όμως βλέπουμε και στο απόσπασμα των γραμμών 31 έως 36, η εμφάνιση των αριθμών 8 και 9 οδηγεί τον μαθητή να δώσει μία διαφορετική απόχρωση στο νόημα της έννοιας του συνόλου. Το σύνολο συνεχίζει να έχει το νόημα του αριθμού αλλά στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι το άθροισμα και όχι το πλήθος. Μάλιστα στη γραμμή 36, η διάκριση αυτή γίνεται αντιληπτή και από τον ίδιο τον μαθητή.

Μέχρι αυτό το σημείο ο Βλάσσης αντλούσε τα νοήματα που απέδιδε στην έννοια του συνόλου από το ιδίωμα των σχολικών Μαθηματικών. Στις τελευταίες τέσσερεις γραμμές όμως, ο ερευνητής ζητάει ρητά από τον μαθητή να μεταβεί σε ένα καθημερινό πλαίσιο. Ο μαθητής φαίνεται να αξιοποιεί κάποιο καθημερινό γλωσσικό ιδίωμα χωρίς όμως να τροποποιεί τη νοήματοδότηση της έννοιας του συνόλου. Οι συνολικές εκτιμώμενες μετακινήσεις του Βλάσση μεταξύ διαφορετικών γλωσσικών ιδιωμάτων μαζί με τις αντίστοιχες νοηματοδοτήσεις φαίνονται στο παρακάτω διάγραμμα.



Εικόνα 4.5. Μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων και εξέλιξη νοηματοδότησης – Βλάσσης

Σύνοψη αποτελεσμάτων Δημοτικού

Όλοι οι μαθητές του Δημοτικού αποδίδουν στην έννοια του συνόλου το νόημα του αριθμού στο ιδίωμα των σχολικών Μαθηματικών. Ένας από αυτούς επιχείρησε επιπλέον να νοηματοδοτήσει την έννοια μέσα σε ένα ιδίωμα των Μαθηματικών που να περιλαμβάνει τη γλώσσα του ερωτηματολογίου και των σεναρίων, αποδίδοντας στην έννοια του συνόλου το νόημα της «συγκέντρωσης αντικειμένων».

Τρεις από τους μαθητές απαντούσαν είτε σαν μαθητές που εξετάζονται προφορικά είτε σαν μαθητές που λύνουν κάποιο πρόβλημα στην σχολική τάξη και δύο μαθητές υιοθετούσαν τον ρόλο του συμμετέχοντα σε συνέντευξη.

Μόνο δύο από τους μαθητές απαντούσαν με σχετική βεβαιότητα, ωστόσο και οι δύο απέδιδαν στο σύνολο την έννοια του πλήθους σε κάποια πλαίσια και την έννοια του αθροίσματος σε άλλα πλαίσια ενώ υπονοούσαν την ιδιότητα του «όλα μαζί» σε κάθε πλαίσιο. Η νοηματοδότηση όλων των μαθητών για την έννοια του συνόλου ήταν ασταθής αφού οι αλλαγές στο πεδίο αναφοράς και τους ρόλους που υιοθετήθηκαν ήταν ικανές να αποκαλύψουν διαφορετικές πτυχές της έννοιας, σε κάποιες περιπτώσεις αντιφατικές.

Οι μαθητές του Δημοτικού χρησιμοποιούσαν την έννοια του συνόλου περισσότερο σαν μια καθημερινή έννοια παρά σαν μια Μαθηματική έννοια αφού δεν απέδιδαν ένα σαφές και αναλλοίωτο νόημα. Το γεγονός αυτό είναι πιθανότατα αποτέλεσμα της χρήσης της έννοιας από τα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού, των δασκάλων της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης αλλά και του δημόσιου λόγου.

4.2.2. Ανάλυση συνεντεύξεων με μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου

α) Ηρώ

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε τις συνεντεύξεις των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου ξεκινώντας με την Ηρώ, η οποία είναι συγγενής του ερευνητή που διεξάγει την συνέντευξη. Η ίδια θεωρεί ότι δεν τα καταφέρνει στα Μαθηματικά, ωστόσο έχει αρκετά ανεπτυγμένο μαθηματικό συλλογισμό και δεν υστερεί σε σχέση με τους μαθητές της ηλικίας της. Η εγγύτητα με τον ερευνητή επέτρεψε στην Ηρώ να εκφράσει τις σκέψεις τις χωρίς περιορισμούς και οδήγησε σε ενδιαφέρουσες εισηγήσεις, όπως φαίνεται και στα παρακάτω αποσπάσματα:

1. Ερευνητής: Με ποιον συμφωνείς;
2. Ηρώ: Με τη Μίνα (θα μπορούσαν να αποτελούν το σύνολο των πλευρών ενός τετράπλευρου).
3. Ερευνητής: Ωραία, πού κάνει λάθος ο Σωτήρης (2 αριθμοί και 2 μεταβλητές άρα σύνολο 4 αντικείμενα); Τι θα του έλεγες για να τον πείσεις;
4. Ηρώ: Ας πούμε, μου άρεσε έτσι όπως του απάντησε η Θέτις.
5. Ερευνητής: Α, που λέει ότι «δεν ρώτησε πόσα είναι».
6. Ηρώ: Ναι.
7. Ερευνητής: Ναι αλλά αφού σου αρέσει η απάντηση της Θέτιδας γιατί συμφωνείς με τη Μίνα;
8. Ηρώ: Γιατί μου αρέσει η απάντηση της Θέτιδας προς τον Σωτήρη, όχι η γνώμη της.
9. Ερευνητής: Α, κατάλαβα. Δηλαδή δεν σου άρεσε αυτό που λέει ότι δεν μπορούμε στο ίδιο σύνολο να βάλουμε αριθμούς και γράμματα;
10. Ηρώ: Ε, δεν νομίζω.
11. Ερευνητής: Εσύ θα έβαζες αριθμούς και γράμματα στο ίδιο σύνολο;
12. Ηρώ: Ε, τώρα... ε ξέρω ‘γω ναι μωρέ!

... ...

13. Ηρώ: Να πω με ποιον συμφωνώ;

14. Ερευνητής: Ναι.

15. Ηρώ: Με τον Ανδρέα.

16. Ερευνητής: Με τον Ανδρέα ο οποίος λέει ότι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης θάλασσα είναι {7}.

17. Ηρώ: Ναι.

18. Ερευνητής: Τότε γιατί πριν δεν συμφωνούσες με τον Σωτήρη που έλεγε ότι είναι 2 αριθμοί και 2 μεταβλητές, σύνολο 4 αντικείμενα; Όπως αυτός λέει είναι σύνολο 7 γράμματα ο άλλος πριν έλεγε συνολικά 4 αντικείμενα.

19. Ηρώ: Ε, τώρα μου φαίνεται πιο λογικό. Αφού ρωτάει για μια λέξη συγκεκριμένα, πόσα γράμματα... σύνολο των γραμμάτων.

20. Ερευνητής: Άρα ποιο νόημα έχει εδώ η λέξη σύνολο;

21. Ηρώ: Το πλήθος;

22. Ερευνητής: Το καταλαβαίνεις ως το πλήθος;

23. Ηρώ: Των γραμμάτων.

... ...

24. Ερευνητής: Πως πιστεύεις ότι θα τη χρησιμοποιούμε αυτή την έννοια στα Μαθηματικά;

25. Ηρώ: Ωχ δεν ξέρω... το σύνολο;

26. Ερευνητής: Ναι.

27. Ηρώ: Δεν είναι λίγο ανάλογα;

28. Ερευνητής: Θα μπορούσε αλλά πρέπει να μου εξηγήσεις τι εννοείς

29. Ηρώ: Σύνολο... εεε... για παράδειγμα ένα σύνολο με αρνητικούς αριθμούς; Δεν ξέρω πως το χρησιμοποιούμε.

... ...

30. Ηρώ: Εγώ θα το σκεφτόμουν πιο πολύ σαν την Αλεξία ότι αφού δεν υπάρχουν λύσεις δεν υπάρχει και σύνολο (οι υποθετικοί μαθητές επιχειρούν να προσδιορίσουν «το σύνολο των λύσεων» μιας αδύνατης ανίσωσης). Η Αλεξία δεν το λέει αυτό;

31. Ερευνητής: Ναι.

32. Ηρώ: Αλλά, εεε... ο Γιώργος είναι λίγο πιο ψαγμένος. Δηλαδή, ας πούμε γιατί δεν μπορούμε να πούμε ότι το σύνολο των λύσεων είναι... μηδέν ας πούμε; Ένα σύνολο δεν θεωρείται πάλι; Αλλά δεν έχει κάτι μέσα.

33. Ερευνητής: Ωραία δεν έχει κάτι μέσα άρα λες ότι το σύνολο των λύσεων είναι μηδέν.

34. Ηρώ: Μμμ.

35. Ερευνητής: Ο Γιώργος χρησιμοποιεί τη λέξη κενό.

36. Ηρώ: Κενό σαν μηδέν δεν είναι;

... ...

37. Ερευνητής: Το ζήτημα είναι, όχι με ποιον συμφωνείς απαραίτητα αλλά εσύ πώς το σκέφτεσαι.

38. Ηρώ: Εγώ δεν ξέρω, ενδιάμεσα είμαι.

39. Ερευνητής: Αν περιέχει το 0 ή δεν περιέχει τίποτα θα σήμαινε το ίδιο για εσένα;

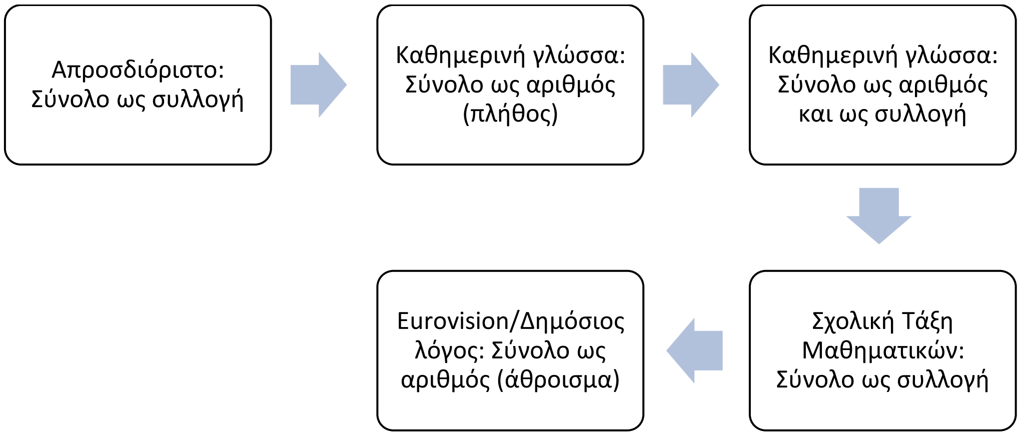
40. Ηρώ: Ρε παιδί μου... ξέρεις πώς το σκέφτομαι; Ας πούμε, πες ότι βλέπουμε Eurovision και λένε αυτοί που λένε τις ψήφους ότι η Γερμανία, το σύνολο των ψήφων που πήρε είναι 0. Όπως το λέει δεν ακούγεται σαν πάλι το 0 να είναι κάτι; Δηλαδή, ναι μεν είναι 0 οπότε δεν πήρε τίποτα αλλά... είναι ένα... σύνολο!

Η μαθήτρια χρησιμοποιεί εκφράσεις όπως «ξέρω ‘γω», «ναι μωρέ», «πιο ψαγμένος» και «ρε παιδί μου», ενώ μιλάει στον ερευνητή στον ενικό. Οι απαντήσεις της χαρακτηρίζονται από αβεβαιότητα, ωστόσο δεν διστάζει να ξεδιπλώσει τις σκέψεις της ακόμη και να παραδεχτεί ότι η πηγή γνώσης της είναι ένας διαγωνισμός τραγουδιού. Γενικά δεν αντιμετωπίζει τον ερευνητή σαν εξεταστή ούτε φαίνεται να νιώθει την ανάγκη να δώσει τις «σωστές» απαντήσεις.

Το θέμα συζήτησης στις πρώτες δώδεκα γραμμές του παραπάνω διαλόγου εμπεριέχει μεταβλητές και αριθμούς. Η μαθήτρια φαίνεται να αποδίδει στο σύνολο το νόημα της συλλογής κινούμενη σε κάποιο απροσδιόριστο γλωσσικό ιδίωμα. Στην γραμμή 24, ο ερευνητή ρωτάει την Ηρώ πώς πιστεύει ότι χρησιμοποιείται η έννοια του συνόλου στα Μαθηματικά και εκείνη δίνει το παράδειγμα ενός σύνολο με αρνητικούς αριθμούς. Η απάντηση της αυτή σε συνδυασμό με τις απαντήσεις της στο πρώτο απόσπασμα θα μπορούσαν να μας οδηγήσουν στο συμπέρασμα ότι όποτε αξιοποιεί το ιδίωμα των Μαθηματικών της σχολικής τάξης, αποδίδει στην έννοια του συνόλου το νόημα της συλλογής.

Η ερώτηση του ερευνητή στη γραμμή 18 και η απάντηση της Ηρούς στην επόμενη γραμμή, υποδηλώνουν πως η μαθήτρια αντιλαμβάνεται ότι η συζήτηση στο πρώτο απόσπασμα συνέβαινε σε κάποιο μαθηματικό πλαίσιο, ενώ στο δεύτερο (γρ. 13-23) σε κάποιο καθημερινό πλαίσιο. Στη γραμμή 19, η αντίληψη της μαθήτριας φαίνεται να μετακινείται σαν αποτέλεσμα της αλλαγής πλαισίου. Εδώ το θέμα συζήτησης είναι «μια λέξη συγκεκριμένα» και συνεπώς το σύνολο των γραμμάτων της νοείται ως το πλήθος τους. Αυτό θα μπορούσε να σημαίνει ότι στα καθημερινά γλωσσικά ιδιώματα της Ηρούς, το νόημα της έννοιας του συνόλου είναι αυτό του αριθμού.

Στο συμπέρασμα αυτό συνηγορεί και το σχόλιό της στη γραμμή 40 στην οποία επικαλείται το ιδίωμα του μουσικού διαγωνισμού της Eurovision το οποίο είναι ένα ιδίωμα του δημόσιου λόγου. Σύμφωνα με αυτό, το σύνολο των πόντων που λαμβάνει μια χώρα νοείται ως το άθροισμα των πόντων της. Στα τελευταία δύο αποσπάσματα ο ερευνητής και η μαθήτρια διαπραγματεύονται το τρίτο σενάριο το οποίο είναι καθαρά μαθηματικό, ωστόσο, είναι αυτό που εν τέλει οδηγεί την Ηρώ στο να δώσει ένα παράδειγμα από ένα καθημερινό πλαίσιο.



Εικόνα 4.7. Μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων και εξέλιξη νοηματοδότησης – Ηρώ

β) Αριστέα

Ο επόμενος διάλογος είναι ένα απόσπασμα της συζήτησης του ερευνητή με την Αριστέα. Η Αριστέα είναι συμμαθήτρια της Ηρούς, δηλαδή της προηγούμενης μαθήτριας. Είναι αριστούχος μαθήτρια και προσπαθεί πάντα να έχει υψηλή επίδοση, μία συνήθεια που φάνηκε να φέρνει και στην συνέντευξη, όπως θα δούμε παρακάτω:

1. Αριστέα: Πιστεύω, αφού λέει ποιο είναι το σύνολο και από ότι έχω καταλάβει το σύνολο το δείχνουμε σε παρενθέσεις. Εεε... πιστεύω... και δεν ρωτάει ποιο είδος γραμμάτων έχει. Συμφωνώ με τον Γιώργο (το {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ}) γιατί το σύνολο των γραμμάτων είναι αυτό και όχι με την Εύη (το {Θ,Α,Λ,Σ}) γιατί δεν βάζει μερικά γράμματα γιατί είναι ίδια αλλά ουσιαστικά...
2. Ερευνητής: Ωραία άρα μεταξύ του Γιώργου και της Εύης θεωρείς πιο σωστό τον Γιώργο. Στο Ανδρέα (ο οποίος απάντησε ότι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης θάλασσα είναι 7) τι θα απαντήσεις;
3. Αριστέα: Ότι το σύνολο το βάζουμε μέσα σε αγκύλες οπότε...

4. Ερευνητής: Ααα, με βάση αυτά που έχεις δει στο ερωτηματολόγιο και εδώ.

5. Αριστέα: Ναι.

... ...

6. Ερευνητής: Γενικά σε αυτά που μου απαντάς σε επηρεάζει κυρίως πιστεύεις, πράγματα που έχεις ακούσει στο μάθημα των Μαθηματικών, πράγματα που διάβασες στο ερωτηματολόγιο ή το πως το σκέφτεσαι στην καθημερινότητα, στο πως χρησιμοποιείς καθημερινά τη λέξη σύνολο;

7. Αριστέα: Σαν τον Ανδρέα βασικά το χρησιμοποιώ.

8. Ερευνητής: Α, σαν τον Ανδρέα το χρησιμοποιείς;

9. Αριστέα: Αλλά...

10. Ερευνητής: Μου έχεις δώσει την απάντηση (στο ερωτηματολόγιο), λες «το σύνολο στα μαθηματικά το αντιλαμβάνομαι σαν το αποτέλεσμα μιας πράξης για παράδειγμα το 5+4=9, το 9 το αντιλαμβάνομαι σαν σύνολο».

11. Αριστέα: Ναι, σαν το Ανδρέα.

... ...

12. Αριστέα: Ο Ανδρέας είναι λίγο πιο... ως καθημερινά τη χρησιμοποιεί τη λέξη ενώ ο Γιώργος πιο μαθηματικά.

... ...

13. Αριστέα: Ο καθηγητής ουσιαστικά ρώτησε πόσα ... όταν λέει να βρουν το σύνολο εννοεί σαν αυτό που είπα με την πρόσθεση και ότι το 9 είναι το σύνολο;

14. Ερευνητής: Δεν διευκρινίζει ο καθηγητής. Έχουμε μόνο αυτό το απόσπασμα και πρέπει να προσπαθήσουμε να σκεφτούμε τι εννοεί. Λέει, να προσδιορίσετε το σύνολο των λύσεων. Ποιο είναι το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης.

15. Αριστέα: Εεε, λογικά αυτό που λέει ο Γιώργος, ότι είναι αδύνατο οπότε...

16. Ερευνητής: Είναι πράγματι αδύνατη η ανίσωση. Δηλαδή, η πρώτη φράση του Γιώργου είναι σωστή. Από εκεί και πέρα υπάρχει μια διαπραγμάτευση.

17. Αριστέα: Άρα με ποιον συμφωνώ;

18. Ερευνητής: Ναι.

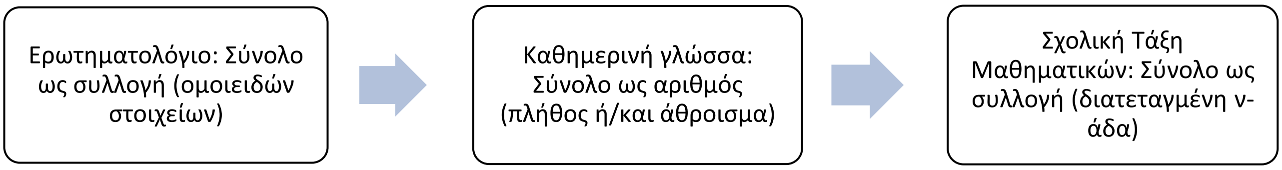
19. Αριστέα: Εεε, ωραία. Πιστεύω ότι... δεν ξέρω. Ωραία, πιστεύω ότι αυτό που πιστεύει ο Γιώργος.

Στην πρώτη γραμμή, η Αριστέα λέει ότι «από ότι έχω καταλάβει το σύνολο το δείχνουμε σε παρενθέσεις». Το πεδίο αναφοράς μοιάζει να καθορίζεται αρχικά από το ερωτηματολόγιο και τα υποθετικά σενάρια. Η μαθήτρια αντιλαμβάνεται ότι το θέμα της συζήτησης είναι η έννοια του συνόλου στα Μαθηματικά και ότι η αποστολή της είναι να επιλέξει την σωστή απάντηση ανάμεσα στις απαντήσεις των υποθετικών μαθητών. Μοιάζει να αντλεί νοήματα μέσα από το ιδίωμα του ίδιου του ερωτηματολογίου ή των υποθετικών σεναρίων. Πιθανότατα, έρχεται για πρώτη φορά σε επαφή με την απεικόνιση ενός συνόλου με αναγραφή των στοιχείων του (μέσα σε άγκιστρα) και ενδεχομένως βλέπει πρώτη φορά το σύνολο με την έννοια της συλλογής αντικειμένων. Παράλληλα όμως, φέρει και τις προϋπάρχουσες αντιλήψεις της για την έννοια του συνόλου από τα καθημερινά γλωσσικά ιδιώματα και της χρήσης της έννοιας μέσα σε αυτά. Για παράδειγμα, υποστηρίζει ότι η συλλογή {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ}, είναι *το σύνολο* των γραμμάτων ενώ το {Θ,Α,Λ,Σ} είναι μόνο κάποια από τα γράμματα. Αντιλαμβάνεται δηλαδή το σύνολο ως *όλα τα γράμματα* της λέξης.

Όταν στη δεύτερη γραμμή ο ερευνητής τη ρωτά τι θα απαντούσε στον Ανδρέα, τον υποθετικό μαθητή ο οποίος απάντησε ότι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης θάλασσα είναι 7, εκείνη λέει ότι θα τον διόρθωνε και θα του τόνιζε ότι «το σύνολο το βάζουμε μέσα σε αγκύλες». Υπενθυμίζουμε ότι στο ερωτηματολόγιο, το οποίο προηγείτο της συνέντευξης, η ίδια είχε επιλέξει την απάντηση {7}. Ωστόσο, δεν θα μπορούσαμε με βεβαιότητα να συμπεράνουμε, αν στην παρούσα στιγμή αποδίδει στο σύνολο το νόημα του αριθμού, απαιτώντας την αναγραφή του μέσα σε αγκύλες ή αν θεωρεί ότι, στο συγκεκριμένο πλαίσιο, το σύνολο έχει το νόημα της συλλογής και όχι του αριθμού.

Μετά την παρέμβαση του ερευνητή στη γραμμή 6 η μαθήτρια μετακινείται σε ένα καθημερινό ιδίωμα, μέσα στο οποίο η λέξη σύνολο έχει την έννοια του αθροίσματος. Το καθημερινό αυτό ιδίωμα θα μπορούσε να είναι η καθημερινή-φυσική της γλώσσα ή η γλώσσα που χρησιμοποιεί στην καθημερινότητα στην σχολική τάξη ή κάποιος συνδυασμός από τα δύο. Με την τελευταία της πρόταση και ύστερα από συζήτηση με τον ερευνητή, καταλήγει στο ότι το σύνολο είναι ένας αριθμός στην καθημερινότητα αλλά μια συλλογή στα μαθηματικά.

Όπως φαίνεται και στο τελευταίο απόσπασμα (γραμμές 13-19), η Αριστέα αντιμετωπίζει την συνέντευξη σαν προφορική εξέταση στο μάθημα των Μαθηματικών. Ο ερευνητής έχει τον ρόλο του ειδικού, ο οποίος έχει τη γνώση και εκείνη προσπαθεί να βρει τις σωστές απαντήσεις. Στη γραμμή 13 επιχειρεί να εκμαιεύσει πληροφορίες από τον ερευνητή και συγκεκριμένα να αντιληφθεί τη χρήση της έννοιας του συνόλου στο πλαίσιο των υποθετικών σεναρίων. Στην συνέχεια ρωτάει τον ερευνητή αν αυτό που θα πρέπει να κάνει είναι να επιλέξει με ποιον συμφωνεί. Τέλος, στη γραμμή 19 φαίνεται να είναι αβέβαιη για το τι πιστεύει και να ψάχνει το θάρρος για να επιλέξει μια τελική απάντηση.



Εικόνα 4.6. Μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων και εξέλιξη νοηματοδότησης – Αριστέα

γ) Ζηνοβία

Οι επόμενες δύο μαθήτριες έχουν συνεργαστεί με τον ερευνητή στο παρελθόν. Η Ζηνοβία είναι άριστη μαθήτρια και ιδιαίτερα ικανή στα Μαθηματικά. Η εγγύτητα της με τον ερευνητή την οδηγεί σε αυθόρμητες και ενδιαφέρουσες απαντήσεις, ωστόσο κάποιες φορές οι απαντήσεις της περιέχουν κάποια ανασφάλεια σχετικά με την ορθότητα τους:

1. Ζηνοβία: ΟΚ, τι είναι αυτό; Ε δεν ξέρω είναι διαφορετικά πράγματα.
2. Ερευνητής: Δηλαδή;
3. Ζηνοβία: Δηλαδή είναι δύο αριθμοί και δύο μεταβλητές, ξεχωριστά.
4. Ερευνητής: Δηλαδή αν η καθηγήτρια ρωτούσε αν ο αριθμός 1, ο αριθμός 2, ο αριθμός 3 και ο αριθμός 4 μπορούν να είναι τα στοιχεία ενός συνόλου, θα ήταν σωστό να πεις, ναι είναι 4 αριθμοί; Άρα σύνολο 4.
5. Ζηνοβία: Γιατί να... όχι το 4 είναι άκυρο με την ερώτηση.
6. Ερευνητής: Α, γιατί είναι άκυρο, τι εννοείς;
7. Ζηνοβία: Γιατί δεν με ρωτάει αυτό, απλά με ρωτάει αν μπορεί να είναι ένα σύνολο. Εντάξει αν ήταν ένα μόνο του, δεν μπορεί. Δεν ξέρω, αλήθεια.

... ...

8. Ερευνητής: Αλλά, πρέπει να είναι όμοια; Αν ήταν τελείως άσχετα θα μπορούσαν να είναι τα στοιχεία ενός συνόλου. Δηλαδή αν είναι το 1, το 2, το α και αυτό εδώ το στυλό. Θα μπορούσαν να είναι τα στοιχεία ενός συνόλου;
9. Ζηνοβία: Σκέφτομαι...
10. Ερευνητής: Ναι.
11. Ζηνοβία: Μμμ, γενικά συνόλου; Γενικά.
12. Ερευνητής: Ναι, να τα έχεις μαζί σε ένα σύνολο.
13. Ζηνοβία: Ναι θα μπορούσε.

14. Ερευνητής: ΟΚ και από που σου έχει δημιουργηθεί αυτή ...
15. Ζηνοβία: Γιατί μπορεί να είναι το σύνολο των πραγμάτων που ονειρεύτηκα χθες το βράδυ.
16. Ερευνητής: Άρα δεν είναι κάτι που το έχεις δει στα Μαθηματικά, είναι κάτι που το...
17. Ζηνοβία: Το σκέφτηκα.

... ...

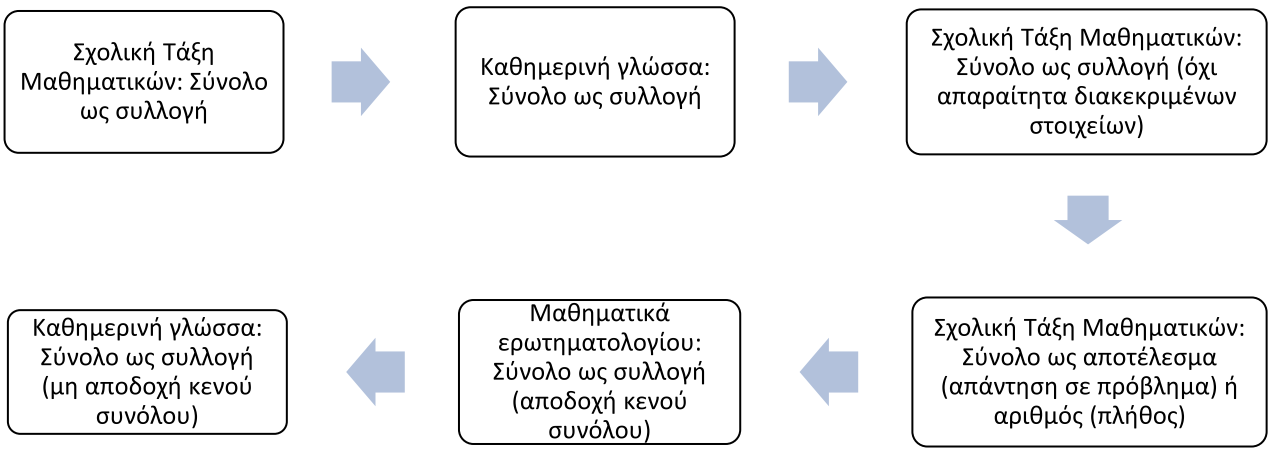
18. Ερευνητής: Οκ, άρα ένα σύνολο πόσα στοιχεία πρέπει να έχει πιστεύεις για να θεωρείται σύνολο;
19. Ζηνοβία: Δεν ξέρω, από κανένα μέχρι τέλος.
20. Ερευνητής: Τέλος, δηλαδή;
21. Ζηνοβία: Δηλαδή μέχρι άπειρο.
22. Ερευνητής: ΟΚ και αυτή την αντίληψη την έχεις επειδή έχεις δει κάποια άσκηση στα Μαθηματικά ή το έχετε αναφέρει στην τάξη ας πούμε ή έτσι πιστεύεις, η γνώμη σου;
23. Ζηνοβία: Έτσι πιστεύω, ναι, νομίζω δηλαδή, δεν ξέρω.
24. Ερευνητής: Και έτσι καταλαβαίνεις το σύνολο στα Μαθηματικά, σε αυτό το πλαίσιο ή γενικά έτσι καταλαβαίνεις τη λέξη σύνολο;
25. Ζηνοβία: Στα Μαθηματικά.
26. Ερευνητής: Ενώ κανονικά πώς θα το φανταζόσουν, τι διαφορές θα είχε;
27. Ζηνοβία: Ένα σύνολο;
28. Ερευνητής: Ναι.
29. Ζηνοβία: Εεε, ότι... δεν θα είναι κενό

Η συζήτηση με τη Ζηνοβία ξεκινάει με το 1^{ο} υποθετικό σενάριο, το θέμα του οποίου είναι αν ο αριθμός 1, ο αριθμός 2, το γράμμα α και το γράμμα β μπορούν να είναι τα στοιχεία ενός συνόλου. Η Ζηνοβία επιλέγει να χρησιμοποιήσει τη λέξη «μεταβλητές» για το γράμμα α και β, κάτι που υποδηλώνει ότι το πεδίο αναφοράς για την ίδια είναι πιθανότατα η Άλγεβρα και το ιδίωμα που αξιοποιείται είναι μάλλον αυτό των σχολικών Μαθηματικών. Η Ζηνοβία φαίνεται να αποδίδει στο σύνολο το νόημα της συλλογής. Ιδιαίτερα στη γραμμή 6 εκπλήσσεται από την ιδέα ότι το σύνολο μπορεί να αναφέρεται στο πλήθος των στοιχείων μιας συλλογής.

Στη γραμμή 8 ο ερευνητής επιχειρεί να τροποποιήσει το πεδίο αναφοράς της συζήτησης αντικαθιστώντας το γράμμα β με ένα στυλό. Η ιδέα της συμπερίληψης ενός στυλό μέσα στο σύνολο φαίνεται να επηρεάζει την οπτική της Ζηνοβίας, η οποία μετακινείται σε κάποιο καθημερινό ιδίωμα και σχολιάζει «γενικά» το σύνολο (γραμμή 11). Πιστεύει λοιπόν πως ένα τέτοιο σύνολο θα είχε νόημα αφού θα μπορούσε «να είναι το σύνολο των πραγμάτων που ονειρεύτηκα χθες το βράδυ». Ενώ στα Μαθηματικά τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να έχουν κάποια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα, στην καθημερινότητα μια τέτοια απαίτηση δεν θα είχε ιδιαίτερο νόημα. Η κοινή ιδιότητα των στοιχείων θα μπορούσε να είναι κάτι τόσο τετριμμένο όσο το να εμφανίστηκαν στο ίδιο όνειρο.

Παρόμοια συμπεράσματα βλέπουμε και στο τελευταίο απόσπασμα (γραμμές 18-29) όπου ένα σύνολο μπορεί να είναι κενό στα μαθηματικά αλλά όχι σε άλλα πλαίσια. Συγκεκριμένα, στη γραμμή 19 η Ζηνοβία φαίνεται να δέχεται την ύπαρξη κενών συνόλων, ενώ στη γραμμή 25 εξηγεί ότι ένα κενό σύνολο θα είχε νόημα μόνο στα Μαθηματικά ενώ στην καθημερινότητα, όπως εξηγεί στη γραμμή 29, ένα σύνολο δεν μπορεί να είναι κενό. Τα συμπεράσματα αυτά έρχονται σε αντίθεση με τη δήλωσή της στη γραμμή 7 όπου υποστηρίζει ότι ένας αριθμός μόνος του δεν θα μπορούσε να αποτελέσει ένα σύνολο.

Τόσο στη γραμμή 7 όσο και στη γραμμή 23 η αβεβαιότητα της Ζηνοβίας υποδηλώνει ότι η νοηματοδότηση της έννοιας του συνόλου δεν είναι ολοκληρωμένη και ότι η άντληση νοήματος ενδέχεται να προέρχεται από διάφορα γλωσσικά ιδιώματα ταυτόχρονα. Σε όλη την συνέντευξη χρησιμοποιεί εκφράσεις όπως «δεν ξέρω, αλήθεια», «σκέφτομαι...», «νομίζω» ενώ σε κάποιες στιγμές έρχεται σε αντίθεση με τον εαυτό της. Δεν είναι ξεκάθαρο αν αντιμετωπίζει την συνέντευξη σαν εξέταση ή σαν συζήτηση. Από τη μία υπάρχουν στιγμές που δίνει μονολεκτικές απαντήσεις ή διστάζει να απαντήσει, ενώ από την άλλη χρησιμοποιεί καθημερινές εκφράσεις όπως «άκυρο με την ερώτηση» (γραμμή 5).



Εικόνα 4.8. Μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων και εξέλιξη νοηματοδότησης – Ζηνοβία

δ) Πασιφάη

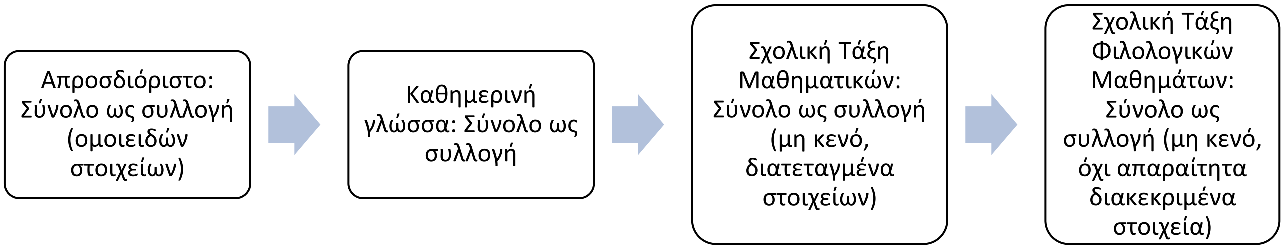
Ο παρακάτω διάλογος αποτελείται από αποσπάσματα της συζήτησης του ερευνητή με την Πασιφάη. Η Πασιφάη είναι συμμαθήτρια της Ζηνοβίας και έχει και εκείνη συνεργαστεί με τον ερευνητή στο παρελθόν. Όταν γνωρίστηκε με τον ερευνητή δήλωνε ότι δεν καταλαβαίνει τα Μαθηματικά. Μετά από έναν χρόνο συνεργασίας με τον ερευνητή η στάση της είχε αλλάξει δραστικά. Είχε πετύχει σχεδόν άριστη επίδοση στα σχολικά Μαθηματικά και πλέον θεωρούσε ότι οι μαθηματικές έννοιες που διδάσκονταν στο σχολείο δεν είναι τόσο απαιτητικές όσο θεωρούσε παλαιότερα. Παρότι η μαθήτρια άρχισε να εμπιστεύεται τον μαθηματικό συλλογισμό της, συνέχισε να πιστεύει ότι η κλίση της είναι κυρίως προς τις ανθρωπιστικές σπουδές, κάτι που φάνηκε και στις επιλογές των γλωσσικών ιδιωμάτων που αξιοποιεί στην συνέντευξη:

1.	Πασιφάη:	Νιώθω ότι έχει μπερδέψει το σύνολο 4 αντικείμενα. Άλλο το σύνολο και άλλο πόσα είναι μαζί, δηλαδή το 2+2=4.
	...	...
2.	Ερευνητής:	Άρα πιο είναι το κριτήριο για να πεις ότι κάποια στοιχεία αποτελούν τα στοιχεία ενός συνόλου; Για να τα βάλεις μαζί σε ένα σύνολο.
3.	Πασιφάη:	Να ΄ναι όμοια, δηλαδή οι αριθμοί είναι ένα σύνολο επειδή είναι όλοι αριθμοί ή π.χ. τα σημεία στίξης είναι ένα σύνολο επειδή είναι σημεία στίξης. Επειδή έχουν όμοιες ιδιότητες κάπως.
4.	Ερευνητής:	ΟΚ, δεκτό. Αυτό το έχεις ακούσει από κάπου, το έχετε μάθει στο σχολείο ή το σκέφτηκες μόνη σου, έτσι το καταλαβαίνεις;
5.	Πασιφάη:	Ε, ναι... έτσι το καταλαβαίνω.
	...	...
6.	Πασιφάη:	Δεν ξέρω απλά στο μυαλό μου το έχω διαφορετικό το σύνολο, δηλαδή εγώ δεν το αντιλαμβάνομαι το σύνολο ως πόσα γράμματα είναι. Είναι 7 γράμματα άρα αυτό είναι το σύνολο των γραμμάτων; Νιώθω ότι το σύνολο είναι κάτι διαφορετικό.
7.	Ερευνητής:	Κάτι διαφορετικό, δηλαδή; Τι διαφορετικό;
8.	Πασιφάη:	Ότι πρέπει να ΄ναι όμοια πράγματα δηλαδή... οι άνθρωποι π.χ. είναι ένα σύνολο, οι Έλληνες είναι ένα σύνολο επειδή είναι όλοι Έλληνες.
	...	...

9.	Ερευνητής:	Θα έλεγες ότι το σύνολο των λύσεων είναι {1,1} ή θα το έγραφες μία φορά;
10.	Πασιφάη:	Θα το έγραφα μία φορά.
11.	Ερευνητής:	Άρα εδώ το βλέπεις διαφορετικά από ότι εδώ; Δεν είναι ότι επειδή είναι 2 φορές η ίδια λύση, θα τη γράψω 2 φορές;
12.	Πασιφάη:	Σωστά, ναι. Εδώ το παίρνω λίγο και σαν τη λέξη θάλασσα, δηλαδή δεν μου κάθεται σωστά φιλολογικά.

Η Πασιφάη είναι μία μαθήτρια η οποία θεωρεί ότι είναι αδύναμη στα Μαθηματικά και ότι η κλίση της είναι προς τα φιλολογικά μαθήματα. Παρότι τα υποθετικά σενάρια αναφέρονται σε μαθηματικές σχολικές τάξεις, η μαθήτρια επιλέγει να δώσει παραδείγματα όπως τα «σημεία στίξης» ή οι «Έλληνες», κάτι που υποδηλώνει ότι αντλεί τα νοήματα που αποδίδει στις έννοιες από διαφορετικά πλαίσια. Επιπλέον, εμφανίζεται συχνά να είναι αβέβαιη για τις απαντήσεις που δίνει. Στο παραπάνω απόσπασμα για παράδειγμα, χρησιμοποιεί εκφράσεις όπως «δεν ξέρω», «στο μυαλό μου το έχω διαφορετικό» ή «νιώθω ότι» που δείχνουν ότι πιθανότητα στηρίζεται στις αυθόρμητες ιδέες που της έρχονται στον νου, χωρίς να είναι σίγουρη ότι αυτές αληθεύουν. Ωστόσο, δεν φαίνεται να νιώθει ότι συμμετέχει σε κάποια προφορική εξέταση από εκπαιδευτικό, αφού χρησιμοποιεί μη δόκιμες εκφράσεις όπως το «δεν μου κάθεται σωστά φιλολογικά».

Η μαθήτρια φαίνεται να αποδίδει στο σύνολο το νόημα της συλλογής όμοιων αντικειμένων σε κάθε πλαίσιο συζήτησης. Φαίνεται να αντλεί τα νοήματα που αποδίδει στο σύνολο και στις ιδιότητές του κυρίως από καθημερινά γλωσσικά ιδιώματα ή και μη μαθηματικά ακαδημαϊκά ιδιώματα (π.χ. φιλολογικών μαθημάτων). Συγκεκριμένα, στη γραμμή 3 χρησιμοποιεί τον όρο «σημεία στίξης» ο οποίος συνήθως εμφανίζεται στην σχολική τάξη σε φιλολογικά μαθήματα. Στη γραμμή 8 χρησιμοποιεί τη φράση «οι Έλληνες είναι ένα σύνολο επειδή είναι όλοι Έλληνες» κάτι που παραπέμπει σε καθημερινά γλωσσικά ιδιώματα (στον δημόσιο λόγο χρησιμοποιούμε συνήθως τη φράση ‘κοινωνικό σύνολο’ ώστε να μιλήσουμε για την κοινωνία στην ολότητά της). Τέλος, δηλώνει ότι το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $x^2 - 2x + 1 = 0$ είναι το $\{1\}$, ενώ το σύνολο των γραμμάτων της λέξης ‘ΘΑΛΑΣΣΑ’ είναι το $\{Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ\}$. Ο λόγος που στη δεύτερη περίπτωση επιτρέπει την συμπερίληψη μη διακεκριμένων στοιχείων είναι ότι αυτό της φαίνεται πιο σωστό με βάση το ιδίωμα που υιοθετεί στα φιλολογικά μαθήματα (γρ. 12). Οι εκτιμώμενες συνολικές της μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων φαίνονται παρακάτω.



Εικόνα 4.9. Μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων και εξέλιξη νοηματοδότησης – Πασιφάη

ε) Μαρίνα

Στην συνέχεια θα δούμε κάποια αποσπάσματα από την συνέντευξη με τη Μαρίνα, την τελευταία μαθήτρια Γυμνασίου. Η Μαρίνα είναι αδερφή του Γεράσιμου από την ΣΤ΄ Δημοτικού. Είναι και εκείνη οικογενειακή γνωστή του ερευνητή που διεξάγει την συνέντευξη και έχει άριστη επίδοση σε όλα τα σχολικά μαθήματα:

1. Ερευνητής: Εσύ πως την καταλαβαίνεις τη λέξη;
2. Μαρίνα: Εεε, το σύνολο είναι το άθροισμα... ναι. Είναι όταν είτε αριθμοί είτε οποιαδήποτε μονάδα και μεταβλητή, εκφράζεται ως προς... το σύνολο.
3. Ερευνητής: Εσύ τι θα έλεγες στην καθηγήτρια (στο πρώτο σενάριο);
4. Μαρίνα: Εξαρτάται από το πως προσδιορίζουμε τους δύο αριθμούς και τα δύο γράμματα, από το τι είναι.
5. Ερευνητής: Δηλαδή;
6. Μαρίνα: Δηλαδή, στην περίπτωση που λέει εδώ η Μίνα ότι θα μπορούσαν να αποτελούν το σύνολο των πλευρών ενός τετράπλευρου.
7. Ερευνητής: Α και οι δύο να είναι γνωστές και οι δύο άγνωστες;
8. Μαρίνα: Ναι... άρα είναι – τέσσερεις πλευρές του τετραγώνου.
9. Ερευνητής: Άρα, θα έλεγες ότι μπορούμε να το δούμε και σαν δύο ξεχωριστά σύνολα και σαν ένα μαζί; Ανάλογα με το πως θα τα προσδιορίσουμε.
10. Μαρίνα: Ναι.
11. Ερευνητής: Ωραία, χρειάζεται να έχουν κάποιο προσδιορισμό, κάποια κοινή ιδιότητα;
12. Μαρίνα: Ναι, ας πούμε εδώ όλες είναι πλευρές ενός τετράπλευρου. Αλλά, ως αυτούσιες, είναι δύο αριθμοί και δύο γράμματα.
13. Ερευνητής: Θα έβαζες ποτέ στο ίδιο σύνολο τυχαία πράγματα που να μην έχουν...
14. Μαρίνα: Ε, όχι άμα δεν συσχετίζονται κάπως...
15. Ερευνητής: Άρα δεν θα έβαζες ποτέ το 1, το α, ένα θαυμαστικό και αυτό το μολύβι;

16. Μαρίνα: Αν δεν υπήρχε κάτι που να τα συσχετίζει, όχι.

17. Ερευνητής: ΟΚ, αυτό τώρα το έχεις ξαναδεί ποτέ, οπουδήποτε βασικά; Είτε στο σχολείο είτε στην καθομιλουμένη είτε στο Internet. Από που σου έχει δημιουργηθεί αυτή η ιδέα; Μπορείς να προσδιορίσεις;

18. Μαρίνα: Αυτό;

19. Ερευνητής: Λες τα στοιχεία να έχουν κάποια συσχέτιση. Αυτή την αντίληψη για τα σύνολα μπορείς να προσδιορίσεις από που σου έχει δημιουργηθεί;

20. Μαρίνα: Δεν ξέρω, βγάζει λογική αυτό ας πούμε.

21. Ερευνητής: Άρα δεν μπορείς να πεις ότι στο σχολείο τα βλέπατε έτσι;

22. Μαρίνα: Σίγουρα και στο σχολείο...

23. Ερευνητής: Σε κάποιο μάθημα;

24. Μαρίνα: Όχι, γενικά, στο σχολείο...

25. Ερευνητής: Μπορείς να σκεφτείς κάπου που να έχεις δει τη λέξη;

26. Μαρίνα: Σύνολο;

27. Ερευνητής: Ναι.

28. Μαρίνα: Ναι σίγουρα.

29. Ερευνητής: Μπορείς να μου δώσεις ένα παράδειγμα;

30. Μαρίνα: Όχι τώρα στη Γ΄ Γυμνασίου αλλά σε πιο παλιές τάξεις, ειδικά στο Δημοτικό όταν στα προβλήματα έλεγε –αν ξέρετε αυτά... να βρείτε το σύνολο των μαθητών–, ξέρω ‘γω, σε κάποιο πρόβλημα.

31. Ερευνητής: Α, στο Γυμνάσιο δεν τη θυμάσαι κάπου τη λέξη;

32. Μαρίνα: Όχι ιδιαίτερα, δεν νομίζω ότι το...

... ...

33. Μαρίνα: Ε, από τη στιγμή που ρωτάει ποιο είναι το σύνολο των γραμμάτων, σημαίνει ότι εννοεί ποια είναι όλα τα γράμματα της λέξης. Ποια είναι όλα τα γράμματα με τα οποία σχηματίζεται η λέξη. Άρα το σωστό είναι ότι είναι το {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ}. Γιατί αν ήταν αυτό που λέει η Εύη (το {Θ,Α,Λ,Σ}), θα ρωτούσε ποιο είναι το σύνολο των διαφορετικών γραμμάτων.

... ...

34. Μαρίνα: Αφού βγαίνει αδύνατο, δεν υπάρχει λύση.

35. Ερευνητής: Δεν υπάρχει λύση, άρα ποιο είναι το σύνολο των λύσεων;

36.	Μαρίνα:	Μηδέν;
	...	...
37.	Μαρίνα:	Κενό σύνολο είναι... σαν να μην υπάρχει σύνολο ουσιαστικά. Αυτό είναι; Το εκφράζει ως κενό σύνολο.
38.	Ερευνητής:	Θα μπορούσε... δηλαδή, εσύ για να πεις ότι έχεις ένα σύνολο στοιχείων, πόσα πράγματα πρέπει να έχει μέσα για να πεις ότι είναι σύνολο;
39.	Μαρίνα:	Παραπάνω από ένα.
40.	Ερευνητής:	Με ένα ακριβώς; Θα το έλεγες σύνολο;
41.	Μαρίνα:	Μονάδα.

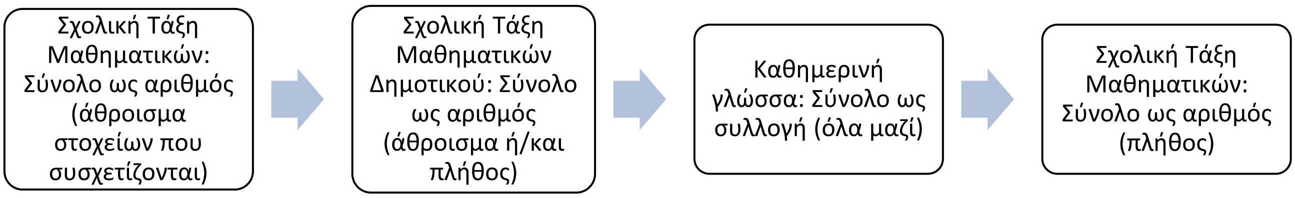
Η Μαρίνα είναι μια μαθήτρια που παρουσιάζει υψηλή επίδοση στα σχολικά μαθήματα και δεν φαίνεται να επηρεάζεται αρνητικά από την ιδιότητα του ερευνητή ως εκπαιδευτικού. Δεν διστάζει να αναπτύξει τις σκέψεις της και σε ότι αφορά τη φύση του συνόλου φαίνεται να απαντά με σχετική βεβαιότητα.

Στο παραπάνω απόσπασμα, στις γραμμές 1 έως 32, το αντικείμενο της συζήτησης είναι η απαίτηση για τα στοιχεία ενός συνόλου να είναι όμοια, αρχικά στο πλαίσιο των Μαθηματικών, μετά σε ευρύτερο πλαίσιο που να εμπεριέχει μαθηματικά και μη μαθηματικά αντικείμενα (αριθμούς, σημεία στίξης και υλικά αντικείμενα όπως ένα στυλό), επιστρέφοντας τελικά στα Μαθηματικά και συγκεκριμένα στην σχολική τάξη του Δημοτικού.

Η μαθήτρια αποδίδει στο σύνολο το νόημα του αριθμού στο ιδίωμα των σχολικών μαθηματικών και συγκεκριμένα το άθροισμα. Αντιπαραβάλλει όμως το σύνολο με τη μονάδα (γραμμές 2 και 41) και τις χρησιμοποιεί ως έννοιες αντίθετες. Είναι πιθανό με τη λέξη άθροισμα να μην εννοεί μόνο το αποτέλεσμα της πρόσθεσης αλλά και το αποτέλεσμα της μέτρησης του αριθμού των στοιχείων μιας συλλογής. Ένα στοιχείο μόνο του είναι μια μονάδα ενώ περισσότερα στοιχεία αποτελούν ένα σύνολο δηλαδή ένα πλήθος. Αυτό φαίνεται να υποδηλώνει και η παρατήρηση της Μαρίνας στη γραμμή 20 όπου η μαθήτρια μας λέει ότι έχει δει την έννοια του συνόλου να χρησιμοποιείται με παρόμοιο τρόπο στο Δημοτικό και μας δίνει ένα παράδειγμα ενός προβλήματος στο οποίο ζητείται το σύνολο, δηλαδή το πλήθος, των μαθητών μιας τάξης.

Στη γραμμή 33, η μαθήτρια φαίνεται να μετακινείται και να αντλεί τα νοήματα που αποδίδει στην έννοια του συνόλου από κάποιο καθημερινό γλωσσικό ιδίωμα. Τονίζει το γεγονός ότι το θέμα συζήτησης του υποθετικού σεναρίου είναι ένα σύνολο *γραμμάτων*, δηλαδή το σύνολο των γραμμάτων της λέξης ΘΑΛΑΣΣΑ, και συνεπώς εννοεί *όλα* τα γράμματα της λέξης. Αποδίδει λοιπόν στην έννοια του συνόλου το νόημα στης *συλλογής όλων* των δεδομένων στοιχείων.

Όταν στη γραμμή 34 επιστρέφουμε στο πλαίσιο των σχολικών Μαθηματικών και συγκεκριμένα στο σύνολο των λύσεων μιας αδύνατης ανίσωσης, η Μαρίνα επιστρέφει στο αντίστοιχο γλωσσικό ιδίωμα και αποδίδει στο σύνολο την έννοια του αριθμού και μάλλον του πλήθους, αφού θεωρεί ότι το σύνολο των λύσεων είναι «0». Τις εκτιμώμενες συνολικές της μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων μπορούμε να τις δούμε στο παρακάτω διάγραμμα.



Εικόνα 4.10. Μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων και εξέλιξη νοηματοδότησης – Μαρίνα

Σύνοψη αποτελεσμάτων Γυμνασίου

Οι μαθητές του Γυμνασίου φάνηκαν πιο σταθεροί στη νοηματοδότηση της έννοιας του συνόλου αφού επηρεάζονταν λιγότερο από τις αλλαγές στο πεδίο αναφοράς σε σχέση με τους μαθητές Δημοτικού. Εμπιστεύονται σε μεγαλύτερο βαθμό τις γνώσεις και τη διαίσθησή τους, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν επηρεάζονται από το νόημα της λέξης ‘σύνολο’ στα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού, στον δημόσιο λόγο και στην καθομιλουμένη.

Η Αριστέα και η Ηρώ απέδιδαν το νόημα της συλλογής όταν το αντλούσαν από το ιδίωμα των σχολικών μαθηματικών και το νόημα του αριθμού στα καθημερινά πλαίσια. Η Ζηνοβία και η Πασιφάη απέδιδαν το νόημα της συλλογής ανεξαρτήτως γλωσσικού ιδιώματος. Τέλος, η Μαριά απέδιδε το νόημα του αριθμού σε κάθε γλωσσικό ιδίωμα, με εξαίρεση την ερώτηση περί συνόλου γραμμάτων στην οποία φάνηκε μάλλον να σκέφτεται με όρους συλλογής. Οι προσπάθειες του ερευνητή να αλλάξει ορισμένες παραμέτρους με σκοπό να ξυπνήσει διαφορετικές πτυχές της έννοιας, δεν φάνηκε να επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό τους μαθητές Γυμνασίου, οι απαντήσεις των οποίων ήταν σχετικά συνεπείς.

Με την εξαίρεση της Αριστέας, οι μαθητές Γυμνασίου δεν φάνηκαν να νιώθουν ότι συμμετέχουν σε προφορική εξέταση στο μάθημα των Μαθηματικών, αλλά λειτούργησαν σαν συμμετέχοντες σε συνέντευξη.

4.2.3. Ανάλυση συνεντεύξεων με μαθητές της Γ΄ Λυκείου

Όλοι οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου που συμμετείχαν στην έρευνά μας προετοιμάζονταν την περίοδο της συνέντευξης για τις πανελλαδικές εξετάσεις, κατά τις οποίες επρόκειτο να εξεταστούν μεταξύ άλλων και στο μάθημα των Μαθηματικών.

α) Αγησίλαος

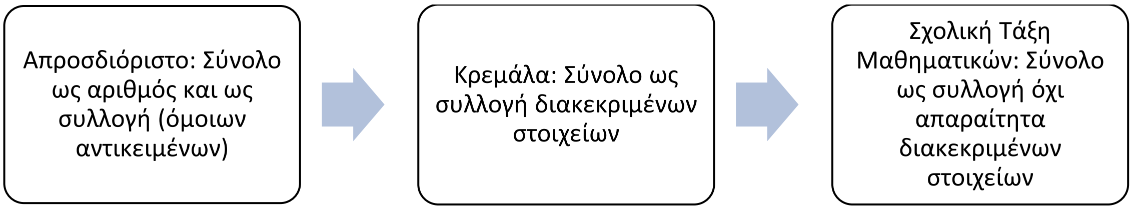
Ο επόμενος διάλογος είναι ένα απόσπασμα της συνέντευξης του ερευνητή με τον Αγησίλαο. Ο ερευνητής που διεξάγει την συνέντευξη γνώρισε τον μαθητή μέσω ενός άλλου ερευνητή ο οποίος έχει συνεργαστεί στο παρελθόν τόσο με τον μαθητή όσο και με τον ίδιο. Ο Αγησίλαος είναι πολύ καλός στα Μαθηματικά και ο λόγος του είναι αυθόρμητος, κάτι που τον καθιστά πολύ κατάλληλο για τέτοιου τύπου συνεντεύξεις:

1.	Αγησίλαος:	Ωραία, η σκέψη μου ήταν η εξής, ότι ή θα ήταν αυτό που λέει η Εύη, δηλαδή το {Θ,Α,Λ,Σ} γιατί δεν σχηματίζει ολόκληρη τη λέξη θάλασσα μεν αλλά είναι πολύ κοντά, ενώ θα μπορούσε να είναι όντως και αυτό που λέει ο Ανδρέας γιατί έχει 7 γράμματα η λέξη θάλασσα οπότε το σύνολο των γραμμάτων είναι 7. Αλλά θα μπορούσε να είναι και το τελευταίο γιατί είναι όλα τα γράμματα παρόλο που είναι ανακατεμένα οπότε δεν ξέρω ακριβώς τι ρόλο παίζει αν είναι ανακατεμένα ή όχι.... οπότε κατέληξα σε μία (στο {Θ,Α,Λ,Σ}) γιατί μου φάνηκε πιο σωστή από όλες και νόμιζα ότι ήταν μία όχι παραπάνω. Αλλιώς θα έβαζα και τις τρεις.
	...	...
2.	Ερευνητής:	Πώς σου έχει δημιουργηθεί αυτή η σκέψη;
3.	Αγησίλαος:	Εεε... δεν είναι ότι μου έχει δημιουργηθεί κάπως, απλά έτσι το σκέφτομαι, έτσι το αντιλαμβάνομαι.
4.	Ερευνητής:	Δεν μπορείς να σκεφτείς δηλαδή μάθημα στο σχολείο που να χρειαζόταν να σχηματίσεις κάποιο σύνολο και να το χρησιμοποιούσες έτσι;
5.	Αγησίλαος:	Όχι, με τίποτα! Θυμάμαι ας πούμε στο δημοτικό που καμιά φορά παίζαμε κρεμάλα και μαντεύαμε μια λέξη. Μόνο τότε θα μπορούσε να είναι το {Θ,Α,Λ,Σ}.
6.	Ερευνητής:	ΟΚ και αν έπαιζες κρεμάλα θα προτιμούσες το {Θ,Α,Λ,Σ} ή το {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ}; Ποιο θα αποκαλούσες το σύνολο των γραμμάτων που χρειάστηκα για να κερδίσω;

7. Αγησίλαος: Θα προτιμούσα το {Θ,Α,Λ,Σ}.
8. Ερευνητής: Γιατί, με ποια έννοια;
9. Αγησίλαος: Με την έννοια ότι κάθε φορά που λέμε ένα γράμμα συμπληρώνεται σε όλη τη λέξη οπότε θα σχηματιζόταν απ' ευθείας η λέξη.

Σε όλη τη συνέντευξη, ο μαθητής φαίνεται να λειτουργεί κυρίως ως συμμετέχον σε συνέντευξη και όχι ως μαθητής προς καθηγητή. Μοιράζεται χωρίς δισταγμό τις αυθόρμητες σκέψεις του ενώ δεν προσπαθεί να μαντέψει τι θα ήθελε να ακούσει ο ερευνητής. Αρχικά, ο μαθητής επιλέγει το σύνολο {Θ,Α,Λ,Σ}, δίνει λοιπόν στο σύνολο το νόημα της *συλλογής*, χωρίς όμως να αιτιολογεί την απάντησή του και χωρίς να χρησιμοποιεί τη γλώσσα με τρόπο που να φανερώνει την ύπαρξη κάποιου συγκεκριμένου ιδιώματος. Συνεχίζοντας να ξεδιπλώνει την σκέψη του, δηλώνει ότι «όντως... το σύνολο των γραμμάτων είναι 7», δίνοντας ένα επιπλέον νόημα στη λέξη σύνολο, αυτό του *πλήθους* των γραμμάτων της. Έπειτα, εξηγεί ότι θα μπορούσε να είναι και το σύνολο {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ} αφού «είναι όλα τα γράμματα», νοηματοδοτώντας το σύνολο των γραμμάτων ως, τα εν λόγω αντικείμενα, *όλα μαζί*. Οι δύο τελευταίες ερμηνείες του παραπέμπουν στο νόημα της λέξης σύνολο σε καθημερινά ιδιώματα. Τέλος, μας λέει ότι κατέληξε στο σύνολο {Θ,Α,Λ,Σ} επειδή νόμιζε ότι έπρεπε να επιλέξει μόνο ένα από όλα, δεν μας εξηγεί όμως πάλι τον λόγο που επέλεξε το συγκεκριμένο σύνολο.

Ο ερευνητής, προκειμένου να εξετάσει το πλαίσιο μέσα στο οποίο νοηματοδοτείται η έννοια του συνόλου με τους παραπάνω τρόπους, ρωτάει τον μαθητή αν μπορεί να προσδιορίσει την προέλευση της αντίληψης του (γραμμή 2) και ιδιαίτερα αν θεωρεί πως τη χρησιμοποιούσε με αυτή τη σημασία στο σχολείο (γραμμή 4). Ο Αγησίλαος, θεωρώντας ότι ο ερευνητής αναφέρεται στο σύνολο {Θ,Α,Λ,Σ}, φανερώνει ότι η έννοια του συνόλου νοηματοδοτείται μέσα στο ιδίωμα ενός παιχνιδιού που συνήθιζε να παίζει στο Δημοτικό, δηλαδή της κρεμάλας. Κατά την διάρκεια της υπόλοιπης συνέντευξης, ο μαθητής δεν παρουσιάζει πολλές μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 4.11. Μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων και εξέλιξη νοηματοδότησης – Αγησίλαος

β) Απόστολος

Στην συνέχεια θα δούμε κάποια αποσπάσματα της συνέντευξης του ερευνητή με τον Απόστολο, έναν ιδιαίτερα χαρισματικό μαθητή. Ο Απόστολος ήταν μαθητής του ερευνητή όταν φοιτούσε στη Β΄ Γυμνασίου. Οι ιδιαίτερες ικανότητές του είχαν κινήσει το ενδιαφέρον του ερευνητή. Ο Απόστολος συνήθιζε να απαντά σε όλα τα γραπτά κριτήρια και διαγωνίσματα σε πολύ σύντομο χρόνο, γράφοντας λιτά και με σαφήνεια χωρίς να παρέχει περιττές πληροφορίες. Κατά τη διάρκεια της συνέντευξής, απάντησε σωστά σε όλες τις ερωτήσεις και ο τρόπος σκέψης του θύμιζε περισσότερο φοιτητή Μαθηματικού Τμήματος παρά μαθητή Λυκείου:

1.	Απόστολος:	Γιατί να είναι δύο τα σύνολα; Η Θέτις έχει τα λιγότερα assumptions ξέρω ‘γώ και εμένα μου αρέσει.
2.	Ερευνητής:	Εννοείς ότι οι άλλοι έχουν βάλει παραπάνω προϋποθέσεις εδώ που δεν χρειάζονται;
3.	Απόστολος:	Ναι αυτό.
4.	Ερευνητής:	Έχεις δει τα σύνολα έτσι στην τάξη ή έτσι το καταλαβαίνεις εσύ με τη διαίσθησή σου;
5.	Απόστολος:	Εεε, δεν θυμάμαι τι έφαγα χθες το πρωί άρα...
	...	...
6.	Απόστολος:	Ωραία, ο Ανδρέας πρέπει να είναι οικονομικάριος.
7.	Ερευνητής:	Χαχα, που λέει για στατιστική;
8.	Απόστολος:	Άρα ότι λέει είναι αυτόματα λάθος. Τώρα, αν η Εύη ή ο Γιώργος έχει δίκιο είναι ανάλογα με το πως ορίζεις τη λέξη ‘γράμμα’.
9.	Ερευνητής:	Πως ορίζεις τη λέξη γράμμα; Δηλαδή; Το εξηγείς λίγο παραπάνω;
10.	Απόστολος:	Δηλαδή αν το πρώτο σ και το δεύτερο σ είναι διαφορετικά επειδή είναι σε διαφορετικά σημεία της λέξης, τότε ναι όντως ο Γιώργος έχει δίκιο.
11.	Ερευνητής:	ΟΚ, αν όμως είναι το ίδιο γράμμα;
12.	Απόστολος:	Αν είναι το ίδιο γράμμα... δεν βγάζει νόημα να λες ότι ένα σύνολο περιέχει ένα στοιχείο δύο φορές.
13.	Ερευνητής:	Ναι, δεν βγάζει νόημα να έχει δύο φορές το ίδιο στοιχείο εκτός αν σημαίνει κάτι άλλο;
14.	Απόστολος:	Εκτός αν δεν είναι το ίδιο στοιχείο.
	...	...

15. Απόστολος: Ωραία, ένα σύνολο μπορεί να περιέχει μόνο έναν αριθμό επειδή δεν υπάρχει λόγος να μην μπορεί. Τώρα... δεν θέλω να πω ότι το ένα 3 είναι διαφορετικό από το άλλο 3 άρα το σύνολο των λύσεων είναι το σύνολο που περιέχει το 3.

... ...

16. Απόστολος: Δεν υπάρχει λόγος να πω ότι ένα σύνολο δεν μπορεί να μην περιέχει τίποτα, πιστεύω... δεν ξέρω, νιώθω ότι μπαίνουμε στα τέτοια που...

17. Ερευνητής: Που είναι τεχνικό θέμα;

18. Απόστολος: Δεν ξέρω, πάντως δεν βρίσκω λόγο να πω ότι δεν μπορεί να υπάρχει κενό σύνολο.

19. Ερευνητής: Αλλά πάλι δεν είναι ότι θυμάσαι από κάπου να έχεις μιλήσει για κενά σύνολα;

20. Απόστολος: Όχι θυμάμαι, έχουμε σίγουρα πει για κενά σύνολα.

21. Ερευνητής: OK.

22. Απόστολος: Τώρα, στην τάξη, στα ιδιαίτερα, δεν έχω ιδέα.

... ...

23. Απόστολος: Εγώ από όσο ξέρω και θυμάμαι, ο ορισμός έχει να κάνει με το αν μπορείς να αντιστοιχίσεις τα στοιχεία ένα προς ένα.

24. Ερευνητής: Το έχεις δει αυτό κάπου;

25. Απόστολος: Ναι.

26. Ερευνητής: Θυμάσαι που;

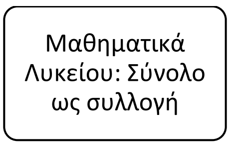
27. Απόστολος: Σε κάποιο video στο YouTube.

Ο Απόστολος έχει εμπλακεί με την έννοια του συνόλου στο Γυμνάσιο, όπου παρακολούθησε το πρόγραμμα Cambridge IGCSE Mathematics. Όπως όλοι οι μαθητές Λυκείου, έτσι και εκείνος, έχει διδαχθεί την έννοια στην Α΄ Λυκείου και τη χρησιμοποιεί σε ασκήσεις των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου. Επιπλέον, μας είπε ότι έχει ασχοληθεί αρκετά με τα σύνολα στο πλαίσιο ιδιαίτερων μαθημάτων, σαν εισαγωγή στη Μαθηματική Ανάλυση. Σαν αποτέλεσμα των παραπάνω, η συζήτηση με τον Απόστολο περιστρέφεται αποκλειστικά γύρω από το πεδίο των Μαθηματικών.

Ο μαθητής φαίνεται να αντιμετωπίζει την συνέντευξη σαν μία καθημερινή συζήτηση, χωρίς να διστάζει να μοιραστεί τις σκέψεις του και χωρίς να προσπαθεί να δώσει απαντήσεις που θα ικανοποιήσουν τον ερευνητή. Χρησιμοποιεί απλή γλώσσα, για παράδειγμα επιλέγει την αγγλική λέξη ‘assumptions’ αντί για την αντίστοιχη ελληνική λέξη ‘υποθέσεις’, ενώ χρησιμοποιεί εκφράσεις όπως «δεν θυμάμαι τι έφαγα χθες το πρωί» ή «δεν έχω ιδέα». Επιπλέον, επικαλείται κάποια διάλεκτο του σχολείου όταν αποκαλεί τον υποθετικό μαθητή του δεύτερου σεναρίου «οικονομικάριο». Τέλος, δεν διστάζει να μας πει ότι κάποιες από τις αντιλήψεις του προέρχονται από ιδιαίτερα μαθήματα ή από βίντεο που έχει παρακολουθήσει στην διαδικτυακή πλατφόρμα YouTube. Παρόλα αυτά, δεν φαίνεται σε καμία στιγμή να προσπαθεί να αντλήσει νόημα από μη μαθηματικά πλαίσια, ενώ αναγνωρίζει ότι το θέμα συζήτησης είναι η έννοια του συνόλου με την οποία είναι αρκετά εξοικειωμένος.

Έχει την τυπική μαθηματική αντίληψη για την έννοια του συνόλου καθώς και πολύ σωστή μαθηματική διαίσθηση. Δηλώνει ότι η απαίτηση για τα στοιχεία του συνόλου να είναι όμοια ή να έχουν κάποια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα είναι μια περιττή προϋπόθεση, ενώ θεωρεί πως δεν θα είχε νόημα να συμπεριλάβουμε σε ένα σύνολο μη διακεκριμένα στοιχεία. Επιπλέον, θεωρεί ότι ένα σύνολο μπορεί να είναι κενό, διότι δεν βρίσκει κανέναν λόγο να πει ότι δεν μπορεί. Τέλος, είναι ο μόνος μαθητής που έχει σωστή διαίσθηση σχετικά με τον πληθάριθμο των απειροσυνόλων.

Ιδίωμα που αξιοποιείται



Εικόνα 4.12. Μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων και εξέλιξη νοηματοδότησης – Απόστολος

γ) Δημήτρης

Οι επόμενοι τρεις μαθητές φοιτούν στο ίδιο σχολείο, στο οποίο δίδασκε και ο ερευνητής έναν χρόνο πριν από την συνέντευξη. Ο παρακάτω διάλογος αποτελείται από κάποια αποσπάσματα της συνέντευξης του Δημήτρη, ενός μαθητή που έχει χαρακτηριστεί από τους καθηγητές του ως πολύ ικανός στα Μαθηματικά:

1. Δημήτρης: Ότι τα στοιχεία ενός συνόλου πρέπει να είναι όμοια, δηλαδή να έχουν τις ίδιες ή παρόμοιες ιδιότητες, ενώ οι αριθμοί και οι μεταβλητές δεν έχουν προφανώς κάποιο κοινό.
2. Ερευνητής: Ο Σωτήρης, λέει είναι δύο αριθμοί και δύο μεταβλητές άρα σύνολο 4 αντικείμενα.

3. Δημήτρης: Αυτό το χαρακτηρίζει απλά σαν αριθμός, σαν πλήθος, όχι τόσο σαν ομάδα όμοιων πραγμάτων.

4. Ερευνητής: Ναι...

5. Δημήτρης: Νομίζω ένα σύνολο πρέπει... αν έχουμε σύνολο και όχι απλά πλήθος ή κάτι τέτοιο, πρέπει να ‘χει κάτι κοινό, να ‘χουν όλα κάτι κοινό.

... ...

6. Ερευνητής: ΟΚ, τι λες τότε για το επιχείρημα «αφού με το {Θ,Α,Λ,Σ} δεν βγαίνει η λέξη θάλασσα»;

7. Δημήτρης: Ναι, απλά αφού είναι ένα σύνολο γραμμάτων, μπορούμε το κάθε στοιχείο να το χρησιμοποιήσουμε όσες φορές θέλουμε.

8. Ερευνητής: Άρα στην ουσία λες ότι αυτό το σύνολο και αυτό το σύνολο είναι το ίδιο;

9. Δημήτρης: Ναι.

... ...

10. Δημήτρης: Ναι, αφού, εφόσον είναι αδύνατη η εξίσωση και δεν έχει λύσεις... δεν θεωρώ ότι το κενό είναι σύνολο ας πούμε, αφού δεν έχει κανένα στοιχείο.

11. Ερευνητής: ΟΚ, δηλαδή δεν θα είχε νόημα να γράψω ένα σύνολο που μέσα να μην είχε τίποτα;

12. Δημήτρης: Όχι.

13. Ερευνητής: ΟΚ, το σύμβολο που... το ΄χα βάλει παρακάτω, αυτό εδώ πέρα (το $\emptyset$)...

14. Δημήτρης: Ναι.

15. Ερευνητής: Ξέρεις τι συμβολίζει;

16. Δημήτρης: Το κενό δεν συμβολίζει;

17. Ερευνητής: Ναι, αυτό είναι το κενό.

18. Δημήτρης: Ναι το έχω δει στα μαθηματικά.

19. Ερευνητής: Ναι. Άρα, αν έδινε αυτό σαν απάντηση;

20. Δημήτρης: Εεε, όχι.

... ...

21. Ερευνητής: Ποια είναι η διαφορά του ανήκει από το υποσύνολο;

22. Δημήτρης: Νομίζω το ανήκει το λέμε όταν μιλάμε για ένα μόνο στοιχείο, για έναν μόνο αριθμό, για μία μόνο μεταβλητή, ενώ όταν λέμε για υποσύνολο μιλάμε για

ένα σύνολο που έχει μέσα πολλά στοιχεία. Για πολλούς αριθμούς ας πούμε ή μεταβλητές ή κάτι τέτοιο. Όχι για μόνο ένα!

23. Ερευνητής: Πόσα στοιχεία δηλαδή πρέπει να έχει ένα σύνολο για να είναι σύνολο;

24. Δημήτρης: Ε από 2 και πάνω πιστεύω.

25. Ερευνητής: Από 2 και πάνω. Γιατί όχι ένα μόνο;

26. Δημήτρης: Εεε, γιατί τότε είναι μία μονάδα, κάτι ξεχωριστό, μόνο, δεν ανήκει σε μία ομάδα ή κάτι τέτοιο.

27. Ερευνητής: ΟΚ, άρα για να ανήκει σε μια ομάδα πρέπει να είμαστε από 2 και πάνω;

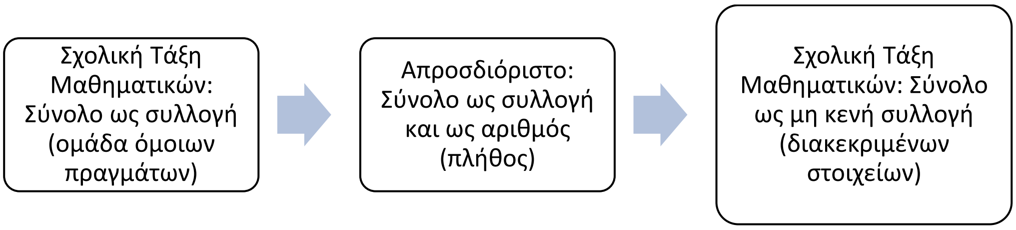
28. Δημήτρης: Ναι, για να μπορεί να έχει ας πούμε κοινά στοιχεία με κάτι διαφορετικό από αυτόν.

Το πεδίο αναφοράς για τον Δημήτρη φαίνεται να παραμένει σταθερό. Αντιμετωπίζει τα υποθετικά σενάρια σαν ζητήματα στο μάθημα των Μαθηματικών και πουθενά στην συνέντευξη δεν φαίνεται να μετακινείται ξεκάθαρα σε κάποιο μη μαθηματικό πλαίσιο. Δίνει ως επί το πλείστων σύντομες απαντήσεις και παρότι δεν διστάζει να απαντήσει στις ερωτήσεις του ερευνητή, δεν φαίνεται να μιλάει με την άνεση που χαρακτηρίζει μια καθημερινή συζήτηση (παρότι σε κάποια σημεία της συνέντευξης του ξεφεύγουν εκφράσεις όπως «παίζει να έβαζα και αυτήν»), κάτι που φανερώνει ότι ενδεχομένως επηρεάζεται εν μέρη από το γεγονός ότι ο ερευνητής είναι μαθηματικός ενώ εκείνος μαθητής. Ωστόσο, οι απαντήσεις του είναι σταθερές και δεν φαίνεται να φοβάται ότι θα δώσει 'λάθος απάντηση'.

Ο μαθητής φαίνεται να αντλεί τα νοήματα που αποδίδει στην έννοια και στις ιδιότητες του συνόλου από το ιδίωμα των σχολικών Μαθηματικών. Η έννοια νοηματοδοτείται ως μια ομάδα όμοιων στοιχείων και όχι ως αριθμός. Αυτό είναι λογικό αν αναλογιστούμε ότι τα σύνολα με τα οποία έρχεται σε επαφή στη Μαθηματική Ανάλυση την οποία διδάσκεται στην τρέχουσα τάξη, είναι αποκλειστικά σύνολα αριθμών.
Σε κάποιο σημείο της συνέντευξης παραδέχεται ότι μπήκε στον πειρασμό να απαντήσει ότι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης 'ΘΑΛΑΣΣΑ' είναι 7. Αυτό θα μπορούσε να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι στιγμιαία ήρθε στην επιφάνεια το νόημα της λέξης στα καθημερινά γλωσσικά ιδιώματα, ωστόσο το πεδίο αναφοράς δεν φανέρωνε ξεκάθαρα κάτι τέτοιο οπότε θεωρήσαμε ασφαλέστερο να χαρακτηρίσουμε το εν λόγω ιδίωμα ως 'απροσδιόριστο'.

Επιστρέφοντας στο σχολικό πλαίσιο και το ιδίωμα της σχολικής τάξης του Λυκείου, ο Δημήτρης μας είπε ότι γνωρίζει το κενό, αφού «το έχει δει στα Μαθηματικά», αλλά δεν φαίνεται να θεωρεί ότι το κενό είναι ένα σύνολο αλλά μάλλον κάποιο ξεχωριστό μαθηματικό αντικείμενο.

Συγκεκριμένα, πιστεύει ότι ένα σύνολο θα πρέπει να έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία ώστε να έχει νόημα να μιλήσουμε για ομοιότητα μεταξύ τους ή για μια ιδιότητα που έχουν από κοινού.



Εικόνα 4.13. Μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων και εξέλιξη νοηματοδότησης – Δημήτρης

δ) Κοσμάς

Στην συνέχεια θα δούμε κάποια αποσπάσματα από τη συνέντευξη του ερευνητή με τον Κοσμά. Όπως και ο Δημήτρης, έτσι και ο Κοσμάς γνωρίζει τον ερευνητή από το σχολείο του. Σύμφωνα με τους καθηγητές του, ο Κοσμάς ήταν μαθητής με σχετικά χαμηλή επίδοση στα Μαθηματικά, όμως το τελευταίο έτος καταβάλει ιδιαίτερες προσπάθειες προκειμένου να επιτύχει στις Πανελλαδικές εξετάσεις. Όπως φαίνεται και στα παρακάτω αποσπάσματα, ο Κοσμάς φαίνεται να διατηρεί κάποιες από τις αντιλήψεις που συνήθως συναντούμε σε μαθητές Δημοτικού (π.χ. σύνολο ως πλήθος) και να τις εμπλουτίζει με αντιλήψεις που καλλιεργούνται στη Γ΄ Λυκείου, στο μάθημα της Ανάλυσης (π.χ. κλειστό διάστημα), κάτι που είναι αναμενόμενο με βάση το ακαδημαϊκό το υπόβαθρο:

1. Ερευνητής: ΟΚ, άρα ποιο είναι το κριτήριο για να μπορείς να βάλεις τα στοιχεία σε ένα σύνολο πιστεύεις;
2. Κοσμάς: Να είναι αριθμοί και γράμματα ξεχωριστά δηλαδή σε δύο διαφορετικά σύνολα.
3. Ερευνητής: Επιτρέπεται να είναι μόνο αριθμοί ή μόνο γράμματα;
4. Κοσμάς: Ναι.
5. Ερευνητής: Στον Σωτήρη δηλαδή τι θα έλεγες;
6. Κοσμάς: Εεε, ότι είναι δύο αριθμοί ΟΚ είναι σωστό αλλά... δύο μεταβλητές, δεν είναι σωστό να τα βάλουμε μαζί.

... ...

7. Ερευνητής: Έτσι κι αλλιώς αυτό απάντησες και στο ερωτηματολόγιο
8. Κοσμάς: Λόγω των γραμμάτων επειδή είναι 7 γράμματα ουσιαστικά
9. Ερευνητής: Ωραία, ενώ αυτό που λέει η Εύη; Για ποιον λόγο να μην πεις ότι η λέξη

		θάλασσα αποτελείται από το θ, το α, το λ και το σ άρα βάζω μόνο αυτά στο...
10.	Κοσμάς:	Γιατί ουσιαστικά είπε το σύνολο των γραμμάτων της λέξης, δεν είπε ποια γράμματα περιέχει μέσα η λέξη θάλασσα.
11.	Ερευνητής:	Άρα με ποια έννοια την καταλαβαίνεις τη λέξη σύνολο εδώ;
12.	Κοσμάς:	Σύνολο... το σύνολο της λέξης που μου έχει δώσει για να πω. Να πω πόσα γράμματα έχει ξέρω γω.
	...	...
13.	Ερευνητής:	Πως θα έγραφες το σύνολο, συμβολικά ρε παιδί μου. Πες ότι έγραφες διαγώνισμα.
14.	Κοσμάς:	Εεε... σύνολο 3, 3;
15.	Ερευνητής:	Το σύνολο πως θα το έδειχνες; Θα έγραφες τη λέξη;
16.	Κοσμάς:	Όχι... με άγκιστρα.
17.	Ερευνητής:	Άγκιστρο τέτοιο, σαν αυτό εδώ εννοείς ή παρένθεση, αγκύλη κλπ;
18.	Κοσμάς:	Εεε, κλειστό διάστημα 3, 3.
	...	...
19.	Κοσμάς:	Εεε... με τον Σωτήρη; Ότι επειδή έχουν τα ίδια σύνολα.
20.	Ερευνητής:	Ο Σωτήρης λέει ότι...
21.	Κοσμάς:	Ότι έχουν το ίδιο πλήθος.
22.	Ερευνητής:	Ναι, δηλαδή ότι είναι και τα δύο άπειρα λέει αυτός
23.	Κοσμάς:	Ναι
24.	Ερευνητής:	Άρα αφού είναι άπειρα, είναι το ίδιο.
25.	Κοσμάς:	Ναι.
26.	Ερευνητής:	Αυτό σε πείθει περισσότερο;
27.	Κοσμάς:	Νομίζω ναι.
28.	Ερευνητής:	Σε βλέπω κάτι σκέφτεσαι
29.	Κοσμάς:	Είμαι διστακτικός σε αυτό το...
30.	Ερευνητής:	Είναι το πιο δύσκολο ερώτημα η αλήθεια είναι αλλά... πες μου λίγο τη λογική σου, αυτά που σκέφτεσαι πες τα δυνατά χωρίς να σε ρωτήσω κάτι. Σχόλια κάνε μου για τον καθένα ξεχωριστά.
31.	Κοσμάς:	Ότι επειδή το Β σύνολο, ουσιαστικά είναι το τετράγωνο του Α; Οπότε...

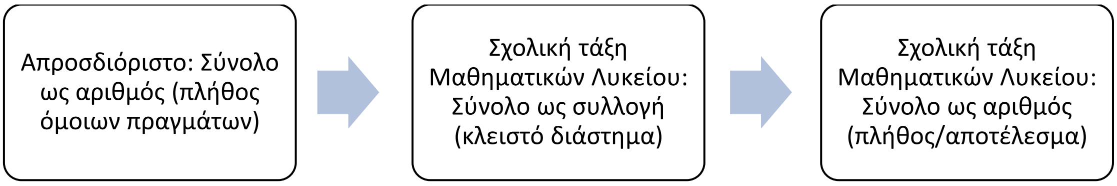
> και επειδή απειρίζονται και τα δύο, τείνουν προς το άπειρο, οπότε θα... θα έχουν το ίδιο πλήθος; Νομίζω.

Η συζήτηση με τον Κοσμά φαίνεται να παραμένει συνεπής ως προς το πεδίο. Φαίνεται να προσεγγίζει τα υποθετικά σενάρια σχεδόν αποκλειστικά ως θέματα στο μάθημα των Μαθηματικών και πουθενά στη συνέντευξη δεν φαίνεται να μεταβαίνει σαφώς σε ένα μη μαθηματικό πλαίσιο. Την στάση του αυτή επηρεάζει ενδεχομένως και η ιδιότητα του ερευνητή ως εκπαιδευτικού και μαθηματικού. Συγκεκριμένα, στο πρώτο απόσπασμα (γρ. 1-6) μιλά για μεταβλητές και αριθμούς. Το νόημα που αποδίδει στην έννοια του συνόλου φαίνεται να είναι αυτό της συλλογής και το ιδίωμα που αξιοποιεί αυτό των σχολικών Μαθηματικών.

Όταν το θέμα συζήτησης είναι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης 'θάλασσα' (γρ 7-12), το πεδίο μοιάζει να μετακινείται στιγμιαία αλλά η χρήση της γλώσσας του μαθητή και το περιεχόμενο της συγκεκριμένης συζήτησης δεν μας επιτρέπουν να καταλήξουμε σε κάποιο σχετικά ασφαλές συμπέρασμα. Στη γραμμή 10, ο Κοσμάς τονίζει ότι η καθηγήτρια του δεύτερου υποθετικού σεναρίου ζητάει *το σύνολο των γραμμάτων* της λέξης 'ΘΑΛΑΣΣΑ', και όχι *ποια γράμματα περιέχει* η λέξη και στη γραμμή 12 εξηγεί ότι το νόημα που αποδίδει στην έννοια του συνόλου είναι αυτό του αριθμού και συγκεκριμένα το «πόσα γράμματα έχει». Οι απαντήσεις του μαθητή μέχρι αυτό το σημείο δεν μας επιτρέπουν να προσδιορίσουμε με κάποια σχετική ασφάλεια το ιδίωμα μέσα στο οποίο νοηματοδοτείται η έννοια, οπότε επιλέγουμε να το χαρακτηρίσουμε 'απροσδιόριστο'.

Στην συνέχεια, ο Κοσμάς δηλώνει ότι το σύνολο των λύσεων μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης με διακρίνουσα $\Delta = 0$ και διπλή λύση το $x = 3$, θα είναι το «κλειστό διάστημα $[3,3]$». Απέδωσε δηλαδή στο σύνολο το νόημα της συλλογής, αξιοποιώντας πιθανότατα το ιδίωμα των σχολικών Μαθηματικών του Λυκείου, αφού ο όρος «κλειστά διαστήματα» είναι πολύ δύσκολο να προκύπτει από κάποιο άλλο γλωσσικό ιδίωμα του μαθητή.

Στο τελευταίο απόσπασμα, στη γραμμή 19, ο Κοσμάς δηλώνει ότι τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$ και $B = \{1, 4, 9, 16, 25, ...\}$ είναι ισοπληθικά επειδή «έχουν τα ίδια σύνολα». Στην τελευταία γραμμή χρησιμοποιεί την έκφραση «τείνουν στο άπειρο», μια φράση που χρησιμοποιείται αποκλειστικά στα Μαθηματικά της Γ΄ Λυκείου, όπου οι μαθητές διδάσκονται την έννοια του ορίου. Τα παραπάνω μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι σε αυτό το σημείο της συνέντευξης ο Κοσμάς αποδίδει στο σύνολο το νόημα του πλήθους των στοιχείων (ή του τελικού αποτελέσματος), ένα νόημα που αντλεί από το ιδίωμα των Μαθηματικών της σχολικής τάξης της Γ΄ Λυκείου.



Εικόνα 4.14. Μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων και εξέλιξη νοηματοδότησης – Κοσμάς

ε) Φοίβος

Ο Φοίβος είναι συμμαθητής των δύο προηγούμενων μαθητών. Παρότι κανένας από τους τρεις δεν ήταν μαθητής του ερευνητή όσο εκείνος εργαζόταν στο συγκεκριμένο σχολείο, ο Φοίβος έχει συνεργαστεί στο παρελθόν με τον ερευνητή. Είναι ένας ευφυής μαθητής, ο οποίος σκοπεύει να ακολουθήσει οικονομικές σπουδές. Δεν είναι ιδιαίτερα ικανός στα Μαθηματικά αλλά δεν διστάζει να υποστηρίξει τη γνώμη του και να μοιραστεί με τον ερευνητή τις αυθόρμητες σκέψεις του, κάτι που τον καθιστά κατάλληλο για τέτοιου τύπου συνεντεύξεις:

1.	Φοίβος:	Ένα σύνολο άπειρων αριθμών... στην αρχή λέω, αφού είναι άπειροι αριθμοί δεν μπορείς να θεωρήσεις σύνολο, γιατί δεν τελειώνει πουθενά και στο μυαλό μου το σύνολο πρέπει να ‘χει αρχή και τέλος και να μπορείς να το προσδιορίσεις. Αλλά μετά, ας πούμε και για τους άρτιους αριθμούς, άρχισα να αλλάζω άποψη και ότι είναι σύνολο τελικά όλοι οι άρτιοι ή όλοι οι περιττοί ενώ στην αρχή μου φαινόταν ότι δεν μπορείς να προσδιορίσεις τους άπειρους, ένα άπειρο σύνολο, ότι ήθελε αρχή και τέλος.
	...	...
2.	Φοίβος:	Εγω συμφωνώ πιο πολύ με τον Ανδρέα που λέει ότι είναι 7 το σύνολο των γραμμάτων.
3.	Ερευνητής:	Ναι.
4.	Φοίβος:	Αυτό μου φαίνεται πιο λάθος... της Εύης, που λέει ότι με τα τέσσερα γράμματα.
5.	Ερευνητής:	Τι θα έλεγες στην Εύη δηλαδή εσύ;
6.	Φοίβος:	Ότι από τη στιγμή που... πως να το εξηγήσω; Νομίζω ότι δεν φτάνουν μόνο αυτά τα τέσσερα γράμματα δηλαδή, είναι ο συνδυασμός που θα βγάλει το αποτέλεσμα θάλασσα. Μόνο με αυτά τα τέσσερα γράμματα δεν κάνεις τίποτα. Τώρα ο άλλος που έχει πει για τα 7 γράμματα αυτά, που έχει πάρει τρεις φορές το α και 2 φορές το σ, άμα τα προσαρμόσεις αυτά βγαίνει αλλά

πάλι δεν μου φαίνεται σωστό. Πιο σωστός μου φαίνεται αυτός με το 7, το Θ,Α,Λ,Α,Σ,Σ,Α.

7. Ερευνητής: Και αυτό που λέει...

8. Φοίβος: Για τη στατιστική;

9. Ερευνητής: Ναι.

10. Φοίβος: Δεν έχουμε κάνει καθόλου στατιστική.

11. Ερευνητής: Αυτό σκεφτόμουν ότι μπορεί να μην έχεις δει καθόλου.

12. Φοίβος: Ναι.

13. Ερευνητής: Ε, συχνότητα είναι το πόσο συχνά εμφανίζεται κάτι, έτσι το δικαιολογεί.

14. Φοίβος: Άρα το ίδιο με το πρώτο που λέει ότι είναι 7.

15. Ερευνητής: Ναι απλά επιχειρηματολογεί για να πείσει τους άλλους δύο ας πούμε.

16. Φοίβος: Ναι, αυτό μου φαίνεται το πιο σωστό. Έχει 7 γράμματα για αυτόν τον λόγο. Ότι είναι ο συνδυασμός που φτιάχνει τη λέξη και όχι απλά τα γράμματα μεμονωμένα σαν χαρακτήρες.

17. Ερευνητής: ΟΚ, άρα αυτό σχετίζεται να υποθέσω με αυτό που έγραψες (στο ερωτηματολόγιο) ότι είναι το αποτέλεσμα μιας πράξης; Άρα το αποτέλεσμα εδώ είναι η λέξη θάλασσα;

18. Φοίβος: Ναι, Θ+Α+Λ, άμα ενώσουμε όλα τα γράμματα βγαίνει το σύνολο θάλασσα.

... ...

19. Φοίβος: Και εδώ νομίζω με τον πρώτο συμφωνώ (το 1, το 2, το α και το β μπορούν να είναι τα στοιχεία ενός συνόλου, διότι είναι 2 αριθμοί και 2 μεταβλητές, άρα σύνολο 4 αντικείμενα). Ότι μπορούν να είναι σύνολο... γιατί αποτελούν τους πρώτους... τα πρώτα δύο στοιχεία, σε κάτι που είναι γνωστό σε όλους ξέρω 'γω, το αλφάβητο... και τα έχουμε συνδέσει κιόλας, όταν λέμε ερώτηση α είναι η πρώτη ερώτηση, ερώτηση β είναι η δεύτερη, οπότε το α με το 1 συνδέεται και το 2 με το β συνδέεται, δηλαδή γιαυτό μου φαίνεται πιο πολύ ότι θα μπορούσε να είναι σύνολο.

20. Ερευνητής: Άρα εννοείς ότι με τον Σωτήρη συμφωνείς; Που λέει είναι 2 αριθμοί και 2 μεταβλητές άρα σύνολο 4 αντικείμενα.

21. Φοίβος: Ναι

22. Ερευνητής: Και τι θα έλεγες στη Θέτιδα που λέει ότι δεν σε ρώτησε πόσα είναι αλλά αν αυτά τα αντικείμενα μπορούν να αποτελούν τα στοιχεία ενός συνόλου;

23. Φοίβος: Και αυτό σωστό μου φαίνεται, νομίζω το ίδιο λένε απλά... η Θέτις δίνει πιο πολύ βάση στο ότι... ναι και αυτή λέει ότι μπορεί να αποτελούν τα στοιχεία ενός συνόλου του 1, 2 και α, β. Με τη Μίνα δεν συμφωνώ καθόλου, που λέει ότι δεν μπορούν να αποτελούν σύνολο επειδή περιέχουν ανόμοια πράγματα... ναι αυτό.

24. Ερευνητής: Με τη Μίνα γιατί διαφωνείς; Τι δεν σε πείθει εννοώ.

25. Φοίβος: Ναι. Ότι... βασικά αν το πάρουμε σαν... αν προσπαθούσαμε να βρούμε το πεδίο ορισμού ας πούμε σε μια πράξη, το σύνολο {1,2,α,β} δεν θα έβγαζε νόημα.

26. Ερευνητής: Ναι.

27. Φοίβος: Αλλά αν απλά τα πάρουμε σαν χαρακτήρες, δηλαδή σε ένα πρόβλημα πληροφορικής πιστεύω θα έβγαζε νόημα.

... ...

28. Φοίβος: Βασικά είναι ανάλογα πως θα το πάρουμε, αν το πάρουμε όπως στα Μαθηματικά θα έπρεπε να ‘χουν μια κοινή ιδιότητα, δηλαδή... δεν μπορείς να συγκρίνεις δύο ανόμοια, δύο ανόμοιες μεταβλητές, δεν μπορείς να βάλεις το $2x^2$ και το 2x και να τα προσθέσεις ή να τα αφαιρέσεις. Αλλά αν το πάρεις σαν πρόβλημα Πληροφορικής, δεν χρειάζεται να έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους, μπορεί να είναι άκυρο ένα σύνολο, απλά με λέξεις που πληκτρολογεί ο χρήστης. Αλλά συγκεκριμένα στα Μαθηματικά, για να θεωρείτε σύνολο θα έπρεπε κάτι να τα... να τα ενώνει, να πεις ότι είναι το σύνολο τάδε, και να περιγράψεις το σύνολο με κάτι που έχουν όλοι. Αλλιώς άμα βάλεις... άμα είναι ένα σύνολο ξέρω ‘γω, ένα μολύβι, ένας ελέφαντας και μια πόρτα, τι σύνολο είναι; Δεν μπορείς να το... να το περιγράψεις.

29. Ερευνητής: Άρα, το {1,2,α,β}, εεε... θα ήταν σύνολο στην Πληροφορική αλλά όχι στα Μαθηματικά ας πούμε;

30. Φοίβος: Ναι

31. Ερευνητής: Ή θα μπορούσες με κάποιον τρόπο να το φανταστείς και σαν σύνολο στα Μαθηματικά;

32. Φοίβος: Θα μπορούσα να το φανταστώ μόνο αν μας έλεγαν ότι το α, β είναι μια μεταβλητή που ψάχνουμε, δηλαδή μας έδιναν ότι το α=β-5 και ήταν έτσι το σύνολο, τώρα αν δεν έδιναν κάποια πληροφορία για το α, β και μου έλεγαν

> απλά ότι είναι ένα σύνολο, το μόνο κοινό που θα μπορούσα να βρω μεταξύ των τεσσάρων στοιχείων είναι ότι και τα δύο είναι οι πρώτοι δύο χαρακτήρες απ' το αλφάβητο και από τους αριθμούς... που τα ξέρουμε από πολύ μικροί. Μόνο αυτό θα πίστευα ότι τους ενώνει.

Ο Φοίβος φαίνεται να θεωρεί ότι το θέμα συζήτησης είναι η έννοια του συνόλου σε διαφορετικά πλαίσια. Στην αρχή μιλάει για άρτιους και περιττούς αριθμούς, στην συνέχεια αναφέρεται στο αλφάβητο και καταλήγει να σχολιάζει την έννοια του συνόλου όπως αυτή νοείται στο μάθημα της πληροφορικής.

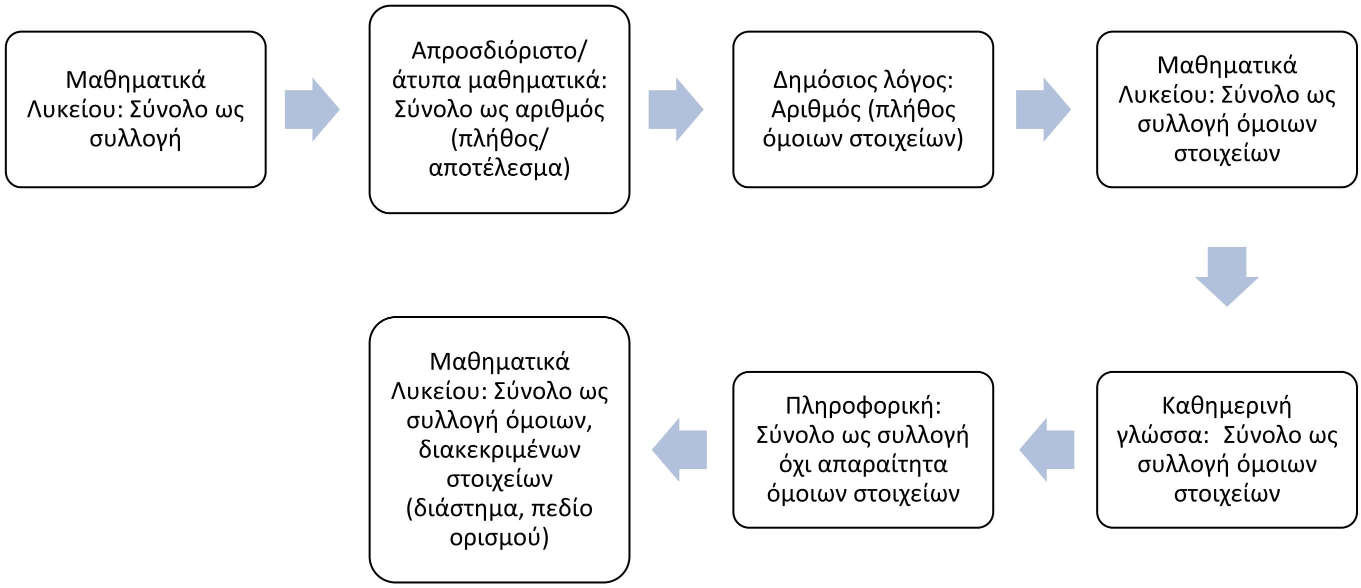
Η ιδιότητα του ερευνητή ως μαθηματικού δεν φαίνεται να εμποδίζει τον Φοίβο να αναπτύξει τις σκέψεις του χωρίς να φοβάται μην κάνει λάθος. Ο μαθητής χρησιμοποιεί απλή καθημερινή γλώσσα, κατασκευάζει προτάσεις τις οποίες δεν ολοκληρώνει, απαντάει με ερωτήσεις, αλλάζει τις απόψεις του πριν προλάβει να ολοκληρώσει την αρχική του σκέψη και γενικά αντιμετωπίζει την συνέντευξη σαν μία συζήτηση με κάποιον φίλο του, για ένα θέμα για το οποίο δεν έχει ιδιαίτερα ισχυρές απόψεις και το οποίο διαπραγματεύεται προκειμένου να καταλήξει σε νέα συμπεράσματα.

Αρχικά, ο μαθητής φαίνεται να αποδίδει στο σύνολο το νόημα της συλλογής μέσα στο ιδίωμα των σχολικών Μαθηματικών. Όταν το θέμα συζήτησης είναι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης 'θάλασσα' ο μαθητής φαίνεται να ταυτίζει την απάντηση «7» με το σύνολο {Θ,Α,Λ,Α,Σ,Σ,Α} το οποίο έχει όλα τα γράμματα της λέξης στην 'σωστή' σειρά και το σύνολο νοηματοδοτείται ως το «αποτέλεσμα» (γραμμή 6) της πρόσθεσης των διαφορετικών γραμμάτων (γραμμή 18). Το συγκεκριμένο νόημα φαίνεται να αντλείται από κάποιο απροσδιόριστο ιδίωμα (πιθανότατα μαθηματικό).

Από τη γραμμή 19 και μέχρι το τέλος του αποσπάσματος, το θέμα συζήτησης είναι η εγκυρότητα του συνόλου {1,2,α,β}. Ο Φοίβος φαίνεται να μετακινείται με άνεση μεταξύ διαφορετικών γλωσσικών ιδιωμάτων. Στην αρχή σχολιάζει την αντιστοιχία που έχει το 1 με το α και το 2 με το β. Το 1 βρίσκεται στην πρώτη θέση του Ελληνικού αλφαβήτου ενώ το β στη δεύτερη. Με αυτήν την έννοια, η έκφραση {1,2,α,β} έχει νόημα αφού τα 4 στοιχεία έχουν μια κοινή ιδιότητα που τα συνδέει. Εδώ, ο μαθητής φαίνεται να βλέπει το σύνολο ως το πλήθος των στοιχείων και το ιδίωμα μέσα στο οποίο νοηματοδοτείται η έννοια μοιάζει να είναι κάποιο ιδίωμα του δημόσιου λόγου ο οποίος είναι «γνωστός σε όλους» (γραμμή 19).

Στη συνέχεια ο Φοίβος μετακινείται στο ιδίωμα των σχολικών Μαθηματικών και μας λέει ότι «αν προσπαθούσαμε να βρούμε το πεδίο ορισμού ας πούμε σε μια πράξη, το σύνολο {1,2,α,β} δεν θα έβγαζε νόημα» (γραμμή 25). Στην συγκεκριμένη στιγμή ο μαθητής αποδίδει στο σύνολο το νόημα της συλλογής, απορρίπτει ωστόσο το σύνολο {1,2,α,β} θεωρώντας ότι δεν έχει νόημα στο ιδίωμα των Μαθηματικών. Μια επιπλέον αιτιολόγηση που δίνει για την απόρριψη του συγκεκριμένου συνόλου είναι ότι, όπως δεν μπορείς να προσθέσεις ανόμοια μονώνυμα, έτσι δεν μπορείς να συμπεριλάβεις ανόμοια στοιχεία σε ένα σύνολο, αφού «συγκεκριμένα στα Μαθηματικά, για να θεωρείτε σύνολο θα έπρεπε κάτι να τα ενώνει». Επιπλέον, τονίζει ότι θα πρέπει να έχει κανείς τη δυνατότητα «να περιγράψει το σύνολο με κάτι που έχουν όλοι». Αμέσως, ο μαθητής μετακινείται σε ένα καθημερινό πλαίσιο και μας λέει ότι, κατά αντιστοιχία, ένα σύνολο που περιέχει ένα μολύβι, έναν ελέφαντα και μια πόρτα, δεν θα είχε κανένα απολύτως νόημα.

Τέλος, ο Φοίβος επικαλείται το ιδίωμα του μαθήματος της Πληροφορικής της Γ΄ Λυκείου, όπου το σύνολο {1,2,α,β} θα είχε νόημα αν «απλά τα πάρουμε (το α και το β) σαν χαρακτήρες, σε ένα πρόβλημα πληροφορικής» διότι «δεν χρειάζεται να έχουν κάποια σχέση μεταξύ τους, μπορεί να είναι άκυρο ένα σύνολο, απλά με λέξεις που πληκτρολογεί ο χρήστης». Ο Φοίβος παρουσιάζει τις πιο συχνές μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων σε σχέση με τους υπόλοιπους μαθητές της Γ΄ Λυκείου, ενώ αλλάζει συνειδητά το νόημα που αποδίδει στην έννοια του συνόλου, κάτι που φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 4.15. Μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων και εξέλιξη νοηματοδότησης – Φοίβος

στ) Χρύσα

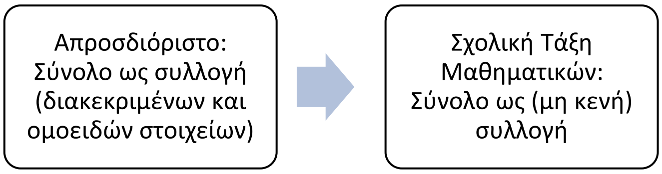
Η τελευταία μαθήτρια Λυκείου είναι η Χρύσα. Η συγκεκριμένη μαθήτρια έχει συνεργαστεί στο παρελθόν με τον ερευνητή ο οποίος γνωρίζει το εκπαιδευτικό της υπόβαθρο. Η Χρύσα ήταν μαθήτρια με άριστη επίδοση στο Γυμνάσιο, κάτι που δεν διατήρησε στα χρόνια της στο Λύκειο. Είναι ωστόσο ευφυής και δίνει απαντήσεις χωρίς να ανησυχεί για την ορθότητά τους, κάτι που ενισχύει τη διαδικασία αποτύπωσης των αντιλήψεών της:

1.	Χρύσα:	Το ένα είναι σύνολο αριθμών και το άλλο σύνολο γραμμάτων οπότε δεν μπορούμε να τα ενώσουμε όλα αυτά.
	...	...
2.	Ερευνητής:	ΟΚ και αν θέλεις να εξηγήσεις στο Σωτήρη που διαφωνείς; Αν κάνει λάθος, που κάνει λάθος;
3.	Χρύσα:	Έχει δίκιο ότι είναι δύο αριθμοί και δύο μεταβλητές, κάνει λάθος στο ότι τα βάζει όλα μαζί, ότι τα θεωρεί όλα μαζί τέσσερα αντικείμενα και τα τοποθετεί όλα μαζί σαν σύνολο που είναι λάθος πιστεύω.
4.	Ερευνητής:	Και ποιο κριτήριο θα είχες για να επιλέξεις αν ένα στοιχείο μπορεί να είναι σε ένα σύνολο ή όχι;
5.	Χρύσα:	Ότι τα στοιχεία ενός συνόλου πρέπει να είναι ίδια ή παρόμοια, δηλαδή να είναι όλα αριθμοί, ή όλα σύμβολα, ή το οτιδήποτε.
	...	...
6.	Χρύσα:	Αφού ζητάει το σύνολο των γραμμάτων πρέπει να βρούμε, όχι το πόσα είναι τα γράμματα της λέξης θάλασσα αλλά το καθένα ξεχωριστά. Πώς να το πω;
7.	Ερευνητής:	Δεν ψάχνουμε το πόσα είναι αλλά...
8.	Χρύσα:	Μόνο τα γράμματα της λέξης αλλά όχι όλα.
9.	Ερευνητής:	Δηλαδή στον Γιώργο τι θα έλεγες που λέει ότι με τέσσερα γράμματα δεν μπορείς να φτιάξεις τη λέξη θάλασσα, οπότε στα άγκιστρα θα έβαζε το Α τρεις φορές το Λ μία φορά το Σ δύο...
10.	Χρύσα:	Ότι δεν είναι σωστό γιατί έχει τοποθετήσει ήδη μια φορά το α οπότε δεν έχει κάποιον λόγο να το ξαναβάλει αφού ψάχνουμε το σύνολο.
	...	...
11.	Χρύσα:	Δεν μπορούμε να ορίσουμε ένα τέτοιο σύνολο, αν δεν υπήρχε ούτε ένας αριθμός, σωστά;
12.	Ερευνητής:	Άρα λες ότι αν δεν υπάρχει λύση στην εξίσωση...

13.	Χρύσα:	Ότι αφού η εξίσωση είναι αδύνατη, δεν υπάρχει σύνολο λύσεων. Δεν μπορεί να νοηθεί το σύνολο.
	...	...
14.	Ερευνητής:	Στο «ανήκει» και στο «υποσύνολο». Για παράδειγμα αν έλεγα αντί για 1 εδώ αν βάλω 1, 2. Ανήκει το {1,2} στο {1,2,3,4,5} και είναι υποσύνολο το {1,2} στο {1,2,3,4,5};
15.	Χρύσα:	Και τα δύο σωστά δεν είναι;
16.	Ερευνητής:	Εσύ πως το αντιλαμβάνεσαι.
17.	Χρύσα:	Νομίζω ότι κομπλέ και τα δύο.

Για τη Χρύσα, το πεδίο αναφοράς φαίνεται να είναι μια συζήτηση γύρω από μαθηματικά αντικείμενα χωρίς να υπάρχει κάποια σαφής ένδειξη μετακίνησης σε κάποιο μη μαθηματικό πεδίο. Η μαθήτρια χρησιμοποιεί εκφράσεις όπως «είναι λάθος πιστεύω», ερωτηματικές φράσεις/λέξεις όπως «πώς να το πω;» και «σωστά;», οι οποίες υποδηλώνουν αβεβαιότητα. Ζητάει επιβεβαίωση από τον ερευνητή ο οποίος έχει τον ρόλο εκείνου που έχει τη γνώση, ωστόσο δεν φαίνεται να αντιμετωπίζει την συνέντευξη σαν εξέταση αφού μιλάει με ήρεμο τόνο και χρησιμοποιεί καθημερινές εκφράσεις όπως «νομίζω ότι είναι κομπλέ και τα δύο».

Παρότι έχει σωστές διαισθήσεις για την έννοια του συνόλου, αποφεύγει να αναπτύξει σε βάθος τις σκέψεις της, ενώ ακόμη και όταν το επιχειρεί, οι αιτιολογήσεις της δεν μας επιτρέπουν πάντα να συμπεράνουμε με ασφάλεια την πηγή από την οποία αντλεί τα διάφορα νοήματα. Φαίνεται να νοηματοδοτεί την έννοια του συνόλου, αξιοποιώντας το ιδίωμα των σχολικών Μαθηματικών στις περισσότερες περιπτώσεις αν και υπάρχουν στιγμές στις οποίες μοιάζει να επικαλείται κάποια άλλο γλωσσικό ιδίωμα, το οποίο δεν είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε. Βλέπει το σύνολο ως μία συλλογή από ένα ή περισσότερα διακεκριμένα και ομοειδή στοιχεία. Αναφερόμενη στην συλλογή {1,2,α,β}, μας λέει ότι «είναι δύο αριθμοί και δύο μεταβλητές, κάνει λάθος στο ότι τα βάζει όλα μαζί». Επιπλέον, θεωρεί ότι το σύνολο των γραμμάτων της λέξης ‘ΘΑΛΑΣΣΑ’ θα είναι το {Θ,Α,Λ,Σ} και όχι το {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ} επειδή «δεν είναι σωστό γιατί έχει τοποθετήσει ήδη μια φορά το Α οπότε δεν έχει κάποιον λόγο να το ξαναβάλει». Τέλος, για το σύνολο των λύσεων μιας αδύνατης εξίσωσης μας λέει ότι «αφού η εξίσωση είναι αδύνατη, δεν μπορεί να νοηθεί το σύνολο».



Εικόνα 4.16. Μετακινήσεις μεταξύ ιδιωμάτων και εξέλιξη νοηματοδότησης – Χρύσα

Σύνοψη αποτελεσμάτων Λυκείου

Η επικρατέστερη αντίληψη για την έννοια του συνόλου μεταξύ των μαθητών του Λυκείου ήταν αυτή της συλλογής. Ωστόσο, η παλαιότερη ερμηνεία του συνόλου στο πλαίσιο της πρωτοβάθμιας μαθηματικής εκπαίδευσης ως αριθμού δεν είχε αντικατασταθεί πλήρως. Τέσσερεις από τους έξι μαθητές απέδιδαν στο σύνολο το νόημα του αριθμού σε συγκεκριμένες στιγμές, αντλώντας το συγκεκριμένο νόημα από διαφορετικά γλωσσικά ιδιώματα όπως αυτό της σχολικής τάξης, του δημόσιου λόγου, της καθημερινής γλώσσας και συχνά από κάποιο γλωσσικό ιδίωμα που δεν ήταν δυνατό να προσδιοριστεί με σαφήνεια.

Με εξαίρεση τον Φοίβο, οι μαθητές του Λυκείου δεν παρουσίαζαν ιδιαίτερες μετακινήσεις μεταξύ διαφορετικών γλωσσικών ιδιωμάτων. Αντιλαμβάνονταν ότι το πεδίο αναφοράς ήταν κυρίως μαθηματικό και δεν αντιμετώπιζαν το ερευνητή σαν εξεταστή ή σαν κάποια μορφή εξουσίας. Επιπλέον, η έννοια του συνόλου φάνηκε να τους είναι γνώριμη από την εμπλοκή τους με το μάθημα της Ανάλυσης της Γ΄ Λυκείου.

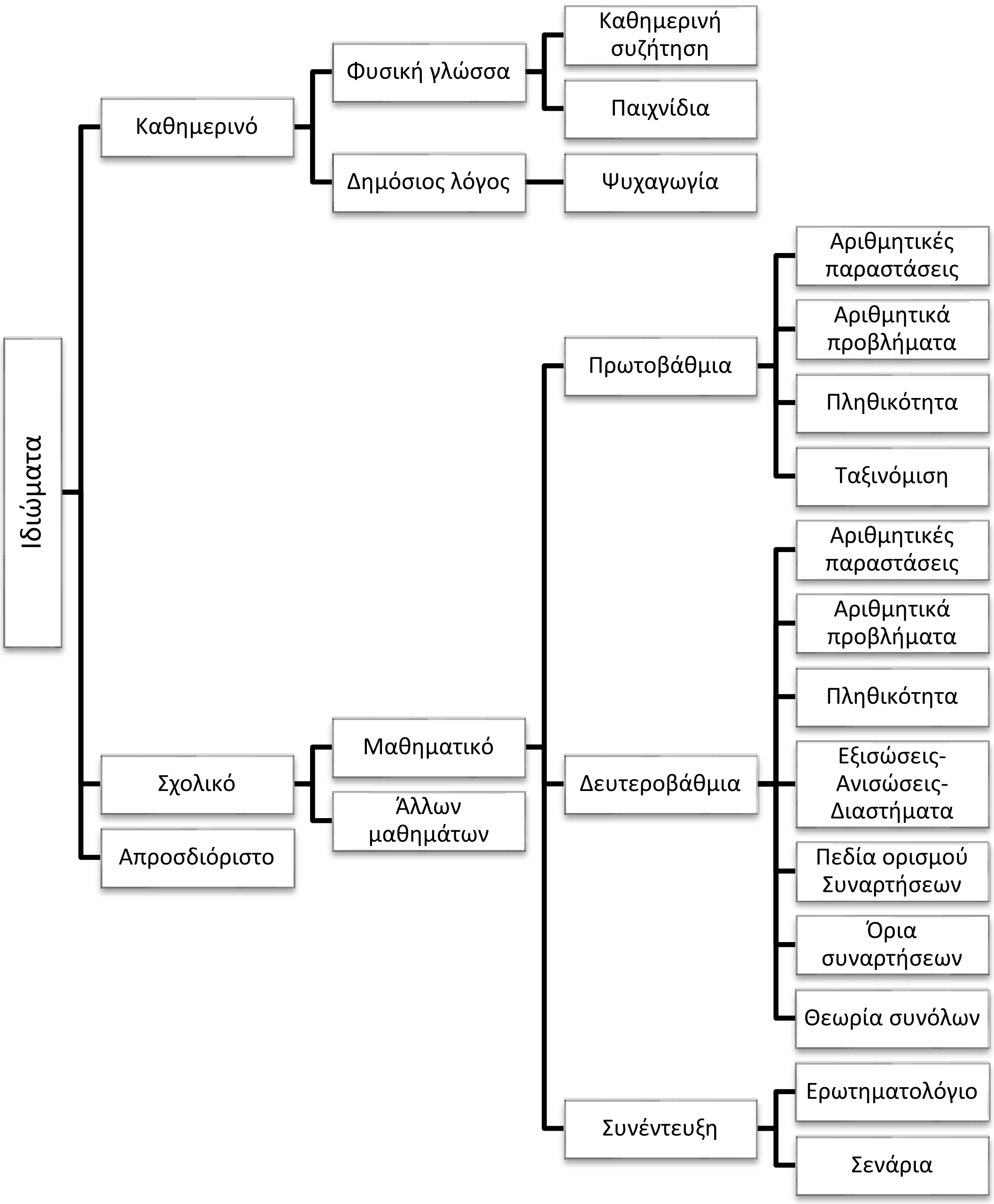
4.2.4. Αντιπαραβολή των αποτελεσμάτων των τριών βαθμίδων

Όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα των συνεντεύξεων, οι μαθητές του Δημοτικού φάνηκαν συχνά να στηρίζονται στη διαίσθησή τους και, κατά συνέπεια, να μετακινούνται μεταξύ διαφορετικών γλωσσικών ιδιωμάτων προκειμένου να ανακαλύψουν ένα κατάλληλο νόημα για την έννοια του συνόλου. Η συχνότερη ερμηνεία για το σύνολο ήταν αυτή του αριθμού. Ακόμη και όταν το ιδίωμα άντλησης νοήματος ήταν εκείνο των σχολικών Μαθηματικών, το σύνολο ερμηνευόταν ως το άθροισμα ή γενικότερα το αποτέλεσμα ή η λύση ενός προβλήματος. Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο αν αναλογιστούμε τη χρήση της έννοιας του συνόλου στα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού αλλά και στην καθομιλουμένη.

Από την άλλη μεριά, οι μαθητές του Λυκείου φαίνεται να αντιλαμβάνονται την έννοια του συνόλου μέσα στο ιδίωμα των σχολικών Μαθηματικών του Λυκείου, και ιδιαίτερα του μαθήματος της Ανάλυσης. Η καθημερινή εμπλοκή των μαθητών σε όλη τη διάρκεια του Λυκείου, με διαστήματα και ενώσεις διαστημάτων (λύσεις ανισώσεων, πεδία ορισμού, σύνολα τιμών, διαστήματα στα οποία μία συνάρτηση διατηρεί κάποιο πρόσημο κλπ.) φαίνεται να διαμορφώνει σε μεγάλο βαθμό τις αντιλήψεις των μαθητών αλλά και να προσανατολίζει τους μαθητές σε μαθηματικά ιδιώματα. Επιπλέον, τόσο στις συνεντεύξεις όσο και στο ερωτηματολόγιο, η έννοια του συνόλου εμφανιζόταν κυρίως σε μαθηματικό πλαίσιο. Τα γεγονότα αυτά πιθανότατα συνέβαλαν στη νοηματοδότηση της έννοιας του συνόλου ως συλλογή στις περισσότερες περιπτώσεις αλλά και στο γεγονός ότι οι μαθητές του Λυκείου δεν φάνηκε να μετακινούνται ιδιαίτερα μεταξύ διαφορετικών γλωσσικών ιδιωμάτων.

Οι μαθητές Δημοτικού και Λυκείου απείχαν αισθητά τόσο στη νοηματοδότηση της έννοιας όσο και στην συχνότητα μετακίνησης μεταξύ ιδιωμάτων. Ωστόσο ήταν σχετικά σταθεροί στην απόδοση νοήματος για την έννοια του συνόλου. Οι μαθητές Γυμνασίου όμως, φάνηκε να διχάζονται σε σχέση με τη φύση του συνόλου ως αριθμός και ως συλλογή. Δεν εμπιστεύονταν τις διαισθήσεις τους που προκύπτουν από τη χρήση της έννοιας του συνόλου στο Δημοτικό, αλλά δεν έχουν ακόμη εμπλακεί ιδιαίτερα με την έννοια του συνόλου στην σχολική τάξη. Συχνά προσπαθούσαν να αντλήσουν το νόημα της έννοιας του συνόλου από το ίδιο το ερωτηματολόγιο και από τις υποθετικές συζητήσεις. Άλλοι έκαναν επίκληση στα σχολικά Μαθηματικά του Δημοτικού και άλλοι στην καθομιλουμένη, προσπαθώντας να βρουν κοινά νοήματα με αυτά των ερευνητικών εργαλείων, με αποτέλεσμα να κατασκευάζουν ένα καινούργιο ιδίωμα για τις ανάγκες της συνέντευξης. Μια εικασία που είναι πιθανόν να αληθεύει είναι ότι οι μαθητές Γυμνασίου αντιλαμβάνονται την ανεπάρκεια των γλωσσικών ιδιωμάτων στα οποία έχουν ήδη πρόσβαση αλλά δεν έχουν ακόμη αναπτύξει κάποιο γλωσσικό ιδίωμα που να θεωρούν κατάλληλο για την συνέντευξη. Βρίσκονται, η μάλλον ωθούνται από τον ερευνητή σε ένα μεταβατικό στάδιο νοηματοδότησης της έννοιας. Στο συμπέρασμα αυτό συνηγορεί και το γεγονός ότι οι μαθητές Γυμνασίου ήταν εκείνοι που είχαν τον μεγαλύτερο βαθμό αβεβαιότητας όταν απαντούσαν στα ερωτήματα του ερευνητή.

Κλείνοντας, παρουσιάζουμε ένα δίκτυο που μας δείχνει όλα τα γλωσσικά ιδιώματα τα οποία φάνηκε να χρησιμοποιούνται από τους μαθητές και των τριών βαθμίδων. Όπως βλέπουμε, οι μαθητές έχουν πρόσβαση σε μεγάλο αριθμό ιδιωμάτων από τα οποία ενδέχεται να αντλούν τα νοήματα τα οποία αποδίδουν στην έννοια του συνόλου.



Εικόνα 4.17. Συγκεντρωτικό δίκτυο γλωσσικών ιδιωμάτων που χρησιμοποιήθηκαν από τους μαθητές κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων.

4.3. Οι έννοιες του ανήκειν και του υποσυνόλου

Στην ανάλυση των ποσοτικών μας δεδομένων είδαμε ότι πολύ μεγάλο ποσοστό των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αλλά και των συμμετεχόντων φοιτητών – μελλοντικών εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης δυσκολεύονται να διακρίνουν την έννοια του *ανήκειν* και την έννοια του *υποσυνόλου*, όταν έρχονται αντιμέτωποι με μονοσύνολα και με σύνολα που περιέχουν άλλα σύνολα ως στοιχεία τους. Προκειμένου να εμβαθύνουμε στην κατανόηση αυτών των δυσκολιών και των πιθανών αιτιών τους, εξετάσαμε προσεκτικά ορισμένα αποσπάσματα από τις συνεντεύξεις με τους μαθητές. Τα εν λόγω αποσπάσματα επιλέχθηκαν λόγω του ιδιαίτερου ενδιαφέροντος που παρουσιάζουν και της πιθανής συνεισφοράς τους στην αντίληψή μας για το φαινόμενο αυτό.

Αρχικά, υποθέσαμε ότι όλες οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές μπορούν να αποδοθούν στην ταύτιση από αυτούς των εννοιών του ‘ανήκειν’ και του ‘υποσυνόλου’ ή τουλάχιστον σε ανεπάρκεια της σαφούς διάκρισης των δύο εννοιών σε ορισμένες περιπτώσεις με ιδιαίτερη δυσκολία (Bagni, 2006 ˙Moru & Qhobela, 2013). Αυτό που φάνηκε από τα δεδομένα μας είναι ότι υπήρχαν τρεις κατηγορίες αντιλήψεων μεταξύ των συμμετεχόντων:

(1) Χρησιμοποιούμε το ανήκει όταν έχουμε ένα στοιχείο και το υποσύνολο για περισσότερα στοιχεία.
(2) Το ανήκει και το είναι υποσύνολο, έχουν την ίδια σημασία.
(3) Το ανήκει η *ιδιότητα* που εξασφαλίζει ότι ένα *αντικείμενο*, δηλαδή ένα σύνολο, είναι υποσύνολο σε σχέση με κάποιο άλλο σύνολο.

Οι δύο συμμετέχοντες που είχαν την πρώτη αντίληψη ήταν μαθητές της Γ΄ Λυκείου, δεν δέχονταν την ύπαρξη μονοσυνόλων και η επικρατέστερη εικόνα που είχαν για την έννοια του συνόλου ήταν αυτή του διαστήματος, μία έννοια με την οποία εμπλέκονται συστηματικά στο μάθημα των Μαθηματικών Προσανατολισμού στο οποίο θα εξετάζονταν πανελλαδικά τη χρονιά που διεξήχθη η συνέντευξη. Οι παρακάτω διάλογοι είναι αποσπάσματα των συνεντεύξεων των δύο μαθητών με τον ερευνητή:

1.	Ερευνητής:	Ποια είναι η διαφορά του ανήκει από το υποσύνολο;
2.	Δημήτρης:	Νομίζω το ανήκει το λέμε όταν μιλάμε για ένα μόνο στοιχείο, για έναν μόνο αριθμό, για μία μόνο μεταβλητή, ενώ όταν λέμε για υποσύνολο μιλάμε για ένα σύνολο που έχει μέσα πολλά στοιχεία.

Η αντιμετώπιση των δύο εννοιών από τον Δημήτρη ενδέχεται να 'δουλεύει' σε όλα τα παραδείγματα με τα οποία θα εμπλακεί στο πλαίσιο των Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου. Όλα τα σύνολα με τα οποία έρχεται αντιμέτωπος είναι διαστήματα, άρα αποτελούνται από άπειρα στοιχεία, ενώ η έννοια του ανήκει χρησιμοποιείται για πραγματικούς αριθμούς οι οποίοι περιέχονται στα εν λόγω διαστήματα.

1.	Φοίβος:	Ας πούμε, με το ανήκει μπορούμε να πούμε και για μόνο έναν αριθμό. Ας πούμε, το 1 ανήκει στο τάδε σύνολο.
2.	Ερευνητής:	Ναι...
3.	Φοίβος:	Και ότι, εννοούμε ότι μέσα σε αυτό το σύνολο που βρήκαμε, υπάρχει αυτός ο αριθμός κάπου. Ενώ με το υποσύνολο, πρέπει να υπάρχει ήδη ένα σύνολο. Δηλαδή από κάποιον αριθμό μέχρι κάποιον άλλον, για να πούμε ότι είναι το υποσύνολο μιας άλλης...
4.	...	...
5.	Φοίβος:	Εγώ θα έλεγα ανήκει σε κάθε περίπτωση γιατί έτσι το έχω συνηθίσει να το βλέπω, αλλά αν θεωρήσουμε ότι το 1 είναι ένα σύνολο και όχι ένας μεμονωμένος αριθμός τότε πιστεύω ότι θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι υποσύνολο. Αλλά δεν μου φαίνεται σωστό να λέμε ότι ένας αριθμός είναι ένα σύνολο.

Αντίστοιχη είναι και η απάντηση του Φοίβου, ο οποίος είναι ανοιχτός στην ιδέα του να χρησιμοποιήσει, για παράδειγμα την έκφραση $\{1\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ αρκεί να υποθέσουμε ότι το $\{1\}$ είναι ένα σύνολο και όχι ένας μεμονωμένος αριθμός, κάτι το οποίο «δεν του φαίνεται σωστό».

Στη δεύτερη κατηγορία ανήκουν δύο μαθήτριες της Γ΄ Γυμνασίου οι οποίες μοιάζουν να ταυτίζουν την έννοια του ανήκειν με την έννοια του υποσυνόλου. Η Ηρώ φαίνεται να θεωρεί τις δύο λέξης ως συνώνυμα που αναφέρονται στην ίδια έννοια:

1.	Ερευνητής:	Κοίτα, σχολίασέ μου τη λέξη ανήκει και τη λέξη υποσύνολο. Τι σημαίνουν για εσένα;
2.	Ηρώ:	Ε, το ανήκει είναι ότι... πώς να το πω; Άλλη λέξη... δεν ξέρω… συνώνυμο.

Όπως φαίνεται στο παρακάτω απόσπασμα, η Πασιφάη φαίνεται αρχικά να θεωρεί ότι δεν υπάρχει κάποια διαφορά μεταξύ της λέξης 'ανήκει' και της λέξης 'υποσύνολο', ύστερα όμως από παρέμβαση του ερευνητή μας δίνει ένα παράδειγμα που θυμίζει την πρώτη κατηγορία αντιλήψεων για τις δύο έννοιες:

1.	Ερευνητής:	Οκ, εεε... άρα ποια είναι η διαφορά του ανήκει από το υποσύνολο εν τέλει; Της λέξης ανήκει από τη λέξη υποσύνολο, υπάρχει κάποια διαφορά;
2.	Πασιφάη:	Όχι.
	...	...
3.	Ερευνητής:	Εντάξει... και αυτό πάλι, είναι κάτι που σκέφτηκες τώρα πρώτη φορά, το χρησιμοποιείς έτσι στην καθημερινότητα ή στα Μαθηματικά το ’χεις δει
4.	Πασιφάη:	Το χρησιμοποιώ γενικά στην καθημερινότητα αλλά και στα Μαθηματικά νιώθω πως έτσι είναι.
5.	Ερευνητής:	Πες μου ένα παράδειγμα από την καθημερινότητα που θα χρησιμοποιούσες τη λέξη ανήκει και τη λέξη υποσύνολο.
6.	Πασιφάη:	Το ανήκει μπορώ, το υποσύνολο δύσκολο. Για παράδειγμα, το κινητό μου ανήκει σε εμένα.
7.	Ερευνητής:	Αν πω ότι η Πασιφάη ανήκει στο σύνολο των κοριτσιών της τάξης σου.
8.	Πασιφάη:	Ναι, ανήκω στο σύνολο των κοριτσιών.
9.	Ερευνητής:	ΟΚ, τη λέξη υποσύνολο εκεί πέρα πώς θα τη χρησιμοποιούσες;
10.	Πασιφάη:	Ότι π.χ. εγώ και η Ζηνοβία είμαστε υποσύνολο του συνόλου των κοριτσιών αν είμαστε μαζί.

Παρότι η μαθήτρια φαίνεται να αντιμετωπίζει τις έννοιες ως ανταλλάξιμες, στην τελευταία γραμμή τονίζει τη φράση «αν είμαστε μαζί». Το συγκεκριμένο σχόλιο θα μπορούσε να μας οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι η Πασιφάη ανήκει στην πρώτη κατηγορία αντιλήψεων των μαθητών, δηλαδή ότι θεωρεί πως η μόνη διαφορά μεταξύ των δύο εννοιών έγκειται στο πλήθος των στοιχείων. Αν το στοιχείο είναι ένα τότε δεν μπορώ να πω ότι είναι υποσύνολο αλλά μόνο ότι ανήκει. Για δύο και περισσότερα στοιχεία και οι δύο λέξεις είναι κατάλληλες. Ωστόσο, η Πασιφάη φαινόταν να δέχεται την ύπαρξη μονοσυνόλων στα Μαθηματικά άρα η συγκεκριμένη παρατήρηση ενδέχεται να ισχύει μόνο σε καθημερινά πλαίσια.

Στην τρίτη κατηγορία εμπίπτουν τρεις από τους συμμετέχοντες. Οι συγκεκριμένοι συμμετέχοντες βλέπουν το *υποσύνολο ως ένα αντικείμενο το οποίο έχει την ιδιότητα να ανήκει* σε ένα άλλο σύνολο. Ο παρακάτω διάλογος είναι ένα απόσπασμα από την συζήτηση του ερευνητή με την Αριστέα, μαθήτρια της Γ΄ Γυμνασίου:

1.	Αριστέα:	Δεν μπορώ να σκεφτώ πολύ καλά, με τη λέξη υποσύνολο, τι αλλάζει.
2.	Ερευνητής:	Τι αλλάζει... εεε, πώς θα όριζες τι λέξη υποσύνολο αν σε ρωτούσε κάποιος τι σημαίνει;
3.	Αριστέα:	Σαν αυτό θα την όριζα, ότι παίρνεις ένα σύνολο από το μεγάλο σύνολο.
	...	...
4.	Ερευνητής:	Εντάξει, άρα ας συνοψίσουμε. Υπάρχει θεωρείς κάποια διαφορά ανάμεσα στο ανήκει και στο υποσύνολο ή είναι συνώνυμα;
5.	Αριστέα:	Εεε... δεν ξέρω, πιστεύω ότι το υποσύνολο το βγάζουμε από το ανήκει;

Η συγκεκριμένη μαθήτρια θεωρεί πως το υποσύνολο έχει την ιδιότητα να ανήκει στο ευρύτερο σύνολο. Για εκείνη, η έκφραση «το σύνολο {1,2} *ανήκει* στο σύνολο {1,2,3,4,5}» είναι αληθής *επειδή* το {1,2} είναι *υποσύνολο* του {1,2,3,4,5}.

Παρόμοιες αντιλήψεις φάνηκε να έχει και η Χρύσα, μαθήτρια της Γ΄ Λυκείου:

1.	Ερευνητής:	Και άλλη μία ερώτηση. Πώς καταλαβαίνεις τη διαφορά μεταξύ ‘υποσύνολο’ και ‘ανήκει’;
2.	Χρύσα:	Το ανήκει δεν σημαίνει ότι υπάρχει κάτι που εμπεριέχεται σε ένα διάστημα ξέρω ‘γω, στο Δ ας πούμε; Ενώ το υποσύνολο ότι διαμορφώνεται κάπως αλλιώς το Δ;
	...	...
3.	Ερευνητής:	Στο ανήκει και στο υποσύνολο. Για παράδειγμα αν έλεγα αντί για 1 εδώ αν βάλω 1, 2. Ανήκει το {1,2} στο {1,2,3,4,5} και είναι υποσύνολο το {1,2} στο {1,2,3,4,5};
4.	Χρύσα:	Και τα δύο σωστά δεν είναι;
5.	Ερευνητής:	Εσύ πως το αντιλαμβάνεσαι.
6.	Χρύσα:	Νομίζω ότι κομπλέ και τα δύο.

Για την συγκεκριμένη μαθήτρια, είναι δυνατόν να διαμορφώσουμε ένα υποσύνολο του Δ το οποίο να εμπεριέχεται, δηλαδή να ανήκει στο Δ. Το υποσύνολο είναι ένα άλλο σύνολο, ένα αντικείμενο, ενώ το ανήκειν είναι μια ιδιότητα την οποία έχουν όλα τα στοιχεία αλλά και όλα τα υποσύνολα του βασικού συνόλου.

Τέλος, το παρακάτω απόσπασμα με τον Κοσμά, μαθητή της Γ΄ Λυκείου, μας δείχνει τις αυθόρμητες αντιλήψεις του μαθητή, οι οποίες φαίνεται να εμπίπτουν στην Τρίτη κατηγορία:

1.	Ερευνητής:	Δηλαδή, με αυτή τη λέξη, υποσύνολο, πως καταλαβαίνεις την έννοια;
2.	Κοσμάς:	Εεε... ότι είναι ένα μικρότερο σύνολο που ανήκει στο σύνολο αυτό;
	...	...
3.	Κοσμάς:	Νομίζω ότι το $\{1,2\}\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ είναι πιο σωστό.
4.	Ερευνητής:	ΟΚ... και γιατί;
5.	Κοσμάς:	Λόγω του ότι θα είναι υποσύνολο και δεν θα ανήκει μέσα στο σύνολο αυτό.
6.	Ερευνητής:	Δηλαδή; Με μπερδεύει λίγο αυτό.
7.	Κοσμάς:	Θα είναι υποσύνολο το $\{1,2\}$ στο $\{1,2,3,4,5\}$ ενώ θα είναι λάθος το $\{1,2\}$ να ανήκει στο $\{1,2,3,4,5\}$.
	...	...
8.	Κοσμάς:	Εεε... γιατί... δεν θα ανήκει στο $\{1,2,3,4,5\}$;
9.	Ερευνητής:	Με ποιά έννοια;
10.	Κοσμάς:	Λόγω του ότι θα είναι μεγαλύτερο το $\{1,2,3,4,5\}$.
11.	Ερευνητής:	Εντάξει θα είναι μεγαλύτερο. Γιατί να μην ανήκει;
12.	Κοσμάς:	Απλά θα είναι υποσύνολο, δεν θα ανήκει. Νομίζω... αυτό.

Όπως και οι προηγούμενες δύο μαθήτριες, έτσι και ο Κοσμάς, φαίνεται να βλέπει το υποσύνολο σαν ένα αντικείμενο το οποίο έχει την ιδιότητα να ανήκει στο ευρύτερο σύνολο. Διαβάζοντας το πέμπτο υποθετικό σενάριο, ο μαθητής καταλήγει ότι είναι σωστό να γράψουμε ότι $\{1,2\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ αλλά λάθος να γράψουμε ότι $\{1,2\}\in\{1,2,3,4,5\}$, χωρίς όμως να μπορεί να εξηγήσει γιατί. Είναι πιθανό και οι τρεις μαθητές να επηρεάζονται από την καθημερινή χρήση των δύο εννοιών. Θα πρέπει επιπλέον να σημειωθεί ότι, η τρίτη αντίληψη θα μπορούσε να είναι απλά μια υποπερίπτωση της δεύτερης.

4.4. Η έννοια του 'κενού' συνόλου.

Όπως προέκυψε από την ανάλυση των ποσοτικών μας δεδομένων, περίπου τα 2/3 των μαθητών κάθε βαθμίδας δεν δέχεται την ύπαρξη κενών συνόλων. Οι ερμηνείες για το συγκεκριμένο γεγονός ποικίλουν. Ένας μαθητής που βλέπει το σύνολο σαν άθροισμα, είναι πιθανό να απαιτεί την ύπαρξη δύο προσθετέων. Για παράδειγμα, ο Αντώνης από την ΣΤ΄ Δημοτικού μας είπε ότι «πρέπει να έχει τουλάχιστον 2 αριθμούς και πρέπει να έχει και ένα αποτέλεσμα».

Ένας μαθητής που βλέπει το σύνολο ως πλήθος, ενδέχεται να συγχέει τις έννοιες του κενού και του μηδενός. Για παράδειγμα, η Ηρώ από την Γυμνασίου μας έδωσε το εξής παράδειγμα:

1.	Ηρώ:	Δηλαδή, ας πούμε γιατί δεν μπορούμε να πούμε ότι το σύνολο των λύσεων είναι... μηδέν ας πούμε; Ένα σύνολο δεν θεωρείται πάλι; Αλλά δεν έχει κάτι μέσα.
2.	Ερευνητής:	Ωραία δεν έχει κάτι μέσα άρα λες ότι το σύνολο των λύσεων είναι μηδέν.
3.	Ηρώ:	Μμμ.
4.	Ερευνητής:	Ο Γιώργος χρησιμοποιεί τη λέξη κενό.
5.	Ηρώ:	Κενό σαν μηδέν δεν είναι;
	...	...
6.	Ερευνητής:	Αν περιέχει το 0 ή δεν περιέχει τίποτα θα σήμαινε το ίδιο για εσένα;
7.	Ηρώ:	Ρε παιδί μου... ξέρεις πώς το σκέφτομαι; Ας πούμε, πες ότι βλέπουμε Eurovision και λένε αυτοί που λένε τις ψήφους ότι η Γερμανία, το σύνολο των ψήφων που πήρε είναι 0. Όπως το λέει δεν ακούγεται σαν πάλι το 0 να είναι κάτι; Δηλαδή, ναι μεν είναι 0 οπότε δεν πήρε τίποτα αλλά... είναι ένα... σύνολο!

Εξάλλου, όπως προέκυψε από τα ποσοτικά μας δεδομένα, περίπου οι μισοί μαθητές Γυμνασίου και το 1/3 των μαθητών Λυκείου απάντησαν ότι $\varnothing = 0$.

Τέλος, οι μαθητές που βλέπουν το σύνολο σαν συλλογή είμαι πολύ πιθανόν να θεωρούν ότι μία κενή συλλογή δεν έχει νόημα. Για παράδειγμα, ο Αλβέρτος από την ΣΤ΄ Δημοτικού μας ρώτησε: «Πώς γίνεται ένα σύνολο να είναι κενό; Να μην περιέχει τίποτα. Δεν θα θεωρούταν σύνολο». Παρόμοια ήταν και η παρατήρηση της Χρύσας από τη Γ΄ Λυκείου η οποία μας είπε ότι: «Δεν μπορούμε να ορίσουμε ένα τέτοιο σύνολο, αν δεν υπήρχε ούτε ένας αριθμός, σωστά;». Ωστόσο, ακόμη και μαθητές που έχουν την αντίληψη ότι το σύνολο είναι μια συλλογή, μπορεί να συγχέουν το κενό με το μηδέν. Για παράδειγμα η Πασιφάη, μαθήτρια της Γ΄ Γυμνασίου, μας είπε ότι «μπορεί να υπάρξει κενό στο σύνολο επειδή υπάρχει και το 0».

Όλες οι παραπάνω ερμηνείες εξηγούν, εν μέρει το γεγονός ότι ακόμη και οι μαθητές Λυκείου οι οποίοι έχουν διδαχθεί την έννοια του κενού και έχουν χρησιμοποιήσει εκτεταμένα το σύμβολο «∅» στο πλαίσιο των σχολικών Μαθηματικών, τόσο στο μάθημα της Άλγεβρας της Α΄ και της Β΄ Λυκείου όσο και στο μάθημα της Ανάλυσης και των Πιθανοτήτων της Γ΄ Λυκείου, φαίνεται να έχουν την αντίληψη ότι ένα σύνολο δεν μπορεί να είναι κενό. Όπως φάνηκε στην ποσοτική μας ανάλυση, το 61% των μαθητών της Γ' Λυκείου έχει την συγκεκριμένη αντίληψη, ποσοστό ιδιαίτερα υψηλό το οποίο μάλιστα δεν διαφέρει στατιστικά από το αντίστοιχο ποσοστό του Δημοτικού και του Γυμνασίου. Μια ενδιαφέρουσα εξήγηση για το γεγονός αυτό προκύπτει από την συνέντευξη με τον Δημήτρη, μαθητή της Γ΄ Λυκείου:

1.	Δημήτρης:	Ναι, αφού, εφόσον είναι αδύνατη η εξίσωση και δεν έχει λύσεις... δεν θεωρώ ότι το κενό είναι σύνολο ας πούμε, αφού δεν έχει κανένα στοιχείο.
2.	Ερευνητής:	OK, δηλαδή δεν θα είχε νόημα να γράψω ένα σύνολο που μέσα να μην έχει τίποτα;
3.	Δημήτρης:	Όχι
4.	Ερευνητής:	OK, το σύμβολο που... το ΄χα βάλει παρακάτω ρε παιδί μου, αυτό εδώ πέρα (ο ερευνητής σχεδιάζει το σύμβολο Ø)...
5.	Δημήτρης:	Ναι.
6.	Ερευνητής:	Ξέρεις τι συμβολίζει;
7.	Δημήτρης:	Το κενό δεν συμβολίζει;
8.	Ερευνητής:	Ναι, αυτό είναι το κενό.
9.	Δημήτρης:	Ναι, το έχω δει στα Μαθηματικά.
10.	Ερευνητής:	Ναι, άρα, αν έδινε αυτό σαν απάντηση;
11.	Δημήτρης:	Εεε, όχι.

Όπως φαίνεται στο παραπάνω παράδειγμα, ο Δημήτρης γνωρίζει την ύπαρξη του κενού αλλά δεν το θεωρεί σύνολο. Αντιμετωπίζει το κενό σαν ένα ξεχωριστό μαθηματικό αντικείμενο ή σαν μία αφηρημένη μαθηματική έννοια, όπως είναι για παράδειγμα το άπειρο. Αν το σκεφτούμε γλωσσολογικά, το κενό μπορεί να νοηθεί σαν ουσιαστικό, όπως για παράδειγμα χρησιμοποιείται η αγγλική λέξη *void* ή σαν επίθετο, όπως για παράδειγμα χρησιμοποιείται η αγγλική λέξη *empty*. Με αυτή την οπτική, ένας μαθητής μπορεί να έχει πρόσβαση στην έννοια του *κενού* αλλά όχι του *κενού συνόλου*.

4.5. Περί ισότητας συνόλων.

Η ανάλυση των ποσοτικών μας δεδομένων, ανέδειξε μία σειρά αντιλήψεων για την ισότητα των συνόλων οι οποίες φαίνεται να διατηρούνται αναλλοίωτες σε όλες τις σχολικές βαθμίδες. Συγκεκριμένα, περίπου το 25% των μαθητών για κάθε σχολική βαθμίδα υποστηρίζει ότι για να θεωρηθούν δύο σύνολα ίσα, θα πρέπει τα στοιχεία τους να είναι ομοιοτρόπως διατεταγμένα., αφού απάντησαν ότι τα σύνολα {1, 2, 3, 4} και {4, 3, 2, 1} δεν είναι ίσα. Επίσης, περίπου ένα 25% των μαθητών απάντησε ότι τα σύνολα {1, 2, 3, 4} και {1, 2, 7} είναι ίσα, κάτι που ενδέχεται να σημαίνει ότι δύο σύνολα αριθμών είναι ίσα αν έχουν το ίδιο άθροισμα. Πολύ μεγαλύτερο όμως ήταν το ποσοστό των μαθητών που θεωρούν ότι {1, 2, 3, 4} = {α, β, γ, δ}. Περισσότεροι από τους μισούς μαθητές φάνηκε να έχουν αυτήν την αντίληψη κάτι που πιθανότατα φανερώνει ότι έχουν την αντίληψη ότι δύο σύνολα είναι ίσα όταν είναι ισοπληθικά ή ότι οι μαθητές αποδίδουν στο σύνολο το νόημα του πλήθους.

Προκειμένου να εμβαθύνουμε περισσότερο στο θέμα της ισότητας συνόλων, συμπεριλάβαμε ερωτήσεις που αφορούν την ισότητα μεταξύ δύο συνόλων κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων. Από τα επόμενα τρία παραδείγματα, θα διαπιστώσουμε ότι οι αντιλήψεις των μαθητών ενδέχεται να είναι πιο πολύπλοκες από ό,τι είχαμε αρχικά υποθέσει:

Ο Ανδρέας, μαθητής τη ΣΤ΄ Δημοτικού, όταν ρωτήθηκε αν τα σύνολα {1, 2, 3, 4} και {α, β, γ, δ} είναι ίσα, μας είπε ότι «το σύνολο του {α, β, γ, δ} είναι 4 αριθμοί ενώ εδώ πέρα άμα προσθέσουμε 1+2+3+4 θα μας βγει 10». Ο συγκεκριμένος μαθητής φαίνεται να βλέπει το σύνολο ως άθροισμα στην ειδική περίπτωση όπου τα στοιχεία που του δίνονται είναι αριθμοί αλλά σαν πλήθος όταν δεν είναι αριθμοί, καταλήγοντας στην σωστή απάντηση ότι τα δύο σύνολα δεν είναι εν γένει ίσα.

Η Μαρίνα, μαθήτρια της Γ΄ Γυμνασίου, δυσκολεύεται να απαντήσει στις ερωτήσεις περί ισότητας συνόλων, διότι όπως εξηγεί: «Ίσο είναι κάτι που είναι ίδιο, συμπίπτει, ταυτίζεται με κάτι άλλο ως προς κάτι». Σύμφωνα με τη μαθήτρια, τα σύνολα {1, 2, 3, 4} και {α, β, γ, δ} είναι «ίσα ως προς το πλήθος των στοιχείων τους» και τα σύνολα {1, 2, 3, 4} και {1, 2, 7} είναι «ίσα ως προς το άθροισμα τους». Απάντησε «Σωστό» σε όλες τις ερωτήσεις του ερωτηματολογίου που αναφέρονταν στην ισότητα συνόλων, αλλά στην συνέντευξη μας είπε ότι θα έπρεπε να προσδιορίζεται «ως προς τι είναι ίσα».

Ο Φοίβος, μαθητής της Γ΄ Λυκείου μας είπε ότι προκειμένου δύο σύνολα να είναι ίσα, θα πρέπει «να υπάρχει κάποια αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων, να μην είναι 4 άκυροι χαρακτήρες με 4 άλλους άκυρους χαρακτήρες». Για τον μαθητή, τα σύνολα {1, 2, 3, 4} και {α, β, γ, δ} μπορούν να θεωρηθούν ίσα αφού «στα Μαθηματικά όταν βλέπουμε το πρόβλημα γ, είναι πάντα το πρόβλημα 3, το 3^{ο} θέμα, δηλαδή τα έχουμε συνδέσει, το α, β, γ, δ με το 1, 2, 3, 4» βρίσκει λοιπόν μία αντιστοιχία που τον εξυπηρετεί και μας λέει ότι «δεν μπορείς να συγκρίνεις ανόμοια πράγματα, αλλά εφόσον υπάρχει μια αντιστοιχία σε αυτά τα δύο σύνολα, δηλαδή συνδέονται με κάποιον τρόπο το 1 με το α, το 2 με το β κ.ο.κ. μπορούμε να τα θεωρήσουμε ίσα». Από την άλλη μεριά, ο ίδιος μαθητής δεν θεωρεί ότι είναι σωστό να πούμε ότι {1, 2, 3, 4} = {4, 3, 2, 1}, όχι επειδή δεν μπορεί να βρει κάποια αντιστοιχία αλλά επειδή, σκεπτόμενος με όρους διαστημάτων, θεωρεί ότι το δεύτερο σύνολο δεν είναι σωστά γραμμένο. Συγκεκριμένα μας λέει ότι «σε ένα μαθηματικό πρόβλημα, δεν το έχω δει ποτέ να το γράφουμε από το μεγαλύτερο στο μικρότερο».

5. ΣΥΖΗΤΗΣΗ - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

5.1. Σχολιασμός αποτελεσμάτων σε σχέση με το 1ο ερευνητικό ερώτημα

5.1.1. Η διττή αντίληψη για τη φύση του συνόλου

Οι Fischbein και Baltsan (1998) υπέθεσαν ότι οι παρανοήσεις των μαθητών, σε σχέση με την έννοια του συνόλου, μπορούν να προβλεφθούν λαμβάνοντας υπόψη το διαισθητικό μοντέλο της συλλογής που δρα σιωπηρά και υπόρρητα. Τα αποτελέσματα της έρευνάς μας υποδεικνύουν ότι το μοντέλο της συλλογής δεν είναι αρκετό για να προβλέψει τις αντιλήψεις των συμμετεχόντων σε αυτή την έρευνα. Περίπου τα 2/3 των μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου και το 1/3 των μαθητών Λυκείου και των μελλοντικών εκπαιδευτικών φάνηκε είτε να αντιμετωπίζει το σύνολο ως αριθμό και όχι ως συλλογή είτε να έχει και τις δύο αντιλήψεις ταυτόχρονα. Αυτό φαίνεται να οφείλεται στη σημασία του όρου ‘σύνολο’ στην ελληνική γλώσσα και στη χρήση της τόσο στον δημόσιο λόγο όσο και σε σχολικά εγχειρίδια, οι οποίες επηρεάζουν τη νοηματοδότηση της έννοιας του συνόλου στα Μαθηματικά. Εξάλλου, όταν ζητήσαμε από τους συμμετέχοντες να δώσουν μία λεκτική περιγραφή για τη μαθηματική έννοια του συνόλου, το ποσοστό των μαθητών όλων των βαθμίδων που χρησιμοποίησε τη λέξη ‘συλλογή’ ήταν εξαιρετικά μικρό. Αντιθέτως, περίπου οι μισοί φοιτητές-μελλοντικοί εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης οι οποίοι είχαν διδαχθεί στοιχειώδη Θεωρία Συνόλων, επέλεξαν τη λέξη ‘συλλογή’ για να περιγράψουν το σύνολο.

Η λέξη σύνολο χρησιμοποιείται συχνά, τόσο στον δημόσιο λόγο όσο και σε σχολικά εγχειρίδια, με την έννοια που χρησιμοποιείται η λέξη ‘*total’* στην αγγλική γλώσσα. Το γεγονός αυτό φαίνεται ότι επηρεάζει τους Έλληνες μαθητές και πιθανότατα και τους Έλληνες εκπαιδευτικούς. Οι εκπαιδευτικοί των διαφόρων βαθμίδων και ιδιαίτερα του Δημοτικού ενδέχεται, εν τη ρύμη του λόγου, να χρησιμοποιούν τη λέξη ‘σύνολο’ και με αυτήν τη σημασία. Γίνεται λοιπόν εμφανής η επιρροή της ονοματοδοσίας στην κατασκευή νοήματος από τους μαθητές (Planas et al., 2022· Adler & Ronda, 2015) αλλά και η απαίτηση για ιδιαίτερη προσοχή από τους εκπαιδευτικούς όλων των βαθμίδων κατά τη διδασκαλία της έννοιας του συνόλου και γενικότερα στη σωστή χρήση του όρου ‘σύνολο’ στη σχολική τάξη.

Μία άλλη παράμετρος που ενδέχεται να παίζει ρόλο στη διαφορετική νοηματοδότηση των Ελλήνων μαθητών είναι το ίδιο το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών αλλά και οι διδακτικές πρακτικές που ακολουθούνται στα ελληνικά σχολεία. Στην έρευνα των Fischbein και Baltsan (1998), οι συμμετέχοντες είχαν λάβει συστηματική εκπαίδευση στη Θεωρία Συνόλων στις πρώτες τάξεις του Γυμνασίου. Στην Ελλάδα, οι μαθητές διδάσκονται για πρώτη φορά την έννοια του συνόλου, είτε στη Γ΄ Γυμνασίου, είτε στην Α΄ Λυκείου. Οι εκπαιδευτικοί της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης έχουν τη δυνατότητα να μην διδάξουν τα σύνολα στη Γ΄ Γυμνασίου ενώ στην Α΄ Λυκείου είναι συνηθισμένο από εκπαιδευτικούς να προσεγγίζουν την έννοια του συνόλου εμμέσως, όποτε αυτή χρειάζεται για τον ορισμό μίας άλλης έννοιας (όπως για παράδειγμα της συνάρτησης) και να μην αφιερώνουν τον προβλεπόμενο από το αναλυτικό πρόγραμμα χρόνο στην άμεση διδασκαλία της έννοιας του συνόλου, των ιδιοτήτων του, τις σχέσεις εγκλεισμού-αποκλεισμού και των πράξεων μεταξύ συνόλων. Ενδεχομένως αυτή η πρακτική να συμβάλλει στην προβληματική νοηματοδότηση της έννοιας από την πλειοψηφία των μαθητών.

5.1.2 Απαιτήσεις για την συμπερίληψη στοιχείων σε ένα σύνολο

Στην έρευνα των Fischbein και Baltsan (1998), εκτός από τον ισχυρισμό ότι οι παρανοήσεις των μαθητών μπορούν να προβλεφθούν με επίκληση του διαισθητικού μοντέλου της συλλογής, υπήρχε ακόμη ένα ισχυρό επιχείρημα. Οι ερευνητές παρατήρησαν ότι οι μαθητές Λυκείου απαντούν χειρότερα από τους μαθητές Γυμνασίου ενώ, συνήθως οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (οι οποίοι δεν έχουν παρακολουθήσει κάποιο μάθημα στη θεωρία των συνόλων) απαντούν χειρότερα και από τις δύο σχολικές βαθμίδες. Ισχυρίστηκαν λοιπόν ότι η πάροδος του χρόνου έχει αρνητικά αποτελέσματα στην κατανόηση της έννοιας του συνόλου. Συγκεκριμένα, δήλωσαν ότι «forgetfulness increases strongly with age» (Fischbein & Baltsan, 1998), δηλαδή ότι οι συμμετέχοντες τείνουν να ξεχνούν το τυπικό, μαθηματικό νόημα της έννοιας του συνόλου, το οποίο διδάχθηκαν στο Γυμνάσιο και μάλιστα αυτή η τάση είναι ισχυρή. Ωστόσο, οι ερευνητές έδειξαν μόνο πίνακες σχετικών συχνοτήτων για τις απαντήσεις των μαθητών, πουθενά όμως δεν έδειξαν ότι οι παρατηρούμενες διαφορές είναι στατιστικά σημαντικές. Τι συμβαίνει όμως στην περίπτωση των Ελλήνων μαθητών, οι οποίοι ασχολούνται ελάχιστα με την έννοια του συνόλου; Πώς μπορείς να ξεχάσεις κάτι που δεν γνωρίζεις; Η έρευνα των Fischbein και Baltsan (1998) είναι ίσως η σημαντικότερη έρευνα γύρω από τις παρανοήσεις των μαθητών σε σχέση με την έννοια του συνόλου. Ωστόσο, όπως θα δούμε παρακάτω, ορισμένα από τα αποτελέσματα της δικής μας έρευνας δεν συμφωνούν με αυτά των Fischbein και Baltsan (1998).

Ο ορισμός του Cantor για την έννοια του συνόλου προβλέπει την συμπερίληψη στοιχείων εφόσον είναι (α) *καλώς ορισμένα* και (β) *διακεκριμένα,* (γ) *χωρίς* να είναι απαραίτητο να έχουν κάποια *κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα*. Προκειμένου να μελετήσουμε τις αντιλήψεις των συμμετεχόντων για την έννοια του συνόλου, θα πρέπει να εξετάσουμε την κατανόησή τους για αυτές τις τρεις συνθήκες.

Στη δεύτερη ερώτηση του ερωτηματολογίου, στα τρία πρώτα υποερωτήματα, δόθηκαν στους συμμετέχοντες τρεις περιγραφές και τους ζητήθηκε να κρίνουν αν θα μπορούσαν να οδηγήσουν στη θεώρηση ενός συνόλου. Η πρώτη περιγραφή ήταν: «Οι μαθητές του σχολείου που είναι άνω των 17 ετών». Το κριτήριο για την συμπερίληψη των στοιχείων είναι σαφές. Τα στοιχεία θα πρέπει να είναι μαθητές του εν λόγω σχολείου και να είναι μεγαλύτεροι από 17 ετών. Η δεύτερη περιγραφή ήταν: «Τα ιστορικά βιβλία μιας βιβλιοθήκης». Η περιγραφή αυτή μοιάζει λιγότερο σαφής, ωστόσο, η συγκεκριμένη κατηγοριοποίηση βιβλίων χρησιμοποιείται συχνά στην καθημερινότητα χωρίς να δημιουργούνται προβλήματα αστοχίας σε σχέση με την συμπερίληψη βιβλίων. Θεωρούμε λοιπόν ότι το αντίστοιχο σύνολο θα είναι καλώς ορισμένο. Η τελευταία περιγραφή ήταν εκείνη που ήταν ανεπαρκώς ορισμένη: «Οι ψηλοί μαθητές μίας τάξης». Η επιλογή ενός συγκεκριμένου ύψους θα ήταν σαφές κριτήριο διάκρισης των στοιχείων του συνόλου, ωστόσο ο χαρακτηρισμός 'ψηλός' εξαρτάται κυρίως από το υποκείμενο που επιλέγει τα στοιχεία που θα συμπεριλάβει στο σύνολο. Είναι λοιπόν αναμενόμενο η τρίτη περιγραφή να δυσκολέψει τους συμμετέχοντες περισσότερο από τις δύο πρώτες.

Τα ποσοστά σωστών απαντήσεων των μαθητών αντικατοπτρίζουν αυτήν την κατάσταση αφού το τρίτο υποερώτημα ήταν με διαφορά εκείνο που είχε τα χαμηλότερα. Για τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς, τα ποσοστά σωστών απαντήσεων στο τρίτο υποερώτημα ήταν λίγο χαμηλότερα από τα άλλα δύο. Επιπλέον, μόλις το 1/10 των μαθητών όλων των σχολικών βαθμίδων και περίπου το 1/3 των μελλοντικών εκπαιδευτικών απαντούν σωστά και στις τρεις ερωτήσεις (δηλαδή απαντούν ταυτόχρονα ότι η πρώτη και η δεύτερη περιγραφή είναι επαρκείς ενώ η τρίτη περιγραφή ανεπαρκής). Αν εξετάσουμε την επίδοση των συμμετεχόντων συνδυαστικά στα τρία πρώτα υποερωτήματα της δεύτερης ερώτησης, παρατηρούμε ότι οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί είχαν σημαντικά καλύτερη επίδοση από τους νεότερους συμμετέχοντες, ενώ δεν παρατηρήθηκαν διαφορές μεταξύ των τριών σχολικών βαθμίδων.

Ως προς την απαίτηση του Cantor για διακεκριμένα στοιχεία, όπως προκύπτει από τις απαντήσεις τους στην ερώτηση 4, σχεδόν τα 4/5 των μαθητών του Δημοτικού, τα 3/4 των μαθητών Γυμνασίου, λίγο περισσότεροι από τους μισούς μαθητές Λυκείου και το 1/3 των μελλοντικών εκπαιδευτικών, φαίνεται να δέχονται την συμπερίληψη επαναλαμβανόμενων στοιχείων στο σύνολο. Οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί απαντούν σημαντικά καλύτερα από τους υπόλοιπους συμμετέχοντες, ακολουθούν οι μαθητές Λυκείου και στην τελευταία θέση, με παρόμοια ποσοστά και χωρίς στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ τους, βρίσκονται οι νεότεροι μαθητές του Δημοτικού και του Γυμνασίου. Επιπλέον, όταν στην ερώτηση 8 ζητήθηκε από τους μαθητές Γυμνασίου και Λυκείου και τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς (οι μαθητές του Δημοτικού δεν εξετάστηκαν στην συγκεκριμένη ερώτηση) να προσδιορίσουν την ένωση των συνόλων {1,2,3} και {3,4,5,6}, το 1/3 των μαθητών Γυμνασίου, λιγότεροι από το 1/10 των μαθητών Λυκείου και μόλις ένας στους εκατό μελλοντικούς εκπαιδευτικούς, έδωσαν την απάντηση {1,2,3,3,4,5,6}, που φανερώνει την εμφάνιση της ίδιας παρανόησης.

Η αντίληψη ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να έχουν μια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα είναι ανάμεσα σε αυτές που εμφανίστηκε στο μεγαλύτερο ποσοστό συμμετεχόντων. Στην έρευνα των Fischbein και Baltsan (1998), περίπου το 1/5 των συμμετεχόντων μαθητών εμφάνισε την εν λόγω παρανόηση. Το ενδιαφέρον στην παρούσα έρευνα είναι το ιδιαίτερα υψηλό ποσοστό των συμμετεχόντων με αυτήν την αντίληψη αλλά και το γεγονός ότι αυτή εμφανίζεται συχνότερα όσο ανεβαίνουμε στις σχολικές βαθμίδες. Συγκεκριμένα, στην τρίτη ερώτηση του ερωτηματολογίου μας, περίπου τα 3/4 των μαθητών Δημοτικού, τα 4/5 των μαθητών Γυμνασίου, σχεδόν τα 9/10 των μαθητών Λυκείου και περίπου τα 3/4 των μελλοντικών εκπαιδευτικών απάντησαν ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να έχει μία κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα.

Οι διαφορές που είχαν οι μαθητές Δημοτικού και οι φοιτητές (οι ομάδες με τα υψηλότερα ποσοστά σωστών απαντήσεων) από τους μαθητές Λυκείου (την ομάδα με τα χαμηλότερα ποσοστά σωστών απαντήσεων) ήταν στατιστικά σημαντικές. Οι διαφορές του Γυμνασίου, τόσο από τους μαθητές Δημοτικού και τους φοιτητές όσο και από τους μαθητές Λυκείου, δεν ήταν στατιστικά σημαντικές. Συμπερασματικά, το Δημοτικό και οι φοιτητές είχαν την καλύτερη επίδοση, το Γυμνάσιο ήταν κάπου στη μέση, ενώ το Λύκειο είχε τη χειρότερη επίδοση.

Μια πιθανή εξήγηση για αυτό το φαινόμενο είναι ότι οι μαθητές των μεγαλύτερων τάξεων έρχονται συχνά αντιμέτωποι με σύνολα των οποίων τα στοιχεία είναι ομοειδή, όπως σύνολα αριθμών, σύνολα λύσεων εξισώσεων ή ανισώσεων, πεδία ορισμού συναρτήσεων, σύνολα σημείων του επιπέδου κλπ. Επιπλέον, ο ορισμός για την έννοια του συνόλου ο οποίος δίνεται στους μαθητές στη Γ΄ Γυμνασίου μπορεί να προκαλεί προβλήματα, γιατί αναφέρεται σε ομάδες ή κατηγορίες αντικειμένων και δίνει παραδείγματα στα οποία τονίζεται κάθε φορά το κριτήριο για την κατηγοριοποίηση ή την συμπερίληψη των στοιχείων. Αντίστοιχα στην Α΄ Λυκείου, αν και χρησιμοποιούνται οι λέξεις ‘συλλογή’ και ‘κατηγορία’ και στο σχολικό βιβλίο τονίζεται ότι τα στοιχεία μπορούν να είναι «ομοειδή ή όχι», εντούτοις όλα τα παραδείγματα που δίνονται περιέχουν σύνολα στοιχείων που έχουν μια κοινή ιδιότητα. Όσον αφορά στους μαθητές του Δημοτικού, αυτοί στηρίζονται σχεδόν αποκλειστικά στη διαίσθησή τους η οποία πιθανότατα τροφοδοτείται από τη χρήση της λέξης ‘σύνολο’ τόσο στην καθομιλουμένη όσο και στην σχολική τάξη. Είναι λοιπόν πιθανό η μαθηματική εκπαίδευση στα σχολικά χρόνια να ενισχύει αυτήν την παρανόηση. Τέλος, το γεγονός ότι οι φοιτητές-μελλοντικοί εκπαιδευτικοί παρακολούθησαν στοιχειώδη Θεωρία Συνόλων δεν φαίνεται να έπαιξε σημαντικό ρόλο στην άρση της συγκεκριμένης αντίληψης αφού τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων τα φοιτητών δεν κατάφεραν να ξεπεράσουν εκείνα των μαθητών του Δημοτικού.

Στα ερωτήματα 2δ, 2ε και 2στ εξετάζουμε ουσιαστικά την εμφάνιση της ίδιας αντίληψης. Η πλειοψηφία των μαθητών όλων των βαθμίδων αλλά και των φοιτητών θεωρούν ότι οι συλλογές {2,4,6,8} και {α,β,γ,δ} ορίζουν αντίστοιχα από ένα σύνολο, απορρίπτουν όμως την εγκυρότητα του συνόλου {2,4,α,β}. Βλέπουμε λοιπόν ότι οι περισσότεροι συμμετέχοντες απαιτούν από τα στοιχεία ενός συνόλου να είναι ομοειδή (μόνο αριθμοί ή μόνο γράμματα). Σε αυτή την ερώτηση η εκπαιδευτική βαθμίδα δεν φαίνεται να παίζει σημαντικό ρόλο αφού οι διαφορές που παρατηρήθηκαν δεν ήταν στατιστικά σημαντικές.

Ο συνδυασμός των αποτελεσμάτων των απαντήσεων των συμμετεχόντων στις τέσσερεις πρώτες ερωτήσεις μας δίνει μια πληρέστερη εικόνα για τις αντιλήψεις τους σε σχέση με την έννοια του συνόλου. Αυτό που φάνηκε είναι πως οι μαθητές Δημοτικού και Γυμνασίου δεν διαφέρουν μεταξύ τους, οι μαθητές Λυκείου απαντούν καλύτερα από τους νεότερους μαθητές, ενώ οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί υπερέχουν των μαθητών των τριών σχολικών βαθμίδων. Βλέπουμε λοιπόν ότι τα αποτελέσματα μας δεν συμφωνούν με εκείνα των Fischbein και Baltsan (1998). Οι μαθητές Λυκείου εμπλέκονται συστηματικά με την έννοια του συνόλου, αφού μιλούν για σύνολα λύσεων, πεδία ορισμού, γεωμετρικούς τόπους, ενδεχόμενα κλπ. Η ενασχόλησή τους αυτή με την έννοια του συνόλου ενδέχεται να εξηγεί εν μέρει την σχετικά καλύτερη επίδοση τους σε σχέση με τους μαθητές του Γυμνασίου και του Δημοτικού. Ωστόσο, όλες οι περιπτώσεις συνόλων που συναντά κανείς στην σχολική εκπαίδευση στο Λύκειο είναι σύνολα με ομοειδή στοιχεία, κάτι που θα μπορούσε ίσως να εξηγήσει το γεγονός ότι το Λύκειο είχε την χειρότερη επίδοση από όλες τις βαθμίδες στην ερώτηση περί κοινής ιδιότητας των στοιχείων ενός συνόλου. Ελλείψει συστηματικής εκπαίδευσης πάνω σε μία έννοια, κάποιες παρανοήσεις ενδέχεται να διατηρηθούν ή ακόμη και να ενισχυθούν. Οι φοιτητές, οι οποίοι παρακολούθησαν στοιχειώδη Θεωρία Συνόλων, φάνηκε να ξεπερνούν σε κάποιον βαθμό τις υπάρχουσες παρανοήσεις, παρότι η διδασκαλία δεν στόχευε συγκεκριμένα σε αυτό.

5.1.3 *Επιτρεπτό πλήθος στοιχείων ενός συνόλου*

Ο ορισμός του Cantor για το σύνολο, δεν εμπεριέχει κάποιον περιορισμό για το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου. Ένα σύνολο μπορεί να είναι κενό, να περιέχει μόνο ένα στοιχείο, να περιέχει έναν πεπερασμένο αριθμό από στοιχεία ή να περιέχει άπειρα στοιχεία. Δύο από τις συχνότερες παρανοήσεις στην έρευνα των Fischbein και Baltsan (1998) ήταν η απόρριψη της ύπαρξης μονοσυνόλων και κενών συνόλων. Η έρευνά μας επιβεβαιώνει αυτά τα αποτελέσματα. Ιδιαίτερα η αντίληψη ότι ένα σύνολο δεν μπορεί να είναι κενό φάνηκε περίπου στα 2/3 των μαθητών κάθε σχολικής βαθμίδας ενώ τα μονοσύνολα απέρριψε περίπου το 50% του Δημοτικού, το 60% του Γυμνασίου και το 40% του Λυκείου. Οι φοιτητές που συμμετείχαν στην έρευνά μας φάνηκε πως είχαν ξεπεράσει τις συγκεκριμένες παρανοήσεις σε κάποιον βαθμό, αφού η μεγάλη πλειοψηφία δεχόταν την ύπαρξη μονοσυνόλων και κενών συνόλων.

Το συμπέρασμα των Fischbein και Baltsan (1998) είναι ότι οι μαθητές απορρίπτουν την ιδέα μίας συλλογής η οποία περιέχει ένα ή κανένα στοιχείο. Δεδομένου ότι οι μαθητές της δικής μας έρευνας δεν φάνηκαν να επηρεάζονται αποκλειστικά από την ιδέα της συλλογής αντικειμένων, προχωρήσαμε σε περεταίρω διερεύνηση των αντιλήψεων των μαθητών μέσω συνεντεύξεων. Όπως προέκυψε από την ανάλυση των ποιοτικών μας δεδομένων, τόσο οι μαθητές που βλέπουν το σύνολο ως συλλογή όσο και εκείνοι που το βλέπουν ως αριθμό ενδέχεται να απορρίπτουν τα σύνολα με μόνο ένα ή κανένα στοιχείο. Η λέξη σύνολο χρησιμοποιείται στην καθομιλουμένη ως αντώνυμο της λέξης μονάδα. Όταν λοιπόν κάποιος βλέπει το σύνολο ως την ολική συνάθροιση αντικειμένων σε μία συλλογή, είναι πιθανό να απορρίπτει την ιδέα του μονοσυνόλου, το οποίο θεωρεί μονάδα και όχι σύνολο. Ομοίως, κάποιος που συσχετίζει την έννοια του συνόλου με το συνολικό πλήθος, ενδέχεται να θεωρεί ότι το μονοσύνολο αντιστοιχεί στον αριθμό 1, δηλαδή στη μονάδα η οποία δεν είναι σύνολο. Επιπλέον, ένας μαθητής που αντιλαμβάνεται το σύνολο ως το άθροισμα, είναι πιθανό να απαιτεί την ύπαρξη τουλάχιστον δύο προσθετέων προκειμένου να έχει νόημα η πρόσθεση.

Οι παραπάνω ερμηνείες εξηγούν, εν μέρει το γεγονός ότι η πλειοψηφία των μαθητών κάθε βαθμίδας έχει τις συγκεκριμένες αντιλήψεις ανεξαρτήτως από το νόημα που αποδίδει στην έννοια του συνόλου. Είναι ωστόσο ενδιαφέρον ότι ακόμη και οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου οι οποίοι έχουν διδαχθεί την έννοια του κενού συνόλου ήδη από την Α΄ Λυκείου και χρησιμοποιούν το σύμβολο «$\emptyset$» στο πλαίσιο των σχολικών Μαθηματικών σε όλες τις τάξεις του Λυκείου, εμφανίζουν την αντίληψη ότι ένα σύνολο δεν μπορεί να είναι κενό στο ίδιο ποσοστό με τους νεότερους μαθητές. Όπως προέκυψε από την ανάλυση των συνεντεύξεων με τους μαθητές Λυκείου, είναι πιθανό για έναν μαθητή να γνωρίζει την ύπαρξη του κενού αλλά να μην το θεωρεί σύνολο. Αν σκεφτούμε τη χρήση της λέξης ‘κενό’ στην καθομιλουμένη, θα παρατηρήσουμε ότι το κενό μπορεί να νοηθεί τόσο ως ουσιαστικό, όπως για παράδειγμα χρησιμοποιείται η αγγλική λέξη ‘void’, όσο και ως επίθετο, όπως για παράδειγμα χρησιμοποιείται η αγγλική λέξη ‘empty’. Είναι λοιπόν πιθανό, ένας μαθητής να γνωρίζει την έννοια του κενού αλλά να την αντιμετωπίζει σαν ένα ξεχωριστό μαθηματικό αντικείμενο. Για παράδειγμα, ορισμένοι μαθητές ενδέχεται να θεωρούν ότι η τομή δύο συνόλων που δεν έχουν κοινά στοιχεία δεν είναι ένα τρίτο σύνολο το οποίο είναι κενό (κενό σύνολο – χρήση του κενού ως επίθετο), αλλά είναι απλά ‘το κενό’ (χρήση του κενού ως αντικείμενο, δηλαδή ως ουσιαστικό).

Οι διαφορές μεταξύ των ποσοστών των μαθητών των τριών βαθμίδων που απορρίπτουν την έννοια του κενού συνόλου δεν είναι στατιστικά σημαντικές. Τα ποσοστά των μαθητών Γυμνασίου που απορρίπτουν την ύπαρξη μονοσυνόλων είναι σημαντικά μεγαλύτερα από αυτά των μαθητών Δημοτικού και Λυκείου οι οποίοι δεν παρουσιάζουν διαφορές μεταξύ τους. Οι φοιτητές απαντούν σημαντικά καλύτερα και στις δύο περιπτώσεις.

Με την 6η ερώτηση του ερωτηματολογίου μελετήσαμε τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την ύπαρξη συνόλων που περιέχουν άπειρα στοιχεία. Τα δύο σύνολα που δόθηκαν στους μαθητές ήταν το {2,4,6,8,10,...} και το σύνολο των αριθμών που περιέχουν το ψηφίο 8. Αυτό που τους ζητήθηκε ήταν να επιλέξουν αν τα σύνολα είναι έγκυρα και στην περίπτωση που είναι να αναφέρουν το πλήθος των στοιχείων τους, αλλιώς να αιτιολογήσουν την απάντησή τους με όποιον τρόπο επιθυμούν. Η πλειοψηφία των μαθητών Δημοτικού και Γυμνασίου και μεγάλο ποσοστό των μαθητών Λυκείου και των μελλοντικών εκπαιδευτικών, θεώρησε ότι το {2,4,6,8,10,...} δεν είναι έγκυρο σύνολο ενώ η πλειοψηφία των συμμετεχόντων όλων των βαθμίδων δεν θεώρησε ότι όλοι οι αριθμοί που περιέχουν το ψηφίο 8 ορίζουν ένα σύνολο. Δίνοντας έναν βαθμό σε όσους απάντησαν σωστά και έκαναν αναφορά στο άπειρο πλήθος, μισό βαθμό σε εκείνους που απάντησαν σωστά χωρίς να κάνουν αναφορά στο πλήθος και κανέναν σε εκείνους που απάντησαν λάθος, είδαμε ότι οι μαθητές Λυκείου απαντούν σημαντικά καλύτερα από τις υπόλοιπες βαθμίδες, οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί και οι μαθητές Γυμνασίου μοιράζονται τη δεύτερη θέση και οι μαθητές Δημοτικού βρίσκονται στην τελευταία.

Την συγκεκριμένη ερώτηση τη δανειστήκαμε από την έρευνα των Fischbein και Baltsan (1998) και τη χειριστήκαμε κατά παρόμοιο τρόπο. Οι δύο ερευνητές ερμήνευσαν τις λάθος απαντήσεις ως περιπτώσεις μαθητών που έχουν την παρανόηση ότι μία συλλογή δεν μπορεί να περιέχει άπειρα στοιχεία. Ωστόσο, όπως προκύπτει από τις απαντήσεις των συμμετεχόντων στη δική μας έρευνα, πολλοί μαθητές δεν εστίαζαν στο πλήθος των στοιχείων των δύο συνόλων αλλά σε άλλους παράγοντες όπως η ύπαρξη κοινής ιδιότητας ή αν τα στοιχεία των συνόλων είναι καλώς ορισμένα. Για παράδειγμα, για το σύνολο {2,4,6,8,10,...}, ένας μαθητής μας έγραψε: «Όχι, γιατί το σύνολο των φυσικών αριθμών αποτελείται από όλα τα νούμερα N={1,2,3,4,...}». Για το σύνολο των αριθμών που περιέχουν το ψηφίο 8, πήραμε απαντήσεις όπως: «Όχι, διότι δεν έχουν κάποια μαθηματική σύνδεση μεταξύ τους (π.χ. 78, 80, 88)» ή «Όχι, δεν είναι ένα σύνολο αφού δεν έχουν συγκεκριμένο μοτίβο απλά περιέχουν το 8».

Υποθέτοντας ότι κάποιος έχει την αντίληψη ότι το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου πρέπει να είναι πεπερασμένο, μόνο όταν απαντά «Όχι, διότι το πλήθος των στοιχείων είναι άπειρο» ή κάτι αντίστοιχο, βλέπουμε ότι μόλις 1 μαθητής του Δημοτικού (ποσοστό 0,8%), 3 μαθητές Γυμνασίου (2,4%), 2 μαθητές Λυκείου (1,3%) και 6 φοιτητές (2,5%) έχουν την συγκεκριμένη αντίληψη. Επιπλέον, τα 4/5 των μαθητών του Δημοτικού, τα 3/5 των μαθητών Γυμνασίου, οι μισοί μαθητές Λυκείου και τα 2/5 των μελλοντικών εκπαιδευτικών έδωσαν απαντήσεις που δεν μας επιτρέπουν να συμπεράνουμε με ασφάλεια αν έχουν ή δεν έχουν την συγκεκριμένη αντίληψη ή δεν απάντησαν καθόλου στην συγκεκριμένη ερώτηση. Είναι συνεπώς πολύ πιθανό η ερώτηση 6 να μπέρδεψε τους συμμετέχοντες.

Παρότι τα συμπεράσματα των συνεντεύξεων δεν είναι δυνατόν να γενικευθούν για τον γενικό πληθυσμό, αξίζει να σημειωθεί ότι, κανένας από τους συμμετέχοντες στις συνεντεύξεις δεν φάνηκε να έχει πρόβλημα με την ιδέα του άπειρου συνόλου. Οι παραπάνω παρατηρήσεις σε συνδυασμό με το γεγονός ότι τα περισσότερα σύνολα τα οποία συναντά κανείς στη μαθηματική εκπαίδευση είναι τα γνωστά απειροσύνολα αριθμών (φυσικοί αριθμοί, ρητοί αριθμοί, άρρητοι αριθμοί και πραγματικοί αριθμοί), μας οδηγούν στην υπόθεση ότι το ποσοστό των μαθητών που έχουν την αντίληψη ότι ένα σύνολο μπορεί να έχει μόνο έναν πεπερασμένο αριθμό στοιχείων είναι αμελητέο. Η συγκεκριμένη υπόθεση θα μπορούσε να μελετηθεί συστηματικά σε μελλοντική έρευνα.

5.1.4 Ισότητα δύο συνόλων

Όπως σχολιάσαμε στο κεφάλαιο των αποτελεσμάτων, η ανάλυση των ποσοτικών μας δεδομένων έδειξε ότι ένα ποσοστό περίπου 25% για κάθε σχολική βαθμίδα φαίνεται να θεωρεί ότι η διάταξη παίζει ρόλο στον προσδιορισμό της ισότητας μεταξύ δύο συνόλων. Επίσης, περίπου ένα 25% των μαθητών φαίνεται να θεωρεί ότι δύο σύνολα αριθμών είναι ίσα όταν τα στοιχεία τους έχουν το ίδιο άθροισμα. Τέλος, περισσότεροι από τους μισούς μαθητές φάνηκε να συγχέουν την ισότητα με την ισοπληθικότητα, γεγονός που επιβεβαιώνει την προϋπάρχουσα έρευνα (Linchevski & Vinner, 1988˙ Fischbein & Baltsan 1998).

Εξετάζοντας τα δεδομένα μας από τις συνεντεύξεις, είδαμε ότι οι μαθητές δεν είχαν ιδιαίτερα σταθερές αντιλήψεις σε σχέση με την ισότητα δύο συνόλων. Ορισμένοι μαθητές, στην προσπάθεια τους να προσδιορίσουν αν δύο σύνολα είναι ίσα, σε κάποιες περιπτώσεις πρόσθεταν τα στοιχεία των συνόλων ενώ σε άλλες τα μετρούσαν. Άλλοι μαθητές ενδέχεται να θεωρούν ότι η λέξη ισότητα από μόνη της δεν επαρκεί ώστε να καταλήξουν σε κάποιο συμπέρασμα, αφού θα πρέπει να διευκρινίζεται ως προς πιο χαρακτηριστικό θέλουμε τα δύο σύνολα να είναι ίσα. Για παράδειγμα, μία μαθήτρια της Γ΄ Γυμνασίου μας είπε ότι θα έπρεπε να προσδιορίζεται «ως προς τι είναι ίσα», αφού «ίσο είναι κάτι που είναι ίδιο, συμπίπτει, ταυτίζεται με κάτι άλλο ως προς κάτι». Επιπλέον, κάποιοι μαθητές φάνηκε να χρησιμοποιούν μία μορφή αντιστοιχίας των στοιχείων των συνόλων, όπως για παράδειγμα ένας μαθητής της Γ΄ Λυκείου ο οποίος μας είπε ότι «στα Μαθηματικά όταν βλέπουμε το πρόβλημα γ, είναι πάντα το πρόβλημα 3, το 3ο θέμα, δηλαδή τα έχουμε συνδέσει, το α, β, γ, δ με το 1, 2, 3, 4» και υποστήριξε ότι «μπορούμε να τα θεωρήσουμε ίσα» αφού «συνδέονται με κάποιον τρόπο, το 1 με το α, το 2 με το β κ.ο.κ.». Για τον συγκεκριμένο μαθητή τα σύνολα {1, 2, 3, 4} και {α, β, γ, δ} είναι ίσα διότι α=1, β=2, γ=3 και δ=4. Τέλος, ορισμένοι μαθητές είχαν πολλαπλές απαιτήσεις όπως, ίδιο πλήθος στοιχείων, με ίδια αξία ή ίδιο άθροισμα, αλλά και αντίστοιχη διάταξη των στοιχείων (αύξουσα ή φθίνουσα).

Σε όλα τα υποερωτήματα της ερώτησης 7 τα οποία εξέταζαν τις αντιλήψεις των συμμετεχόντων σχετικά με την ισότητα μεταξύ συνόλων, το Δημοτικό και το Γυμνάσιο είχαν αντίστοιχα ποσοστά και το Λύκειο είχε ελαφρώς καλύτερα, όμως οι διαφορές δεν ήταν στατιστικά σημαντικές. Οι φοιτητές είχαν καλύτερα ποσοστά από όλες τις άλλες βαθμίδες.

5.1.5 Αντιλήψεις σχετικά με τις έννοιες του ανήκειν και του υποσυνόλου

Η ανάλυση των δεδομένων μας δείχνει ότι ένα σημαντικό ποσοστό των μαθητών στη πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση και των μελλοντικών εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης αντιμετωπίζει δυσκολίες στην κατανόηση της έννοιας του ανήκειν και του υποσυνόλου, ειδικά όταν αυτές οι έννοιες σχετίζονται με μονοσύνολα ή σύνολα που περιέχουν άλλα σύνολα ως στοιχεία τους.

Τις αντιλήψεις αυτές μελετήσαμε μέσω των τεσσάρων πρώτων ερωτημάτων της ερώτησης 9. Στην 9α, η οποία ζητούσε από τους συμμετέχοντες να χαρακτηρίσουν την έκφραση $\{1\}\in\{1,2,3,4,5\}$ ως αληθή ή ψευδή, τα ποσοστά των μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου δεν διέφεραν, ενώ οι φοιτητές είχαν σημαντικά υψηλότερο ποσοστό σωστών απαντήσεων. Στην 9β, η οποία ζητούσε από τους συμμετέχοντες να χαρακτηρίσουν την έκφραση $\{1\}\subseteq\{1,2,3,4,5\}$ ως αληθή ή ψευδή, τόσο το Λύκειο όσο και οι φοιτητές είχαν σημαντικά υψηλότερα ποσοστά σωστών απαντήσεων από το Γυμνάσιο αλλά όχι μεταξύ τους. Στην 9γ, η οποία ζητούσε από τους συμμετέχοντες να χαρακτηρίσουν την έκφραση $\{4\}\in\{1,2,3,\{4\},5\}$ ως αληθή ή ψευδή, τα ποσοστά των μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου δεν διέφεραν, ενώ οι φοιτητές είχαν σημαντικά υψηλότερο ποσοστό σωστών απαντήσεων. Στην 9δ, η οποία ζητούσε από τους συμμετέχοντες να χαρακτηρίσουν την έκφραση $\{4\}\subseteq\{1,2,3,\{4\},5\}$ ως αληθή ή ψευδή, δεν παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των τριών βαθμίδων. Η συγκεκριμένη ερώτηση δεν συμπεριλαμβανόταν στο ερωτηματολόγιο που απάντησαν οι μαθητές του Δημοτικού.

Το 70% των μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου και περίπου οι μισοί φοιτητές χαρακτήρισαν την ερώτηση 9α αληθή (λάθος απάντηση). Αυτό μας δείχνει ότι η πλειοψηφία των συμμετεχόντων δεν αντιλαμβάνεται ότι το σύνολο $\{1\}$ δεν αποτελεί στοιχείο του συνόλου $\{1,2,3,4,5\}$ και συνεπώς η χρήση του ανήκειν είναι εσφαλμένη. Επιπλέον, στην ερώτηση 9δ, τα 2/3 των συμμετεχόντων σε κάθε βαθμίδα χαρακτήρισε την έκφραση $\{4\}\subseteq\{1,2,3,\{4\},5\}$ ως αληθή, παρότι ο αριθμός 4 δεν είναι στοιχείο του συνόλου $\{1,2,3,\{4\},5\}$, δηλαδή τα δύο σύνολα είναι στην πραγματικότητα ξένα μεταξύ τους. Οι δύο αυτές ερωτήσεις είχαν τα χαμηλότερα ποσοστά για κάθε βαθμίδα. Το γεγονός αυτό ενδέχεται να οφείλεται στο ότι οι μαθητές που συγχέουν τις έννοιες του ανήκειν και του υποσυνόλου μπορεί να επιλέγουν την απάντηση «Σωστό» σε όλα τα ερωτήματα με αποτέλεσμα να απαντούν λανθασμένα στα υποερωτήματα 9α και 9δ (στα οποία η σωστή απάντηση είναι το «Λάθος»), αλλά σωστά στα δύο άλλα (στα οποία η σωστή απάντηση είναι πράγματι το «Σωστό»). Μια άλλη πιθανή εξήγηση είναι ότι ορισμένοι μαθητές μπορεί να ταυτίζουν ένα στοιχείο με το μονοσύνολο που περιέχει το στοιχείο (π.χ. το 1 με το $\{1\}$).

Επιπλέον, αν κοιτάξουμε συνδυαστικά τα ερωτήματα 9α – 9δ θα δούμε ότι περίπου το 7,5% των μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου και περίπου το 15% των μελλοντικών εκπαιδευτικών απάντησαν σωστά και στα τέσσερα ερωτήματα. Σε γενικές γραμμές, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε με σχετική επιφύλαξη, ότι οι φοιτητές απαντούν λίγο καλύτερα από τους μαθητές του Γυμνασίου και του Λυκείου, οι οποίοι δεν διαφέρουν ιδιαίτερα μεταξύ τους. Σε κάθε περίπτωση, η ιδιαιτερότητα των συγκεκριμένων ερωτημάτων φάνηκε να δυσκολεύει αρκετά όλους τους συμμετέχοντες, κάτι που συμφωνεί και με την προϋπάρχουσα έρευνα (Bagni, 2006˙ Moru & Qhobela, 2013).

Επειδή τα αποτελέσματα από τα ποσοτικά μας δεδομένα δεν μας επέτρεψαν να έχουμε αρκετά σαφή εικόνα σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών σε σχέση με τις εν λόγω έννοιες, αποφασίσαμε να τις ερευνήσουμε και με ποιοτικές μεθόδους. Από την ανάλυση των συνεντεύξεων προέκυψαν τρεις βασικές κατηγορίες παρανοήσεων:

- Χρησιμοποιούμε το *ανήκει όταν έχουμε ένα στοιχείο* και *το υποσύνολο για περισσότερα* στοιχεία.
- Το ανήκει και το είναι υποσύνολο, έχουν την *ίδια σημασία*.
- Το ανήκει είναι η ιδιότητα που εξασφαλίζει ότι ένα σύνολο είναι υποσύνολο ενός άλλου συνόλου.

Η πρώτη παρανόηση μπορεί να οδηγήσει στο συμπέρασμα ότι το {1} ανήκει στο σύνολο {1,2,3,4,5} ενώ το {1,2} είναι υποσύνολο του {1,2,3,4,5}. Η δεύτερη παρανόηση είναι αυτονόητη και σημαίνει ότι οι έννοιες του ανήκειν και του υποσυνόλου χρησιμοποιούνται ως ανταλλάξιμες, δηλαδή ότι για δύο σύνολα Α και Β ισχύει ότι $A \in B \Leftrightarrow A \subseteq B$. Η τρίτη αντίληψη είναι στην ουσία υποπερίπτωση της δεύτερης. Μοναδική διαφορά της συγκεκριμένης αντίληψης είναι ότι το άτομο που την έχει ενδέχεται να θεωρεί πιο σωστό να χρησιμοποιούμε το σύμβολο '∈' μεταξύ δύο συνόλων και απλά να χαρακτηρίζουμε το σύνολο στα αριστερά της έκφρασης ως 'υποσύνολο'. Η ύπαρξη αυτών των παρανοήσεων αποκαλύπτει την ανάγκη για ιδιαίτερη προσοχή κατά τη διδασκαλία των συγκεκριμένων εννοιών με σκοπό την κατανόηση και τη διάκριση τους.

5.1.6 Αντιλήψεις περί ισοπληθικότητας απειροσυνόλων

Προκειμένου να διερευνήσουμε τις αντιλήψεις των συμμετεχόντων σε σχέση με την ισοπληθικότητα των απειροσυνόλων, αφιερώσαμε τις ερωτήσεις 10 και 11 του ερωτηματολογίου. Στην ερώτηση 10, στηριζόμενοι στην έρευνα των Tirosh και Tsamir (1996), δώσαμε στους συμμετέχοντες 4 ζευγάρια από σύνολα και τους ζητήσαμε να τα συγκρίνουν ως προς το πλήθος των στοιχείων τους. Τα υποερωτήματα 10α και 10β περιείχαν δύο σύνολα Α και Β για τα οποία ισχύει $B \subseteq A$. Στο ερώτημα 10γ δίνονται τα ίδια υποσύνολα με το ερώτημα 10β όμως τώρα τα στοιχεία του συνόλου Β είναι γραμμένα έτσι ώστε να γίνεται εμφανέστερη η 1-1 και επί αντιστοιχία με τα στοιχεία του Α. Τέλος, στο ερώτημα (δ) δίνονται δύο ξένα σύνολα για τα οποία υπάρχει μία εμφανής 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων τους. Σύμφωνα με την προϋπάρχουσα έρευνα, οι δύο πρώτες ερωτήσεις προωθούν την ιδέα του «μέρος-όλον» και οδηγούν στο συμπέρασμα ότι το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Α είναι μεγαλύτερο από εκείνων του συνόλου Β, ενώ τα δύο τελευταία απειροσύνολα προωθούν την ιδέα της ισοπληθικότητας των δύο συνόλων (Tsamir & Tirosh, 1992· Tirosh & Tsamir, 1996).

Οι ερωτήσεις 10γ και 10δ φαίνεται ότι πράγματι οδήγησαν τους μαθητές Λυκείου και τους φοιτητές σε μεγαλύτερα ποσοστά σωστών απαντήσεων κάτι που δεν φαίνεται να ισχύει για τους μαθητές Γυμνασίου οι οποίοι διατήρησαν χαμηλά ποσοστά. Αυτό ενδέχεται να οφείλεται στο γεγονός ότι οι μαθητές Λυκείου και οι φοιτητές έχουν μεγαλύτερη εμπειρία με τα απειροσύνολα, τη διαδικασία της 1-1 αντιστοιχίας και γενικότερα την αναγνώριση μοτίβων. Ιδιαίτερα το ερώτημα 10γ το οποίο αξιοποιούσε την σαφή-αριθμητική αναπαράσταση (Tsamir & Tirosh, 1992˙ Tirosh & Tsamir, 1996), αφού περιείχε τα σύνολα $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ και $B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \ldots\}$, είχε τα υψηλότερα ποσοστά σωστών απαντήσεων για το Γυμνάσιο και το Λύκειο και ήταν το μόνο ερώτημα στο οποίο παρατηρήθηκαν στατιστικά σημαντικές διαφορές, με τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς να βρίσκονται στην πρώτη θέση, τους μαθητές Λυκείου να βρίσκονται στη δεύτερη και τους μαθητές Γυμνασίου στην τελευταία θέση.

Στην συνέχεια, στην ερώτηση 11, εξετάσαμε άμεσα την ύπαρξη συγκεκριμένων παρανοήσεων σχετικά με την ισοπληθικότητα μεταξύ απειροσυνόλων. Οι πιο συχνές αντιλήψεις που παρατηρήθηκαν μεταξύ των συμμετεχόντων ήταν ότι το πλήθος των στοιχείων ενός συνόλου είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων κάθε γνήσιου υποσυνόλου του (με ποσοστά εμφάνισης κοντά στο 70% για το Γυμνάσιο και το Λύκειο και περίπου 60% για τους μελλοντικους εκπαιδευτικούς) και η αντίληψη ότι τα στοιχεία δύο απειροσυνόλων είναι μη συγκρίσιμα (με ποσοστά εμφάνισης κοντά στο 60% για τους μαθητές Γυμνασίου και περίπου 70% για τους μαθητές Λυκείου και τους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς). Η αντίληψη ότι όλα τα απειροσύνολα είναι ισοπληθικά εμφανίστηκε με λίγο μικρότερη συχνότητα σε κάθε βαθμίδα (περίπου 50% για το Γυμνάσιο, 40% για το Λύκειο και 30% για τους φοιτητές).

Η μόνη αντίληψη για την οποία οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί είχαν σημαντικά υψηλότερο ποσοστό σωστών απαντήσεων σε σχέση με τις άλλες βαθμίδες, ήταν η αντίληψη ότι όλα τα απειροσύνολα είναι ίσα ως προς το πλήθος των στοιχείων τους. Το υψηλό ποσοστό των μελλοντικων εκπαιδευτικών που αντιλαμβάνονται ότι δύο απειροσύνολα δεν είναι κατ' ανάγκη ισοπληθικά σε συνδυασμό με τα χαμηλά ποσοστά σωστών απαντήσεων στα άλλα δύο υποερωτήματα, θα μπορούσε να δείχνει ότι οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί ενσωμάτωσαν στη διαίσθηση τους την ιδέα της μη-ισότητας των πληθαρίθμων ορισμένων απειροσυνόλων, ως αποτέλεσμα της συστηματικής διδασκαλίας της στοιχειώδους Θεωρίας Συνόλων, διατηρούν όμως ακόμη κάποιες από τις αυθόρμητες αντιλήψεις τους.

Η αντίληψη ότι τα απειροσύνολα είναι μη συγκρίσιμα εμφανίστηκε σε μεγαλύτερο βαθμό στους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς, σε μικρότερο βαθμό στο Λύκειο και στον μικρότερο από όλους στο Γυμνάσιο. Η ανάλυση ANOVA έδειξε ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των αποτελεσμάτων τριών βαθμίδων, ωστόσο το κριτήριο Scheffe ομαδοποίησε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες μαζί. Τα ποσοστά εμφάνισης της αντίληψης ότι το πλήθος των στοιχείων ενός απειροσυνόλου είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων κάθε γνήσιου υποσυνόλου του, δεν παρουσίασαν στατιστικά σημαντικές διαφορές.

5.1.7 Απολογισμός ποσοτικών αποτελεσμάτων

Ως γενικό απολογισμό των ποσοτικών μας αποτελεσμάτων, θα λέγαμε ότι:

(1) Μεταξύ των μαθητών των τριών σχολικών βαθμίδων, η ηλικία δεν φάνηκε να έχει αρνητική επιρροή για τους συμμετέχοντες της δικής μας έρευνας. Η καθημερινή εμπλοκή των μαθητών της Γ΄ Λυκείου με την έννοια του συνόλου (κυρίως των βασικών αριθμο-συνόλων ή διαστημάτων, πεδίων ορισμού κλπ.) και η μαθηματική τους ωριμότητα σε σχέση με τους νεότερους μαθητές, ενδέχεται να δίνει σε κάποια ερωτήματα ένα προβάδισμα στους μαθητές του Λυκείου έναντι των νεότερων μαθητών, παρότι υπήρχαν και περιπτώσεις όπου οι νεότεροι μαθητές είχαν υψηλότερα ποσοστά σωστών απαντήσεων.

(2) Οι φοιτητές – μελλοντικοί εκπαιδευτικοί οι οποίοι παρακολούθησαν στοιχειώδη Θεωρία Συνόλων, φάνηκε να έχουν αισθητά καλύτερα αποτελέσματα στην πλειοψηφία των ερωτήσεων ιδιαίτερα σε ερωτήσεις που πραγματεύονταν τεχνικά θέματα (ισότητα συνόλων, ένωση συνόλων, αναγνώριση συνόλων) ή θέματα ορισμού (καλώς ορισμένα στοιχεία, διακεκριμένα στοιχεία, κενό σύνολο, μονοσύνολο). Ωστόσο, οι ερωτήσεις που περιείχαν κάποια ιδιαίτερη εννοιολογική δυσκολία, δηλαδή οι ερωτήσεις που εμπεριείχαν σύνολα με στοιχεία άλλα σύνολα και χρησιμοποιούσαν ανταλλάξιμα το σύμβολο του ανήκειν και του υποσυνόλου και οι ερωτήσεις που σχετίζονταν με σύγκριση απειροσυνόλων, φάνηκε να δυσκολεύουν τους φοιτητές σε παρόμοιο βαθμό με τους υπόλοιπους συμμετέχοντες. Ιδιαίτερα η αντίληψη ότι τα στοιχεία ενός συνόλου πρέπει να έχουν κάποια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα είναι εκείνη που είναι πιο στενά συνδεδεμένη με τη διαίσθηση των συμμετεχόντων και δεν ξεπεράστηκε επιτυχώς ούτε στους φοιτητές παρά την σχετική διδασκαλία. Θα μπορούσαμε λοιπόν να συμπεράνουμε ότι (α) η παρανόηση ότι τα στοιχεία ενός συνόλου πρέπει να έχουν μία *κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα*, (β) η σύγχυση των εννοιών του *ανήκειν* και του *υποσυνόλου* και (γ) οι παρανοήσεις που σχετίζονται με την σύγκριση απειροσυνόλων, είναι αυτές που επιμένουν.

5.2 Σχολιασμός αποτελεσμάτων σε σχέση με το 2ο ερευνητικό ερώτημα

Στην πρώτη ερώτηση του ερωτηματολογίου, παρατηρήσαμε ότι ένας μεγάλος αριθμός μαθητών αποδίδει στην έννοια του συνόλου το νόημα του αριθμού. Η εικασία μας ήταν ότι στο φαινόμενο αυτό συμβάλει σημαντικά η χρήση του όρου ‘σύνολο’ στην ελληνική γλώσσα. Προκειμένου να εξετάσουμε αυτή την υπόθεση, αποφασίσαμε να διεξάγουμε συνεντεύξεις με κάποιους από τους μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού, της Γ΄ Γυμνασίου και της Γ΄ Λυκείου οι οποίοι είχαν ήδη απαντήσει στο ερωτηματολόγιό μας. Για την ανάλυση των δεδομένων χρησιμοποιήσαμε ποιοτικές μεθόδους και ο θεωρητικός φακός μέσα από τον οποίο διαβάσαμε τα δεδομένα μας ήταν το γλωσσικό ιδίωμα του Halliday (1978).

Όπως φάνηκε από την ανάλυση των δεδομένων μας στο Δημοτικό, οι μαθητές στην πλειοψηφία τους αποδίδουν στο σύνολο το νόημα του αριθμού, ενώ δεν δίσταζαν να αλλάξουν το γλωσσικό ιδίωμα από το οποίο αντλούσαν νοήματα και να μεταβούν από τον καθημερινό λόγο στον σχολικό-μαθηματικό λόγο και αντίστροφα. Ο όρος ‘σύνολο’ άλλαζε αποχρώσεις ως αποτέλεσμα αυτών των μετακινήσεων αλλά στον πυρήνα του είχε το νόημα του αριθμού. Όταν η συζήτηση αφορούσε θέματα που εντάσσονται στο καθημερινό πλαίσιο, το σύνολο μπορεί να αναφερόταν ως αριθμός, π.χ. το συνολικό κόστος μίας συναλλαγής ή το συνολικό πλήθος μιας συλλογής αντικειμένων. Όταν η συζήτηση μετακινούνταν στο πλαίσιο της σχολικής τάξης των Μαθηματικών, η γλώσσα της οποίας βρίσκεται στα όρια των Μαθηματικών και της καθημερινότητας, το σύνολο μπορούσε για παράδειγμα να νοηθεί ως το πλήθος των μαθητών της τάξης, το άθροισμα ή το αποτέλεσμα μιας αριθμητικής παράστασης ή ακόμη και ως η λύση ενός προβλήματος.

Παρότι οι απαντήσεις των μαθητών του Δημοτικού στις συνεντεύξεις χαρακτηρίζονταν από αβεβαιότητα, δεν θα λέγαμε ότι οι μαθητές διακατέχονταν από την αβεβαιότητα εκείνου που προσπαθεί να κατακτήσει νέα γνώση. Η αβεβαιότητα των μαθητών έμοιαζε να πηγάζει από το γεγονός ότι τους ζητούσαμε να εξηγήσουν το νόημα μίας έννοιας που μοιάζει αυτονόητη.

Στο Γυμνάσιο η κατάσταση ήταν διαφορετική. Οι μαθητές ήταν πιο επιφυλακτικοί στις μετακινήσεις μεταξύ διαφορετικών ιδιωμάτων, αφού επηρεάζονταν λιγότερο από τις αλλαγές στο πεδίο αναφοράς σε σχέση με τους μαθητές Δημοτικού. Ως προς τις αντιλήψεις τους, φάνηκαν να βρίσκονται σε ένα μεταβατικό στάδιο. Εμπιστεύονταν σε μεγαλύτερο βαθμό τις γνώσεις και τη διαίσθησή τους, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι δεν επηρεάζονταν από το νόημα της λέξης ‘σύνολο’ στα σχολικά εγχειρίδια του Δημοτικού, στον δημόσιο λόγο και στην καθομιλουμένη.

Ανεξαρτήτως της επιλογής ιδιώματος, όλα τα πιθανά νοήματα για τον όρο ‘σύνολο’ ήρθαν στην επιφάνεια. Το νόημα του συνόλου που αντλούσαν οι μαθητές από τον δημόσιο λόγο μπορούσε να είναι αυτό της συλλογής, όπως για παράδειγμα στη φράση ‘το κοινωνικό σύνολο’ ή και αυτό του αριθμού, όπως για παράδειγμα στη φράση ‘στον διαγωνισμό τραγουδιού η Ελλάδα συγκέντρωσε σύνολο 10 πόντους’. Το νόημα του συνόλου που αντλούσαν οι μαθητές από το ιδίωμα των σχολικών Μαθηματικών μπορούσε να είναι αυτό της συλλογής, όπως για παράδειγμα όταν μιλάμε για ‘το σύνολο των αρνητικών αριθμών’ ή του αριθμού, όπως όταν μας ζητούν ‘να βρούμε το σύνολο των μαθητών της τάξης’ και εννοούν το πλήθος τους.

Οι μαθητές Γυμνασίου έμοιαζαν εξίσου αβέβαιοι με τους μαθητές Δημοτικού, η δική τους όμως αβεβαιότητα έδινε την εντύπωση ότι αγωνιούσαν για επιβεβαίωση. Προσπαθούσαν ίσως να εκμαιεύσουν την σωστή απάντηση ή έστω την απάντηση που υπέθεταν ότι θέλει να ακούσει ο ερευνητής. Δεν φάνηκε να θεωρούν το νόημα της έννοιας του συνόλου σαν κάτι αυτονόητο. Πιθανότατα, αντιλαμβάνονταν ότι η έννοια μπορεί να φέρει διαφορετικά νοήματα, χωρίς όμως να είναι σε θέση να αποφασίσουν ποιο νόημα είναι αυτό που είναι το αποδεκτό για τα Μαθηματικά. Κάποιοι μάλιστα φάνηκε να θεωρούν ότι τα γλωσσικά ιδιώματα στα οποία είχαν πρόσβαση δεν επαρκούν για την σωστή απόδοση νοήματος για την έννοια του συνόλου, με αποτέλεσμα να προσπαθούν να αποκωδικοποιήσουν το ίδιο το ιδίωμα των ερευνητικών μας εργαλείων, δηλαδή του ερωτηματολογίου και των υποθετικών σεναρίων, ιδίωμα το οποίο εκπορεύεται από τους ίδιους τους ερευνητές.

Οι απαντήσεις των μαθητών της ΣΤ΄ Δημοτικού και της Γ΄ Γυμνασίου που συμμετείχαν στο πρώτο μέρος της έρευνας μας φάνηκε να μην έχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ τους. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι δεν υπάρχει σαφής εξέλιξη στην νοηματοδότηση της έννοιας μεταξύ των δύο βαθμίδων. Ωστόσο, τα αποτελέσματα από το δεύτερο μέρος της έρευνας υποδεικνύουν την ύπαρξης μίας πιθανής εξέλιξης στις αντιλήψεις των μεγαλύτερων μαθητών.

Από την άλλη μεριά, οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου φάνηκε να αποδίδουν στον όρο ‘σύνολο’ το νόημα της συλλογής στις περισσότερες περιπτώσεις. Παρουσίαζαν τη μεγαλύτερη αντίσταση στην αλλαγή μεταξύ γλωσσικών ιδιωμάτων, αφού έμοιαζαν να αντιλαμβάνονται την έννοια του συνόλου κυρίως μέσα στο ιδίωμα των σχολικών Μαθηματικών του Λυκείου και να επηρεάζονται από το πλαίσιο και τη γλώσσα του μαθήματος της Άλγεβρας και της Ανάλυσης. Η καθημερινή εμπλοκή των μαθητών σε όλη τη διάρκεια του Λυκείου με διαστήματα και ενώσεις διαστημάτων (λύσεις ανισώσεων, πεδία ορισμού, σύνολα τιμών, διαστήματα στα οποία μία συνάρτηση διατηρεί κάποιο πρόσημο κλπ.) ενδέχεται να διαμορφώνει σε κάποιον βαθμό τις αντιλήψεις των μαθητών αλλά και να προσανατολίζει τους μαθητές σε μαθηματικά ιδιώματα.

Τέλος, οι μαθητές του Λυκείου επέδειξαν μικρότερο βαθμό αβεβαιότητας στις απαντήσεις τους από τους νεότερους συμμετέχοντες ακόμη και όταν αυτές ήταν λανθασμένες, ενώ φάνηκαν να επηρεάζονται λιγότερο από τον ρόλο του ερευνητή ως μαθηματικού και εκπαιδευτικού και να αντιμετωπίζουν την συνέντευξη περισσότερο σαν συζήτηση και λιγότερο σαν εξέταση.

5.3 Συνεισφορά της έρευνας

Οι έρευνες των Linchevski και Vinner (1988) και των Fischbein και Baltsan (1998), ανέδειξαν μία σειρά παρανοήσεων σε σχέση με την έννοια του συνόλου οι οποίες επιβεβαιώθηκαν από την έρευνα μας, με εξαίρεση την απόρριψη συνόλων με άπειρο πλήθος στοιχείων κάτι που δεν φάνηκε να εμφανίζεται μεταξύ των συμμετεχόντων της δικής μας έρευνας. Επιπλέον, οι συμμετέχοντες στην έρευνά μας και ιδιαίτερα οι νεότεροι, φάνηκε να έχουν την παρανόηση ότι η έννοια του συνόλου στα Μαθηματικά έχει το νόημα του αριθμού. Μία ακόμη παρανόηση που εμφανίστηκε σε ορισμένους συμμετέχοντες και ίσως συνδέεται με την εμφάνιση της προηγούμενης παρανόησης, ήταν η ιδέα ότι δύο αριθμο-σύνολα είναι ίσα όταν είναι ισοπληθικά. Τέλος, οι Fischbein και Baltsan (1998) υποστήριξαν ότι ορισμένοι μαθητές συγχέουν την έννοια του κενού με εκείνη του μηδενός. Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώθηκε μέσω της δικής μας έρευνας, όμως εμφανίστηκε ένα ακόμη ενδιαφέρον αποτέλεσμα. Μαθητές που γνωρίζουν την ύπαρξη του κενού και δεν την συγχέουν με εκείνη του μηδενός, φαίνεται να μην θεωρούν το κενό ως ένα σύνολο αλλά σαν μία ξεχωριστή μαθηματική έννοια, όπως για παράδειγμα το άπειρο.

Οι έρευνες του Bagni (2006) και των Moru και Qhobela (2013), έφεραν στο φως ορισμένες δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές σε σχέση με τις έννοιες του ανήκειν και του υποσυνόλου. Το συμπέρασμά τους είναι ότι οι δύο έννοιες τείνουν να συγχέονται σε κάποιες περιπτώσεις. Κάτι που αποκάλυψε η δική μας έρευνα είναι ότι ορισμένοι μαθητές χρησιμοποιούν το σύμβολο του ανήκει όταν στο αριστερό μέλος μίας έκφρασης υπάρχει μόνο ένα στοιχείο και το σύμβολο του υποσυνόλου όταν υπάρχουν περισσότερα. Συγκεκριμένα, αυτοί οι μαθητές θα έγραφαν ότι $\{1\} \in \{1,2,3,4,5\}$ αλλά και ότι $\{1,2\} \subseteq \{\{1,2\},\{3,4,5\}\}$, θα χρησιμοποιούσαν δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις το λάθος σύμβολο. Επιπλέον, κάποιοι συμμετέχοντες στην έρευνά μας φάνηκε να θεωρούν ότι το ανήκει είναι η ιδιότητα που μας εξασφαλίζει ότι ένα σύνολο είναι υποσύνολο ενός άλλου συνόλου. Οι συγκεκριμένοι μαθητές θα υποστήριζαν ότι το σύνολο $\{1,2\}$ ανήκει στο σύνολο $\{1,2,3,4,5\}$ συνεπώς αποτελεί ένα υποσύνολο του.

Τέλος, μεγάλος αριθμός από έρευνες έχει εστιάσει στις συγκρίσεις απειροσυνόλων (Tsamir & Tirosh, 1992˙ Tirosh & Tsamir, 1996˙ Tsamir, 1999˙ Tsamir, 2001˙ Tsamir & Dreyfus, 2002˙ Dreyfus & Tsamir, 2004˙ Na & Lee, 2006˙ Moru & Qholeba, 2013). Η έρευνα μας επιβεβαίωσε τα κύρια ευρήματά τους και μάλιστα έδειξε ότι ακόμη και η διδασκαλία στοιχειώδους Θεωρίας Συνόλων στο πλαίσιο ενός μαθήματος θεμελίων των Μαθηματικών, δεν κατάφερε παρά μόνο να διδάξει στους μελλοντικούς εκπαιδευτικούς της πρωτοβάθμιας ότι δύο απειροσύνολα δεν είναι κατ’ ανάγκη ισοπληθικά.

Επιπλέον, κάτι που φαίνεται να έλλειπε από την προϋπάρχουσα έρευνα ήταν μια συγκριτική στατιστική ανάλυση μεταξύ των διαφορετικών βαθμίδων. Στη δική μας έρευνα, συνθέσαμε τα αποτελέσματα των σημαντικότερων δημοσιευμένων ερευνών και επιχειρήσαμε να μελετήσουμε αν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μαθητών της ΣΤ΄ Δημοτικού, της Γ΄ Γυμνασίου και της Γ΄ Λυκείου, δηλαδή μεταξύ εκείνων των μαθητών που ολοκληρώνουν την εκάστοτε σχολική βαθμίδα, αλλά και των φοιτητών ενός Παιδαγωγικού Τμήματος ο οποίοι είναι οι μελλοντικοί εκπαιδευτικοί που θα αναλάβουν πρώτοι τη μαθηματική εκπαίδευση. Αυτό που φάνηκε από τα δεδομένα μας είναι πως δεν υπάρχει μία σαφής εξέλιξη της έννοιας του συνόλου όσο προχωρούμε στις σχολικές εκπαιδευτικές βαθμίδες. Ιδιαίτερα οι μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού και της Γ΄ Γυμνασίου είχαν στις περισσότερες περιπτώσεις παρόμοια επίδοση. Οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου απαντούσαν συνήθως καλύτερα από τους νεότερους μαθητές, αλλά δεν έλλειψαν και οι περιπτώσεις που είχαν την χειρότερη επίδοση.

Ένα ακόμη σημείο που φάνηκε να λείπει από τη βιβλιογραφία ήταν η μελέτη της επίδρασης του κοινωνικού πλαισίου στη νοηματοδότηση της έννοιας του συνόλου. Τόσο η χρήση της λέξης ‘σύνολο’ από σχολικά εγχειρίδια και από εκπαιδευτικούς όσο και στον καθημερινό και τον δημόσιο λόγο φαίνεται να παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στη νοηματοδότηση της έννοιας από τους μαθητές. Τα αποτελέσματα αυτά έχουν ιδιαίτερη αξία για τη μαθηματική εκπαίδευση στην Ελλάδα όπου δεν δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στην έννοια του συνόλου και όπου η καθημερινή χρήση της λέξης ‘σύνολο’ διαφέρει ριζικά από την τυπική μαθηματική. Παρότι στις διάφορες σχολικές βαθμίδες οι περισσότερες έννοιες προσεγγίζονται χωρίς σαφή αναφορά στην έννοια του συνόλου, ο όρος ‘σύνολο’ εμφανίζεται συχνά, τόσο στην σχολική τάξη όσο και έξω από αυτήν. Το νόημα του όρου μοιάζει να είναι αυτονόητο, ωστόσο βλέπουμε ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Είναι λοιπόν εμφανές ότι η έννοια του συνόλου θα έπρεπε να διδάσκεται συστηματικά στην σχολική τάξη των Μαθηματικών κάθε βαθμίδας και να διαχωρίζεται από όρους όπως για παράδειγμα το ‘πλήθος’ ή το ‘άθροισμα’. Κάτι τέτοιο θα μπορούσε να επιτευχθεί μέσω της υιοθέτησης προσεγγίσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών που ανταποκρίνονται στη χρήση της γλώσσας των μαθητών (language responsive). Δεν προτείνουμε φυσικά μία στροφή προς την συνολοθεωρητική προσέγγιση των εννοιών. Αυτό που προτείνουμε είναι η διδασκαλία του νοήματος του όρου ‘σύνολο’ ο οποίος είναι ο αποδεκτός στα Μαθηματικά και η σωστή χρήση του από τους εκπαιδευτικούς και από τα σχολικά εγχειρίδια.

5.4 Προτάσεις για μελλοντική έρευνα

Ένα δυνατό στοιχείο της έρευνάς μας ήταν η ικανότητά της να σκιαγραφήσει, να αξιολογήσει και να περιγράψει την υπάρχουσα κατάσταση σε σχέση με την έννοια του συνόλου. Η συμμετοχή των μελλοντικών εκπαιδευτικών οι οποίοι παρακολούθησαν Θεωρία Συνόλων μπορεί να μας δώσει μία ένδειξη σχετικά με τις παρανοήσεις που επιμένουν παρά την συστηματική εκπαίδευση. Ωστόσο, οι φοιτητές που συμμετείχαν στην έρευνά μας προέρχονταν από ένα Παιδαγωγικό Τμήμα και συνεπώς δεν αντιπροσωπεύουν τον γενικό πληθυσμό. Η άμεση σύγκριση των αποτελεσμάτων τους με αυτά των μαθητών των τριών σχολικών βαθμίδων δεν θα μπορούσε να οδηγήσει σε ασφαλή συμπεράσματα. Σε μελλοντική έρευνα, θα είχε ενδιαφέρον να σχεδιαστούν κατάλληλες διδακτικές παρεμβάσεις, η αποτελεσματικότητα των οποίων θα μπορούσε να ελεγχθεί στατιστικά με pre-tests και post-tests.

Για τη μελέτη της νοηματοδότησης της έννοιας αλλά και της εξέλιξής της όσο προχωρούμε στις εκπαιδευτικές βαθμίδες, επιλέξαμε τον θεωρητικό φακό του γλωσσικού ιδιώματος (language register) του Halliday (1978) ο οποίος μας έδωσε την ευκαιρία να δούμε τις αποχρώσεις της έννοιες σε σχέση με τα διάφορα πλαίσια συζήτησης. Θα είχε ωστόσο ενδιαφέρον, το ίδιο ερευνητικό ερώτημα να μελετηθεί μέσω διαφορετικών θεωρητικών πλαισίων. Για παράδειγμα, τα διαφορετικά νοήματα που αποδίδονται από τους μαθητές θα μπορούσαν να ερμηνευθούν ως διαφορετικές εικόνες (Tall & Vinner, 1981) για την έννοια του συνόλου οι οποίες συνυπάρχουν στον νου του μαθητή. Επιπλέον, η ενδεχόμενη εξέλιξη της νοηματοδότησης της έννοιας του συνόλου θα μπορούσε να νοηθεί ως μία περίπτωση εννοιολογικής αλλαγής (Vosniadou, 2008˙ Tisosh & Tsamir, 2006). Ένα άλλο θεωρητικό πλαίσιο που είναι συγγενές με εκείνου του Halliday (1987) και το οποίο θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για την περεταίρω διερεύνηση της νοηματοδότησης της έννοιας του συνόλου και της επίδρασης του κοινωνικό-γλωσσικού πλαισίου, είναι εκείνο του «commognition» της Sfard (2008). Ο όρος ‘commognition’ αποτελεί συνδυασμό των λέξεων ‘communication’ (επικοινωνία) και ‘cognition’ (νόηση ή γνωστική λειτουργία) και αντικατοπτρίζει την ιδέα ότι η σκέψη και η επικοινωνία είναι βαθιά αλληλένδετες διαδικασίες, δίνοντας έμφαση στον μαθηματικό διάλογο, το μαθηματικό λεξιλόγιό, τα μαθηματικά σύμβολα αλλά και τις μορφές μαθηματικής επιχειρηματολογίας.

Τέλος, σε μελλοντική έρευνα θα ήταν χρήσιμο να μελετηθεί η επίδραση των αντιλήψεων των μαθητών για την έννοια του συνόλου στην κατανόηση και χρήση άλλων μαθηματικών εννοιών, κάτι που ξεφεύγει από τους σκοπούς της δικής μας έρευνας.

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Καψάλης, Α. & Λεμονίδης, Χ. (1999). Σύγχρονες τάσεις της διδακτικής τωνμαθηματικών. *ΜΑΚΕΔΝΟΝ*, Περιοδική επιστημονική έκδοση της Παιδαγωγικής Σχολής Φλώρινας του Α.Π.Θ. Τεύχος 6, σς 95-115

Μοσχοβάκης, Ι. (1993). *Σημειώσεις στη συνολοθεωρία*. Εκδόσεις Νεφέλη, Αθήνα.

Μπαμπινιώτης, Γ. Δ. (2002). *Λεξικό της νέας ελληνικής γλώσσας με σχόλια για τη σωστή χρήση των λέξεων: ερμηνευτικό, ετυμολογικό, ορθογραφικό, συνωνύμων, αντιθέτων, κυρίων ονομάτων, επιστημονικών όρων, ακρωνυμιών*. Κέντρο Λεξικολογίας.

Ίδρυμα Μανόλη Τριανταφυλλίδη. (1998). *Λεξικό της κοινής νεοελληνικής*. Θεσσαλονίκη: Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, 1534.

Abedi, J., & Lord, C. (2001). The language factor in mathematics tests. *Applied Measurement in Education, 14*(3), 219–234. https://doi.org/10.1207/S15324818AME1403_2

Adler, J., & Ronda, E. (2015). A framework for describing mathematics discourse in instruction and interpreting differences in teaching. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 19*(3),237-254. https://doi.org/mmdp

An, S., & Tillman, D. (2014). Elementary teachers' design of arts based teaching: Investigating the possibility of developing mathematics-music integrated curriculum. *Journal of Curriculum Theorizing, 30*(2).

Bagni, G. T. (2006). Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory. *Educational Studies in Mathematics, 62*, 259-280. https://doi.org/cv2dng

Barwell, R. (2012). The academic and the everyday in mathematicians' talk: The case of the hyper-bagel. *Language and Education, 27*(3), 207–222. https://doi.org/jwwh

Barwell, R. (2013). Formal and informal language in mathematics classroom interaction: A dialogic perspective. In A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proc. 37th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 73-80). PME.

Barwell, R. (2016). Formal and informal mathematical discourses: Bakhtin and Vygotsky, dialogue and dialectic. *Educational Studies in Mathematics, 92*(3), 331–345. https://doi.org/gmhtw2

Boaler, J. (2002). Exploring the nature of mathematical activity: Using theory, research andworking hypotheses' to broaden conceptions of mathematics knowing. *Educational Studies in Mathematics, 51,* 3-21. https://doi.org/c3jqpv

Choutou, C., & Potari, D. (2024). Investigating boundaries and boundary crossing between mathematics and visual art teaching in a collaborative setting. *The Journal of Mathematical Behavior, 73*, 101138.

Cirillo, M., Bruna, R. K., & Herbel-Eisenmann, B. (2010). Acquisition of mathematical language: Suggestions and activities for English language learners. *Multicultural Perspectives, 12*(1), 34–41. https://doi.org/bmhgfj

Davis, R. B. (2003). Changing school mathematics. In G. M. A. Stanic & J. Kilpatrick (Eds.), *A history of school mathematics* (pp. 623–646). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Dreyfus, T., & Tsamir, P. (2004). Ben's consolidation of knowledge structures about infinite sets. *The Journal of Mathematical Behavior, 23*(3), 271-300. https://doi.org/bf5hwj

Elkind, D. (1964). Piaget's semi-clinical interview and the study of spontaneous religion. *Journal for the Scientific Study of Religion, 4*(1), 40–47. https://doi.org/chczdh

Eves, H. (1983). *Great moments in mathematics (After 1650)*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for research in mathematics education*, 3-17. https://doi.org/10.2307/748969

Fischbein, E., & Baltsan, M. (1998). The mathematical concept of set and the 'collection' model. *Educational studies in mathematics, 37*(1), 1-22. https://doi.org/cjx83p

Gilbert JK., Watts DM. (1983). 'Concepts, misconception and alternative conceptions: changing perspectives in science education'. *Studies in Science Education*, 10:61-98 http://dx.doi.org/10.1080/03057268308559905

Gough, J. (2007). Conceptual complexity and apparent contradictions in mathematics language. *The Australian Mathematics Teacher, 63*(2), 8–16.

Halliday, M. A. K. (1993). Towards a language-based theory of learning. *Linguistics and education, 5*(2), 93-116.

Halliday, M. A. K. (1978). Language as social semiotic: *The social interpretation of language and meaning*. London: University Park Press.

Halliday, M.A.K. (1974). Some Aspects of Sociolinguistics, Interactions between Linguistics and Mathematical Education Symposium, UNESCO, Paris.

Hsieh, H. F., & Shannon, S. E. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative health research, 15*(9), 1277-1288. https://doi.org/10.1177/1049732305276687

İNCİKABİ, L., Abdulkadir, T. U. N. A., & BİBER, A. Ç. (2012). An analysis of elementary school teacher candidates' conceptual knowledge in sets. *Journal of Education Faculty, 14*(2), 523-538. https://doi.org/10.19030/jier.v9i3.7884

Kapadia, R. (1976). Set-theory and logic in school. *Educational Studies in Mathematics*, 6(4), 409-413. https://doi.org/10.1007/BF00411089

Kazima, M., Jakobsen, A., Mwadzaangati, L., & Gobede, F. (2023). Teaching the concept of zero in a Malawi primary school: illuminating the language and resource challenge. *ZDM-Mathematics Education, 55*(3), 627-639. https://doi.org/10.1007/s11858-023-01473-8

Kilpatrick, J. (2012). The new math as an international phenomenon. *ZDM*, *44*(4), 563-571. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0393-2

Kline, M. (1973). *Why Johnny can't add: The failure of new math*. New York: St. Martin's.

Lane, C., O'Meara, N., & Walsh, R. (2019). Pre-service mathematics teachers' use of the mathematics register. *Issues in Educational Research, 29*(3), 790-806.

Linchevski, L., & Vinner, S. (1988). The naive concept of sets in elementary teachers. *In Proceedings of the 12th international conference, psychology of mathematics education* (Vol. 11, pp. 471-478).

Morgan, C. (2006). What does social semiotics have to offer mathematics education research?. *Educational studies in mathematics*, 61, 219-245. https://doi.org/bc3wwr

Moru, E. K., & Qhobela, M. (2013). Secondary school teachers' pedagogical content knowledge of some common student errors and misconceptions in sets. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 17*(3), 220-230. https://doi.org/mmdv

Moschkovich, J. (2003). What Counts as Mathematical Discourse? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.) *Proceedings of the 27th Annual Meeting of the international Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, (vol. 3), pp. 325-331. Honolulu: University of Hawai'i.

Na, G., & Lee, E. (2006). MATHEMAMATICALLY GIFTED STUDENTS' CONCEPTION OF INFINITY. *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 412.

Narli, S., & Baser, N. E. (2008). Cantorian Set Theory and Teaching Prospective Teachers, *International Journal of Environmental & Science Education 3*(2), 99 – 107

Planas, N., Adler, J., & Mwadzaangati, L. (2023). What is mathematics teaching talk for? A response based on three sites of practice in mathematics education. *ZDM–Mathematics Education, 55*(3), 521-534. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01452-5

Planas, N., Alfonso, J. M., & Rave-Agudelo, J. G. (2022). Initiating a project for language-and-learner responsiveness in mathematics content teaching. In Fernández, C., Llinares, S., Gutiérrez, Á. & Planas, N. (Eds.), *Proc. 45th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 315-322). PME.

Potari, D., Psycharis, G., Sakonidis, C., & Zachariades, T. (2019). Collaborative design of a reform-oriented mathematics curriculum: Contradictions and boundaries across teaching, research, and policy. *Educational Studies in Mathematics, 102*, 417-434. https://doi.org/hjcc

Prediger, S. (2022, February). Enhancing language for developing conceptual understanding: A research journey connecting different research approaches. In Hodgen, J., Geraniou, E., Bolondi,G. & Ferretti, F. (Eds.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)*. Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

Prediger, S. (2019). Investigating and promoting teachers' expertise for language-responsive mathematics teaching. *Mathematics Education Research Journal, 31*(4), 367-392. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00258-1

Prediger, S., Wilhelm, N., Büchter, A., Gürsoy, E., & Benholz, C. (2018). Language proficiency and mathematics achievement: Empirical study of language-induced obstacles in a high stakes test, the central exam ZP10. *Journal für Mathematik-Didaktik, 39*(Suppl 1), 1-26. https://doi.org/10.1007/s13138-018-0126-3

Riccomini, P. J., Smith, G. W., Hughes, E. M., & Fries, K. M. (2015). The language of mathematics: The importance of teaching and learning mathematical vocabulary. *Reading & Writing Quarterly, 31*(3), 235-252. https://doi.org/10.1080/10573569.2015.1030995

Sabra, H., & Alshwaikh, J. (2023). The use of Arabic language by mathematics teachers as a resource to support teaching. *ZDM–Mathematics Education, 55*(3), 551-563. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01462-3

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge university press. https://doi.org/drq9fd

Sharif-Rasslan, A., Saleh, F., & Abboud, E. (2014). Connectivity between Various Representations of Sets and their Relations among Teachers-Training Students. *Journal of Mathematical Sciences, 1*, 6-13.

Straehler-Pohl, H., Fernández, S., Gellert, U., & Figueiras, L. (2014). School mathematics registers in a context of low academic expectations. *Educational Studies in Mathematics, 85*, 175-199. https://doi.org/10.1007/S10649-013-9503-5

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. Mathematics Education Research Journal, 20(2), 5-24. https://doi.org/fg88t3

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics, 12*(2), 151-169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Tao, T. (2016). *Analysis I*. Hindustan Book Agency. https://doi.org/mmgm

Tirosh, D. (1999). Finite and infinite sets: Definitions and intuitions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 30*(3), 341-349. https://doi.org/dfc4br

Tirosh, D. (2002). The role of students' intuitions of infinity in teaching the cantorian theory. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 199-214). Springer, Dordrecht.

Tirosh, D., & Tsamir, P. (1996). The role of representations in students' intuitive thinking about infinity. *International journal of mathematical education in science and technology, 27*(1), 33-40. https://doi.org/10.1080/0020739960270105

Tirosh, D., & Tsamir, P. (2006, July). Conceptual Change in mathematics learning: The case of infinite sets. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME30)* (Vol. 1, pp. 159-161). Prague, Czech Republic: PME.

Tirosh, D., Tsamir, P., Levenson, E., & Tabach, M. (2011). From preschool teachers' professional development to children's knowledge: Comparing sets. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14,* 113-131. https://doi.org/10.1007/s10857-011-9172-1

Thompson, D. R., & Rubenstein, R. N. (2000). Learning mathematics vocabulary: Potential pitfalls and instructional strategies. *The Mathematics Teacher, 93*(7), 568–574. https://doi.org/jwwj

Tsamir, P. (1999). The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: Teaching prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *38*(1), 209-234. https://doi.org/10.1023/A:1003514208428

Tsamir, P. (2001). When The Same is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational studies in mathematics, 48*(2), 289-307. https://doi.org/10.1023/A:1016034917992

Tsamir, P., & Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets—a process of abstraction: The case of Ben. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(1), 1-23. https://doi.org/fr8kr6

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1992). Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity. In Geeslin, w. & Graham, K. (Eds.), *Proceedings of the XVI PME (PME16),* 90-97.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (2006, July). PME 1 to 30–summing up and looking ahead: A personal perspective on infinite sets. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.), *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME30)* (Vol. 1, pp. 49-63). Prague, Czech Republic: PME.

Tytler, R., Williams, G., Hobbs, L., & Anderson, J. (2019). Challenges and opportunities for a STEM interdisciplinary agenda. *Interdisciplinary mathematics education: The state of the art and beyond*, 51-81. https://doi.org/ghzp9x

Ufer, S., & Bochnik, K. (2020). The Role of General and Subject-specific Language Skills when Learning Mathematics in Elementary School. *Journal für Mathematik-Didaktik, 41*(1), 81-117. https://doi.org/10.1007/s13138-020-00160-5

Van der Walt, M. (2009). Studieoriëntasie en basiese woordeskat in wiskunde in die laerskool Study orientation and knowledge of basic vocabulary in Mathematics in the primary school. *Suid-Afrikaanse Tydskrif vir Natuurwetenskap en Tegnologie*, *28*(4), 378-392

Vilenkin, N. Y. (2013). *In search of infinity*. Springer Science & Business Media.

von Renesse, C., & Ecke, V. (2016). Discovering the art of mathematics: Using string art to investigate calculus. PRIMUS, 26(4), 283-296. https://doi.org/jssd

Vosniadou, S. (Ed.). (2008). *International handbook of research on conceptual change (Vol. 259). New York*: Routledge.

7. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

7.1. Το ερωτηματολόγιο

1. Πως αντιλαμβάνεστε την έννοια «σύνολο» στα Μαθηματικά;

   ……………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………

2. Πιστεύετε ότι οι παρακάτω ομάδες αποτελούν ένα σύνολο; Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:

α)	Οι μαθητές του σχολείου που είναι άνω των 14 ετών.	ΝΑΙ	ΟΧΙ
β)	Τα ιστορικά βιβλία μιας βιβλιοθήκης.	ΝΑΙ	ΟΧΙ
γ)	Οι ψηλοί μαθητές μίας τάξης.	ΝΑΙ	ΟΧΙ
δ)	2, 4, 6, 8	ΝΑΙ	ΟΧΙ
ε)	α, β, γ, δ	ΝΑΙ	ΟΧΙ
στ)	2, 4, α, β	ΝΑΙ	ΟΧΙ

3. Πιστεύετε ότι τα στοιχεία ενός συνόλου θα πρέπει να έχουν κάποια κοινή ιδιότητα; ΝΑΙ ΟΧΙ
4. Κυκλώστε όποιες από τις παρακάτω απαντήσεις νομίζετε ότι είναι σωστές. Το σύνολο που έχει για στοιχεία του τα γράμματα της λέξης «ΘΑΛΑΣΣΑ» είναι το:
   α) {4}
   β) {7}
   γ) {Θ,Α,Λ,Σ}
   δ) {Θ,Α,Α,Α,Λ,Σ,Σ}
5. Μπορεί καθεμιά από τις παρακάτω συλλογές των ερωτημάτων (α) και (β) να αποτελέσει σύνολο; Επιλέξτε τη σωστή απάντηση:
   α) Οι φυσικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 8 και μικρότεροι από το 10.
      i. Ναι, το {9}.
      ii. Όχι, ένα σύνολο δεν μπορεί να έχει μόνο ένα στοιχείο.
   β) Οι φυσικοί αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι από το 8 και μικρότεροι από το 9.
      i. Ναι, το { }.
      ii. Όχι, ένα σύνολο δεν μπορεί να μην περιέχει κανένα στοιχείο.
6. Ορίζουν οι παρακάτω συλλογές στοιχείων ένα σύνολο; Αν ναι, να γράψετε πόσα στοιχεία θα έχει το κάθε σύνολο, αλλιώς να γράψετε «όχι» και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

α) Η συλλογή 2 , 4 , 6 , 8 , 10, . . .

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

β) Όλοι οι φυσικοί αριθμοί που περιέχουν το ψηφίο 8.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

7. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

α) $\{1, 2, 3, 4\} = \{4, 3, 2, 1\}$	Σ	Λ
β) $\{1, 2, 3, 4\} = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$	Σ	Λ
γ) $\{1, 2, 3, 4\} = \{1, 2, 7\}$	Σ	Λ

8. Αν $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5,6\}$ και $\Gamma = \{4,5,6\}$ Να γράψετε:

α) Το σύνολο Δ που έχει για στοιχεία του όλα τα στοιχεία του συνόλου A και όλα τα στοιχεία του συνόλου B.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

β) Το σύνολο E που έχει για στοιχεία του τα κοινά στοιχεία του συνόλου A και του συνόλου Γ.

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

9. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

α)	Το σύνολο $\{1\}$ ανήκει στο σύνολο $\{1,2,3,4,5\}$.	Σ	Λ
β)	Το σύνολο $\{1\}$ είναι υποσύνολο του συνόλου $\{1,2,3,4,5\}$.	Σ	Λ
γ)	Το σύνολο $\{4\}$ ανήκει στο σύνολο $\{1,2,3,\{4\},5\}$.	Σ	Λ
δ)	Το σύνολο $\{4\}$ είναι υποσύνολο του συνόλου $\{1,2,3,\{4\},5\}$.	Σ	Λ
ε)	$\{\{1,2\},\{3,4,5\}\} = \{1,2,3,4,5\}$	Σ	Λ
στ)	$\varnothing = \{\varnothing\}$	Σ	Λ
ζ)	$\varnothing = \{\}$	Σ	Λ
η)	$\varnothing = \{0\}$	Σ	Λ
θ)	$\varnothing = 0$	Σ	Λ

10. Στις παρακάτω περιπτώσεις, να συγκρίνετε τα σύνολα Α και Β ως προς το πλήθος των στοιχείων τους:

α) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$.

i. Το πλήθος των στοιχείων του A είναι μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του B.

ii. Το πλήθος των στοιχείων του A είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων του B.

iii. Το A και το B έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

iv. Το A και το B δεν μπορούν να συγκριθούν ως προς το πλήθος των στοιχείων τους.

β) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$, $B = \{1, 4, 9, 16, 25, ...\}$.

i. Το πλήθος των στοιχείων του A είναι μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του B.

ii. Το πλήθος των στοιχείων του A είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων του B.

iii. Το A και το B έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

iv. Το A και το B δεν μπορούν να συγκριθούν ως προς το πλήθος των στοιχείων τους.

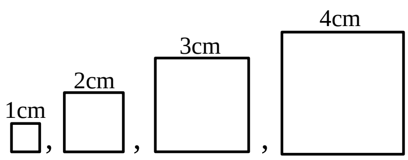
γ) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$, $B = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, ...\}$.

i. Το πλήθος των στοιχείων του A είναι μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του B.

ii. Το πλήθος των στοιχείων του A είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων του B.

iii. Το A και το B έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

iv. Το A και το B δεν μπορούν να συγκριθούν ως προς το πλήθος των στοιχείων τους.

δ) $A = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, B = { 

, ...}.

i. Το πλήθος των στοιχείων του A είναι μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του B.

ii. Το πλήθος των στοιχείων του A είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων του B.

iii. Το A και το B έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων.

iv. Το A και το B δεν μπορούν να συγκριθούν ως προς το πλήθος των στοιχείων τους.

11. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ):

α) Το πλήθος των στοιχείων ενός απειροσυνόλου είναι μεγαλύτερο από το πλήθος των στοιχείων κάθε υποσυνόλου του. Σ Λ

β) Όλα τα απειροσύνολα είναι ίσα ως προς το πλήθος των στοιχείων τους. Σ Λ

γ) Τα απειροσύνολα δεν είναι συγκρίσιμα ως προς το πλήθος των στοιχείων τους. Σ Λ

7.2. Τα υποθετικά σενάρια

7.2.1. Σενάριο 1ο

Δημοτικό:

Η δασκάλα ρώτησε τον Γιώργο αν τα μολύβια του, οι γόμες του, οι ξύστρες του, τα βιβλία του, τα τετράδια του και το κολατσιό του αποτελούν ένα σύνολο αντικειμένων. Ακολούθησε η παρακάτω συζήτηση στην τάξη:

- Γιώργος: Ναι μπορούν. Έχω 3 μολύβια, 1 γόμα, 1 ξύστρα, 4 βιβλία, 4 τετράδια και 1 τυρόπιτα. Άρα το σύνολο είναι 14 αντικείμενα.
- Δήμητρα: Η δασκάλα δεν ρώτησε πόσα είναι αλλά αν όλα αυτά τα αντικείμενα αποτελούν ένα σύνολο. Η σωστή απάντηση είναι ότι αυτά δεν αποτελούν ένα σύνολο αντικειμένων γιατί το κολατσιό είναι φαΐ ενώ τα άλλα είναι πράγματα που χρησιμοποιούμε στο μάθημα. Είναι μεταξύ τους ανόμοια πράγματα.
- Γιώργος: Στο βιβλίο, στο 1ο τεύχος, η δραστηριότητα στη σελίδα 40, ρωτάει ποιο είναι το σύνολο των μικρών κύβων και η απάντηση είναι 512, δηλαδή το πλήθος των μικρών κύβων.

Γυμνάσιο:

Η καθηγήτρια των Μαθηματικών ρώτησε στην τάξη αν ο αριθμός 1, ο αριθμός 2, το γράμμα α και το γράμμα β μπορούν να είναι τα στοιχεία ενός συνόλου. Ακολούθησε η παρακάτω συζήτηση:

- Σωτήρης: Ναι μπορούν. Είναι 2 αριθμοί και 2 μεταβλητές άρα σύνολο 4 αντικείμενα.
- Θέτις: Η καθηγήτρια δεν ρώτησε πόσα είναι αλλά αν αυτά τα αντικείμενα μπορούν να αποτελούν τα στοιχεία ενός συνόλου.
- Μίνα: Σωστά, για παράδειγμα στη Β΄ Γυμνασίου λέγαμε ότι οι αριθμοί 0, 1, 2, 3 κλπ. είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών.
- Θέτις: Ναι, άρα η σωστή απάντηση είναι ότι αυτά δεν αποτελούν ένα σύνολο γιατί οι αριθμοί και τα γράμματα είναι ανόμοια πράγματα.
- Μίνα: Όχι, θα μπορούσαν να αποτελούν το σύνολο των πλευρών ενός τετράπλευρου. Τις δύο τις ξέρουμε και τις άλλες δύο όχι.

Λύκειο:

Η καθηγήτρια των Μαθηματικών ρώτησε στην τάξη αν ο αριθμός 1, ο αριθμός 2, το γράμμα α και το γράμμα β μπορούν να είναι τα στοιχεία ενός συνόλου. Ακολούθησε η παρακάτω συζήτηση:

- Σωτήρης: Ναι μπορούν. Είναι 2 αριθμοί και 2 μεταβλητές άρα σύνολο 4 αντικείμενα.
- Θέτις: Η καθηγήτρια δεν ρώτησε πόσα είναι αλλά αν αυτά τα αντικείμενα μπορούν να αποτελούν τα στοιχεία ενός συνόλου. Η σωστή απάντηση είναι πως αποτελούν το σύνολο {1, 2, α, β}.
- Μίνα: Δεν συμφωνώ, το σύνολο {1, 2} είναι ένα σύνολο αριθμών και το σύνολο {α, β} ένα σύνολο γραμμάτων. Το σύνολο {1, 2, α, β} δεν έχει νόημα γιατί περιέχει ανόμοια πράγματα.

7.2.2. Σενάριο 2^o

Η δασκάλα ζήτησε από τους μαθητές της να βρουν το σύνολο των γραμμάτων της λέξης *ΘΑΛΑΣΣΑ* και ακολούθησε στην τάξη η παρακάτω συζήτηση:

- Ανδρέας: Το σύνολο των γραμμάτων της λέξης *ΘΑΛΑΣΣΑ* είναι 7.
- Εύη: Η καθηγήτρια δεν ρώτησε πόσα είναι τα γράμματα της λέξης *ΘΑΛΑΣΣΑ*. Η σωστή απάντηση είναι {Θ, Α, Γ, Σ}.
- Γιώργος: Δεν μπορεί να είναι το {Θ, Α, Γ, Σ} γιατί με 4 γράμματα δεν μπορείς να φτιάξεις τη λέξη *θάλασσα*. Η σωστή απάντηση είναι {Θ, Α, Α, Α, Λ, Σ, Σ} δηλαδή όλα τα γράμματα της λέξης.

7.2.3. Σενάριο 3^o

Ο δάσκαλος ζήτησε από τους μαθητές να βρουν το σύνολο των φυσικών αριθμών που είναι μεγαλύτεροι από το 8 και μικρότεροι από το 9. Ακολούθησε στην τάξη η παρακάτω συζήτηση:

- Γιώργος: Δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί ανάμεσα στο 8 και το 9, μόνο δεκαδικοί και κλάσματα.
- Αλεξία: Σωστά άρα δεν υπάρχει τέτοιο σύνολο.
- Γιώργος: Υπάρχει, είναι ένα κενό σύνολο.
- Αλεξία: Ένα σύνολο δεν μπορεί να μην περιέχει κανέναν αριθμό. Αφού δεν υπάρχουν φυσικοί αριθμοί ανάμεσα στο 8 και το 9 δεν υπάρχει και το σύνολο.

7.2.4. Σενάριο 4^o

Η δασκάλα ρώτησε τους μαθητές της αν νομίζουν ότι τα σύνολα {1, 2, 3, 4,} και {α, β, γ, δ} είναι ίσα ή όχι. Ακολούθησε στην τάξη η παρακάτω συζήτηση:

- Χαρά: Εγώ νομίζω ότι τα δύο σύνολα είναι ίσα αφού έχουν από τέσσερα στοιχεία το καθένα.

– Χρήστος: Δεν νομίζω ότι μπορείς να συγκρίνεις ανόμοια πράγματα. Το ένα σύνολο έχει αριθμούς και το άλλο γράμματα. Πώς μπορούμε να πούμε αν είναι ίσα ή όχι;

7.2.5. Σενάριο 5^{o}

Γυμνάσιο:

Μια καθηγήτρια Μαθηματικών έθεσε στους μαθητές της το εξής ερώτημα. Είναι σωστό να πω ότι το σύνολο {1, 2} ανήκει στο σύνολο {1, 2, 3, 4, 5}; Ακολούθησε στην τάξη η παρακάτω συζήτηση:

– Γιώργος: Ναι, φυσικά! Αφού και το 1 και το 2 ανήκουν στο σύνολο {1, 2, 3, 4, 5}.
– Ευρυδίκη: Ναι αλλά δεν λέμε ότι το {1, 2} είναι υποσύνολο του συνόλου {1, 2, 3, 4, 5};
– Γιώργος: Το ίδιο είναι, αφού το {1, 2} είναι υποσύνολο του {1, 2, 3, 4, 5} τότε το {1, 2} ανήκει στο {1, 2, 3, 4, 5}.
– Ευρυδίκη: Διαφωνώ, το {1, 2, 3, 4, 5} είναι ένα σύνολο αριθμών και το {1, 2} δεν είναι αριθμός αλλά σύνολο. Το {1, 2} ανήκει στο {{1, 2}, 3, 4, 5} αλλά όχι στο {1, 2, 3, 4, 5}.

Λύκειο:

Μια καθηγήτρια Μαθηματικών έθεσε στους μαθητές της το εξής ερώτημα. Είναι σωστό να γράψω ότι $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$; Ακολούθησε στην τάξη η παρακάτω συζήτηση:

– Γιώργος: Ναι, φυσικά! Αφού και το $1 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και το $2 \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ άρα και το $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
– Ευρυδίκη: Ναι αλλά δεν λέμε ότι $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
– Γιώργος: Το ίδιο είναι, αφού το $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ τότε το $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
– Ευρυδίκη: Διαφωνώ, το {1, 2, 3, 4, 5} είναι ένα σύνολο αριθμών και το {1, 2} δεν είναι αριθμός αλλά σύνολο. Θα ήταν σωστό αν γράφαμε ότι $\{1, 2\} \in \{\{1, 2\}, 3, 4, 5\}$ αλλά δεν θα ήταν σωστό να γράψουμε ότι $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

7.2.6. Σενάριο 6^{o}

Μια καθηγήτρια Μαθηματικών ζήτησε από τους μαθητές της να συγκρίνουν τα σύνολα A = {1, 2, 3, 4, 5, ...} και B = {1, 4, 9, 16, 25, ...} ως προς το πλήθος των στοιχείων τους. Ακολούθησε στην τάξη η παρακάτω συζήτηση:

– Γιάννης: Επειδή το B είναι υποσύνολο του A, το πλήθος τον στοιχείων του B είναι μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του A.

- Χρυσούλα: Το σύνολο Β περιέχει τα στοιχεία του συνόλου Α υψωμένα στο τετράγωνο έτσι το 1 αντιστοιχίζεται στο 1^2, το 2 στο 2^2 κ.ο.κ. Μήπως λοιπόν τα δύο σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων;
- Σωτήρης: Εγώ νομίζω πώς έτσι κι αλλιώς τα δύο σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων δηλαδή άπειρα και στις δύο περιπτώσεις.
- Έλλη: Αφού τα στοιχεία τους είναι άπειρα δεν μπορούμε να ξέρουμε το πλήθος του άρα δεν συγκρίνονται.