



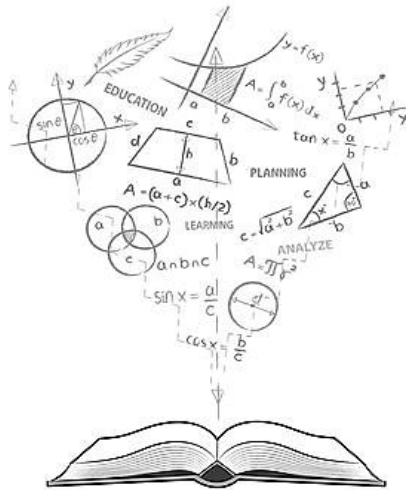
ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ:

«Διδακτική των Μαθηματικών και Τεχνολογίες Πληροφορίας και Επικοινωνίας στην
Εκπαίδευση: Διδακτική των Μαθηματικών στην Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση».

Διπλωματική Εργασία

**Ανάλυση Εγχειριδίων των Μαθηματικών - Μελέτη Περίπτωσης:
Σύγκριση Επιλεγμένων Ενοτήτων Εγχειριδίων
Ελλάδας και Σιγκαπούρης.**



Μεταπτυχιακή φοιτήτρια: Δρόσου Ελένη

Επιβλέπουσα καθηγήτρια: Κολέζα Ευγενία

A.M.: 7981170220012

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης

Αθήνα, 2024

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά την κα Κολέζα Ε., καθηγήτρια Διδακτικής των Μαθηματικών στο Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης του Πανεπιστημίου Πατρών, που δέχτηκε να αναλάβει την επίβλεψη την διπλωματικής μου εργασίας, καθώς και τους συνεπιβλέποντες καθηγητές, κα Σκουμπουρδή Χ. και κο Σκορδούλη Κ.. Οι συμβουλές, η καθοδήγηση, η κατανόηση και η υπομονή τους, κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας, ήταν πολύτιμες. Επιπλέον, νιώθω ευγνώμων για όλες τις γνώσεις και τις εμπειρίες που απέκτησα κατά τη φοίτησή μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών «Διδακτική των Μαθηματικών και Τεχνολογίες Πληροφορίας και Επικοινωνίας στην Εκπαίδευση», του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Γι' αυτό το λόγο, θέλω να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές, οι οποίοι με ενίσχυσαν με τη διδασκαλία τους, ώστε να εξελιχθώ ως εκπαιδευτικός. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια και τους φίλους μου για την στήριξη που μου παρείχαν τόσο καθ' όλη τη διάρκεια των σπουδών μου, όσο και κατά την εν λόγω προσπάθεια.

Abstract

In this study, a comparative analysis is conducted on the content of the 6th-grade Mathematics textbooks from Greece and Singapore, with the aim of identifying elements that distinguish their effectiveness as learning tools. In the main section of the study, the multidimensional analysis framework, proposed by Gracin (2018), is utilized to evaluate and compare tasks from selected units. Next, a comparison of the contents is made, regarding the quantity and organization of the material in both series of textbooks. Based on the results and the theoretical framework, the study examines the extent to which these textbooks provide wealth and equity of learning opportunities, as well as identifies the most significant differences between them. Ultimately, conclusions are drawn regarding the two Mathematics textbooks and recommendations are offered for future research on the effectiveness of Mathematics education in Singapore relative to the one in Greece.

Keywords: mathematics textbooks, Greece, Singapore, mathematical tasks, contents, comparative analysis.

Περίληψη

Στην παρούσα μελέτη πραγματοποιείται συγκριτική ανάλυση του περιεχομένου των σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών της 6ης Δημοτικού της Ελλάδας και της Σιγκαπούρης, με στόχο τον εντοπισμό στοιχείων που διαφοροποιούν την αποτελεσματικότητά τους ως μαθησιακά εργαλεία. Στο κύριο μέρος της εργασίας αξιοποιείται το πολυδιάστατο πλαίσιο ανάλυσης της Gracín (2018), για την αξιολόγηση και σύγκριση εργασιών από επιλεγμένες ενότητες. Ακολουθεί η σύγκριση των περιεχομένων, ως προς την έκταση και την οργάνωση της ύλης των δύο σειρών βιβλίων. Με βάση τα αποτελέσματα και το θεωρητικό πλαίσιο, εξετάζεται σε ποιο βαθμό τα συγκεκριμένα εγχειρίδια προσφέρουν πλούτο και ισοτιμία ευκαιριών μάθησης, καθώς και ποιες είναι οι σημαντικότερες διαφορές ανάμεσά τους. Τέλος, εξάγονται συμπεράσματα για τα δύο εγχειρίδια Μαθηματικών, ενώ προτείνονται κατευθύνσεις για μελλοντικές έρευνες σχετικά με την αποτελεσματικότητα της εκπαίδευσης Μαθηματικών της Σιγκαπούρης σε σχέση με αυτήν της Ελλάδας.

Λέξεις κλειδιά: σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών, Ελλάδα, Σιγκαπούρη, μαθηματικές εργασίες, περιεχόμενα, συγκριτική ανάλυση.

Ευρετήριο εικόνων

Εικόνα 1. Αποτελέσματα Διεθνούς Μαθηματικής Επίδοσης (μέση βαθμολογία κλίμακας), πηγή: http://tims2019.org/download , IEA TIMSS 2019.....	17
Εικόνα 2. Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών, Υπουργείο Παιδείας Σιγκαπούρης, 2021 – 2023, πηγή: https://www.moe.gov.sg/-/media/files/primary/2021-primary-mathematics-syllabus-p1-to-p6.pdf	19
Εικόνα 3. Αποτελέσματα του PISA 2018 - Επιδόσεις στα Μαθηματικά (επεξεργασμένος πίνακας επιλεγμένων επιπέδων), πηγή: https://www.oecd.org/pisa/PISA%202018%20Insights%20and%20Interpretations%20FINAL%20PDF.pdf , σελ.7.	21
Εικόνα 4. Παράδειγμα εφαρμογής του μοντέλου ικανοτήτων του εργαλείου ανάλυσης της Dubravka G. Gracin (2018) σε άσκηση από τα Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού, Τετράδιο Εργασιών, β' τεύχος, σελ. 33, 2009.....	27
Εικόνα 5. Παράδειγμα εφαρμογής της διάστασης δραστηριότητας (H) του εργαλείου ανάλυσης μαθηματικών εργασιών της Gracin (2018), σε άσκηση του « In Step Maths», Τετράδιο Εργασιών, τεύχος B2, σελ. 60, 2006.	30
Εικόνα 6. Στιγμιότυπο άσκησης, σελ. 35, Κεφάλαιο 51, τεύχος γ', Τετράδιο Εργασιών, Μαθηματικά Στ' Δημοτικού, 2009.....	34

Ευρετήριο γραφημάτων

Διάγραμμα 1. Ραβδόγραμμα ποσοστών (%) συσχέτισης της διάστασης περιεχομένου (I) με τις υπόλοιπες τέσσερις διαστάσεις (H, K, A, C) του πενταδιάστατου εργαλείου της Gracin (2018), ανά σχολικό εγχειρίδιο.	45
Διάγραμμα 2. Συνολικό ραβδόγραμμα αποτελεσμάτων της διάστασης δραστηριότητας (H) για τα εγχειρίδια μαθηματικών της Ελλάδας (Μαθηματικά Στ' Δημοτικού) και της Σιγκαπούρης (In Step Maths).....	47
Διάγραμμα 3. Συνολικό ραβδόγραμμα αποτελεσμάτων της διάστασης επιπέδων πολυπλοκότητας (K) για τα εγχειρίδια μαθηματικών της Ελλάδας (Μαθηματικά Στ' Δημοτικού) και της Σιγκαπούρης (In Step Maths).....	50

Διάγραμμα 4. Συνολικό ραβδόγραμμα αποτελεσμάτων της διάστασης τύπων απαντήσεων (A) για τα εγχειρίδια μαθηματικών της Ελλάδας (Μαθηματικά Στ' Δημοτικού) και της Σιγκαπούρης (In Step Maths).....	53
Διάγραμμα 5. Συνολικό ραβδόγραμμα αποτελεσμάτων της διάστασης χαρακτηριστικών περιεχομένου (C) για τα εγχειρίδια μαθηματικών της Ελλάδας (Μαθηματικά Στ' Δημοτικού) και της Σιγκαπούρης (In Step Maths).....	55
Διάγραμμα 6. Ραβδόγραμμα που παρουσιάζει τους μέσους όρους: α. κεφαλαίων ανά ενότητα και β. σελίδων ανακεφαλαίωσης ανά κεφάλαιο για τα εγχειρίδια «In Step Maths» (Σιγκαπούρη) και «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» (Ελλάδα).	59
Διάγραμμα 7. Ραβδόγραμμα που παρουσιάζει τους μέσους όρους σελίδων των βιβλίων (B.M.) και των τετραδίων εργασιών (T.E.) των εγχειριδίων «In Step Maths» (Σιγκαπούρη) και «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» (Ελλάδα), ανά κεφάλαιο.	60

Ευρετήριο πινάκων

Πίνακας 1. Παραδείγματα εργασιών για τις τέσσερις κατηγορίες της διάστασης της δραστηριότητας (H) του εργαλείου ανάλυσης μαθηματικών εργασιών της Gracin (2018).....	28
Πίνακας 2. Παραδείγματα ασκήσεων για τις τρεις κατηγορίες της διάστασης των επιπέδων πολυπλοκότητας (K) του εργαλείου ανάλυσης μαθηματικών εργασιών της Gracin (2018).	31
Πίνακας 3. Συνολικό επεξηγηματικό σχήμα διαστάσεων και κατηγοριών του πενταδιάστατου εργαλείου ανάλυσης εργασιών σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών της Gracin, (2018).	33
Πίνακας 4. Στοιχεία έκδοσης όλων των τευχών των σχολικών εγχειριδίων «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» και «In Step Maths», που μελετήθηκαν στην παρούσα εργασία.	36
Πίνακας 5. Πίνακας πλήθους ασκήσεων των εγχειριδίων που μελετήθηκαν, ανά περιεχόμενο (I) και ανά κεφάλαιο.	44

Πίνακας 6. Αναλυτικά αποτελέσματα της διάστασης δραστηριότητας (H) για τα εγχειρίδια μαθηματικών της Ελλάδας (Μαθηματικά Στ' Δημοτικού) και της Σιγκαπούρης (In Step Maths), ανά περιεχόμενο (I) και κεφάλαιο.....	48
Πίνακας 7. Πίνακας αποτελεσμάτων της διάστασης επιπέδων πολυπλοκότητας (K) για τα εγχειρίδια μαθηματικών της Ελλάδας (Μαθηματικά Στ' Δημοτικού) και της Σιγκαπούρης (In Step Maths), ανά περιεχόμενο (I) και κεφάλαιο.....	51
Πίνακας 8. Πίνακας αποτελεσμάτων της διάστασης τύπων απαντήσεων (A) για τα εγχειρίδια μαθηματικών της Ελλάδας (Μαθηματικά Στ' Δημοτικού) και της Σιγκαπούρης (In Step Maths), ανά περιεχόμενο (I) και κεφάλαιο.....	53
Πίνακας 9. Πίνακας αποτελεσμάτων της διάστασης χαρακτηριστικών περιεχομένου (C) για τα εγχειρίδια μαθηματικών της Ελλάδας (Μαθηματικά Στ' Δημοτικού) και της Σιγκαπούρης (In Step Maths), ανά περιεχόμενο (I) και κεφάλαιο.....	56
Πίνακας 10. Συνοπτική παρουσίαση πληροφοριών έκτασης και οργάνωσης των περιεχομένων των τευχών της σχολικής σειράς εγχειριδίων μαθηματικών «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού».....	57
Πίνακας 11 Συνοπτική παρουσίαση πληροφοριών έκτασης και οργάνωσης των περιεχομένων των τευχών της σχολικής σειράς εγχειριδίων μαθηματικών «In Step Maths».....	58

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	1
Abstract	2
Περίληψη	3
Ευρετήριο εικόνων	4
Ευρετήριο γραφημάτων.....	4
Ευρετήριο πινάκων.....	5
1. Εισαγωγή.....	8
1.1. Τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών	8
1.2. Η αξία της έρευνας των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών.....	9
1.3. Η αξιολόγηση των εργασιών των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών	11
1.4. Η εργασία της Dubravka Glasnovic Gracin	14
1.5. Μαθηματική εκπαίδευση στη Σιγκαπούρη και στην Ελλάδα.....	16
<i>Σιγκαπούρη.....</i>	<i>16</i>
<i>Ελλάδα.....</i>	<i>21</i>
1.6. Σκοπός και Ερευνητικά ερωτήματα.....	23
2. Μεθοδολογία	25
2.1. Πλαίσιο ανάλυσης.....	25
2.2. Οι 5 διαστάσεις του εργαλείου ανάλυσης της Dubravka G. Gracin	26
2.3. Συλλογή δεδομένων.....	35
2.4. Περιγραφή ανάλυσης.....	40
3. Αποτελέσματα	42
3.1. Περιεχόμενο.....	43
3.2. Δραστηριότητα	47
3.3. Επίπεδο πολυπλοκότητας.....	49
3.4. Τύπος απάντησης.....	52
3.5. Χαρακτηριστικά περιεχομένου	54
3.6. Ανάλυση περιεχομένων των σχολικών εγχειριδίων	56
3.7. Σύνοψη αποτελεσμάτων	61
4. Συμπεράσματα.....	65
5. Περιορισμοί.....	69
6. Επίλογος	71
Βιβλιογραφία.....	72

1. Εισαγωγή

1.1. Τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών

Οι ερευνητές της εκπαίδευσης των μαθηματικών ασχολούνται πρωτίστως με τα εργαλεία, τις μεθόδους και τις προσεγγίσεις που διευκολύνουν την πρακτική ή τη μελέτη της πρακτικής των μαθηματικών. Μάλιστα, η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση, γνωστή στην Ευρώπη ως *διδασκτική ή παιδαγωγική των μαθηματικών*, έχει εξελιχθεί σε ένα εκτεταμένο πεδίο μελέτης, με τις έννοιες, τις θεωρίες, τις μεθόδους, τους εθνικούς και διεθνείς οργανισμούς, τα συνέδρια και τη λογοτεχνία της. Ο Fan (2011) αντιλαμβάνεται τα σχολικά βιβλία ως μια ενδιάμεση μεταβλητή στο πλαίσιο της εκπαίδευσης και, κατά συνέπεια, όρισε την έρευνα των μαθηματικών εγχειριδίων ως πειθαρχημένη διερεύνηση ζητημάτων σχετικά με τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών και τις σχέσεις τους με άλλους παράγοντες της μαθηματικής εκπαίδευσης. Τα αποτελέσματα της έρευνας των σχολικών βιβλίων έχουν τη δυνατότητα να παρέχουν μια ευρύτερη και βαθύτερη εικόνα τόσο των απαιτήσεων του προγράμματος σπουδών όσο και των πρακτικών στην τάξη (Gracin, D., 2018).

Τα σχολικά εγχειρίδια εμφανίζονται στη διδασκαλία των μαθηματικών από τα αρχαία κιόλας χρόνια. Για τους Merzbach και Boyer (2011) τα «Στοιχεία του Ευκλείδη» (Αρχαία Ελλάδα, περίπου 300 π.Χ.) είναι από τα πιο επιτυχημένα εγχειρίδια μαθηματικών που γράφτηκαν ποτέ. Επίσης, γνωστά για την παλαιότητα τους είναι τα «Εννέα Κεφάλαια για τη Μαθηματική Τέχνη» (Αρχαία Κίνα, περίπου 200 – 100 π.Χ.), τα οποία, κατά τους Shen et al. (1999), χρησιμοποιούνταν ως εγχειρίδιο στην Κίνα, αλλά και στις γειτονικές χώρες, πιθανώς έως και το 1600 μ.Χ.. Έως και σήμερα τα εγχειρίδια μαθηματικών έχουν δεσπόζουσα θέση στη διδασκαλία των μαθηματικών, ενώ συνεχώς εξελίσσονται βάσει των εκάστοτε αναγκών και των κοινωνικών, πολιτικών, οικονομικών και επιστημονικών αλλαγών που προκύπτουν.

Πρώτα όμως, με βάση αυτές τις μεταβολές, αναδιαμορφώνονται τα εθνικά προγράμματα σπουδών με το σχεδιασμό εκπαιδευτικών στόχων και μεθόδων για την επίτευξη τους. Καθώς το πρόγραμμα σπουδών συντάσσεται σε αφηρημένη γλώσσα, τα σχολικά βιβλία αναλαμβάνουν να το αποδώσουν σε μια πιο κατανοητή γλώσσα και

εμπεριέχουν δραστηριότητες, με στόχο να χρησιμοποιηθούν σε πραγματικά περιβάλλοντα στην τάξη (Stein et al., 2007). Με άλλα λόγια, προορίζονται ως μεσολαβητές μεταξύ των προθέσεων των σχεδιαστών της πολιτικής του προγράμματος σπουδών και των δασκάλων που παρέχουν διδασκαλία στις τάξεις. Πιο συγκεκριμένα, οι Valverde, G. A., et al. (2002) ορίζουν τα σχολικά εγχειρίδια ως «τεχνουργήματα που μετουσιώνουν την πολιτική σε παιδαγωγική» και αποτελούν γέφυρα μεταξύ του επιδιωκόμενου και του εφαρμοσμένου προγράμματος σπουδών, αντικατοπτρίζοντας το δυνητικά εφαρμοσμένο πρόγραμμα σπουδών. Συνεπώς, το κύριο όργανο υλοποίησης του προγράμματος είναι τα σχολικά βιβλία (Charalambous et al., 2010, Tan et al., 2018).

1.2. Η αξία της έρευνας των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών

Η συστηματική έρευνα σχολικών βιβλίων χρονολογείται από τη δεκαετία του 1970, με έως τώρα συγκριτικές, ερμηνευτικές και κριτικές αναλύσεις τους, με σκοπό να εξεταστεί η λειτουργία των σχολικών βιβλίων από διαφορετικές και ενδιαφέρουσες οπτικές (Fuchs & Bock, 2018). Το πιο ευρύ και ζωντανό πεδίο έρευνας για την αποτελεσματικότητα των σχολικών βιβλίων βρίσκεται στον τομέα των μαθηματικών (Valverde et al., 2002), με τις περισσότερες μελέτες να πραγματοποιούνται στο επίπεδο της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης (Fan et al., 2013).

Φυσικά, ο ρόλος των σχολικών βιβλίων εξαρτάται από το βαθμό στον οποίο οι εκπαιδευτικοί βασίζονται σε αυτά. Είναι λοιπόν σημαντικό, ότι στα περισσότερα εκπαιδευτικά συστήματα παγκοσμίως, τα σχολικά βιβλία είναι η κύρια πηγή για τις καθημερινές διδακτικές πρακτικές των δασκάλων (Mullis, Martin, Foy, & Arora, 2012). Οι Stein et al., (2007) και οι van den Ham και Heinze (2018), υποστηρίζουν, με βάση τις έρευνές τους, ότι η ποιότητα ενός εγχειριδίου μαθηματικών επηρεάζει τις επιλογές του δασκάλου και τη μάθηση του μαθητή. Σχετικά με τη διδασκαλία των μαθηματικών με χρήση διαφορετικών εγχειριδίων, οι Fan και Kaeley (2000) βρήκαν ότι οι δάσκαλοι που χρησιμοποιούν διαφορετικούς τύπους σχολικών βιβλίων, εμφάνιζαν και διαφορετικά είδη στρατηγικών διδασκαλίας. Τα σχολικά βιβλία

φαίνεται να παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση της παιδαγωγικής γνώσης του περιεχομένου των δασκάλων, μεταδίδοντας μηνύματα και διαμορφώνοντας ένα ενθαρρυντικό ή αποθαρρυντικό σχολικό περιβάλλον για την εφαρμογή διαφορετικών στρατηγικών διδασκαλίας (Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z., 2013). Σημαντική είναι η διαπίστωση του Törnroos (2005) ότι το σχολικό βιβλίο είναι ένας από τους κύριους παράγοντες που επηρεάζουν την ευκαιρία των μαθητών να μάθουν.

Η αξιολόγηση των σχολικών βιβλίων είναι σκόπιμη, τόσο υπό το πρίσμα της εκπαιδευτικής ελευθερίας, όσο και της αποτελεσματικότητας και βελτίωσής τους. Το εγχειρίδιο καθορίζει σε μεγάλο βαθμό τον τρόπο παρουσίασης του περιεχομένου και τα σημεία έμφασης στην εκπαίδευση των μαθητών, δύο πτυχές που με τη σειρά τους καθορίζουν σε μεγάλο βαθμό την ευκαιρία μάθησης (Stevens, 1993). Έτσι, η δημιουργία σχολικών βιβλίων υψηλής ποιότητας είναι βασική για τη διασφάλιση ευκαιριών των μαθητών για τη μάθηση μαθηματικών και τη βελτίωση των επιδόσεών τους (Bellens et al., 2020 και Hadar, 2017). Δεδομένης της σημαντικής θέσης των σχολικών βιβλίων στα εκπαιδευτικά συστήματα, ιδιαίτερα στον τομέα της μάθησης μαθηματικών, οι έρευνες και οι πληροφορίες που προκύπτουν από αυτές, μπορούν όχι μόνο να οδηγήσουν στη βελτίωση των εγχειριδίων, αλλά και στην ενίσχυση της αποτελεσματικότητας της διδακτικής διαδικασίας γενικότερα. Η συλλογή, η καταγραφή και η μελέτη δεδομένων για τα σχολικά βιβλία αποτελεί σημαντική πηγή για τους εκδότες σχολικών βιβλίων σχετικά με τις δυνατότητες βελτίωσής τους (Bellens, et al., 2019).

Η αξιολόγηση των σχολικών εγχειριδίων μπορεί να πραγματοποιηθεί με βάση δύο κύριους άξονες (Κολέζα Ε., 2009, σελ.437). Ο πρώτος αφορά το περιεχόμενο των σχολικών βιβλίων και ο δεύτερος τον τρόπο αξιοποίησής τους στην εκπαιδευτική διαδικασία. Η παρούσα μελέτη εστιάζει στον άξονα του περιεχομένου.

Συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκε συγκριτική ανάλυση ποσοτικών και ποιοτικών χαρακτηριστικών που αφορούν το περιεχόμενο σχολικών βιβλίων Μαθηματικών, επιπέδου 6^{ης} Δημοτικού, της Σιγκαπούρης και της Ελλάδας. Αρχικά, εξετάστηκαν και συγκρίθηκαν τα χαρακτηριστικά εργασιών από επιλεγμένα κεφάλαια των δύο σειρών εγχειριδίων, ενώ στη συνέχεια μελετήθηκαν οι πίνακες περιεχομένων των τευχών τους, όσον αφορά την ποσότητα και την κατανομή της ύλης.

1.3. Η αξιολόγηση των εργασιών των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών

Τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι τα σχολικά βιβλία χρησιμοποιούνται σε μεγάλο βαθμό από τους μαθητές ως πηγή εργασιών, ιδιαίτερα ασκήσεων πρακτικής. Γενικά, οι εργασίες θεωρούνται ως το μέσον για την έναρξη της μαθηματικής δραστηριότητας (Mason J., Johnston-Wilder S., 2004) και δημιουργούν ευκαιρίες για μάθηση των μαθηματικών (Sullivan P., et. al., 2013). Κατά τους Hiebert και Grouws, (2007), τα είδη ασκήσεων, οι ερωτήσεις, οι αποδεκτές απαντήσεις και ο τύπος συζητήσεων που προωθείται, μπορούν να επηρεάσουν θετικά την ευκαιρία των μαθητών να μάθουν, εάν οδηγούν όχι μόνο στην αποτελεσματικότητα των δεξιοτήτων τους, αλλά και στην εννοιολογική κατανόηση. Συνεπώς, μέσω των μαθηματικών εργασιών, πρέπει να προκύπτει η ολοκληρωμένη γνωστική κατάκτηση ενός μαθηματικού αντικειμένου.

Μια μαθηματική εργασία (mathematical task) περιγράφει μια κατάσταση που περιέχει μαθηματικά και ωθεί τους μαθητές να εμπλακούν σε μαθηματική δραστηριότητα σε σχέση με αυτήν (Leuders, 2015). Μπορεί επίσης να οριστεί ως ένα μόνο πρόβλημα ή ένα σύνολο προβλημάτων που εστιάζει την προσοχή των μαθητών σε μια μαθηματική ιδέα (Stein et al., 1996). Με βάση αυτές τις προσεγγίσεις, στην παρούσα έρευνα με τον όρο «εργασίες» περιγράφονται τα μαθηματικά καθήκοντα που περιέχονται στα σχολικά εγχειρίδια και προκαλούν τη μαθηματική δραστηριοποίηση των μαθητών (ασκήσεις απλής εφαρμογής, προβλήματα, και λοιπές ερωτήσεις).

Ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα σε πρόσφατη έρευνα έδειξε ότι το κύριο χαρακτηριστικό της αποτελεσματικής διδασκαλίας είναι ότι δίνει στους μαθητές «ευκαιρία για μάθηση» (Bellens, et al., 2018). Αυτή εξαρτάται από τέσσερις πτυχές, κατά τον Stevens (1993), τις οποίες αποτελούν η κάλυψη περιεχομένου, η έκθεση στο περιεχόμενο, η έμφαση σε αυτό και η ποιότητα διδασκαλίας. Στην ανασκόπησή του σχετικά με τις μελέτες για τις ευκαιρίες μάθησης ο Floden (2002) παρουσιάζει αρκετές διαφορετικές ερμηνείες. Σε κάποιες από αυτές, η ευκαιρία για μάθηση γίνεται αντιληπτή ως ο χρόνος που αφιερώνεται σε ένα θέμα κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας, ενώ άλλες ερμηνείες αξιολογούν την ευκαιρία μάθησης με βάση την έκταση που καταλαμβάνει ένα θέμα σε γραπτό υλικό (Törnroos, J., 2005). Στην παρούσα έρευνα,

καθώς μελετάται το περιεχόμενο των εγχειριδίων μαθηματικών και όχι η αξιοποίησή του στην τάξη, οι ευκαιρίες μάθησης αξιολογήθηκαν με βάση την ερμηνεία που αφορά το γραπτό υλικό.

Ίσως ο πιο γνωστός ορισμός της ευκαιρίας για μάθηση δίνεται στην έκθεση του Husén (1967) για την Πρώτη Διεθνή Μαθηματική Μελέτη (FIMS). Για τον Husén, η *ευκαιρία για μάθηση* των μαθητών εξαρτάται από το εάν είχαν ή όχι την ευκαιρία να μελετήσουν ένα συγκεκριμένο θέμα ή να μάθουν πώς να λύσουν ένα συγκεκριμένο είδος προβλήματος. Έτσι, είναι χρήσιμο να εξετάζεται, εάν και κατά πόσο περιέχονται εργασίες που να αφορούν την κατάκτηση μιας μαθηματικής έννοιας ή δεξιότητας. Σε σχετική έρευνα, ο Στυλιανίδης (2009) ανέλυσε τις ευκαιρίες των μαθητών να ασχοληθούν με τη συλλογιστική και την απόδειξη σε μια σειρά εγχειριδίων μαθηματικών των ΗΠΑ. Από ένα σύνολο 4.855 εργασιών, μόνο περίπου το 40% πρόσφερε τέτοιες ευκαιρίες στους μαθητές. Το ποσοστό αυτό είναι αρκετά χαμηλό, λαμβάνοντας υπόψη ότι πολλοί ερευνητές και πλαίσια προγραμμάτων σπουδών συμφωνούν ότι η συλλογιστική και η απόδειξη πρέπει να διαδραματίζουν κεντρικό ρόλο σε όλες τις πτυχές του σχολικού προγράμματος μαθηματικών (Στυλιανίδης, 2009).

Ένας επιπλέον παράγοντας αξιολόγησης των εργασιών στα σχολικά βιβλία μαθηματικών είναι το στοιχείο του πλούτου και της ποικιλομορφίας. Σύμφωνα με την Gracin (2018) είναι σημαντικό τα σχολικά βιβλία μαθηματικών, καθώς και όσα άλλα εκπαιδευτικά υλικά χρησιμοποιούνται στις τάξεις, να παρέχουν πλούσιες και αξιόλογες εργασίες. Η ανάγκη για «πλούσιες» εργασίες, που προκαλούν πολλά διαφορετικά είδη δραστηριοτήτων (αναπαράσταση, ερμηνεία, υπολογισμό, κλπ), σημαίνει ότι τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών, για να μπορούν να ενισχύσουν την ποιότητα της διδασκαλίας, θα πρέπει να περιέχουν εργασίες που να εμπλέκουν τους μαθητές και να τους προκαλούν τη λογική, παρέχοντας έτσι ευκαιρίες για την ανάπτυξη της κατανόησης. Σημαντική είναι σε αυτό το σημείο η επισήμανση των Vincent και Stacey, ότι η ισορροπία θα πρέπει να είναι διαφορετική για μαθητές με υψηλές και χαμηλές επιδόσεις, αλλά όλοι οι μαθητές χρειάζεται να εκτίθενται σε όλο το φάσμα των τύπων εργασιών (2008).

Μια έρευνα που αφορά τύπους ασκήσεων και συγκεκριμένα προβλημάτων είναι αυτή των Zhu και Fan (2006), οι οποίοι ανέλυσαν τα χαρακτηριστικά

μαθηματικών προβλημάτων από επιλεγμένα σχολικά βιβλία της Κίνας και των Ηνωμένων Πολιτειών, στις τάξεις 7^η και 8^η. Διαπιστώθηκε ότι και στις δύο χώρες κυριαρχούσαν προβλήματα απλής εφαρμογής και κλειστού τύπου απαντήσεις, ενώ στην πλειονότητά τους δεν συνδέονταν με πραγματικές καταστάσεις. Συνεπάγεται, σύμφωνα με τα παραπάνω, ότι οι εργασίες αυτές δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερα πλούσιες και αξιόλογες προκλήσεις στους μαθητές. Ωστόσο, τα προβλήματα στα κινεζικά εγχειρίδια ήταν συνολικά πιο δύσκολα, όσον αφορά τα βήματα που εμπλέκονται στις λύσεις τους, ενώ τα σχολικά βιβλία των ΗΠΑ παρείχαν σημαντικά περισσότερα προβλήματα απλής εφαρμογής, ενεργοποιώντας έτσι φτωχότερο εύρος ειδών και επιπέδων μαθηματικής δραστηριότητας στους μαθητές.

Πιο ειδικά, σχετικά με το επίπεδο των εργασιών των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών, η έρευνα έχει δείξει ότι μαθητές που έμαθαν μαθηματικά με προβλήματα γνωστικών απαιτήσεων υψηλού επιπέδου είναι πιθανό να αναπτύξουν ανάλογες δεξιότητες σκέψης, όπως η ανάλυση, ο συλλογισμός, η αιτιολόγηση και η αξιολόγηση. Αντίθετα, οι μαθητές που έμαθαν μαθηματικά με χαμηλό επίπεδο γνωστικών απαιτήσεων, διαπιστώθηκε ότι είχαν την τάση να αναπτύσσουν δεξιότητες σκέψης βασικού επιπέδου, όπως η ανάκληση και ο υπολογισμός (Mullis et al., 2012 και Tan et al., 2018). Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν πρέπει να υπάρχουν καθόλου εργασίες χαμηλού επιπέδου στα σχολικά βιβλία. Αντιθέτως, οι Vincent και Stacey (2008) αναφέρουν πώς είναι σημαντικό να παρουσιάζεται στους μαθητές μια ισορροπημένη εμπειρία του προγράμματος σπουδών.

Ανακεφαλαιώνοντας, ένα σχολικό εγχειρίδιο μαθηματικών μπορεί να αξιολογηθεί από το εάν οι εργασίες του παρέχουν ευκαιρίες μάθησης, δηλαδή από το *εάν υπάρχουν και σε ποιο πλήθος υπάρχουν εργασίες που αφορούν μια μαθηματική γνώση* (Törnroos, 2005), από το *εάν είναι «πλούσιες»*, δηλαδή εμπεριέχουν πολλά διαφορετικά είδη δραστηριοτήτων (Gracin, 2018), καθώς και από το *εάν εκθέτουν τους μαθητές σε όλο το φάσμα επιπέδων δυσκολίας, παρέχοντας ισορροπημένη ποικιλία και συνεπώς ίσες ευκαιρίες κατανόησης* (Gracin, 2018 και Vincent & Stacey, 2008). Φυσικά όλα τα παραπάνω θα πρέπει να εκτιμηθούν με βάση τα κεφάλαια που μελετώνται, αλλά και τα προγράμματα σπουδών, ως προς την ιδανικότερη αναλογία των παραπάνω κριτηρίων αξιολόγησης για τις μαθηματικές εργασίες.

Εφόσον, η φύση των εργασιών του σχολικού βιβλίου μπορεί δυνητικά να επηρεάσει και να δομήσει τον τρόπο που σκέφτονται οι μαθητές και να χρησιμεύσει στον περιορισμό ή στη διεύρυνση των απόψεών τους για το θέμα με το οποίο ασχολούνται (Henningsen M, Stein M., 1997), τα δεδομένα και τα συμπεράσματα, που προκύπτουν από την πολύ - πρισματική έρευνα των ασκήσεων των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών είναι πολύτιμα. Γι' αυτό το λόγο, η παρούσα εργασία επιχειρεί να εξετάσει και να συγκρίνει τα σχολικά εγχειρίδια, της Ελλάδας και της Σιγκαπούρης. Στο πρώτο σκέλος, με τη βοήθεια κατάλληλου αναλυτικού εργαλείου, αναλύονται και συγκρίνονται οι εργασίες επιλεγμένων κεφαλαίων των εγχειριδίων. Στη συνέχεια, εντοπίζονται και παρουσιάζονται οι διαφορές στην οργάνωση και την έκταση της ύλης με βάση τους πίνακες περιεχομένων των δύο σχολικών βιβλίων μαθηματικών.

1.4. Η εργασία της Dubravka Glasnovic Gracin

Σημαντική για την παρούσα μελέτη, είναι η εργασία της Dubravka Glasnovic Gracin, «Απαιτήσεις σε σχολικά βιβλία μαθηματικών: μια πενταδιάστατη ανάλυση εργασιών και παραδειγμάτων σχολικών βιβλίων» (“Requirements in mathematics textbooks: a five-dimensional analysis of textbook exercises and examples”, 2018). Αυτή βασίζεται στην θέση ότι η φύση των εργασιών του σχολικού βιβλίου μπορεί δυνητικά να επηρεάσει και να δομήσει τον τρόπο που σκέφτονται οι μαθητές (Henningsen, M., & Stein, M. K., 1997) και ως εκ τούτου πρέπει να είναι πλούσιες και μαθηματικά αξιόλογες (Stenmark, J. K., 1991, Vincent, J., & Stacey, K., 2008, Gracin, 2018). Κι ενώ τις συνήθεις διαστάσεις ανάλυσης εργασιών αποτελούν το μαθηματικό περιεχόμενο, οι γνωστικές απαιτήσεις, ο τύπος ερώτησης και τα χαρακτηριστικά του περιεχομένου, η Gracin επιχειρεί να συμπεριλάβει και μια πέμπτη, τη διάσταση δραστηριότητας. Αυτή περιγράφει το είδος της μαθηματικής ενέργειας, στο οποίο καλείται να προβεί ο μαθητής σε μια συγκεκριμένη εργασία. Διαμορφώνεται, κατ' αυτόν τον τρόπο, ένα πενταδιάστατο εργαλείο ποιοτικής ανάλυσης.

Η ιδέα της προσθήκης της διάστασης των μαθηματικών δραστηριοτήτων έχει την προέλευσή της στην προσέγγιση των μαθηματικών ικανοτήτων του Niss (2015). Ο Niss εστιάζει στη μαθηματική δραστηριότητα αναζητώντας τι σημαίνει να είσαι

«μαθηματικά ικανός» (σελ. 42). Στο επίπεδο ανάλυσης εργασιών, η διάσταση δραστηριότητας εξετάζει το είδος της δραστηριότητας που πρέπει να πραγματοποιήσει ο μαθητής για να λύσει μια άσκηση, ένα πρόβλημα ή να απαντήσει μια ερώτηση. Τα είδη δραστηριοτήτων είναι κατηγοριοποιημένα ως: αναπαράσταση (H1), υπολογισμός (H2), ερμηνεία (H3) και αιτιολόγηση (H4). Αναλυτικότερα, μια άσκηση μπορεί να λύνεται με αναπαράσταση ή μοντελοποίηση των δοθέντων στοιχείων, να χρειάζεται απλούς ή σύνθετους υπολογισμούς, να απαιτεί ερμηνεία δεδομένων ή αιτιολόγηση των μαθηματικών τους σχέσεων. Η διάσταση της δραστηριότητας που απαιτείται σε μία εργασία υπάρχει και στο πλαίσιο ανάλυσης των Hwang, Yeo και Son (2021) με παρόμοιο περιεχόμενο: κατανόηση, εκτίμηση, εξερεύνηση, επίλυση και εξήγηση.

Εφαρμόζοντας αυτό το πενταδιάστατο εργαλείο ποιοτικής ανάλυσης, η Gracin εξέτασε δύο σειρές σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών της Κροατίας για τις τάξεις 6^η, 7^η και 8^η, που αντιστοιχούν στις ηλικίες μαθητών 12, 13 και 14 ετών. Περιλήφθηκαν και αναλύθηκαν περισσότερες από 22.000 εργασίες. Τα ερευνητικά της ερωτήματα αφορούσαν κυρίως με τη συμβολή των εργασιών στη μαθηματική κατανόηση και το εάν είναι αρκετά «πλούσιες», εάν δηλαδή προσφέρουν ευρύ φάσμα τύπων εργασιών. Κάθε εργασία έλαβε πέντε διαφορετικούς κωδικούς, έναν για κάθε μία από τις πέντε διαστάσεις του εργαλείου ανάλυσης. Ακολούθησε η ανάλυση των δεδομένων και των αποτελεσμάτων, με τη χρήση του SPSS, εφαρμόζοντας ποσοτικές μεθόδους, οι οποίες περιλάμβαναν την εύρεση των σχετικών συχνοτήτων των κωδικών σε ένα συγκεκριμένο μαθηματικό κεφάλαιο.

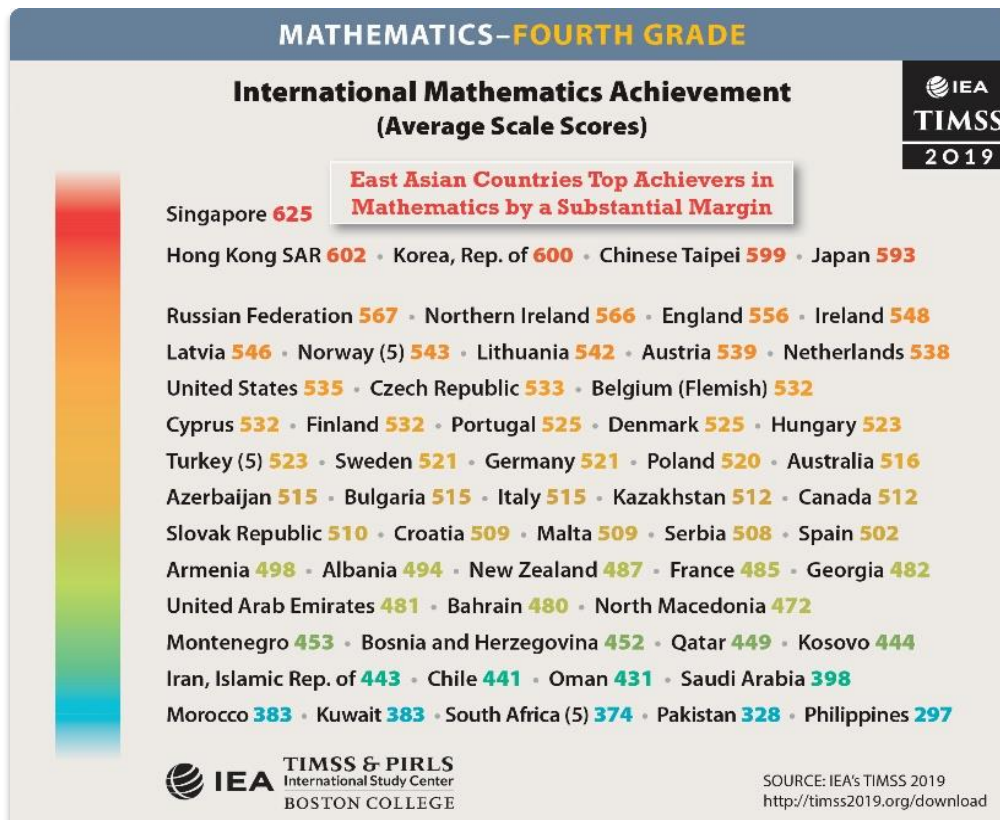
Εν τέλει, τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι δεν υπήρχε ισορροπία και πλούτος τύπων εργασιών. Για παράδειγμα, διαπιστώθηκε η κυριαρχία της δραστηριότητας του υπολογισμού, των ερωτήσεων κλειστής απάντησης και του μη-ρεαλιστικού περιβάλλοντος στις εργασίες. Οι πληροφορίες που προέκυψαν δεν ήταν σύμφωνες με τις εθνικές μαθηματικές απαιτήσεις της Κροατίας, που αποσκοπούσαν στην ανάπτυξη ικανοτήτων εφαρμογής των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή, στην καλλιέργεια της δεξιότητας εντοπισμού αποτελεσματικότερης μεθόδου επίλυσης, στις ευκαιρίες για στοχασμό και για συζήτηση πάνω στις λύσεις των εργασιών. Επιπλέον, φάνηκε ότι η είσοδος της διάστασης των *μαθηματικών δραστηριοτήτων* στην ανάλυση των εργασιών του σχολικού βιβλίου, συνέβαλε στην καλύτερη κατανόηση των ευκαιριών μάθησης που παρέχονται στους μαθητές μέσω της χρήσης εγχειριδίων (Gracin, 2018).

Σύμφωνα με την Gracin (2018), τα αποτελέσματα υποδηλώνουν τη σημασία της ενσωμάτωσης της διάστασης αυτής στα εθνικά προγράμματα σπουδών μαθηματικών, με στόχο την ενθάρρυνση των συγγραφέων και των εκπαιδευτικών να διαμορφώσουν εργασίες που να προκαλούν το μαθητή να ενεργήσει με ποικιλία δραστηριοτήτων, όπως η αναπαράσταση, ο υπολογισμός, η ερμηνεία και η επιχειρηματολογία. Τέλος, αποφαίνεται για το πενταδιάστατο πλαίσιο που διαμορφώθηκε, ότι αποδείχθηκε ένα «ισχυρό αναλυτικό εργαλείο για τον εντοπισμό των ευκαιριών μάθησης» (σελ. 20) που προκύπτουν στις εργασίες.

1.5. Μαθηματική εκπαίδευση στη Σιγκαπούρη και στην Ελλάδα

Σιγκαπούρη

Η διδασκαλία των Μαθηματικών στη Σιγκαπούρη τέθηκε στο προσκήνιο όταν αυτό το μικρό έθνος - κράτος τοποθετήθηκε σταθερά στις κορυφαίες θέσεις στις αξιολογήσεις των Τάσεων στη Διεθνή Μελέτη Μαθηματικών και Επιστημών (TIMSS) (εικόνα 1) και του Προγράμματος Διεθνούς Αξιολόγησης Μαθητών (PISA, Programme for International Student Assessment) (εικόνα 3). Τα στοιχεία που προκύπτουν από αυτές τις διεθνείς αξιολογήσεις δίνουν χρήσιμες πληροφορίες για το επίπεδο της εκπαίδευσης αρκετών χωρών. Μάλιστα, εξετάζουν τον τομέα των μαθηματικών με λεπτομέρεια και για αυτό τον λόγο λαμβάνονται υπόψιν σε μεγάλο βαθμό από τους υπευθύνους διαμόρφωσης προγραμμάτων σπουδών και εγχειριδίων μαθηματικών σε όλο τον κόσμο.



Εικόνα 1. Αποτελέσματα Διεθνούς Μαθηματικής Επίδοσης (μέση βαθμολογία κλίμακας), πηγή: <http://timss2019.org/download>, IEA TIMSS 2019.

Οι υψηλές επιδόσεις των μαθητών στη Σιγκαπούρη, ειδικότερα στα μαθηματικά, έχει οδηγήσει σε πρωτοβουλίες άλλων χωρών, με συγκριτικά χαμηλότερες επιδόσεις στις ίδιες αξιολογήσεις, να προσπαθούν να εφαρμόσουν προσεγγίσεις στη διδασκαλία των μαθηματικών, που βασίζονται σε όσα χρησιμοποιούνται στη Σιγκαπούρη, με την ελπίδα ότι αυτό θα αυξήσει τις επιδόσεις των μαθητών τους στα μαθηματικά. Για παράδειγμα, το 2016 η κυβέρνηση του Ηνωμένου Βασιλείου πραγματοποίησε μια επένδυση 41 εκατομμυρίων λιρών για να στηρίξει τα σχολεία στην υιοθέτηση προσεγγίσεων κατάκτησης δεξιοτήτων (mastery) που βασίζονται σε προσεγγίσεις διδασκαλίας της Ανατολικής Ασίας - Κίνα και Σιγκαπούρη - αγοράζοντας εγχειρίδια με γνώμονα την κατάκτηση δεξιοτήτων, ενώ στις Η.Π.Α οι περισσότερες πολιτείες είχαν υιοθετήσει ένα σύνολο προτύπων που τονίζουν τον ίδιο προσανατολισμό (Common Core State Standards Initiative, 2016).

Στη Σιγκαπούρη, το παιδαγωγικό σύστημα περιλαμβάνει έξι χρόνια πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Το πρόγραμμα σπουδών για τα δημοτικά σχολεία είναι κοινό για όλους τους μαθητές από το πρώτο έως το τέταρτο έτος. Από το 2008 έως και

σήμερα, στο πέμπτο και στο έκτο έτος, οι μαθητές μπορούν να παρακολουθήσουν μεμονωμένα μαθήματα σε θεμελιώδες (foundation), ή πρότυπο (standard) επίπεδο. Στο θεμελιώδες επίπεδο η υποστήριξη διατίθεται με τη μορφή μικρότερου μεγέθους τάξης, όπου οι δάσκαλοι εστιάζουν στο να βοηθήσουν τους μαθητές να καλύψουν τα ελλείμματά τους και να προχωρήσουν με ρυθμό που ταιριάζει στις ανάγκες τους. Από την άλλη, υπάρχει η δυνατότητα ο μαθητής να εστιάσει και να επεκτείνει τις δυνατότητές του στα θέματα στα οποία είναι περισσότερο ικανός. Η απόφαση να ακολουθήσει ένα «πρότυπο» επίπεδο, βασίζεται σε υψηλές επιδόσεις του παιδιού στο τέλος της 4ης τάξης και λαμβάνεται μετά από στενές διαβουλεύσεις του σχολείου και των κηδεμόνων του (Tay, et al., 2019).

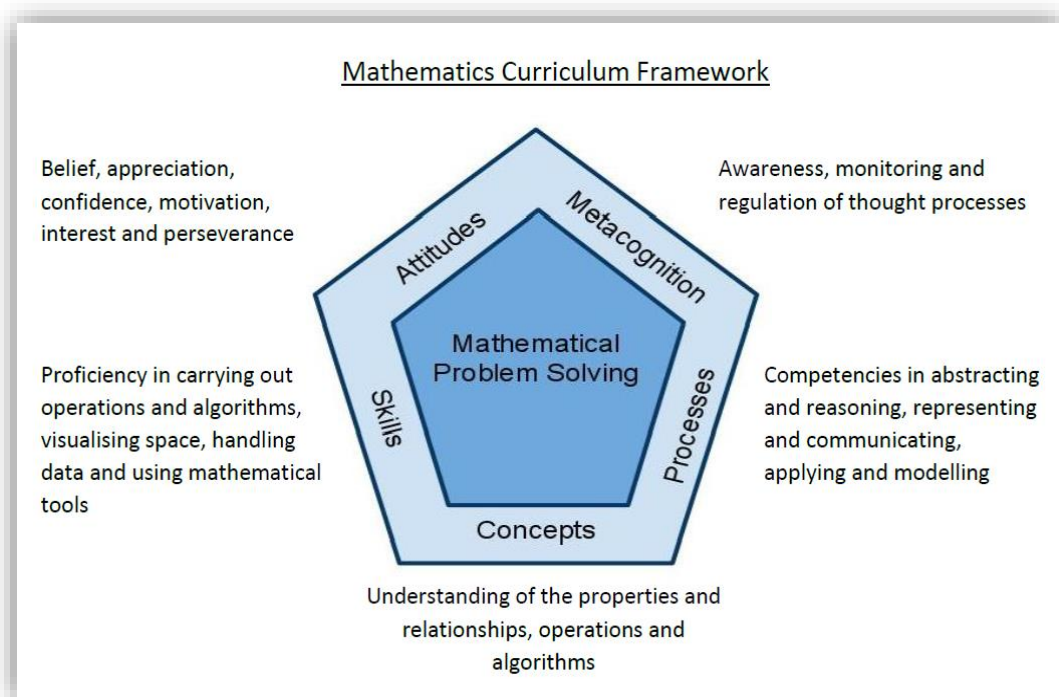
Με βάση τα παραπάνω, στην 5^η και στην 6^η τάξη του Δημοτικού, υπάρχει διαφοροποίηση και στο περιεχόμενο εγχειριδίων των μαθηματικών. Το αναλυτικό πρόγραμμα στα Πρότυπα Μαθηματικά (Standard Mathematics) συνεχίζει την αναπτυξιακή πορεία των προηγούμενων τάξεων, ενώ το πρόγραμμα σπουδών των Θεμελιωδών Μαθηματικών (Foundation Mathematics) επανεξετάζει μερικές από τις σημαντικές έννοιες και δεξιότητες του αναλυτικού προγράμματος των προηγούμενων τεσσάρων τάξεων. Εισάγονται νέες γνώσεις και στα Θεμελιώδη Μαθηματικά, απλώς είναι ένα υποσύνολο του αναλυτικού προγράμματος των Πρότυπων Μαθηματικών (Kaur, B., 2019). Το παιδί ενισχύεται στην κατανόηση βασικών αρχών στα μαθήματα, στα οποία χρειάζεται περισσότερη υποστήριξη. Στο τέλος της εξαετίας του δημοτικού σχολείου, οι μαθητές δίνουν την Απολυτήρια Εξέταση Δημοτικού Σχολείου (PSLE¹). Ακολουθούν τέσσερα έως έξι χρόνια δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και στη συνέχεια η μεταδευτεροβάθμια εκπαίδευση, που διαρκεί τουλάχιστον έναν χρόνο.

Η προσέγγιση της εκπαίδευσης στα μαθηματικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση στη Σιγκαπούρη διακρίνεται από τη χρήση σχολικών βιβλίων και την έμφαση στη διδασκαλία βασισμένη στην κατάκτηση δεξιοτήτων (mastery) (Lindorff, Hall, & Sammons, 2019). Στο πλαίσιο αυτό, η έννοια της *κατάκτησης δεξιοτήτων* αναφέρεται στην πρόθεση κάθε μαθητής να εξασφαλίσει την κατανόηση μιας συγκεκριμένης έννοιας πριν προχωρήσει στην επόμενη, αντίθετα με την προτεραιότητα της απλής κάλυψης υλικού που χαρακτηρίζει πολλά από τα παραδοσιακά προγράμματα σπουδών. Αυτή η θεωρία βασίζεται στο "Μοντέλο Σχολικής Μάθησης" του Carroll (1963), το

¹ Primary School Leaving Examination.

οποίο ερμηνεύει την ικανότητα του μαθητή σε σχέση με τον χρόνο που διατίθεται για μάθηση και τον πραγματικό χρόνο μάθησης του καθενός, προσδιορίζοντας έτσι τους μαθητές ως «γρήγορους» ή «αργούς», αντί για το εάν κατέχουν κάποιο απόλυτο επίπεδο ικανότητας. Στη μελέτη τους οι Lindorff, Hall, και Sammons (2019) συμφωνούν με τον Guskey (1980), ότι η σωστά εφαρμοσμένη διδασκαλία της *κατάκτησης δεξιοτήτων*, θα μπορούσε να διευκολύνει την πρόοδο των μαθητών, καθώς και να βελτιώσει την στάση των μαθητών απέναντι στη μάθηση.

Το πλαίσιο που παρουσιάζεται στο αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών (εικόνα 2), περιγράφει ένα ισορροπημένο, ολοκληρωμένο όραμα που συνδέει και περιέχει τις διαδικασίες, τις έννοιες, τις δεξιότητες, τις στάσεις και τη μεταγνώση (Leinwand and Ginsburg 2007, σ. 32). Αυτή η μορφή πλαισίου εισήχθη στο πρόγραμμα σπουδών μαθηματικών της Σιγκαπούρης το 1990 και διατηρήθηκε έως και σήμερα, με μερικές βελτιώσεις στα χαρακτηριστικά του σε περιοδικές μεταγενέστερες αναθεωρήσεις του σχολικού προγράμματος (Υπουργείο Παιδείας Σιγκαπούρης, 2013). Η κεντρική εστίαση του προγράμματος σπουδών των μαθηματικών είναι η ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων, η οποία οικοδομείται με την κατάκτηση και τη συνδυαστική εφαρμογή των πέντε παραγόντων που περιβάλλουν το πλαίσιο (Υπουργείο Παιδείας Σιγκαπούρης, 2021).

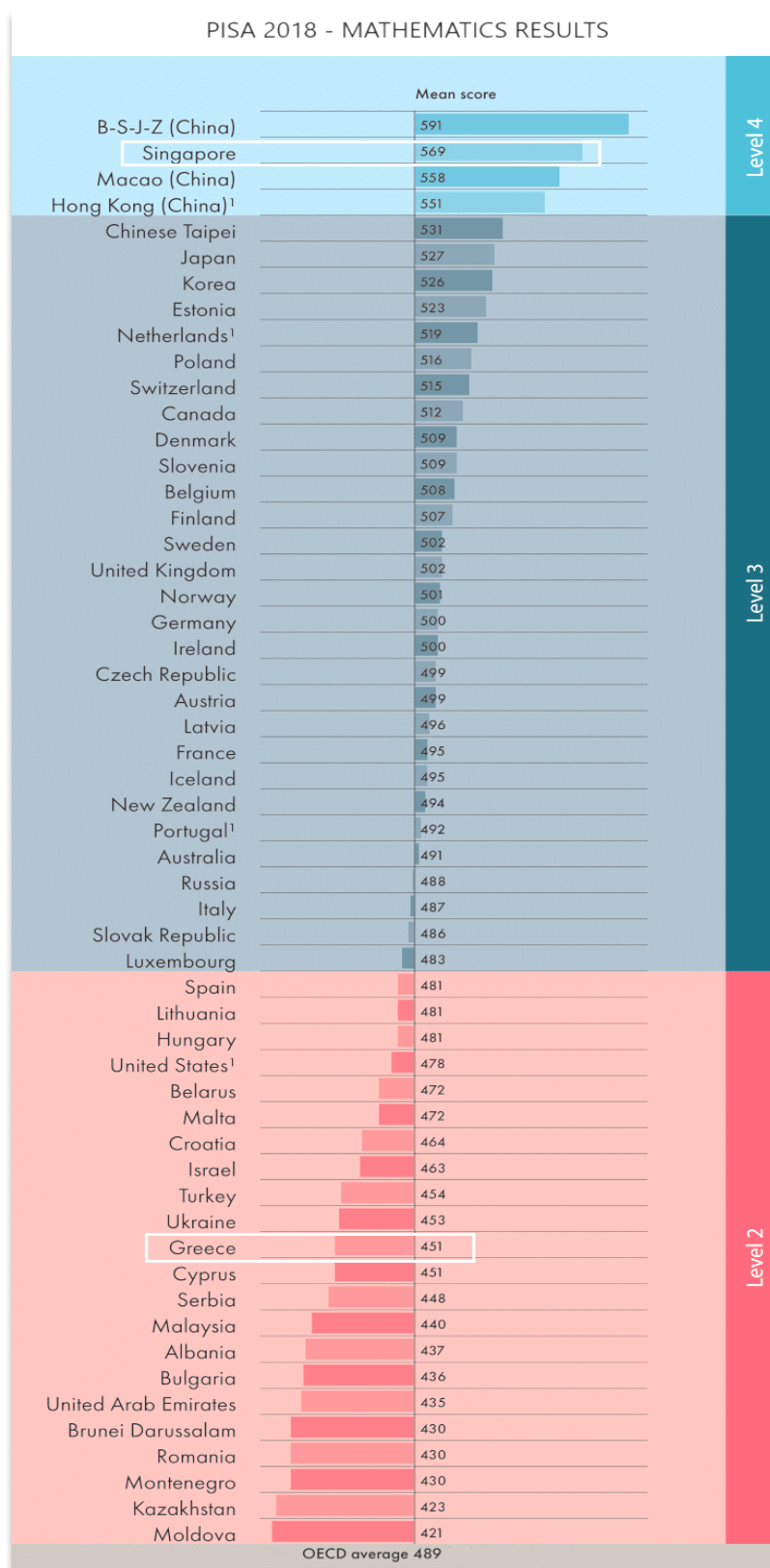


Εικόνα 2. Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών, Υπουργείο Παιδείας Σιγκαπούρης, 2021 – 2023, πηγή: <https://www.moe.gov.sg/-/media/files/primary/2021-primary-mathematics-syllabus-p1-to-p6.pdf>.

Ο παράγοντας των διαδικασιών (processes), για την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος, περιγράφει τις ικανότητες αφαιρετικής σκέψης και συλλογισμού, αναπαράστασης, επικοινωνίας, εφαρμογής και μοντελοποίησης. Στη βάση του πλαισίου, βρίσκονται οι έννοιες (concepts), που συναντώνται και πρέπει να κατανοηθούν σε επίπεδο ιδιοτήτων, σχέσεων, πράξεων και αλγορίθμων. Ακολουθούν οι δεξιότητες (skills) που επιστρατεύονται για να λυθεί το πρόβλημα, όπως η διεκπεραίωση πράξεων, η χρήση μαθηματικών εργαλείων, η οπτικοποίηση του χώρου και ο χειρισμός δεδομένων. Ακόμα ένας παράγοντας για την επίτευξη ενός σύνθετου μαθηματικού έργου είναι οι συμπεριφορές (attitudes). Με αυτό τον όρο εννοούνται οι πεποιθήσεις ενός ατόμου, η αυτοπεποίθηση και τα κίνητρα του, καθώς και η ύπαρξη ενδιαφέροντος και επιμονής. Τέλος, αναγκαία είναι και η μεταγνώση (metacognition), η οποία εδώ αναφέρεται στην βαθιά γνώση και κατανόηση του μαθηματικού αντικειμένου και στην ικανότητα ρύθμισης των διαδικασιών σκέψης πάνω σε αυτό.

Παρά τη συμμετοχή των εμπορικών εκδοτών στην παραγωγή των εγχειριδίων μαθηματικών, το υπουργείο παιδείας της Σιγκαπούρης συνεχίζει την αυστηρή διαδικασία ελέγχου αυτών των βιβλίων για ευθυγράμμιση με το επιδιωκόμενο πρόγραμμα σπουδών, εμπλέκοντας στη διαδικασία τόσο καθηγητές μαθηματικών όσο και ειδικούς των προγραμμάτων σπουδών. Τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Σιγκαπούρης παρουσιάζουν με σαφήνεια βασικές έννοιες, παρέχουν συστηματική πρόοδο μάθησης, περιλαμβάνουν μια ποικιλία παραδειγμάτων και εφαρμογών και ενθαρρύνουν τον προβληματισμό των μαθητών (Oates 2014).

Ο Oates (2014) σημειώνει επίσης, ότι το 70% των μαθητών στη Σιγκαπούρη είχαν δασκάλους μαθηματικών που χρησιμοποιούσαν σχολικά βιβλία ως βάση διδασκαλίας, όπως αποδεικνύεται από το TIMSS του 2011 (Lee, et al., 2019). Καθώς, λοιπόν η Σιγκαπούρη έχει σταθερά καλές επιδόσεις ήδη από το 1995 έως και σήμερα (TIMSS, 2019), τα εγχειρίδια μαθηματικών της Σιγκαπούρης έχουν ενδιαφέρον για ερευνητές σε όλο τον κόσμο.



Εικόνα 3. Αποτελέσματα του PISA 2018 - Επιδόσεις στα Μαθηματικά (επεξεργασμένος πίνακας επιλεγμένων επιπέδων), πηγή: <https://www.oecd.org/pisa/PISA%202018%20Insights%20and%20Interpretations%20FINAL%20PDF.pdf>, σελ.7.

Πολύ διαφορετικά, για τις επιδόσεις των μαθητών στα μαθηματικά, είναι τα αποτελέσματα που αφορούν την Ελλάδα. Το 2018, από την παγκόσμια μελέτη του PISA, φάνηκε ότι το ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα παραμένει στο χαμηλότερο άκρο της κλίμακας, καταλαμβάνοντας την 42^η θέση μεταξύ των συνολικά 79 χωρών που συμμετέχουν.

Πιο συγκεκριμένα, στα αποτελέσματα που αφορούν τα μαθηματικά, η Ελλάδα βρέθηκε κάτω από το μέσο όρο επίδοσης του ΟΟΣΑ ² (βλ. Εικόνα 3). Μόλις το 4% των μαθητών σημείωσε βαθμολογία υψηλού επιπέδου στα μαθηματικά (μέσος όρος του ΟΟΣΑ: 11%), ενώ έξι ασιατικές χώρες είχαν τα μεγαλύτερα ποσοστά, με τη Σιγκαπούρη να είναι μία από αυτές με 37%. Οι μαθητές που ανήκουν σε αυτό το επίπεδο (level 4, βλ. εικόνα 3), μπορούν να μοντελοποιήσουν σύνθετα μαθηματικά προβλήματα, καθώς και να επιλέξουν κατάλληλες στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων (OECD, P., 2018).

Στην Ελλάδα η φοίτηση στο δημοτικό είναι εξαετής, σε κοινές ηλικιακές βαθμίδες με την Σιγκαπούρη (από 6 έως 12 ετών). Οι μαθητές προάγονται στην επόμενη τάξη, κατά τη βαθμολογία και την κρίση του εκπαιδευτικού, αλλά και σε συνεννόηση με τους νόμιμους κηδεμόνες του μαθητή. Έπειτα, εισάγονται στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση χωρίς απολυτήριες εξετάσεις. Ωστόσο, σε αυτό το επίπεδο εκπαίδευσης ξεκινάνε οι γραπτές εξετάσεις των μαθητών, στο τέλος κάθε ακαδημαϊκής χρονιάς. Οι επιδόσεις στους γραπτούς διαγωνισμούς συμψηφίζονται με τη βαθμολογία των καθηγητών για τα τρία τρίμηνα φοίτησης κάθε μαθητή και προκύπτει μέσος όρος βαθμολογίας, ο οποίος μπορεί να τον προάγει ή όχι στην επόμενη τάξη. Η δευτεροβάθμια φοίτηση διαρκεί από τρία έως έξι χρόνια και, στη συνέχεια, οι νέοι μπορούν να φοιτήσουν σε σχολές μεταδευτεροβάθμιου ή τριτοβάθμιου επιπέδου για τουλάχιστον ένα έτος.

Στο Πρόγραμμα Σπουδών για το Μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό υπογραμμίζεται η καλλιέργεια υψηλού επιπέδου μαθηματικού συλλογισμού, δεξιοτήτων διατύπωσης και επίλυσης, στάσεων και πεποιθήσεων. Η ανάπτυξη αυτών των ικανοτήτων αποσκοπεί στο να είναι οι μαθητές σε θέση να λύσουν προβλήματα ποικίλων επιπέδων, τόσο στα Μαθηματικά, όσο και στην καθημερινότητά τους. Ειδικότερα, ο προσανατολισμός του Προγράμματος Σπουδών των Μαθηματικών

² Οργανισμός Οικονομικής Συνεργασίας και Ανάπτυξης (OECD)

αφορά την έννοια του «μαθηματικού γραμματισμού». Πρόκειται για την ικανότητα του ατόμου να αναλύει, να ερμηνεύει και να επεμβαίνει στο κοινωνικό περιβάλλον με εργαλείο του τα μαθηματικά και να τα χρησιμοποιεί για τη λήψη αποφάσεων. Προς αυτή την κατεύθυνση, προτείνεται η ανάδειξη των μαθηματικών πρακτικών να πραγματοποιείται συγχρόνως με το μαθηματικό περιεχόμενο (ΙΕΠ, 2021).

Ο Romberg, T. (2000), στο πλαίσιο της διαμόρφωσης προτύπων για τα αναλυτικά προγράμματα από το Διοικητικό Συμβούλιο του Εθνικού Συμβουλίου Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM), περιγράφει τις διαδικασίες με τις οποίες οι μαθηματικοί κάνουν μαθηματικά και πώς αυτές μπορούν να κατακτηθούν και να αξιοποιηθούν από τους ανθρώπους, ώστε να ανταποκρίνονται δυναμικά ως πολίτες στον πραγματικό κόσμο. Ο *μαθηματικός γραμματισμός* περιγράφεται ως «η μαθηματική γνώση που χρησιμοποιείται πρακτικά σε ένα πλήθος διαφορετικών καταστάσεων και πλαισίων με ποικίλους τρόπους, βασισμένους στον προβληματισμό και τη διορατικότητα» (σελ. 5). Με αυτή την προοπτική, οι μαθητές εκτός από τις έννοιες και τις διαδικασίες των μαθηματικών, πρέπει να μάθουν και να τις επιστρατεύουν και να τις χρησιμοποιούν για την επίλυση προβλημάτων μη ρουτίνας (Romberg, T., 2000).

Και στις δύο χώρες, την Ελλάδα και τη Σιγκαπούρη, οι εκπαιδευτικές στρατηγικές φαίνεται πως συντάσσονται γύρω από την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Στη Σιγκαπούρη το αναλυτικό πρόγραμμα στηρίζεται περισσότερο στο διαμορφωμένο πολύ - παραγοντικό πλαίσιο επίλυσης προβλημάτων, με απώτερο στόχο την *κατάκτηση δεξιοτήτων*. Από την άλλη, στην Ελλάδα κυριαρχεί η εστίαση στην *ανάθεση προβλημάτων που διαθέτουν ποικίλο και ρεαλιστικό περιεχόμενο*, μπορούν δηλαδή να συνδεθούν με τον πραγματικό κόσμο και συνηγορούν στο να φτάσουν οι μαθητές στο «μαθηματικό γραμματισμό» τους.

1.6. Σκοπός και Ερευνητικά ερωτήματα.

Η παρούσα έρευνα στοχεύει στην ανάλυση και στην αξιολόγηση της ποιότητας των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών της Ελλάδα και της Σιγκαπούρη, με αφορμή

την αποτελεσματικότερη μάθηση, όπως αυτή αποτυπώνεται στις διεθνείς κατατάξεις επίδοσης των μαθητών (TIMSS, PISA). Αξιοποιώντας το πολυδιάστατο πλαίσιο ανάλυσης εργασιών που παρουσιάζει η Gracin (2018), επιχειρείται η σύγκριση και ανάλυση εργασιών από επιλεγμένα κεφάλαια των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών της Ελλάδας και μιας αντίστοιχης σειράς της Σιγκαπούρης. Επιπλέον, εξετάζεται και συγκρίνεται το συνολικό περιεχόμενο των δύο εγχειριδίων, βάσει του πλήθους διαφορετικών μαθηματικών γνώσεων που περιέχονται στην ύλη, σε σχέση με την έκταση που διατίθεται για την κατάκτησή τους. Με βάση το θεωρητικό πλαίσιο (βλ. 1.3 και 1.4) και την παραπάνω στοχοθέτηση, διαμορφώνονται δύο ερευνητικά ερωτήματα:

1. Σε ποιο βαθμό τα συγκεκριμένα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Ελλάδας και της Σιγκαπούρης, μέσω των εργασιών που περιέχουν, προσφέρουν ευκαιρίες μάθησης (πλήθος και ποικιλομορφία) και ισοτιμία ευκαιριών κατανόησης (πολλαπλά επίπεδα δυσκολίας);
2. Ποια είναι τα κύρια σημεία που διαφοροποιούν τις εργασίες και τη συνολική ύλη των δύο εγχειριδίων και, συνεπώς, την αποτελεσματικότητά τους στη μάθηση μαθηματικών;

Με βάση τα ευρήματα της συγκριτικής μελέτης, επιδιώκεται η εξαγωγή συμπερασμάτων, αλλά και πληροφοριών που μπορούν να συντελέσουν στην εκκίνηση εκπόνησης περαιτέρω ερευνών, σχετικά με την ποιότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης στην Ελλάδα σε σχέση με την Σιγκαπούρη.

2. Μεθοδολογία

2.1. Πλαίσιο ανάλυσης

Η ανάλυση σχολικών βιβλίων είναι ένας ευρύς όρος που περιλαμβάνει κυρίως δύο τύπους αναλύσεων. Στη μία περίπτωση πρόκειται για την ανάλυση ενός μεμονωμένου εγχειριδίου ή μιας σειράς σχολικών βιβλίων, εστιάζοντας είτε στον τρόπο αντιμετώπισης ενός θέματος ή θεμάτων, είτε στον τρόπο που μια συγκεκριμένη ιδέα αντανακλάται στα σχολικά βιβλία. Συχνά όμως η ανάλυση μπορεί να αφορά δύο διαφορετικές σειρές σχολικών βιβλίων από την ίδια χώρα ή ακόμα περισσότερο, διαφορετικές χώρες, κυρίως με έμφαση στον εντοπισμό των ομοιοτήτων και των διαφορών τους. Ως εκ τούτου, μπορεί να ονομαστεί και συγκριτική ανάλυση σχολικών εγχειριδίων (Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z., 2013). Στην παρούσα έρευνα πραγματοποιήθηκε η συγκριτική ανάλυση δύο σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών 6ης τάξης, της Ελλάδας και της Σιγκαπούρης, με βάση τα χαρακτηριστικά εργασιών που περιέχονται σε αυτά. Κατόπιν, πραγματοποιήθηκε μελέτη και σύγκριση πληροφοριών που αντλήθηκαν από τους πίνακες περιεχομένων των εγχειριδίων, σχετικά με την έκταση και τη δομή του περιεχομένου.

Αρχικά, στην παρούσα μελέτη τα δύο σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών εξετάστηκαν και συγκρίθηκαν, με βάση τα χαρακτηριστικά των εργασιών που περιλαμβάνονται σε αυτά. Για την ανάλυση των εργασιών, αξιοποιήθηκε το πενταδιάστατο εργαλείο της Gracin (2018), για το οποίο ακολουθεί εκτενής περιγραφή στο επόμενο υποκεφάλαιο (2.2.). Με βάση πέντε ειδικές διαστάσεις, εξετάστηκαν συνολικά 563 εργασίες από επιλεγμένα κεφάλαια των σχολικών βιβλίων, ώστε να διαπιστωθεί ο βαθμός πλούτου και ποικιλομορφίας σε τύπους δραστηριοτήτων και επίπεδα δυσκολίας. Επιπλέον, επιχειρήθηκε να εντοπιστούν τα στοιχεία ή ο συνδυασμός στοιχείων που διαφοροποιούν τις εργασίες και, κατ' επέκταση, τις επιδόσεις των μαθητών που έχουν χρησιμοποιήσει τα συγκεκριμένα σχολικά εγχειρίδια. Για την ορθότερη και αξιόπιστη εξαγωγή των αποτελεσμάτων έγινε χρήση του λογισμικού IBM SPSS (Statistical Package for the Social Sciences).

Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε ανάλυση και σύγκριση πληροφοριών που αντλήθηκαν από τους πίνακες περιεχομένων των εγχειριδίων, σχετικές με την έκταση

και τη δομή του περιεχομένου. Πιο συγκεκριμένα, οργανώθηκαν σε πίνακες και συγκρίθηκαν τα ποσοτικά στοιχεία (ενότητες, κεφάλαια, ανακεφαλαιώσεις, σελίδες) των δύο σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών, ώστε να εντοπιστούν οι ανομοιότητες στην ποσότητα των διαφορετικών γνώσεων που εισάγονται, αλλά και στο πλήθος των σελίδων που αφιερώνονται για την κατάκτησή τους. Για την καταγραφή των δεδομένων και τον υπολογισμό αθροισμάτων και χρήσιμων μέσων όρων, χρησιμοποιήθηκε το πρόγραμμα λογιστικών φύλλων του Microsoft Excel. Τα αποτελέσματα της δεύτερης φάσης της συγκριτικής μελέτης συμπληρώνουν τα ευρήματα της πρώτης και λειτουργούν ως επιπλέον παράγοντας διαμόρφωσης συμπερασμάτων, για τα στοιχεία που καθιστούν τα εγχειρίδια λιγότερο ή περισσότερο αποτελεσματικά για τη μάθηση μαθηματικών.

2.2. Οι 5 διαστάσεις του εργαλείου ανάλυσης της Dubravka G. Gracin

Το σύνολο των διαστάσεων του εργαλείου ανάλυσης της Gracin προκύπτει από το συνδυασμό δύο θεωρητικών πηγών: τα αυστριακά εκπαιδευτικά πρότυπα και το πλαίσιο των Zhu και Fan. Τα αυστριακά εκπαιδευτικά πρότυπα παρέχουν τη θεωρητική βάση για τις τρεις διαστάσεις, που αποτελούν το μοντέλο ικανοτήτων: *περιεχόμενο, μαθηματική δραστηριότητα και επίπεδο πολυπλοκότητας* (Institut für Didaktik der Mathematik, 2007). Οι υπόλοιπες δύο διαστάσεις, δηλαδή ο *τύπος απαντήσεων* και τα *χαρακτηριστικά περιεχομένου*, προήλθαν από το πλαίσιο ανάλυσης των Zhu and Fan, το οποίο σχημάτισαν και χρησιμοποίησαν για να μελετήσουν εγχειρίδια μαθηματικών της Κίνας και των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής (Zhu Y & Fan L., 2006).

Τελικά η Gracin συμπεριλαμβάνει στη δική της έρευνα (“Requirements in mathematics textbooks: a five-dimensional analysis of textbook exercises and examples”, 2018) τις εξής πέντε διαστάσεις: (1) *περιεχόμενο*, (2) *δραστηριότητα*, (3) *πολυπλοκότητα*, (4) *τύπος απάντησης* και (5) *χαρακτηριστικά περιεχομένου*. Αφού εφάρμοσε το παραπάνω πενταδιάστατο πλαίσιο για την ανάλυση εργασιών εγχειριδίων μαθηματικών της Κροατίας (1.4.), συμπέρανε ότι αποτελεί ένα ισχυρό εργαλείο για τον εντοπισμό των ευκαιριών μάθησης που προκύπτουν από τις εργασίες μαθηματικών.

Καθώς και η παρούσα εργασία ερευνά τις ευκαιρίες μάθησης, επιλέχθηκε αυτό το μοντέλο ανάλυσης για τις εργασίες των εγχειριδίων της Ελλάδας και της Σιγκαπούρης που εξετάζονται και συγκρίνονται.

ΜΟΝΤΕΛΟ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑΣ

Διαστάσεις: (1) περιεχόμενο, (2) δραστηριότητα και (3) πολυπλοκότητα

Σύμφωνα με τα αυστριακά πρότυπα, η ικανότητα περιγράφεται ως μια μακροπρόθεσμη διαθέσιμη γνωστική δεξιότητα, που μπορεί να αναπτυχθεί από τον μαθητή και η οποία του επιτρέπει να εξασκεί διάφορα είδη εργασίας και δεξιοτήτων και να τα εφαρμόζει κατάλληλα (Institut für Didaktik der Mathematik, 2007). Το μοντέλο ικανότητας συνθέτουν το *μαθηματικό περιεχόμενο*, οι *μαθηματικές δραστηριότητες* και το *επίπεδο πολυπλοκότητας*. Έτσι, μπορεί να κανείς να περιγράψει μία εργασία σε ένα σχολικό εγχειρίδιο μαθηματικών με βάση το τρίπτυχο: *περιεχόμενο (I)*, *δραστηριότητα (H)*, *πολυπλοκότητα (K)*.

Άσκηση 1η

Να εξετάσεις με τα σταυρωτά γινόμενα, όπου υπάρχει αναλογία και να βάλεις το σύμβολο της ισότητας (=).

$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{16}{14}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{8}$
.....
.....

Περιεχόμενο: **Αναλογικότητα (I2)**
Δραστηριότητα: **Υπολογισμός (H2)**
Επίπεδο πολυπλοκότητας: **Εφαρμογή (K1)**

Εικόνα 4. Παράδειγμα εφαρμογής του μοντέλου ικανοτήτων του εργαλείου ανάλυσης της Dubravka G. Gracin (2018) σε άσκηση από τα Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού, Τετράδιο Εργασιών, β' τεύχος, σελ. 33, 2009.

Για παράδειγμα, μία εργασία, όπως της εικόνας 4, μπορεί να χαρακτηριστεί από το τρίπτυχο: *αναλογικότητα (I)*, *υπολογισμός (H)*, *εφαρμογή (K)*. Αυτό σημαίνει ότι το περιεχόμενο της εργασίας εξασκεί και προϋποθέτει τη *γνώση της ισοδυναμίας των κλασμάτων*. Πρόκειται για μια απλή εφαρμογή της τεχνικής των σταυρωτών γινομένων, η οποία βοηθά να καταλήξουμε σε συμπέρασμα μέσω ενός υπολογισμού.

Έτσι, αξιοποιώντας τις γνώσεις του, εφαρμόζοντας τη διδαχθείσα πρακτική και πραγματοποιώντας αριθμητικούς υπολογισμούς, ο μαθητής θα μπορέσει να ολοκληρώσει τη συγκεκριμένη εργασία.

Αναλυτικότερα, η διάσταση περιεχομένου αφορά τις μαθηματικές γνώσεις που ένας μαθητής πρέπει να έχει για να λύσει μια συγκεκριμένη εργασία του σχολικού βιβλίου. Δίδονται οι ακόλουθοι τύποι περιεχομένου (I): (I1) αριθμοί & μέτρα: ακέραιοι, ρητοί και άρρητοι αριθμοί, αριθμητικές πράξεις και μονάδες μέτρησης, (I2) μεταβλητές & συναρτησιακές εξαρτήσεις: όροι και τύποι, εξισώσεις και συστήματα γραμμικών εξισώσεων, αναλογικότητα, γραμμική και τετραγωνική συνάρτηση, (I3) γεωμετρικά σχήματα & στερεά: δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα, ομοιότητα, ισομετρικές συναρτήσεις στο επίπεδο, πυθαγόρειο θεώρημα, περίμετρος, εμβαδόν, επιφάνεια και όγκος γεωμετρικών σχημάτων και (I4) στατιστικές αναπαραστάσεις & παράμετροι: αναπαραστάσεις στατιστικών δεδομένων, πιθανότητας και τυχαίου γεγονότος (Gracin, D., 2018).

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ ΜΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

H1	Αναπαράσταση	Από ένα καλάθι με 5 μήλα, η Άννα έφαγε τα 2. Πώς θα εκφράσουμε με κλάσμα την ποσότητα μήλων που έφαγε;
H2	Υπολογισμός	Ο Σωτήρης εργάζεται 9 μήνες το χρόνο ως δάσκαλος και έχει μηνιαίο μισθό 789 ευρώ. Υπολόγισε το ετήσιο εισόδημά του.
H3	Ερμηνεία	Το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Τί σημαίνει αυτό; Γράψε όσες πληροφορίες μπορείς να σκεφτείς ότι απόκτησες για το ΑΒΓΔ.
H4	Αιτιολόγηση	Ποια από τα παρακάτω τρίγωνα είναι ίσα; Αιτιολόγησε χρησιμοποιώντας τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Πίνακας 1. Παραδείγματα εργασιών για τις τέσσερις κατηγορίες της διάστασης της δραστηριότητας (H) του εργαλείου ανάλυσης μαθηματικών εργασιών της Gracin (2018).

Σαφώς υπάρχουν εργασίες που προϋποθέτουν την γνώση περισσότερων από ενός περιεχομένων. Για παράδειγμα η μονάδα μέτρησης του μήκους (I1) είναι προαπαιτούμενη σε αρκετές εργασίες. Αυτές όμως μπορεί να εστιάζουν σε ιδιότητες γεωμετρικών στερεών (I3), πχ. «Βρες το εμβαδόν ενός ορθογωνίου οικοπέδου με 300

εκ. μήκος και 25 μ. πλάτος.» ή να αφορούν *στατιστικά δεδομένα (I4)*, όπως για παράδειγμα το μέσο όρο ύψους των αγοριών μιας σχολικής τάξης. Σε αυτή την περίπτωση επιλέχθηκε το κυρίαρχο ή το νεότερο γνωστικά περιεχόμενο, που συνήθως αντιστοιχούσε και στον τίτλο της ενότητας στην οποία ανήκε η εργασία.

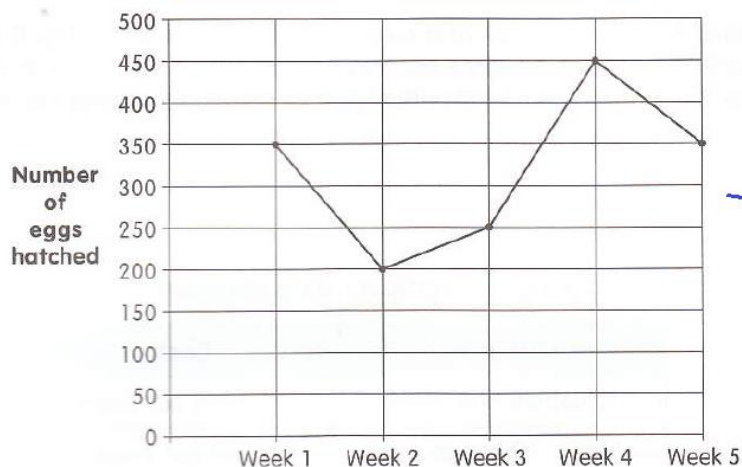
Η διάσταση των *μαθηματικών δραστηριοτήτων (H)* αναφέρεται στο τι πρέπει να κάνει ο μαθητής σε μια συγκεκριμένη εργασία. Κατηγοριοποιούνται ως: *αναπαράσταση, υπολογισμός, ερμηνεία, αιτιολόγηση*. Η *αναπαράσταση (H1)* σημαίνει την αποτύπωση μαθηματικών δεδομένων σε μαθηματική αναπαράσταση. Στην ίδια κατηγορία περιλαμβάνεται και η μοντελοποίηση, δηλαδή η αναγνώριση των μαθηματικών σχέσεων μιας κατάστασης και η αναπαράσταση του ίδιων σχέσεων με διαφορετικό τρόπο (συμβολικό, γραφικό, εξίσωση, κ.λπ.). Ο *υπολογισμός (H2)* αφορά τη διεξαγωγή υπολογιστικών πράξεων με συγκεκριμένους ή γενικευμένους αριθμούς. Η Graciñ (2018) χρησιμοποιεί τον όρο «λειτουργία» (operation) για τη συγκεκριμένη, λογική και αποτελεσματική διεξαγωγή υπολογιστικών ή κατασκευαστικών βημάτων. Αναφέρεται επίσης σε μετασχηματισμό μονάδων μέτρησης, απλοποίηση μαθηματικών παραστάσεων, επίλυση εξισώσεων, υπολογισμό αποτελεσμάτων, εκτιμήσεις και διεξαγωγή στοιχειωδών γεωμετρικών κατασκευών.

Μια ακόμα κατηγορία δραστηριότητας είναι η *ερμηνεία (H3)* και περιέχει την αναγνώριση σχέσεων και σχετικών δεδομένων που δίνονται στις μαθηματικές παραστάσεις (γραφικές, συμβολικές και πίνακες). Περιλαμβάνει, επίσης, κατάλληλη ανάγνωση των γραφικών ή συμβολικών μαθηματικών αναπαραστάσεων και την ερμηνεία τους στο δεδομένο πλαίσιο. Τέλος, η *αιτιολόγηση (H4)* αναφέρεται στην περιγραφή των μαθηματικών πτυχών που μιλούν υπέρ ή κατά μιας συγκεκριμένης απόφασης. Απαιτεί συγκεκριμένη και κατάλληλη εφαρμογή μαθηματικών σχέσεων και χαρακτηριστικών, κανόνων, καθώς και σωστή χρήση της μαθηματικής γλώσσας. Εδώ η Graciñ χρησιμοποιεί τον όρο «συλλογιστική» (reasoning) για να εκφράσει τη σειρά των αληθών επιχειρημάτων που οδηγούν σε ένα συμπέρασμα.

Όπως στη διάσταση περιεχομένου, έτσι και σε ό,τι αφορά τις δραστηριότητες, είναι λογικό μία εργασία να περιλαμβάνει δύο ή και περισσότερες δραστηριότητες. Και σε αυτήν την περίπτωση εξετάστηκε ποια είναι η κυρίαρχη δραστηριότητα ή η πιο πρόσφατα διδαγμένη, και στην οποία το σχολικό εγχειρίδιο προσπαθεί να εμπλέξει ενεργά το μαθητή. Για παράδειγμα, στην εικόνα 5 φαίνονται οι ασκήσεις 34 και 35 του

τετραδίου εργασιών της σειράς «In Step Maths» της Σιγκαπούρης. Οι μαθητές πρέπει να μελετήσουν το γράφημα και να απαντήσουν κατάλληλα.

The following line graph shows the number of eggs hatched in a farm over 5 weeks. Study the graph and answer Questions 34 – 35.



Ερμηνεία H3

34. What was the total number of eggs hatched over these 5 weeks?

Ans: _____

35. What percentage of all the eggs were hatched in weeks 4 and 5? Υπολογισμός H2


Ans: _____

Εικόνα 5. Παράδειγμα εφαρμογής της διάστασης δραστηριότητας (H) του εργαλείου ανάλυσης μαθηματικών εργασιών της Gracin (2018), σε άσκηση του « In Step Maths», Τετράδιο Εργασιών, τεύχος B2, σελ. 60, 2006.

Στον κάθετο άξονα φαίνεται ο αριθμός των αυγών που εκκολάφθηκαν σε μία φάρμα και στον οριζόντιο άξονα ο χρόνος, δηλαδή 5 συνολικά εβδομάδες. Η εργασία 34 ζητάει να βρεθεί το σύνολο της ποσότητας αυγών που εκκολάφθηκαν και τις 5 εβδομάδες. Με μία πρώτη ματιά, η εργασία λύνεται με πρόσθεση των ποσοτήτων των αυγών. Όμως η λύση δεν απαιτεί μόνο αυτή την απλή πράξη. Το πρώτο που πρέπει να κάνει ο μαθητής για να εντοπίσει τους αριθμούς και να επιλέξει να τους προσθέσει, είναι η ορθή ερμηνεία του γραφήματος. Απαιτούνται λοιπόν δύο είδη δραστηριότητας, η ερμηνεία (H3) και ο υπολογισμός (H2). Καθώς όμως το κεφάλαιο αφορά τα στατιστικά δεδομένα, τις αναπαραστάσεις τους και τα ποσοστά, η παρατήρηση του γραφήματος (ερμηνεία) αναδεικνύεται ως πιο κρίσιμη δραστηριότητα από τον υπολογισμό. Αντίθετα, στην άσκηση 35, η ερμηνεία έχει ήδη πραγματοποιηθεί. Εδώ ζητείται το ποσοστό των αυγών που εκκολάφθηκαν την 4^η και την 5^η εβδομάδα σε

σχέση με το σύνολο. Στην περίπτωση αυτή, η βαρύτητα βρίσκεται στο να μπορέσει ο μαθητής να σκεφτεί και να εκτελέσει τη σωστή ακολουθία πράξεων (H2) που θα τον οδηγήσουν στην απάντηση και όχι η ερμηνεία του γραφήματος, αφού τα δεδομένα έχουν ήδη αποκωδικοποιηθεί στην εργασία 34.

ΕΠΙΠΕΔΑ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑΣ ΜΕ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

K1	Εφαρμογή	Το κυλικείο για να προμηθευτεί 25 λουκουμάδες πλήρωσε 27.5 €. Πόσα ακόμα θα πληρώσει, αν θέλει να προμηθευτεί άλλους 5; Χρησιμοποίησε την αναγωγή στη μονάδα.
K2	Συνδέσεις	Ο Χρήστος περπατάει μια διαδρομή 450 μέτρων για να πάει στο σχολείο, με ταχύτητα 1,25 μ. το δευτερόλεπτο. Σημείωσε στην παρακάτω γραμμή σε ποιο σημείο θα βρίσκεται στα πρώτα 3 λεπτά της διαδρομής του. 
K3	Στοχασμός	Πώς μπορείς να κόψεις ένα κέικ με σχήμα ορθογωνίου παραλληλογράμμου 4 φορές, έτσι ώστε κάθε κομμάτι να είναι το $\frac{1}{12}$ του γλυκού;

Πίνακας 2. Παραδείγματα ασκήσεων για τις τρεις κατηγορίες της διάστασης των επιπέδων πολυπλοκότητας (K) του εργαλείου ανάλυσης μαθηματικών εργασιών της Graciñ (2018).

Ορισμένες μαθηματικές εργασίες μπορούν να έχουν το ίδιο περιεχόμενο (I) και να προκαλούν την ίδια δραστηριότητα (H), αλλά να διαφέρουν ως προς τη γνωστική πολυπλοκότητα. Το πεδίο πολυπλοκότητας χωρίζεται σε: (K1) άμεση εφαρμογή βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων, (K2) κατασκευή και αντιμετώπιση συνδέσεων, (K3) στοχασμό ή εφαρμογή αναστοχαστικής γνώσης. Το K1 περιλαμβάνει αναπαραγωγή ή άμεση εφαρμογή μαθηματικών εννοιών, κανόνων, διαδικασιών και αναπαραστάσεων. Τα πλαίσια είναι οικεία και απαιτείται γνώση που έχει ήδη χρησιμοποιηθεί, συνήθως με εφαρμογή τυποποιημένων αλγορίθμων. Το K2 αναφέρεται σε πιο σύνθετες εργασίες όπου απαιτείται να συνδυαστούν διάφορες έννοιες ή δραστηριότητες για την επίλυση μη τυπικών προβλημάτων. Περιλαμβάνει, για παράδειγμα, σε λιγότερο απλά πλαίσια, τη δημιουργία συνδέσεων μεταξύ μιας ποικιλίας όρων, θεωρημάτων, μεθόδων και παραστάσεων. Τέλος, το K3 περιέχει αναστοχασμό σε μαθηματικές ιδέες, που δεν είναι άμεσα αναγνώσιμες από το δεδομένο πρόβλημα. Αναστοχαστική γνώση σημαίνει εφαρμογή δημιουργικής γνώσης για τα μαθηματικά (Graciñ, D., 2018). Ο στοχασμός αφορά εργασίες που απαιτούν κατανόηση, προβληματισμό, δημιουργικότητα, που

σχετίζονται με τη γνώση για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων, τη γενίκευση και την αιτιολόγηση των αποτελεσμάτων (Sáenz, 2009).

Διαστάσεις: (3) τύπος απάντησης και (4) χαρακτηριστικά περιεχομένου

Με βάση το πλαίσιο για την ανάλυση εγχειριδίων ΗΠΑ και Κίνας των Zhu & Fan, σχηματίστηκαν και οι δύο τελευταίες διαστάσεις του εργαλείου ανάλυσης: ο τύπος απαντήσεων και τα χαρακτηριστικά περιεχομένου. Η διάκριση σε αυτή την περίπτωση ανάμεσα στις υποκατηγορίες των δύο διαστάσεων είναι απλούστερη. Αντίστοιχα με το πλαίσιο ανάλυσης του Pisa (2003), οι τύποι απαντήσεων (Α) κατηγοριοποιήθηκαν από τους ερευνητές σε:

A1: κλειστή δομημένη απάντηση (μία σωστή απάντηση)

A2: ανοιχτή δομημένη απάντηση (πολλές σωστές απαντήσεις)

A3: πολλαπλής επιλογής (επιλογή ανάμεσα σε 2 ή παραπάνω προτεινόμενες απαντήσεις).

Τέλος, τα χαρακτηριστικά περιεχομένου (C) αναφέρονται στο βαθμό και στους τρόπους, που οι εμπειρίες του πραγματικού κόσμου ενσωματώνονται στις εργασίες. Όταν το περιεχόμενο δεν σχετίζεται με τον πραγματικό κόσμο έχουμε (C1) ενδομαθηματικό πλαίσιο (μη εφαρμογής) π.χ. «Απλοποίησε τα παρακάτω κλάσματα.». Όταν το περιεχόμενο προκύπτει στο πλαίσιο πραγματικής κατάστασης (εφαρμογής) τότε μπορεί να είναι (C2) ρεαλιστικό (πλασματικό) πλαίσιο ή (C3) αυθεντικό πλαίσιο (Glasnovic Gracin, D., 2018). Στην πρώτη περίπτωση (C2) ταιριάζουν όσες εργασίες αναφέρονται σε μια πλαστή, εν δυνάμει πραγματική κατάσταση, π.χ. «Η Άννα με τον πατέρα της πήγαν σε ένα κατάστημα να αγοράσουν...» ή «Το φορτίο ενός φορτηγού με γαλακτοκομικά προϊόντα ζυγίζει...», κ.α.. Εάν όμως μία εργασία αφορά μία πραγματική κατάσταση, όπως είναι η εύρεση της περιμέτρου της αίθουσας που βρίσκεται ο μαθητής ή η εκτίμηση του μέσου όρου μοτοσυκλετών που περνάει ανά 10λεπτο το δρόμο που βλέπει από το παράθυρο της τάξης του, τότε πρόκειται για εργασία με αυθεντικό πλαίσιο (C3).

Διάσταση	Ερώτηση	Κατηγορίες και κωδικοί
Μαθηματικό περιεχόμενο	<i>Ποιο περιεχόμενο πρέπει να γνωρίζει ο μαθητής για να εκτελέσει την άσκηση;</i>	Αριθμοί και μετρήσεις (I1) Άλγεβρα, μεταβλητές και λειτουργικές εξαρτήσεις (I2) Γεωμετρικά σχήματα και στερεά (I3) Περιγραφική στατιστική και πιθανότητες (I4)
Μαθηματική δραστηριότητα	<i>Ποιες μαθηματικές δραστηριότητες πρέπει να ασκηθούν, ώστε να λυθεί επιτυχώς η άσκηση;</i>	Αναπαράσταση και μοντελοποίηση (H1) Υπολογισμός και πράξεις (H2) Ερμηνεία (H3) Αιτιολόγηση και επιχειρηματολογία (H4)
Επίπεδο πολυπλοκότητας	<i>Πόσο σύνθετες είναι οι γνώσεις και δεξιότητες που χρειάζονται για να εκτελεστεί η εργασία;</i>	Άμεση εφαρμογή βασικών γνώσεων / δεξιοτήτων (K1) Κατασκευή και αντιμετώπιση συνδέσεων (K2) Στοχασμός / εφαρμογή στοχαστικής γνώσης (K3)
Τύπος απάντησης	<i>Ποιον τύπο απάντησης ζητά η εργασία;</i>	Κλειστή δομημένη (A1) Ανοιχτή δομημένη (A2) Πολλαπλής επιλογής (A3)
Χαρακτηριστικά περιεχομένου	<i>Ποιο είναι το πλαίσιο του περιεχομένου της εργασίας;</i>	Ενδομαθηματικό (C1) Ρεαλιστικό (C2) Αυθεντικό (C3)

Πίνακας 3. Συνολικό επεξηγηματικό σχήμα διαστάσεων και κατηγοριών του πενταδιάστατου εργαλείου ανάλυσης εργασιών σχολικών εγχειριδίων Μαθηματικών της Gracín, (2018).

Ο πίνακας 3 περιέχει μια σύνοψη των 5 διαστάσεων του εργαλείου της Gracín και των υποκατηγοριών τους. Η κωδικοποίηση στις παρενθέσεις χρησιμοποιήθηκε για την εισαγωγή δεδομένων στα προγράμματα Excel και SPSS και αξιοποιήθηκε και στους πίνακες των αποτελεσμάτων. Συνοπτικά λοιπόν, η πρώτη διάσταση αφορά τις γνώσεις που πρέπει να έχει ένας μαθητής για να λύσει την εργασία (*μαθηματικό περιεχόμενο*) και η δεύτερη με ποιον τρόπο θα δραστηριοποιηθεί για τον ίδιο σκοπό (*μαθηματική δραστηριότητα*). Η τρίτη διάσταση εντοπίζει το πόσο πολύπλοκη είναι η επίλυση της εργασίας (*επίπεδο πολυπλοκότητας*), δηλαδή κατά πόσο οι πρακτικές που απαιτούνται είναι διαφορετικές μεταξύ τους ή / και απαιτούν ποικιλία γνώσεων. Τέλος, η τέταρτη και η πέμπτη διάσταση, αφορούν αντίστοιχα τον τρόπο που καλείται να

απαντήσει ο μαθητής (τύπος απάντησης) και το πόσο κοντά η μακριά είναι η πραγματική ζωή από το περιεχόμενο της εργασίας (χαρακτηριστικά περιεχομένου).

Η εργασία της εικόνας 6, βρίσκεται στο γ' τεύχος του τετραδίου εργασιών Μαθηματικών της Στ' τάξης, στο κεφάλαιο «Μετρώ το χρόνο» (κεφ. 51, σελ. 35). Σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί παραπάνω, η άσκηση αυτή αναλύθηκε και κωδικοποιήθηκε ως εξής:

Άσκηση 1η

Να υπολογίσεις με τον νου και να μετατρέψεις τους παρακάτω συμμιγείς αριθμούς σε λεπτά.

α) 1 ώρα 25 λ. β) 1 ώρα 40 λ. γ) 2 ώρες 25 λ. δ) 3 ώρες 50 λ.

Λύση

α)..... β) γ) δ)

Εικόνα 6. Στιγμιότυπο άσκησης, σελ. 35, Κεφάλαιο 51, τεύχος γ', Τετράδιο Εργασιών, Μαθηματικά Στ' Δημοτικού, 2009.

- Μαθηματικό περιεχόμενο → **I1** (αριθμοί και μετρήσεις), καθώς οι ώρες και τα λεπτά ανήκουν στο σύστημα μέτρησης του χρόνου.
- Μαθηματική δραστηριότητα → **H2** (υπολογισμός και πράξεις), αφού ζητείται ο μετασχηματισμός των ωρών σε λεπτά.
- Επίπεδο πολυπλοκότητας → **K1** (άμεση εφαρμογή βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων). Δεν απαιτείται κάποια σύνθετη γνώση ή δραστηριότητα.
- Τύπος απάντησης → **A1** (κλειστή δομημένη), εφόσον η απάντηση είναι μία και συγκεκριμένη.
- Χαρακτηριστικά περιεχομένου → **C1** (ενδομαθηματικό πλαίσιο). Δεν περιέχεται ρεαλιστικό ή αυθεντικό πλαίσιο. Υπάρχει μόνο η μαθηματική πραγματικότητα.

2.3. Συλλογή δεδομένων.

Για το πρώτο μέρος της έρευνας μελετήθηκαν και κωδικοποιήθηκαν συνολικά 563 εργασίες, 227 από τα ελληνικά σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» (Κασσώτης, Κλιάπης, Οικονόμου, 2009) και 336 από τη σειρά «In Step Maths» (Lai, Chong., Leong, Kee., Sin, Meng, 2006) της Σιγκαπούρης.

Για το δεύτερο μέρος, τα δεδομένα συλλέχθηκαν από τους πίνακες περιεχομένων όλων των τευχών των δύο σειρών εγχειριδίων. Στον πίνακα 4 παρουσιάζονται τα βιβλία και τα τετράδια εργασιών, από τα οποία προήλθαν τα δεδομένα που αξιοποιήθηκαν στην παρούσα έρευνα για κάθε μία από τις δύο χώρες .

Η σειρά σχολικών βιβλίων μαθηματικών της Σιγκαπούρης «In Step Maths», επιλέχθηκε με βάση το γεγονός, ότι χρησιμοποιήθηκε μέσα στο διάστημα 2006 – 2008, όταν δηλαδή ακόμα δεν είχε γίνει η διαφοροποίηση σε standard (τυπικά) και foundation (θεμελιώδη) μαθηματικά (κεφ. 1.5.). Τα ελληνικά εγχειρίδια της Στ' τάξης δεν απευθύνονται σε προχωρημένους ή μη, αλλά στο σύνολο των μαθητών. Έτσι για την ορθή σύγκρισή τους επιλέχθηκε το «In Step Maths», του οποίου και η χρήση έπαυσε με την έναρξη της διάκρισης επιπέδων το 2009. Οι σειρές βιβλίων μαθηματικών που ακολούθησαν, διαμορφώθηκαν και εγκρίθηκαν είτε μόνο για τυπικά, είτε μόνο για θεμελιώδη μαθηματικά. Ακόμα, είναι σημαντικό ότι αντιστοιχούν στα αποτελέσματα των PISA 2012, όπου η Σιγκαπούρη βρέθηκε στη 2η θέση επιδόσεων στα μαθηματικά, μετά τη Σαγκάη και την Κίνα, (μαθητές 15 ετών) και TIMSS 2010-11, όπου και πάλι ήταν στην 2η θέση μετά την Κορέα (μαθητές 13 ετών). Επίσης, αυτή η σειρά σχολικών βιβλίων είναι διαθέσιμη σε αγγλική γλώσσα και προσβάσιμη στο σύνολό της ως αρχείο (pdf) σε αρκετούς διαδικτυακούς ιστοτόπους.

Η σειρά «In Step Maths» είναι μία σειρά σχολικών εγχειριδίων και συμπληρωματικών τετραδίων εργασιών, σχεδιασμένη με βάση τις ανάγκες των μαθητών της 6^{ης} τάξης. Το μαθητικό πακέτο αποτελείται από τα βιβλία 6A και 6B και τέσσερα τεύχη εργασιών, δύο που αντιστοιχούν στο 6A και δύο για το 6B (βλ. πίνακα 4). Χρησιμοποιείται η μεθοδολογία των μαθηματικών της Σιγκαπούρης, γνωστή για τη συμβολή της στη σταθερή κορυφαία επίδοση των μαθητών της Σιγκαπούρης σε

διάσημες διεθνείς μελέτες. Επιδιώκεται μια μαθητο-κεντρική και ζωντανή προσέγγιση μέσω παρακινήσιμων ερωτήσεων και παιχνιδιών.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΕΚΔΟΣΗΣ ΣΧΟΛΙΚΩΝ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

	Ελλάδα	Σιγκαπούρη
Βιβλία	Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού - Βιβλίο μαθητή, Ο. Κασσώτη, Π. Κλιάπης, Θ. Οικονόμου, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος», 2009	In Step Maths , Textbook 6A, Lai, Chee Chong., Leong, Weng Kee., Sin, Kwai Meng, Singapore, SNP Panpac, 2006 In Step Maths, Textbook 6B, Lai, Chee Chong., Leong, Weng Kee., Sin, Kwai Meng, Singapore, SNP Panpac, 2006
Τετράδια εργασιών	Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού - Τετράδιο Εργασιών, α' τεύχος, Ο. Κασσώτη, Π. Κλιάπης, Θ. Οικονόμου, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος», 2009	In Step Maths, Workbook 6A, part 1, Lai, Chee Chong., Leong, Weng Kee., Sin, Kwai Meng, Singapore, SNP Panpac, 2006
	Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού - Τετράδιο Εργασιών, β' τεύχος, Ο. Κασσώτη, Π. Κλιάπης, Θ. Οικονόμου, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος», 2009	In Step Maths, Workbook 6A, part 2, Lai, Chee Chong., Leong, Weng Kee., Sin, Kwai Meng, Singapore, SNP Panpac, 2006
	Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού - Τετράδιο Εργασιών, γ' τεύχος, Ο. Κασσώτη, Π. Κλιάπης, Θ. Οικονόμου, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος», 2009	In Step Maths, Workbook 6B, part 1, Lai, Chee Chong., Leong, Weng Kee., Sin, Kwai Meng, Singapore, SNP Panpac, 2006
	Μαθηματικά ΣΤ' Δημοτικού - Τετράδιο Εργασιών, δ' τεύχος, Ο. Κασσώτη, Π. Κλιάπης, Θ. Οικονόμου, Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος», 2009	In Step Maths, Workbook 6B, part 2, Lai, Chee Chong., Leong, Weng Kee., Sin, Kwai Meng, Singapore, SNP Panpac, 2006

Πίνακας 4. Στοιχεία έκδοσης όλων των τευχών των σχολικών εγχειριδίων «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» και «In Step Maths», που μελετήθηκαν στην παρούσα εργασία.

Η βασική δομή κάθε κεφαλαίου ξεκινάει με τις δραστηριότητες προθέρμανσης (Warm Up) που περιέχουν ευκαιρίες για δημιουργική εισαγωγή μαθηματικών εννοιών. Ακολουθεί η ενότητα «Stop-Think-Go» που αποτελείται από ερωτήσεις που απαιτούν από τους μαθητές να αναλογιστούν και να εφαρμόσουν αυτά που μόλις έμαθαν. Έπειτα, το «Work It Out» επιτρέπει στους δασκάλους να αξιολογήσουν την κατανόηση των

βασικών μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές. Στη συνέχεια, ο εμπλουτισμός (Enrichment) εμπλέκει τους μαθητές με εργασίες που είναι ευχάριστες και προωθούν δεξιότητες δημιουργικής και κριτικής σκέψης. Τέλος, η ανασκόπηση (Wrap-Up) ανακεφαλαιώνει τις βασικές έννοιες που διδάχθηκαν στο κεφάλαιο.

Τα «*Μαθηματικά Στ' Δημοτικού*» είναι η σειρά εγχειριδίων μαθηματικών του αντίστοιχου ηλικιακού επιπέδου (Στ' τάξη) που χρησιμοποιείται στα ελληνικά σχολεία από το 2009 έως και σήμερα (2024). Αποτελείται από ένα βιβλίο μαθητή και από τέσσερα τεύχη τετραδίων εργασιών. Η σειρά έχει σχεδιαστεί για να προκαλεί τον μαθητή να «κατασκευάζει δυναμικά τη γνώση» μέσω ειδικά διαμορφωμένων εργασιών και όχι να είναι απλός αποδέκτης πληροφοριών (σελ.9, Βιβλίο Δασκάλου, Κασσώτης, et al, 2005).

Κάθε κεφάλαιο ξεκινά με εργασίες μέσα από τις οποίες ο μαθητής μπορεί να προσεγγίσει τη νέα γνώση. Στο δεύτερο μέρος περιέχονται σημαντικές πληροφορίες συνοδευόμενες από παραδείγματα, ώστε να μπου σωστές βάσεις. Έπειτα, ακολουθούν παραδείγματα λυμένων εργασιών, τα οποία εμφανίζουν περιπτώσεις και καταστάσεις στις οποίες η νέα πρακτική είναι χρήσιμη, αλλά υποδεικνύουν και τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να εφαρμοστεί. Κάθε κεφάλαιο ολοκληρώνεται με τις «Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση», όπου ελέγχεται ο βαθμός αφομοίωσης των κύριων όρων και εννοιών.

Από την ύλη των δύο παραπάνω σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών επιλέχθηκαν έξι κοινά κεφάλαια, με την επιδίωξη να υπάρξει ένα τουλάχιστον ένα κεφάλαιο για καθεμία από τις κατηγορίες περιεχομένου (I) της Gracin (βλ. πίνακα 3). Καταγράφηκαν και αναλύθηκαν όλες οι εργασίες κάθε κεφαλαίου, όσες βρίσκονται στο βιβλίο μαθητή, αλλά και όσες υπάρχουν στα τετράδια εργασιών. Παρακάτω, ακολουθεί αναλυτική περιγραφή του πλήθους και των ειδικών περιπτώσεων των δεδομένων, που συμπεριλήφθηκαν στην παρούσα συγκριτική μελέτη, ανά κεφάλαιο.

1. Χρόνος (I1).

Όσον αφορά τις μονάδες μέτρησης (I1), το ελληνικό εγχειρίδιο διαθέτει κεφάλαια για το μήκος, το βάρος, τον χρόνο και τα ευρώ. Από την άλλη πλευρά, η σειρά «In Step Maths», έχει μια ενότητα με τίτλο «Time and Speed», όπου συνδυάζει τη μονάδα μέτρησης του χρόνου με την έννοια της ταχύτητας. Ενδιαφέρον είναι, ότι το εγχειρίδιο δεν διαθέτει άλλα κεφάλαια αφιερωμένα σε μονάδες μέτρησης. Ωστόσο, στοιχεία και πρακτικές μετρήσεων μήκους, βάρους, χρόνου και νομίσματος, εμπεριέχονται σε αρκετές δραστηριότητες όλων των ενοτήτων του εγχειριδίου. Για την ορθή συγκριτική ανάλυση των εργασιών σχετικά με το κεφάλαιο του χρόνου, εξαιρέθηκαν οι σελίδες που αφορούσαν την έννοια της ταχύτητας, καθώς αυτή δεν περιέχεται στο ελληνικό εγχειρίδιο. Έτσι από τα «Μαθηματικά της Στ' Δημοτικού», μελετήθηκαν 6 εργασίες από το βιβλίο (σελ. 23-24) και 8 εργασίες από το γ' τεύχος τετραδίων εργασιών (σελ. 35-36). Αντίστοιχα, από το εγχειρίδιο της Σιγκαπούρης, μελετήθηκαν 14 εργασίες από α' τεύχος του βιβλίου (σελ. 74 - 79) και 7 εργασίες από το β' τεύχος (6A, μέρος 2) τετραδίων εργασιών (σελ. 35 – 37).

2. Λόγοι και Ανάλογα ποσά (I2).

Για αυτή τη θεματική, από τα «Μαθηματικά της Στ' Δημοτικού», μελετήθηκαν 34 εργασίες από το βιβλίο (σελ. 73-86) και 43 εργασίες από το γ' τεύχος τετραδίων εργασιών (σελ. 29-40). Αντίστοιχα, από το εγχειρίδιο της Σιγκαπούρης, μελετήθηκαν 47 εργασίες από α' τεύχος του βιβλίου (σελ. 1 - 14) και 35 εργασίες από το α' τεύχος (6A, μέρος 1) τετραδίων εργασιών (σελ. 1 – 19). Σημειώνεται ότι η ενότητα «Λόγοι – Αναλογίες» στα ελληνικά εγχειρίδια περιλαμβάνει και τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, ενώ στα «In Step Maths» δεν εμφανίζονται καθόλου. Έτσι, οι σελίδες που αφορούσαν αυτό το θέμα αφαιρέθηκαν από τη μελέτη.

3. Γωνίες (I3).

Για το κεφάλαιο των γωνιών, από τα «Μαθηματικά της Στ' Δημοτικού», μελετήθηκαν 8 εργασίες από το βιβλίο (σελ. 139-142) και 13 εργασίες από το δ' τεύχος τετραδίων εργασιών (σελ. 11-14). Από το εγχειρίδιο της Σιγκαπούρης, μελετήθηκαν 32 εργασίες από β' τεύχος του βιβλίου (σελ. 1 - 14) και 29 εργασίες από το α' τεύχος (6B, μέρος 1) τετραδίων εργασιών (σελ. 1 – 19). Στη δεύτερη περίπτωση δίδεται πολύ μεγαλύτερη έκταση στους τρόπους σύγκρισης και υπολογισμού γωνιών,

γι' αυτό και υπάρχει πολύ μεγαλύτερο πλήθος εργασιών απ' ό,τι στα ελληνικά εγχειρίδια.

4. Όγκος (I3).

Οι εργασίες για το κεφάλαιο του όγκου στα «Μαθηματικά της Στ' Δημοτικού», είναι 16 στο βιβλίο μαθητή (σελ. 163-168) και 16 στο δ' τεύχος τετραδίων εργασιών (σελ. 35-40). Από την άλλη, στη σειρά της Σιγκαπούρης, υπάρχουν 40 εργασίες στο β' τεύχος του βιβλίου (σελ. 54 - 58) και 35 εργασίες στο β' τεύχος (6B, μέρος 2) τετραδίων εργασιών (σελ. 13 - 35). Και σε αυτό το κεφάλαιο εντοπίζονται περισσότερες εργασίες στα εγχειρίδια της Σιγκαπούρης.

5. Αναπαράσταση και ερμηνεία στατιστικών δεδομένων (I4).

Για αυτή τη θεματική, από τα «Μαθηματικά της Στ' Δημοτικού», μελετήθηκαν 12 εργασίες από το βιβλίο (σελ. 109-114) και 14 εργασίες από το γ' τεύχος τετραδίων εργασιών (σελ. 23-28). Αντίστοιχα, από το εγχειρίδιο της Σιγκαπούρης, μελετήθηκαν 10 εργασίες από β' τεύχος του βιβλίου (σελ. 42-48) και 12 εργασίες από το β' τεύχος (6B, μέρος 2) τετραδίων εργασιών (σελ. 1 - 12).

6. Ποσοστά (I4).

Από τα «Μαθηματικά της Στ' Δημοτικού», μελετήθηκαν 23 εργασίες από το βιβλίο (σελ. 95-104) και 35 εργασίες από το γ' τεύχος τετραδίων εργασιών (σελ. 13-22). Από το εγχειρίδιο της Σιγκαπούρης, μελετήθηκαν 35 εργασίες από α' τεύχος του βιβλίου (σελ. 22 - 34) και 41 εργασίες από το α' τεύχος (6A, μέρος 1) τετραδίων εργασιών (σελ. 25 - 43).

Σημαντικό είναι να αναφερθεί εδώ, ότι οι εργασίες στα εγχειρίδια της Σιγκαπούρης έχουν γενικότερα μεγαλύτερο πλήθος. Σε αρκετά σημεία, οι συγγραφείς των «Μαθηματικών Στ' Δημοτικού», αναθέτουν περισσότερες από μία ασκήσεις, στο πλαίσιο μίας εργασίας με μορφή υποερωτημάτων. Ακόμα και με αυτή την πληροφορία όμως, ο όγκος εργασιών για τα «In Step Maths» είναι σημαντικά μεγαλύτερος. Για την

ορθότερη εξαγωγή συμπερασμάτων, η επιλογή των κεφαλαίων για συλλογή δεδομένων βασίστηκε και σε αυτόν τον παράγοντα. Προτιμήθηκαν δηλαδή, για κάθε τύπο περιεχομένου (I), τα κεφάλαια που δεν εμφάνιζαν πολύ μεγάλες αποκλείσεις πλήθους ασκήσεων ανάμεσα στα δύο εγχειρίδια. Επιπλέον, η αντιστοιχία των κεφαλαίων ανάμεσα στα δύο βιβλία μαθηματικών είναι περιορισμένη, καθώς κάποια κεφάλαια περιέχονται μόνο σε ένα από τα δύο εγχειρίδια και έτσι δεν μπορούν να διατεθούν προς σύγκριση. Με βάση τους δύο παραπάνω παράγοντες συλλέχθηκαν συνολικά 563 εργασίες, ενώ οι υπόλοιπες που ανήκαν σε κεφάλαια που δεν επιλέχθηκαν έμειναν εκτός έρευνας.

2.4. Περιγραφή ανάλυσης.

Εφαρμόζοντας το πολυδιάστατο εργαλείο ανάλυσης της Gracín (2018), εξετάστηκαν δύο σειρές σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών της 6^{ης} τάξης (μαθητές 11-12 ετών). Αντλήθηκαν δεδομένα ασκήσεων από έξι κεφάλια των «*In Step Maths*» της Σιγκαπούρης και των «*Μαθηματικών ΣΤ' Δημοτικού*» της Ελλάδας. Οι εργασίες προήλθαν τόσο από σελίδες των βιβλίων μελέτης, όσο και από τα τεύχη εργασιών. Στην έρευνα συμπεριλήφθηκαν συνολικά 563 εργασίες, οι οποίες καταγράφηκαν σε δύο υπολογιστικά φύλλα excel (ένα για κάθε σειρά εγχειριδίων) με εννέα στήλες. Για κάθε άσκηση σημειώθηκαν ο αύξων αριθμός, το εγχειρίδιο στο οποίο ανήκει, το κεφάλαιο και η σελίδα στην οποία βρίσκεται. Οι επόμενες πέντε στήλες αφορούσαν τις 5 διαστάσεις της Gracín (κεφ. 2.2.) και αποτέλεσαν τις κατηγορικές μεταβλητές. Ακολούθησε η εισαγωγή των δεδομένων στο πρόγραμμα στατιστικής ανάλυσης IBM SPSS Statistics (Statistical Package for the Social Sciences) και η εξαγωγή αποτελεσμάτων.

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων της μελέτης των σχολικών εγχειριδίων «*Μαθηματικά Στ' Δημοτικού*» και «*In Step Maths*», περιλαμβάνει ποιοτική και ποσοτική έρευνα. Όσον αφορά στην ποιοτική διερεύνηση, αξιοποιήθηκαν οι πέντε διαστάσεις του εργαλείου ανάλυσης της Gracín (2018). Αυτές διαμόρφωσαν ένα σύστημα ποιοτικών χαρακτηριστικών για κάθε εργασία που μελετήθηκε. Όπως περιγράφεται αναλυτικά στο κεφάλαιο 2.2, κάθε εργασία πέρασε από το φίλτρο πέντε κατηγορικών μεταβλητών: τύπος περιεχομένου (I1, I2, I3 ή I4), είδος δραστηριότητας

(H1, H2, H3 ή H4), επίπεδο πολυπλοκότητας (K1, K2 ή K3), τύπος απάντησης (A1, A2 ή A3) και πλαίσιο περιεχομένου (C1, C2 ή C3). Στο μέρος που αφορά στην ποσοτική περιγραφή, τα δεδομένα εντάχθηκαν σε πίνακες συχνοτήτων διπλής εισόδου (cross-tabulation tables). Σε αυτούς παρουσιάζονται τα ποσοτικά στοιχεία, για τα δύο βασικά αντικείμενα που συγκρίνονται, τις εργασίες των ελληνικών σχολικών εγχειριδίων και της σχολικής σειράς μαθηματικών της Σιγκαπούρης.

Ο έλεγχος εγκυρότητας της διαφορετικότητας των δύο σχολικών εγχειριδίων, αναφορικά με τις πέντε διαστάσεις των εργασιών, πραγματοποιήθηκε με chi-square test, για κάθε μία διάσταση ξεχωριστά. Σε κάθε περίπτωση το test έδειξε ότι το εγχειρίδιο και τα ποσοτικά στοιχεία κάθε διάστασης είναι εξαρτόμενα ($p < 0,05$). Τέλος, η αξιοπιστία της παρούσας μελέτης βασίζεται στην λεπτομερή ανάλυση κάθε εργασίας – δεδομένου, με τη χρήση του επικυρωμένου από ερευνητές εργαλείου της Dubravka G. Gracin (2018). Η λεπτομερής περιγραφή του (βλ. κεφάλαιο 2.2.) και οι λόγοι που το καθιστούν αξιόπιστο (βλ. κεφάλαιο 1.4.) βρίσκονται παραπάνω, στα κεφάλαια «Εισαγωγή» και «Μεθοδολογία».

Στο δεύτερο μέρος της έρευνας, συλλέχθηκαν δεδομένα από τους πίνακες περιεχομένων όλων των τευχών των δύο σειρών σχολικών βιβλίων μαθηματικών. Χρησιμοποιήθηκαν δύο υπολογιστικά φύλλα του Excel (Microsoft Office 2016), ένα για κάθε εγχειρίδιο. Σε κάθε φύλλο, δημιουργήθηκαν έξι στήλες που περιείχαν κυρίως ποσοτικά στοιχεία. Στην πρώτη αναγράφηκαν τακτικά (1^η, 2^η, 3^η, κλπ.) οι ενότητες, και, ακριβώς δίπλα, σημειώθηκε ο αριθμός κεφαλαίων που αντιστοιχεί σε κάθε μία από αυτές. Στην τρίτη στήλη τοποθετήθηκε ο αριθμός ανακεφαλαιώσεων ανά ενότητα, μαζί με τις σελίδες που καλύπτουν αυτές στο σύνολο των τευχών. Οι τρεις τελευταίες στήλες αφορούν το πλήθος σελίδων που αντιστοιχεί σε κάθε ενότητα ή σύνολο κεφαλαίων. Πρώτα παρατίθενται οι σελίδες από τα βιβλία μελέτης, έπειτα από τα τετράδια εργασιών και στην τελευταία στήλη βρίσκονται τα σύνολα των σελίδων.

Αρχικά, υπολογίστηκαν τα αθροίσματα των ενοτήτων, των κεφαλαίων, των ανακεφαλαιώσεων και των σελίδων που καλύπτουν, των σελίδων των βιβλίων μαθητή και των σελίδων τετραδίων εργασιών για κάθε σειρά εγχειριδίων. Με βάση αυτά εξάχθηκαν χρήσιμοι μέσοι όροι για τη σύγκριση της έκτασης και της οργάνωσης της

ύλης. Υπολογίστηκαν: α. ο μέσος όρος κεφαλαίων ανά ενότητα (κ.³ : ε.⁴), β. ο μέσος όρος σελίδων ανακεφαλαιώσεων ανά ενότητα (σελ. ανακ. : ε.), γ. ο μέσος όρος σελίδων ανακεφαλαιώσεων ανά κεφάλαιο (σελ. ανακ. : κ.), δ. ο μέσος όρος σελίδων βιβλίου μελέτης ανά κεφάλαιο (σελ. βιβλ. : κ.), ε. ο μέσος όρος σελίδων τετραδίων εργασιών ανά κεφάλαιο (σελ. τετ. : κ.) και ζ. ο μέσος όρος όλων των σελίδων ανά κεφάλαιο (σ.σ.⁵ : κ.). Για την παρουσίαση και σύγκριση των παραπάνω δεδομένων σχηματίστηκαν, δύο πίνακες με τα ποσοτικά στοιχεία περιεχομένου και δύο ραβδογράμματα με τους μέσους όρους των στοιχείων αυτών για κάθε εγχειρίδιο. Με βάση αυτά, πραγματοποιήθηκε περιγραφική ανάλυση και τα αποτελέσματα συμπλήρωσαν τα ευρήματα που προήλθαν από το πρώτο μέρος της έρευνας, ευνοώντας την ορθότερη εξαγωγή συμπερασμάτων.

3. Αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της έρευνας, ταξινομημένα σύμφωνα με τις πέντε διαστάσεις της Gracin (2018), με σκοπό να εντοπιστούν οι ομοιότητες και οι διαφορές των ασκήσεων στις δύο σειρές εγχειριδίων. Επιπλέον, στους πίνακες και τα διαγράμματα που περιέχονται, είναι διακριτά τα επίπεδα ποικιλομορφίας και πλούτου των εργασιών, ώστε να μπορεί να διαπιστωθεί ο βαθμός που τα συγκεκριμένα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών προσφέρουν αρκετές και ισότιμες ευκαιρίες για μάθηση μέσω εργασιών (Törnroos, 2005, Vincent & Stacey, 2008, Gracin, 2018). Τέλος, παρατίθενται τα ευρήματα που προέκυψαν από τη μελέτη και τη σύγκριση των πινάκων περιεχομένων των δύο σχολικών εγχειριδίων. Οι πληροφορίες που προκύπτουν αναδεικνύουν τα κύρια σημεία που διαφοροποιούν τη συνολική ύλη των δύο εγχειριδίων και, τελικά, την αποτελεσματικότητά τους ως εργαλεία μάθησης μαθηματικών.

³ πλήθος κεφαλαίων

⁴ πλήθος ενότητων

⁵ σύνολο σελίδων

3.1. Περιεχόμενο

Για τις περισσότερες κατηγορίες περιεχομένου (I) του εργαλείου ανάλυσης επιτεύχθηκε να μελετηθεί παρόμοιο πλήθος εργασιών ($I2 = 157$, $I3 = 189$, $I4 = 182$) με εξαίρεση το I1 (αριθμοί και μετρήσεις), όπου εξετάστηκαν μόνο 35 συνολικά εργασίες από τα δύο σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών (βλ. πίνακα 5). Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, το εγχειρίδιο μαθηματικών της Σιγκαπούρης δεν διαθέτει περισσότερα από ένα κεφάλαιο (χρόνος) αφιερωμένο σε αριθμούς και μέτρα. Σε αυτή την κατηγορία περιεχομένου επικράτησαν η δραστηριότητα του υπολογισμού (H2), το επίπεδο της απλής εφαρμογής γνώσεων (K1), ο κλειστός τύπος απάντησης (A1) και το πλασματικό πλαίσιο των ασκήσεων (C2) (βλ. διάγραμμα 1). Παρ' ότι το περιεχόμενο αυτό έχει πολύ μικρό αριθμό δεδομένων, επειδή αυτά τα αποτελέσματα ήταν παρόμοια και για τις υπόλοιπες κατηγορίες, θεωρήθηκε καλό να μην αφαιρεθούν από την έρευνα, καθώς επιβεβαιώνουν τα μοτίβα που επικρατούν, αλλά και επειδή είναι επιθυμητό να περιέχονται όλα τα είδη περιεχομένου (I) μέσα στην έρευνα.

Κι ενώ οι λιγότερες εργασίες αφορούν τα κεφάλαια «Χρόνος» και «Στατιστική», το μεγαλύτερο πλήθος εργασιών από τα έξι κεφάλαια που μελετήθηκαν σε αυτή την εργασία, βρέθηκε στα «Ανάλογα ποσά» και στα «Ποσοστά». Μάλιστα, το κεφάλαιο «Ανάλογα ποσά» περιείχε τις περισσότερες εργασίες και στα δύο σχολικά βιβλία μαθηματικών (E:76, Σ:81⁶). Έτσι, εντάχθηκε στο περιεχόμενο I2 (μεταβλητές και συναρτησιακές εξαρτήσεις), στο οποίο δεν υπήρξε ανάγκη να προστεθεί άλλο κεφάλαιο, αφού διέθετε ήδη ικανοποιητικό αριθμό ασκήσεων και στα δύο εγχειρίδια (βλ. πίνακα 5). Και σε αυτή την κατηγορία περιεχομένου, ο υπολογισμός (H2), η απλή εφαρμογή δεξιοτήτων (K1), οι κλειστού τύπου απαντήσεις (A1) και το πλασματικό ρεαλιστικό πλαίσιο (C2) κυριάρχησαν στις εργασίες (διάγραμμα 1).

⁶ Εγχειρίδια Ελλάδας: 76 ασκήσεις, Εγχειρίδια Σιγκαπούρης: 81 ασκήσεις.

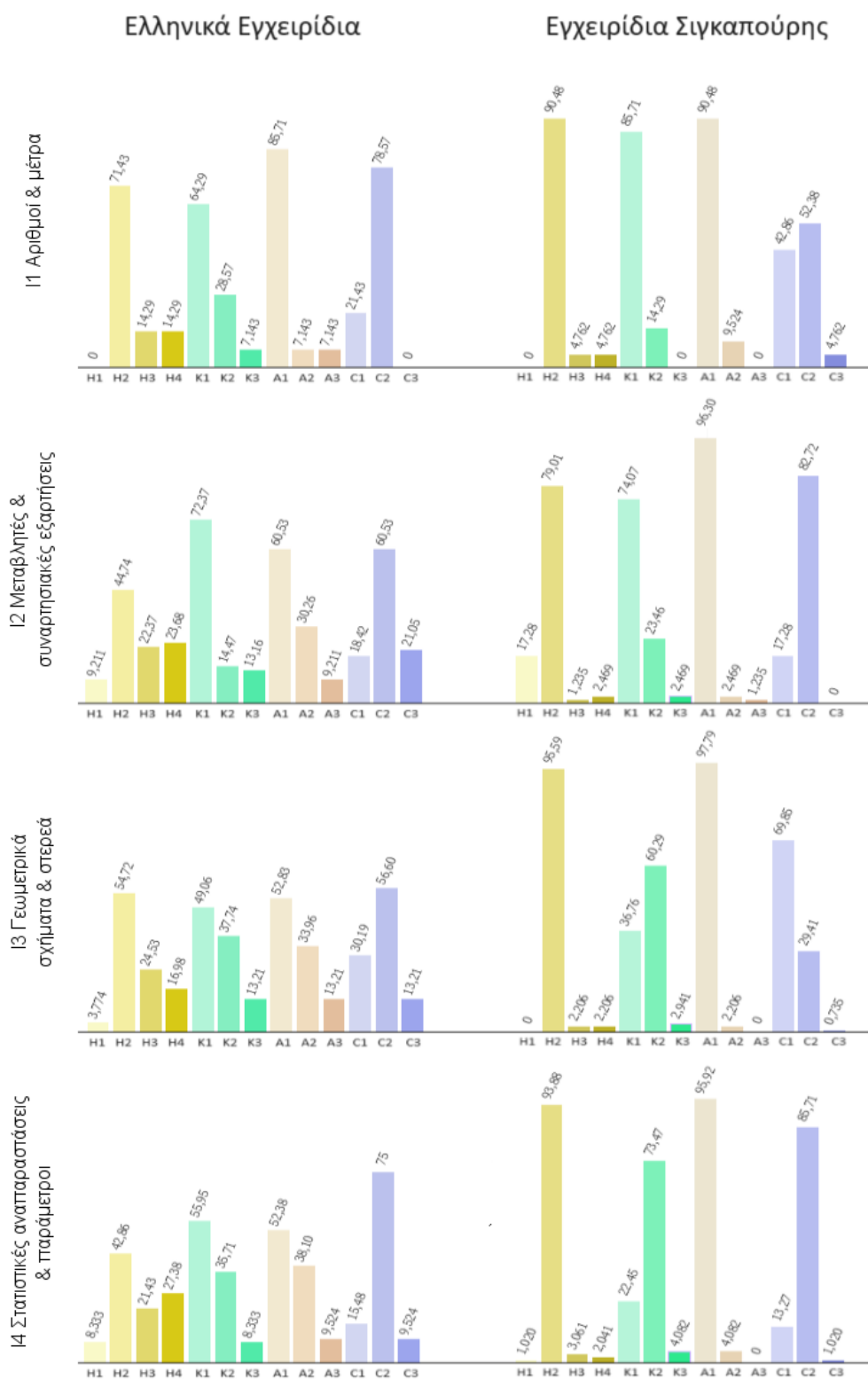
ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΛΗΘΟΥΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ - ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ

Περιεχόμενο	I1		I3		I4		Σύνολα
	Χρόνος	Αναλογία	Γωνίες	Όγκος	Στατιστική	Ποσοστά	
Κεφάλαιο							
Εγχειρίδια Ελλάδας	14 6,2 %	76 33,5 %	21 9,3 %	32 14,1 %	26 11,5 %	58 25,6 %	227
Εγχειρίδια Σιγκαπούρης	21 6,3 %	81 24,1 %	61 18,2 %	75 22,3 %	22 6,5 %	76 22,6 %	336
Σύνολα	35 6,2 %	157 27,9 %	82 14,6 %	107 19 %	48 8,5 %	134 23,8 %	563

Πίνακας 5. Πίνακας πλήθους ασκήσεων των εγχειριδίων που μελετήθηκαν, ανά περιεχόμενο (I) και ανά κεφάλαιο.

Προχωρώντας στο περιεχόμενο των γεωμετρικών σχημάτων και στερεών (I3), τα δεδομένα αντλήθηκαν από δύο κεφάλαια και αναλύθηκαν συνολικά 189 εργασίες. Ωστόσο, εδώ υπήρξε σημαντική διαφορά πλήθους εργασιών ανάμεσα στα εγχειρίδια των δύο χωρών, τόσο στο κεφάλαιο των γωνιών, όσο και στο κεφάλαιο του όγκου. Από τις 189 εργασίες, οι 136 προέρχονται από τα «In Step Maths», ενώ μόλις 53 από τα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού». Σημαντικό είναι ότι, σε αντίθεση με τις εργασίες της πρώτης σειράς, αυτές που περιέχονται στα ελληνικά εγχειρίδια έχουν συχνά πολλαπλά υποερωτήματα. Ακόμα όμως και με αυτή την ιδιαιτερότητα, ο αριθμός των εργασιών στα «In Step Maths», ιδιαίτερα στο κεφάλαιο των γωνιών, είναι αρκετά μεγαλύτερος. Για ακόμα μία φορά, στα ελληνικά εγχειρίδια υπερισχύουν ο υπολογισμός (H2) και η απλή εφαρμογή γνώσεων και δραστηριοτήτων (K1), ο κλειστός τύπος απάντησης (A1) και το πλασματικό πλαίσιο (C2) (διάγραμμα 1). Τα «In Step Maths» όμως, εμφανίζουν δύο ευδιάκριτες (βλ. διάγραμμα 1) διαφορές. Έτσι, ως προς το επίπεδο πολυπλοκότητας απαιτείται περισσότερο η δημιουργία και η αντιμετώπιση συνδέσεων (K2), ενώ το πλαίσιο των ασκήσεων είναι κυρίως ενδομαθηματικό (C1).

ΠΟΣΟΣΤΑ ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ ΑΝΑ ΠΕΡΙΧΟΜΕΝΟ



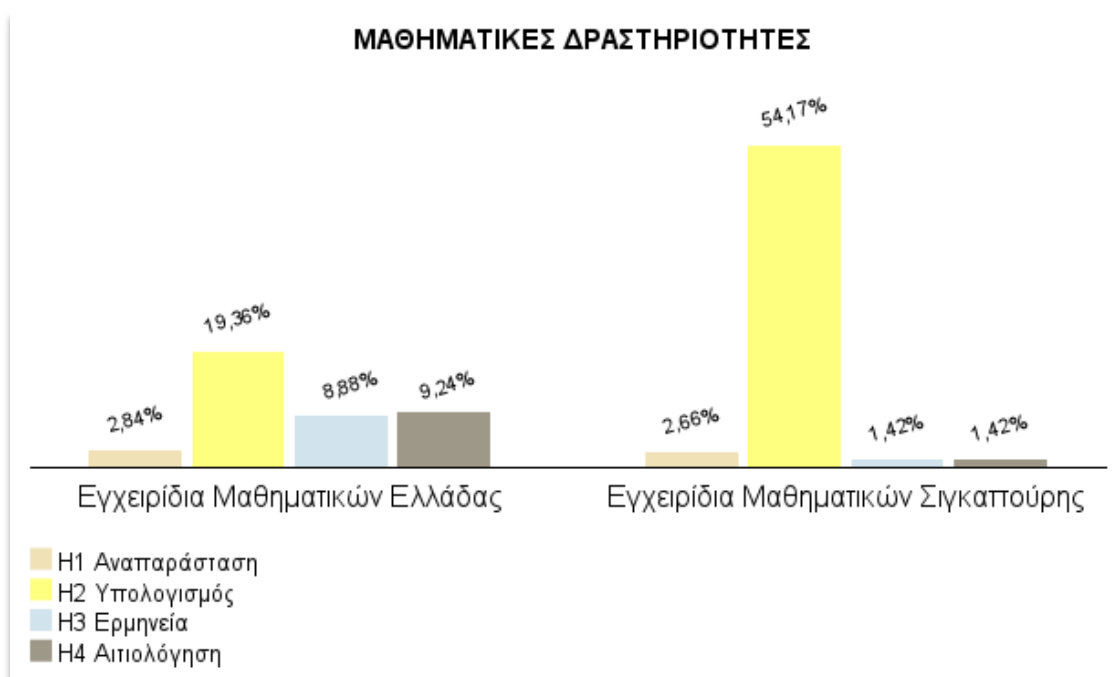
Διάγραμμα 1. Ραβδόγραμμα ποσοτών (%) συσχέτισης της διάστασης περιεχομένου (I) με τις υπόλοιπες τέσσερις διαστάσεις (H, K, A, C) του πενταδιάστατου εργαλείου της Gracin (2018), ανά σχολικό εγχειρίδιο.

Η τελευταία κατηγορία περιεχομένου (I4) που μελετήθηκε αφορά τις στατιστικές αναπαραστάσεις και τις παραμέτρους. Σε αυτήν ανήκουν τα κεφάλαια της «Στατιστικής» και των «Ποσοστών», από τα οποία αναλύθηκαν συνολικά 182 εργασίες και από τα δύο εγχειρίδια ($E = 84$, $\Sigma = 98$). Τα είδη δραστηριοτήτων που απαιτούνται στα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» έχουν μικρές ανισότητες μεταξύ τους με κορυφαίο και πάλι τον υπολογισμό (H2). Για τα «In Step Maths» κυριαρχεί η ίδια δραστηριότητα, αλλά ενεργοποιείται για το 95,9 % των εργασιών. Στο επίπεδο πολυπλοκότητας (K), εντοπίζονται επίσης διαφορές, καθώς στα πρώτα οι εργασίες εκτελούνται κυρίως με απλή εφαρμογή γνώσεων (K1), ενώ στα δεύτερα επικρατεί με διαφορά η αξιοποίηση συνδέσεων (K2) (βλ. διάγραμμα 1). Σχετικά με το πλαίσιο περιεχομένου εμφανίζεται με μεγαλύτερα ποσοστά και στα δύο βιβλία το τεχνητό ρεαλιστικό (C2). Τέλος, όσον αφορά στον τύπο απάντησης, ζητούνται και στα δύο σχολικά εργαλεία περισσότερο οι κλειστές δομημένες απαντήσεις (A1) (βλ. διάγραμμα 1).

Η ανάλυση των αποτελεσμάτων, με βάση το είδος περιεχομένου (I), οδηγεί στη διαπίστωση ότι το πλήθος των εργασιών που συλλέχθηκαν από τα επιλεγμένα κεφάλαια είναι αρκετά μεγαλύτερο στα εγχειρίδια της Σιγκαπούρης. Επιπλέον, τουλάχιστον για τρία από τα τέσσερα είδη περιεχομένου (I2, I3, I4), μπορεί να εξαχθεί το συμπέρασμα, ότι τα ελληνικά εγχειρίδια παρουσιάζουν περισσότερη ποικιλομορφία στις κατηγορίες των διαστάσεων δραστηριότητας (H), πολυπλοκότητας (K), απάντησης (A) και πλαισίου (C) (βλ. διάγραμμα 1). Από την άλλη τα βιβλία μαθηματικών της Σιγκαπούρης υπερτερούν σε επίπεδο πολυπλοκότητας, καθώς σε δύο από τα είδη περιεχομένου (I3 και I4) επικρατούν οι εργασίες που απαιτούν δημιουργία και αντιμετώπιση συνδέσεων (K2). Στη συνέχεια της παρουσίασης των αποτελεσμάτων υπό το πρίσμα του περιεχομένου (I), είναι απαραίτητη η παράθεση των συμπληρωματικών πληροφοριών που προκύπτουν από την οπτική των υπολοίπων τεσσάρων διαστάσεων.

3.2. Δραστηριότητα

Τα αποτελέσματα που αφορούν τη διάσταση της δραστηριότητας (H) παρουσιάζονται συνοπτικά στο διάγραμμα 2, ανά εγχειρίδιο, και πιο αναλυτικά στον πίνακα 6, ανά κεφάλαιο εγχειριδίου. Από το διάγραμμα είναι φανερή η επικράτηση της δραστηριότητας του υπολογισμού (H2) και για τα δύο βιβλία. Ωστόσο τα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» παρουσιάζουν μεγαλύτερη ποικιλία δραστηριοτήτων, καθώς οι διαφορές μεταξύ του επικρατούντος και των υπόλοιπων ποσοστών είναι πιο μικρές από ότι στα «In Step Maths». Μάλιστα στα πρώτα, εάν αθροίσουμε τα H1, H3 και H4 φτάνουν το 20,96 %, το οποίο ξεπερνά το 19,36 % που συγκεντρώνει η δραστηριότητα του υπολογισμού (H2). Αντίθετα, για τα εγχειρίδια της Σιγκαπούρης, το 5,5 % που σχηματίζουν και οι τρεις αυτές δραστηριότητες μαζί, καλύπτει μόλις 1/10 περίπου του 54,17 %, που αφορά το H2 (βλ. διάγραμμα 2). Έτσι, τα εγχειρίδια αυτής της χώρας εμφανίζουν σημαντικά φτωχότερη ποικιλομορφία στους τύπους δραστηριοτήτων, σε σύγκριση με τα ελληνικά εγχειρίδια.



Διάγραμμα 2. Συνολικό ραβδόγραμμα αποτελεσμάτων της διάστασης δραστηριότητας (H) για τα εγχειρίδια μαθηματικών της Ελλάδας (Μαθηματικά Στ' Δημοτικού) και της Σιγκαπούρης (In Step Maths).

Το παραπάνω συμπέρασμα μπορεί να στηριχθεί και στα στοιχεία του πίνακα 7. Από τα «In Step Maths» προκύπτουν και για τα έξι κεφάλαια ακραία ποσοστά. Πιο συγκεκριμένα, πολύ υψηλά είναι αυτά που αφορούν την δραστηριότητα του υπολογισμού (H2) και κυμαίνονται από 79 έως 98,7 %, και αντίστοιχα, μηδενικά ή πολύ χαμηλά είναι τα στατιστικά στοιχεία για τις υπόλοιπες δραστηριότητες (0 – 17,3 %). Αντίθετα, τα σχολικά βιβλία μαθηματικών της Ελλάδας παρουσιάζουν ηπιότερα ποσοστά, ενώ μηδενικές τιμές εμφανίζονται μόνο στο *χρόνο* και στις *γωνίες*. Μάλιστα στο κεφάλαιο του *χρόνου*, όπως προαναφέρθηκε, εξαιτίας του μικρού πλήθους ασκήσεων τα συμπεράσματα είναι αμφίβολα. Σημαντικό λοιπόν είναι το γεγονός ότι σε όλα τα κεφάλαια των «In Step Maths», οι αριθμοί που αφορούν την H2 δραστηριότητα είναι εξαιρετικά υψηλοί, γιατί επιπλέον αναδεικνύει την έμφαση που δίδεται στην εκτέλεση αλγορίθμων και υπολογιστικών διαδικασιών σε αυτά τα σχολικά βιβλία.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

I	ΚΕΦΑΛΑΙΑ	Εγχειρίδια Ελλάδας				Εγχειρίδια Σιγκαπούρης			
		H1	H2	H3	H4	H1	H2	H3	H4
I1	Χρόνος	0	10	2	2	0	19	1	1
		0 %	71.4 %	14,3 %	14,3 %	0 %	90.5 %	4,8 %	4,8 %
I2	Ανάλογα ποσά	7	34	17	18	14	64	1	2
		9,2 %	44,7 %	22,4 %	23,7 %	17,3 %	79 %	1,2 %	2,5 %
I3	Γωνίες	0	10	7	4	0	60	0	1
		0 %	47,6 %	33,3 %	19 %	0 %	98,4 %	0 %	1,6 %
	Όγκος	2	19	6	5	0	70	3	2
		6,3 %	59,4 %	18,8 %	15,6 %	0 %	90,5 %	4,8 %	4,8 %
I4	Στατιστική	6	4	9	7	1	17	3	1
		21,3 %	15,4 %	34,6 %	26,9 %	0 %	93,3 %	4 %	2,7 %
	Ποσοστά	1	32	9	16	0	75	0	1
		1,7 %	55,2 %	15,5 %	27,6 %	0 %	98,7 %	0 %	1,3 %

Πίνακας 6. Αναλυτικά αποτελέσματα της διάστασης δραστηριότητας (H) για τα εγχειρίδια μαθηματικών της Ελλάδας (Μαθηματικά Στ' Δημοτικού) και της Σιγκαπούρης (In Step Maths), ανά περιεχόμενο (I) και κεφάλαιο.

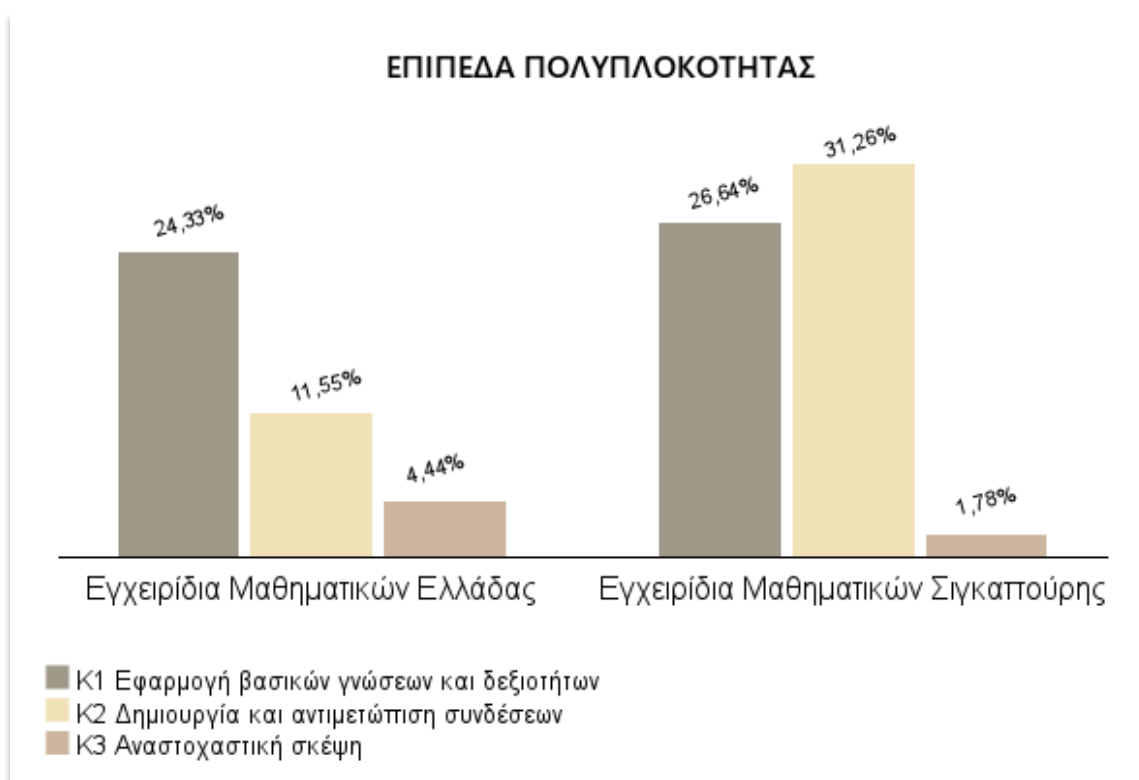
Λιγότερο δημοφιλείς κατηγορίες δραστηριότητας, όπως φαίνεται στο διάγραμμα 2, είναι για τα ελληνικά εγχειρίδια η αναπαράσταση (H1) με 2,84 % και για τη σειρά της Σιγκαπούρης η ερμηνεία (H3) και η αιτιολόγηση (H4) με 1,42 %.. Ωστόσο, στη δεύτερη περίπτωση, εάν δεν υπήρχε το ποσοστό (17,3%) που συγκεντρώνεται στο κεφάλαιο των *ανάλογων ποσών* για την δραστηριότητα της αναπαράστασης (H1), αυτή δεν θα είχε το μικρό αυτό προβάδισμα έναντι των H3 και H4, αφού σε κάθε ένα από τα υπόλοιπα κεφάλαια η H1 έχει μηδενική τιμή (βλ. πίνακα 6). Έτσι, τελικά η δραστηριότητα της αναπαράστασης φαίνεται ότι έχει την πιο αδύναμη παρουσία στα εγχειρίδια, ενώ η δραστηριότητα του υπολογισμού την πιο δυνατή. Τέλος, σε μέτρια επίπεδα είναι η ερμηνεία (H3) και η αιτιολόγηση (H4) για τα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού», ενώ πολύ χαμηλά βρίσκονται οι ίδιες δραστηριότητες στα «In Step Maths».

Για τη διάσταση των δραστηριοτήτων, με λίγα λόγια, μπορεί να αναφερθεί ότι η επικρατούσα δραστηριότητα στα σχολικά εγχειρίδια που μελετήθηκαν είναι αυτή του υπολογισμού (H2). Αυτό προκύπτει με μεγάλες αποκλείσεις των μετρήσεων για τα βιβλία της Σιγκαπούρης και με μέτριες για τα βιβλία της Ελλάδας. Συνεπώς, είναι σαφής η καλύτερη ισορροπία των διαφορετικών ειδών δραστηριοτήτων για τις εργασίες που περιέχονται στα τελευταία. Έπειτα, σε μικρότερο πλήθος εργασιών απαντάται η δραστηριότητα της αναπαράστασης (H1) για τα ελληνικά εγχειρίδια. Κι ενώ για τη σχολική σειρά μαθηματικών της Σιγκαπούρης η ερμηνεία (H3) και η αιτιολόγηση (H) έχουν τα χαμηλότερα ποσοστά, το ποσοστό της αναπαράστασης (H1) είναι πολύ κοντά σε αυτά, υποδηλώνοντας την μικρή έκταση που έχει δοθεί συνολικά και στα δύο βιβλία για αυτή τη δραστηριότητα.

3.3. Επίπεδο πολυπλοκότητας

Τα αποτελέσματα που αφορούν την πολυπλοκότητα (K) των εργασιών στα εγχειρίδια μαθηματικών των δύο χωρών παρουσιάζονται συνοπτικά στο διάγραμμα 3 και πιο αναλυτικά στον πίνακα 7. Από τη μελέτη των παραπάνω, γίνονται αντιληπτά τα χαμηλά ποσοστά των ασκήσεων που απαιτούν αναστοχαστική σκέψη (K3) και για τα δύο βιβλία, κάτι που επιβεβαιώνεται και από το διάγραμμα 1. Από την άλλη, φανερό

είναι το ισχυρό πλήθος των εργασιών, που για να εκτελεστούν χρειάζονται απλή εφαρμογή βασικών γνώσεων και δεξιοτήτων (K1), το οποίο ωστόσο είναι επικρατές μόνο στα ελληνικά εγχειρίδια. Στην περίπτωση των σχολικών βιβλίων μαθηματικών την Σιγκαπούρης, στην πρώτη θέση βρίσκεται το επίπεδο της δημιουργίας και της αντιμετώπισης συνδέσεων (K2). Ενδιαφέρον είναι ότι μόνο τα περιεχόμενα I3 και I4 εμφανίζουν υψηλότερα ποσοστά για το K2, ενώ στα υπόλοιπα επικρατεί η απλή εφαρμογή βασικών γνώσεων (K1) (βλ. διάγραμμα 1). Ακόμα πιο αναλυτικά, περιγράφονται τα στατιστικά στοιχεία στον πίνακα 7, όπου φαίνεται ότι τα κεφάλαια «Γωνίες», «Στατιστική» και «Ποσοστά» ήταν αυτά στα οποία καταγράφηκαν οι περισσότερες εργασίες επιπέδου K2.



Διάγραμμα 3. Συνολικό ραβδόγραμμα αποτελεσμάτων της διάστασης επιπέδων πολυπλοκότητας (K) για τα εγχειρίδια μαθηματικών της Ελλάδας (Μαθηματικά Στ' Δημοτικού) και της Σιγκαπούρης (In Step Maths).

Ενώ λοιπόν τα «In Step Maths» αναθέτουν περισσότερες εργασίες με υψηλότερο επίπεδο πολυπλοκότητας, τα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» και αυτή τη φορά διατηρούν καλύτερη ισορροπία. Στα ραβδογράμματα 1 και 3 φαίνεται ότι οι διαφορές ανάμεσα στα ποσοστά για τα τρία επίπεδα ασκήσεων στα ελληνικά εγχειρίδια είναι και πάλι ηπιότερες. Ωστόσο, για τα βιβλία μαθηματικών της Σιγκαπούρης, αξίζει

να αναφερθεί ότι παρόλο που η Κ1 και η Κ2 υπερτερούν σημαντικά του Κ3 (βλ. διάγραμμα 2), αυτή τη φορά, δεν εντοπίζονται ποσοστά, της τάξης του 90 % και άνω, όπως στην περίπτωση της διάστασης δραστηριοτήτων (Η). Πιο συγκεκριμένα, η δημιουργία και η αντιμετώπιση συνδέσεων (Κ2) που επικρατεί στα εγχειρίδια της Σιγκαπούρης φτάνει το 85,7 % στο κεφάλαιο «Χρόνος» (το οποίο δεν λαμβάνουμε τόσο υπ' όψη λόγω του χαμηλού πλήθους εργασιών) και το 74,1 % στο κεφάλαιο των ανάλογων ποσών (βλ. πίνακα 7). Συγχρόνως, τα μηδενικά ή σχεδόν μηδενικά ποσοστά για τα επίπεδα πολυπλοκότητας είναι λιγότερα από αυτά που εμφανίστηκαν στη διάσταση των δραστηριοτήτων (βλ. πίνακες 6 και 7).

ΕΠΙΠΕΔΑ ΠΟΛΥΠΛΟΚΟΤΗΤΑΣ

I	ΚΕΦΑΛΑΙΑ	Εγχειρίδια Ελλάδας			Εγχειρίδια Σιγκαπούρης		
		K1	K2	K3	K1	K2	K3
I1	Χρόνος	9	4	1	18	3	0
		64,3 %	28,6 %	7,1 %	85,7 %	14,3 %	0 %
I2	Ανάλογα ποσά	55	11	10	60	19	2
		72,4 %	14,5 %	13,2 %	74,1 %	23,5 %	2,5 %
I3	Γωνίες	8	9	4	17	43	1
		38,1 %	42,9 %	19 %	27,9 %	70,5 %	1,6 %
I3	Όγκος	18	11	3	33	39	3
		56,3 %	34,4 %	9,4 %	44 %	52 %	4 %
I4	Στατιστική	15	11	0	4	15	3
		57,7 %	42,3 %	0 %	18,2 %	68,2 %	13,6 %
I4	Ποσοστά	32	19	7	18	57	1
		55,2 %	32,8 %	12,1 %	23,7 %	75 %	1,3 %

Πίνακας 7. Πίνακας αποτελεσμάτων της διάστασης επιπέδων πολυπλοκότητας (Κ) για τα εγχειρίδια μαθηματικών της Ελλάδας (Μαθηματικά Στ' Δημοτικού) και της Σιγκαπούρης (In Step Maths), ανά περιεχόμενο (I) και κεφάλαιο.

Τα παραπάνω συνεπάγονται ότι, στο κομμάτι της πολυπλοκότητας (Κ), τα βιβλία της Σιγκαπούρης εμφανίζουν μεγαλύτερη ποικιλομορφία σε σύγκριση με τη διάσταση της δραστηριότητας (Η). Από τη μελέτη των αποτελεσμάτων για την πολυπλοκότητα (Κ) διαπιστώθηκε ότι το επικρατές επίπεδο στα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» είναι αυτό της απλής εφαρμογής γνώσεων και δεξιοτήτων (Κ1), ενώ για τα «In Step Maths»

είναι η δημιουργία και η αντιμετώπιση συνδέσεων (K2). Έπειτα, το μικρότερο πλήθος ασκήσεων συνολικά και στα δύο εγχειρίδια αφορά το επίπεδο της αναστοχαστικής σκέψης (K3). Τέλος, τα εγχειρίδια μαθηματικών της Σιγκαπούρης παρουσιάζουν ένα συνολικά υψηλότερο επίπεδο πολυπλοκότητας, αλλά οι εργασίες των ελληνικών εγχειριδίων εμφανίζουν πιο ισορροπημένες διαφορές ανάμεσα στα τρία επίπεδα.

3.4. Τύπος απάντησης

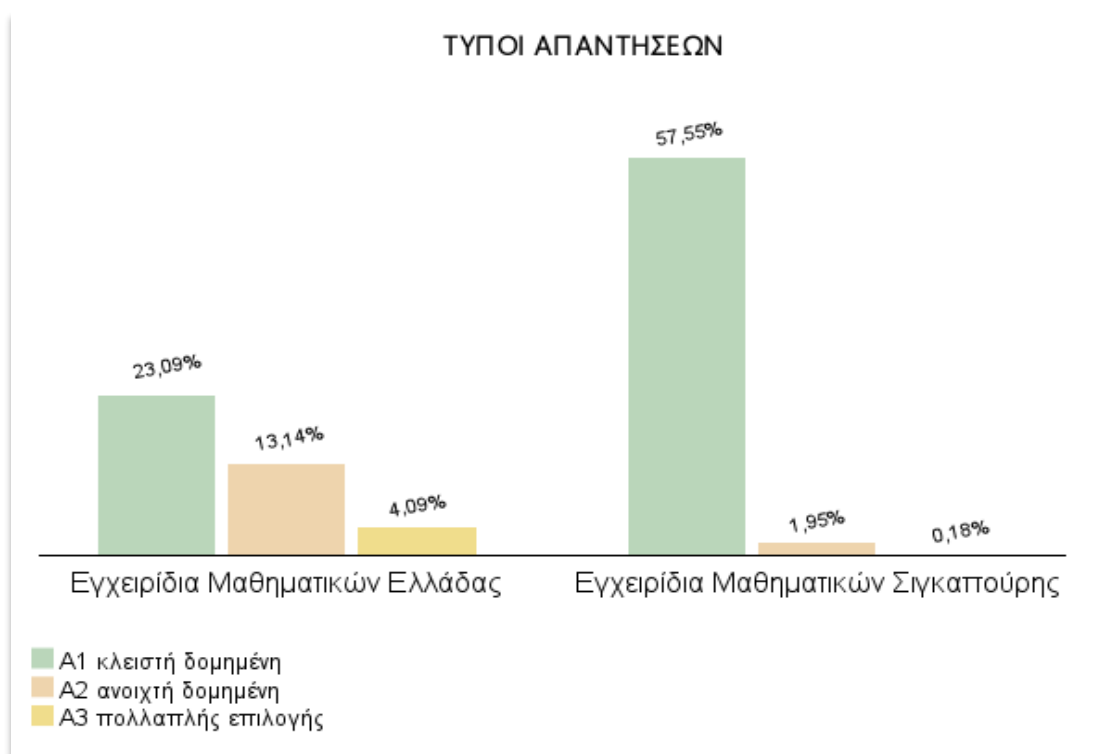
Παρατηρώντας τα αποτελέσματα που προκύπτουν για τους τύπους απαντήσεων (A) στις εργασίες που μελετήθηκαν, εύκολα εντοπίζει κανείς την κυριαρχία της κλειστής δομημένης μορφής (A1). Όπως φαίνεται στο διάγραμμα 3, και για τα δύο εγχειρίδια μαθηματικών, αυτός ο τύπος απάντησης καλύπτει το μεγαλύτερο πλήθος των δεδομένων, ενώ ακολουθούν οι ανοιχτές δομημένες απαντήσεις (A2) και τελικά, με τα μικρότερα ποσοστά, οι απαντήσεις πολλαπλής επιλογής (A3). Επιπλέον είναι ευδιάκριτη στο διάγραμμα μια ηπιότερη ανομοιομορφία στα ελληνικά εγχειρίδια, σε σχέση με τη σειρά σχολικών βιβλίων μαθηματικών της Σιγκαπούρης. Για ακόμα μια φορά τα πρώτα εμφανίζουν μικρότερες ανισοροπίες και συνεπώς μεγαλύτερη ποικιλία σε τύπους απαντήσεων από τα τελευταία.

Στον πίνακα 8, και συγκεκριμένα στα κελιά που αφορούν τις εργασίες των 'In Step Maths', εικονίζεται μια πιο λεπτομερή ανάλυση των ποσοστών για την διάσταση των απαντήσεων, ανά κεφάλαιο και περιεχόμενο (I). Εκεί είναι φανερές οι πολύ υψηλές τιμές στον τύπο κλειστής απάντησης (A1) και, από την άλλη, τα μηδενικά ποσοστά των απαντήσεων πολλαπλής επιλογής (A3). Συγκεκριμένα, για τις κλειστές δομημένες (A1) τα ποσοστά είναι σε όλα τα κεφάλαια εξαιρετικά υψηλά, αφού κυμαίνονται από 86,4 % έως και 98,7 %, το οποίο αφορά το κεφάλαιο «Ποσοστά». Στον αντίποδα, η κατηγορία των απαντήσεων πολλαπλής επιλογής (A3) εμφανίζεται μόνο σε μία εργασία στο κεφάλαιο των ανάλογων ποσών, ενώ στα υπόλοιπα κεφάλαια απουσιάζει εντελώς. Χαμηλά όμως είναι και τα ποσοστά για τις ανοιχτές δομημένες απαντήσεις (A2), αφού δεν ξεπερνούν το 13,6 % (βλ. πίνακα 8). Σε σχέση με όλες τις διαστάσεις του εργαλείου ανάλυσης της Gracin (2018), σε αυτή που αφορά τον τύπο απάντησης (A), το εγχειρίδιο της Σιγκαπούρης εμφανίζει την μικρότερη ποικιλομορφία.

ΤΥΠΟΙ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

I	ΚΕΦΑΛΑΙΑ	Εγχειρίδια Ελλάδας			Εγχειρίδια Σιγκαπούρης		
		A1	A2	A3	A1	A2	A3
I1	Χρόνος	12	1	1	19	2	0
		85,7 %	7,1 %	7,1 %	90,5 %	9,5 %	0 %
I2	Ανάλογα ποσά	46	23	7	78	2	1
		60,5 %	30,3 %	9,2 %	96,3 %	2,5 %	1,2 %
I3	Γωνίες	11	7	3	60	1	0
		52,4 %	33,3 %	14,3 %	98,4 %	1,6 %	0 %
I4	Όγκος	17	11	4	73	2	0
		53,1 %	34,4 %	12,5 %	97,3 %	2,7 %	0 %
I4	Στατιστική	10	13	3	19	3	0
		38,5 %	50 %	11,5 %	86,4 %	13,6 %	0 %
I4	Ποσοστά	34	19	5	75	1	0
		58,6 %	32,8 %	8,6 %	98,7 %	1,3 %	0 %

Πίνακας 8. Πίνακας αποτελεσμάτων της διάστασης τύπων απαντήσεων (A) για τα εγχειρίδια μαθηματικών της Ελλάδας (Μαθηματικά Στ' Δημοτικού) και της Σιγκαπούρης (In Step Maths), ανά περιεχόμενο (I) και κεφάλαιο.



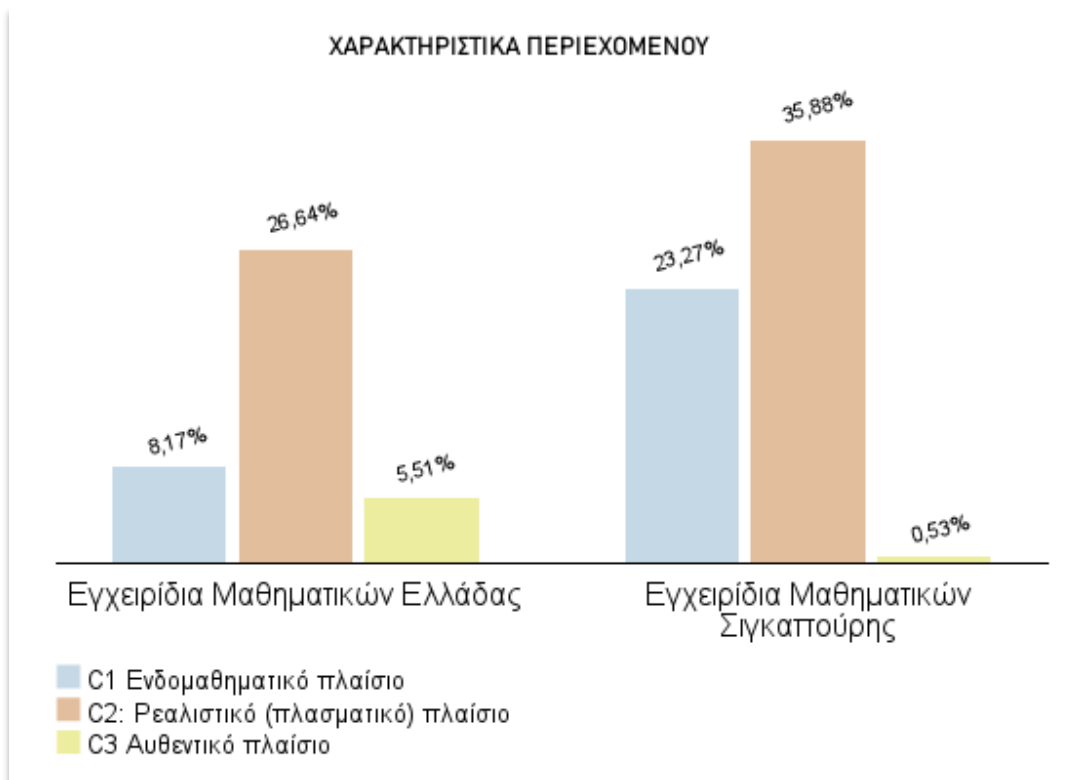
Διάγραμμα 4. Συνολικό ραβδόγραμμα αποτελεσμάτων της διάστασης τύπων απαντήσεων (A) για τα εγχειρίδια μαθηματικών της Ελλάδας (Μαθηματικά Στ' Δημοτικού) και της Σιγκαπούρης (In Step Maths).

Εν ολίγοις, και στις δύο σειρές εγχειριδίων υπερτερούν οι κλειστές δομημένες απαντήσεις (A1), ενώ πολύ σπάνια εμφανίζεται η μορφή των πολλαπλών επιλογών (A3). Επιπλέον, και σε αυτή τη διάσταση τα ελληνικά εγχειρίδια διατηρούν ήπια δυσαναλογία ποσοστών (διάγραμμα 3), και συνεπώς περισσότερη ισορροπία στους διαφορετικούς τύπους απαντήσεων. Αντίθετα, στα εγχειρίδια της Σιγκαπούρης παρατηρείται πολύ έντονη ανισορροπία στους τύπους απαντήσεων (A), αφού η συντριπτική πλειοψηφία των απαντήσεων είναι κλειστές δομημένες (A1), ενώ τα υπόλοιπα δύο είδη απαντήσεων εντοπίζονται σε ελάχιστες εργασίες (βλ. πίνακα 8).

3.5. Χαρακτηριστικά περιεχομένου

Η πέμπτη διάσταση του εργαλείου ανάλυσης αφορά τα χαρακτηριστικά περιεχομένου (C). Από το διάγραμμα 4 είναι φανερό ότι επικρατεί το πλασματικό πλαίσιο (C2) και στα δύο εγχειρίδια. Επόμενο σε πλήθος δεδομένων είναι το ενδομαθηματικό πλαίσιο (C1), ενώ στο μικρότερο ύψος συναντάται το αυθεντικό πλαίσιο (C3). Κι ενώ και για τα δύο βιβλία μαθηματικών το C1 είναι στη δεύτερη θέση, στην περίπτωση της Σιγκαπούρης εμφανίζει αρκετά μεγάλο ποσοστό. Από την άλλη το αυθεντικό πλαίσιο (C3) φαίνεται ότι έχει μια σχεδόν μηδενική παρουσία στα βιβλία αυτά (βλ. διάγραμμα 4). Αντίθετα στην περίπτωση των ελληνικών εγχειριδίων το ενδομαθηματικό πλαίσιο περιέχεται σε 8,17 % των εργασιών, φτάνοντας μόνο περίπου 3 ποσοστιαίες μονάδες πάνω από το 5,51 %, του αυθεντικού περιεχομένου (C3).

Προχωρώντας στα στοιχεία του πίνακα 9, ξεχωρίζει για τα σχολικά βιβλία της Σιγκαπούρης το κεφάλαιο των γωνιών. Στην παρούσα έρευνα είναι η μόνη περίπτωση στην οποία εμφανίζεται η «μονοπώληση» μίας και μόνο κατηγορίας διάστασης στις εργασίες και συγκεκριμένα του ενδομαθηματικού πλαισίου (C1). Ωστόσο η ίδια κατηγορία έχει λάβει μηδενική τιμή στο κεφάλαιο «Στατιστική», όπου κυριαρχεί το πλασματικό πλαίσιο με 95,5 %. Τελικά, τα εγχειρίδια μαθηματικών της Σιγκαπούρης εμφανίζουν για ακόμη μία φορά ακραίες τιμές, φανερώνοντας έλλειψη ισορροπίας και για την διάσταση των χαρακτηριστικών περιεχομένου (C) των εργασιών.



Διάγραμμα 5. Συνολικό ραβδόγραμμα αποτελεσμάτων της διάστασης χαρακτηριστικών περιεχομένου (C) για τα εγχειρίδια μαθηματικών της Ελλάδας (Μαθηματικά Στ' Δημοτικού) και της Σιγκαπούρης (In Step Maths).

Συνοψίζοντας, τα αποτελέσματα αυτής της διάστασης έδειξαν ότι επικρατούσα κατηγορία πλαισίου είναι και για τα δύο εγχειρίδια το πλασματικό πλαίσιο (C2), ενώ από την άλλη πλευρά οι λιγότερες εργασίες είχαν αυθεντικό (C3). Ενδιαφέρον είναι ότι, στην περίπτωση του ενδομαθηματικού περιεχομένου (C1), τα «In Step Maths» περιείχαν υψηλότερα ποσοστά, από ότι τα ελληνικά σχολικά βιβλία μαθηματικών. Τέλος, με τη βοήθεια του διαγράμματος 4, αλλά και του πίνακα 9, εντοπίζεται η σημαντική απουσία του αυθεντικού πλαισίου (C3) στις εργασίες μαθηματικών των κεφαλαίων που μελετήθηκαν από τα βιβλία της Σιγκαπούρης.

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΟΥ

I	ΚΕΦΑΛΑΙΑ	Εγχειρίδια Ελλάδας			Εγχειρίδια Σιγκαπούρης		
		C1	C2	C3	C1	C2	C3
I1	Χρόνος	3	11	0	9	11	1
		21,4 %	78,6 %	0 %	42,9 %	52,4 %	4,8 %
I2	Ανάλογα ποσά	14	46	16	14	67	0
		18,4 %	60,5 %	21,1 %	17,3 %	82,7 %	0 %
I3	Γωνίες	9	9	3	61	0	0
		42,9 %	42,9 %	14,3 %	100 %	0 %	0 %
	Όγκος	7	21	4	34	40	1
		21,9 %	65,6 %	12,5 %	45,3 %	53,3 %	1,3 %
I4	Στατιστική	3	18	5	0	21	1
		11,5 %	69,2 %	19,2 %	0 %	95,5 %	4,5 %
	Ποσοστά	10	45	3	13	63	0
		17,2 %	77,6 %	5,2 %	17,1 %	82,9 %	0 %

Πίνακας 9. Πίνακας αποτελεσμάτων της διάστασης χαρακτηριστικών περιεχομένου (C) για τα εγχειρίδια μαθηματικών της Ελλάδας (Μαθηματικά Στ' Δημοτικού) και της Σιγκαπούρης (In Step Maths), ανά περιεχόμενο (I) και κεφάλαιο.

3.6. Ανάλυση περιεχομένων των σχολικών εγχειριδίων

Μελετώντας τους πίνακες περιεχομένων που βρίσκονται στις πρώτες σελίδες των εν λόγω εγχειριδίων, σύντομα κάποιος παρατηρεί ότι η σχολική σειρά της Σιγκαπούρης έχει συνολικά μεγαλύτερο πλήθος σελίδων, από την αντίστοιχη σειρά της Ελλάδας. Αυτή η διαπίστωση ισχύει τόσο για τα βιβλία, όσο και για τα τεύχη εργασιών. Για την περαιτέρω ανάλυση των επιμέρους στοιχείων περιεχομένων κάθε ενότητας των σχολικών εγχειριδίων «In Step Maths» και «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού, εξάχθηκαν δεδομένα από το σύνολο των τευχών τους. Μέσω της καταγραφής των δεδομένων αυτών σε υπολογιστικά φύλλα του προγράμματος Excel (Microsoft Office 2016), δημιουργήθηκαν αρχικά οι πίνακες 10 και 11, που είναι χρήσιμοι για την περιγραφική ανάλυση. Στη συνέχεια, υπολογίστηκαν χρήσιμοι μέσοι όροι συσχετίσεων των

ποσοτικών στοιχείων, οι οποίοι παρουσιάζονται στα διαγράμματα 6 και 7. Τα παραπάνω ευνοούν τον εντοπισμό των σημαντικότερων πληροφοριών για την σύγκριση της έκτασης και της οργάνωσης των περιεχομένων των δύο σχολικών εγχειριδίων.

Πρώτα, κρίθηκε χρήσιμο να παρουσιαστούν επιγραμματικά οι θεματικές που απασχολούν τις σελίδες αυτών των σχολικών βιβλίων, καθώς δίνουν πληροφορίες για το περιεχόμενο της ύλης που εντάσσεται σε κάθε ένα από αυτά. Έτσι, οι έξι ενότητες που ορίζονται στα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» είναι: 1. Αριθμοί και πράξεις, 2. Εξισώσεις, 3. Λόγοι – Αναλογίες, 4. Συλλογή και επεξεργασία δεδομένων, 5. Μετρήσεις – Μοτίβα και 6. Γεωμετρία. Από την άλλη τα «In Step Maths», έχουν εννέα κύριες ενότητες, οι οποίες είναι: 1. Λόγοι και ευθεία αναλογία, 2. Ποσοστά, 3. Άλγεβρα, 4. Στερεά σχήματα, 5. Χρόνος και ταχύτητα, 6. Γωνίες σε γεωμετρικά σχήματα, 7. Κύκλοι, 8. Γραφήματα πίτας και 9. Όγκος. Τα τελευταία εγχειρίδια περιέχουν και μία πρόσθετη ανεξάρτητη ενότητα, αφιερωμένη στις στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων. Με μια απλή παρατήρηση των τίτλων των ενοτήτων, γίνεται φανερό ότι στα ελληνικά εγχειρίδια περιέχεται έναν ευρύτερο πλαίσιο γνώσεων ανά ενότητα. Αντίθετα, οι τίτλοι που αφορούν τις ενότητες στα σχολικά βιβλία της Σιγκαπούρης είναι, ως επί το πλείστο, πιο συγκεκριμένοι.

Εγχειρίδια Ελλάδας – Μαθηματικά Στ' Δημοτικού

Ενότητες	Κεφάλαια	Ανακεφαλαιώσεις	Βιβλίο μαθητή	Τετράδια Εργασιών	Σύνολο σελίδων
1η	24	1 (2 σελ.)	61 σελ.	47 σελ.	108
2η	5	1 (2 σελ.)	13 σελ.	7 σελ.	20
3η	15	1 (2 σελ.)	33 σελ.	30 σελ.	63
4η	4	0	8 σελ.	7 σελ.	15
5η	7	1 (2 σελ.)	17 σελ.	15 σελ.	32
6η	16	1 (2 σελ.)	35 σελ.	31 σελ.	66
Σύνολα	71	5 (10 σελ.)	167 σελ.	137 σελ.	304

Πίνακας 10. Συνοπτική παρουσίαση πληροφοριών έκτασης και οργάνωσης των περιεχομένων των τευχών της σχολικής σειράς εγχειριδίων μαθηματικών «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού».

Εγχειρίδια Σιγκαπούρης – In Step Maths

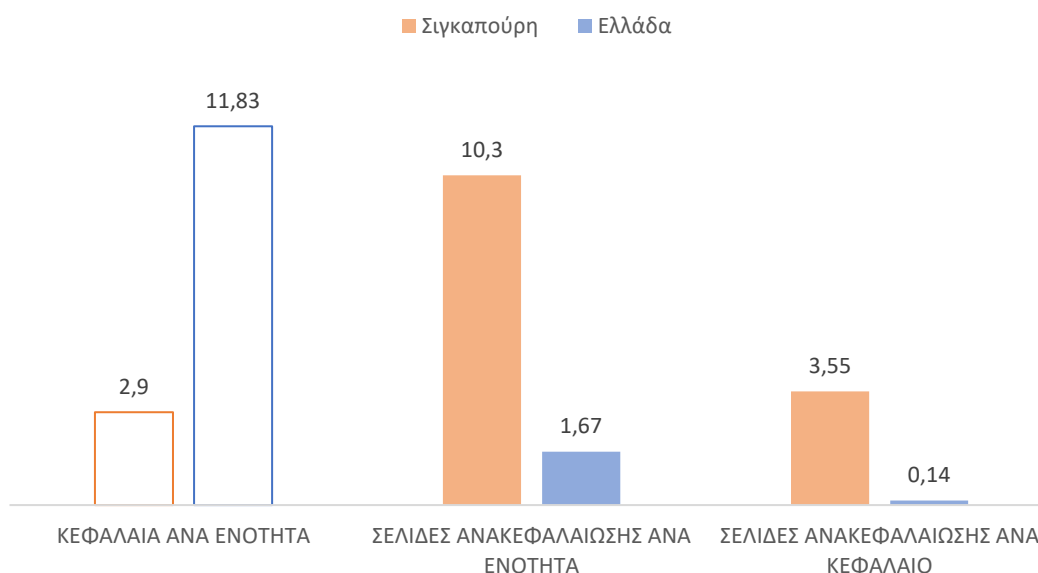
Ενότητες	Κεφάλαια	Ανακεφαλαιώσεις	Βιβλίο μαθητή	Τετράδια Εργασιών	Σύνολο σελίδων
1η	3	1 (7 σελ.)	20 σελ.	31 σελ.	51
2η	3	1 (12 σελ.)	17 σελ.	26 σελ.	43
3η	4	1 (7 σελ.)	15 σελ.	26 σελ.	41
4η	3	1 (14 σελ.)	17 σελ.	22 σελ.	39
5η	4	2 (19 σελ.)	28 σελ.	26 σελ.	54
6η	3	1 (11 σελ.)	20 σελ.	22 σελ.	42
7η	4	1 (7 σελ.)	19 σελ.	29 σελ.	48
8η	1	1 (12 σελ.)	12 σελ.	20 σελ.	32
9η	3	1 (14 σελ.)	21 σελ.	30 σελ.	51
Προβλήματα	1	0	16 σελ.	13 σελ.	29
Σύνολα	29	10 (103 σελ.)	185 σελ.	245 σελ.	430

Πίνακας 11 Συνοπτική παρουσίαση πληροφοριών έκτασης και οργάνωσης των περιεχομένων των τευχών της σχολικής σειράς εγχειριδίων μαθηματικών «In Step Maths».

Με την παραπάνω διαπίστωση συμφωνεί και το γεγονός ότι ο μέγιστος αριθμός κεφαλαίων που περιέχονται ανά ενότητα στα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» φτάνει σχεδόν στα 12 κεφάλαια, ενώ στα «In Step Maths» μόλις περίπου στα 3 κεφάλαια (βλ. διάγραμμα 6). Μάλιστα, προχωρώντας σε πιο λεπτομερή μελέτη των κεφαλαίων που περιέχονται σε κάθε μία από αυτές τις ενότητες, γίνεται αντιληπτό ότι αρκετές από τις γνώσεις που εισάγονται στα πρώτα εγχειρίδια, δεν εμφανίζονται καθόλου στα δεύτερα. Ένα παράδειγμα, που αναφέρθηκε και παραπάνω στην εργασία (βλ. 2.3.), είναι τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, τα οποία δεν υπάρχουν στη ύλη των βιβλίων της Σιγκαπούρης, αλλά μόνο στα ελληνικά εγχειρίδια. Άλλες περιπτώσεις είναι τα κριτήρια διαιρετότητας, το μήκος, το βάρος, η χρηματική μονάδα μέτρησης, κ.α.. Για όλα τα παραπάνω προσφέρεται ένα ή περισσότερα κεφάλαια στα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού», ενώ αντίθετα δεν απαντώνται καθόλου στην ύλη των «In Step Maths». Οι πληροφορίες αυτές προέρχονται από την μελέτη και σύγκριση των σελίδων 5 και 6 του βιβλίου για τη σειρά της Ελλάδας (Βιβλίο μαθητή, 2009), και της 6^{ης} και 7^{ης} σελίδας, από τα δύο τεύχη βιβλίων μαθηματικών της Σιγκαπούρης (Βιβλίο 6Α και Βιβλίο 6Β, 2006).

Ακόμα, μια ενδιαφέρουσα διαφορά στα περιεχόμενα των δύο σχολικών βιβλίων μαθηματικών έγκειται στον αριθμό ανακεφαλαιώσεων που εμφανίζονται σε κάθε εγχειρίδιο, αλλά και στην έκταση της κάθε μίας από αυτές. Πιο αναλυτικά, μπορεί κανείς να παρατηρήσει στον πίνακα 10, ότι τα ελληνικά εγχειρίδια διαθέτουν συνολικά μόνο 5 δισέλιδα για επανάληψη. Δεδομένου ότι υπάρχουν 71 κεφάλαια, τα οποία εισάγουν ή προωθούν την εξοικείωση με μια διαφορετική πτυχή ενός μαθηματικού αντικειμένου, ο αριθμός των σελίδων με επαναληπτικό υλικό είναι τουλάχιστον μικρός. Συγκεκριμένα, για κάθε μία από τις 6 ενότητες αντιστοιχούν, κατά μέσο όρο, σχεδόν 2 σελίδες επανάληψης, ενώ για κάθε κεφάλαιο ξεχωριστά λιγότερο από μία σελίδα (διάγρ. 6). Αντίθετα, τα «In Step Maths», έχοντας λιγότερα από τα μισά κεφάλαια, περιέχουν περίπου εννέα φορές περισσότερες σελίδες επαναληπτικού υλικού. Ειδικότερα, προσφέρονται 10 ευκαιρίες επανάληψης, που εκτείνονται σε 103 σελίδες (πίνακας 11). Κατά μέσο όρο, για κάθε ενότητα προσφέρονται 10 περίπου σελίδες και για κάθε κεφάλαιο 3,5 σελίδες (διάγρ. 6). Έτσι, ενώ τα «In Step Maths» διαθέτουν πολύ λιγότερα κεφάλαια, εν τούτοις περιέχουν σημαντικά μεγαλύτερη έκταση επαναληπτικού υλικού σε σχέση με τα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού».

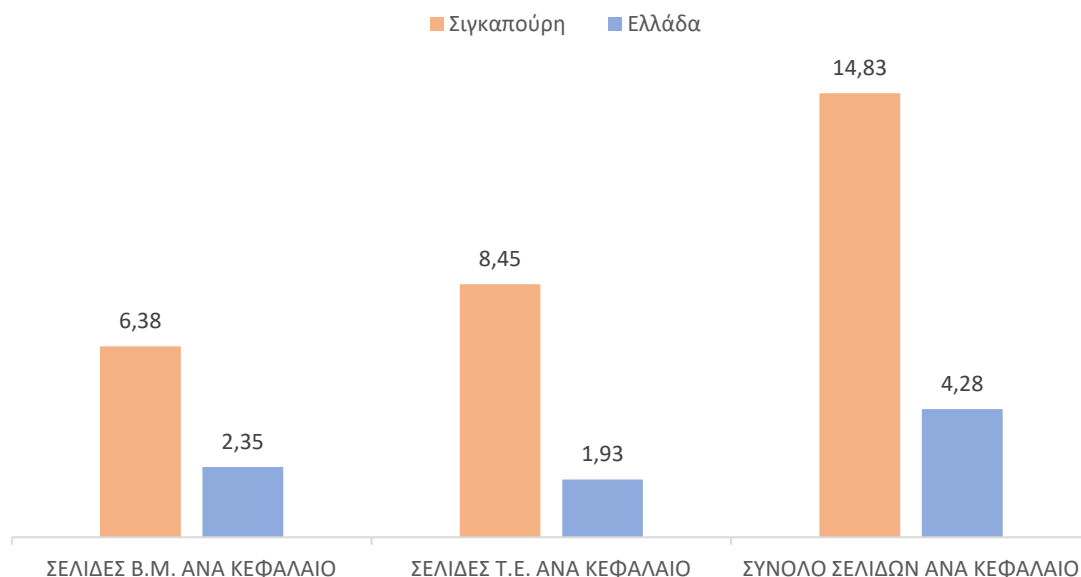
ΜΕΣΟΙ ΟΡΟΙ ΕΚΤΑΣΗΣ ΕΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΕΩΝ



Διάγραμμα 6. Ραβδόγραμμα που παρουσιάζει τους μέσους όρους: α. κεφαλαίων ανά ενότητα και β. σελίδων ανακεφαλαίωσης ανά κεφάλαιο για τα εγχειρίδια «In Step Maths» (Σιγκαπούρη) και «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» (Ελλάδα).

Όπως προαναφέρθηκε, όσον αφορά στα σύνολα σελίδων ανά εγχειρίδιο, προκύπτει ότι τα σχολικά βιβλία μαθηματικών της Σιγκαπούρης παρά το γεγονός ότι έχουν λιγότερα κεφάλαια από τα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού», εν τούτοις έχουν σημαντικά μεγαλύτερη έκταση υλικού. Πιο συγκεκριμένα, τα τεύχη των εγχειριδίων της Σιγκαπούρης διαθέτουν συνολικά 430 σελίδες διδακτικού υλικού. Από αυτές, πάνω από τις μισές ανήκουν στα τετράδια εργασιών (βλ. πίνακα 11). Από την άλλη πλευρά, στα ελληνικά εγχειρίδια το υλικό των κεφαλαίων καλύπτει συνολικά 304 σελίδες, με την πλειονότητά τους να βρίσκεται στο βιβλίο μαθητή (βλ. πίνακα 10). Με μεγαλύτερη σαφήνεια παρουσιάζονται τα ίδια ευρήματα και στο ραβδόγραμμα 7. Για κάθε κεφάλαιο των «In Step Maths» προσφέρονται κατά μέσο όρο 15 περίπου σελίδες, με τις περισσότερες να βρίσκονται στα τεύχη εργασιών (μ.ο.: 8,45). Στην περίπτωση των «Μαθηματικών Στ' Δημοτικού» διατίθενται κατά μέσο όρο σχεδόν 4,5 σελίδες ανά κεφάλαιο, η πλειονότητα των οποίων συναντάται στο βιβλίο μαθητή (μ.ο.: 2,35). Συνεπώς, τα σχολικά βιβλία μαθηματικών της Ελλάδας διαθέτουν λιγότερο από το ένα τρίτο των σελίδων των εγχειριδίων της Σιγκαπούρης, έχουν δηλαδή σημαντικά μικρότερη έκταση, με τη μεγαλύτερη διαφορά να εμφανίζεται ανάμεσα στα τετράδια εργασιών.

ΜΕΣΟΙ ΟΡΟΙ ΣΕΛΙΔΩΝ ΑΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟ



Διάγραμμα 7. Ραβδόγραμμα που παρουσιάζει τους μέσους όρους σελίδων των βιβλίων (Β.Μ.) και των τετραδίων εργασιών (Τ.Ε.) των εγχειριδίων «In Step Maths» (Σιγκαπούρη) και «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» (Ελλάδα), ανά κεφάλαιο.

Με τα παραπάνω στοιχεία, επιβεβαιώνεται για ακόμα μια φορά, το γεγονός ότι τα ελληνικά σχολικά βιβλία μαθηματικών, ενώ περιέχουν μεγαλύτερο εύρος γνώσεων, έχουν σημαντικά λιγότερες σελίδες διαθέσιμες σε σχέση με τα βιβλία της Σιγκαπούρης. Οι επιπλέον σελίδες των «In Step Maths», σύμφωνα με όσα έχουν αναφερθεί, ανήκουν κυρίως στα τεύχη των τετραδίων εργασιών, ενώ αρκετές από αυτές αφορούν επαναληπτικό υλικό. Από την μεριά τους τα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» διαθέτουν πολύ λίγες ευκαιρίες για επανάληψη και τα τεύχη ασκήσεων έχουν μικρή έκταση, τόσο σε σχέση με τα βιβλία μελέτης, όσο και σε σχέση με το πλήθος των κεφαλαίων προς μάθηση. Αυτές οι διαφορές στο πλήθος των σελίδων των εγχειριδίων και ιδιαίτερα στα τετράδια εργασιών, προοικονομούν μια αντίστοιχη διαφορά και στον αριθμό των εργασιών που περιέχονται σε αυτά. Σύμφωνα, με τα αποτελέσματα της ανάλυσης των πινάκων περιεχομένων των δύο σχολικών βιβλίων, είναι πιθανό το σύνολο των εργασιών να είναι αρκετά μικρότερο στα ελληνικά εγχειρίδια. Κάτι τέτοιο επιβεβαιώνεται από τα ευρήματα της πενταδιάστατης ανάλυσης που κατατέθηκαν παραπάνω (3.1), όπου σε όλα τα επιλεγμένα κεφάλαια, οι ασκήσεις που βρέθηκαν στα εγχειρίδια της Σιγκαπούρης ήταν περισσότερες.

3.7. Σύνοψη αποτελεσμάτων

Η εργασία στοχεύει στη διατύπωση συμπερασμάτων, που προκύπτουν από τη διερεύνηση ποιοτικών και ποσοτικών στοιχείων δύο σειρών σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών της Ελλάδας και της Σιγκαπούρης. Για αυτόν τον σκοπό, εξετάστηκαν εργασίες επιλεγμένων κεφαλαίων, μέσω της χρήσης του πολυδιάστατου πλαισίου ανάλυσης εργασιών της Gracin (2018), ενώ έπειτα μελετήθηκαν τα σύνολα των περιεχομένων των δύο εγχειριδίων, ως προς την οργάνωση και την έκτασή τους. Παραπάνω, παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν διεξοδικά τα αποτελέσματα της έρευνας, ενώ επισημάνθηκαν και οι διαφορές ανάμεσα στις εργασίες και τα περιεχόμενα των δύο σχολικών βιβλίων. Στη συνέχεια, θα παρατεθούν συνοπτικά και συγκεντρωτικά τα κύρια ευρήματα, πρώτα όσα προέκυψαν από την ανάλυση εργασιών και έπειτα όσα που διαπιστώθηκαν από την μελέτη των πινάκων περιεχομένων.

Από την έρευνα προέκυψε ότι, οι εργασίες των κεφαλαίων που συμπεριλήφθηκαν στην έρευνα, είναι πολύ περισσότερες στα εγχειρίδια της Σιγκαπούρης και για τις τέσσερις κατηγορίες περιεχομένου (βλ. 2.2.). Από την άλλη, τα ελληνικά εγχειρίδια παρουσιάζουν περισσότερη ποικιλομορφία και ισορροπία στις κατηγορίες των διαστάσεων δραστηριότητας (H), των επιπέδων πολυπλοκότητας (K), των τύπων απαντήσεων (A) και των πλαισίων περιεχομένου (C). Πιο συγκεκριμένα, η επικρατούσα δραστηριότητα στα σχολικά εγχειρίδια που μελετήθηκαν είναι αυτή του υπολογισμού (H2), με μεγάλες αποκλείσεις μετρήσεων για τα βιβλία της Σιγκαπούρης και με μέτριες για τα βιβλία της Ελλάδας. Πιο ειδικά, τα «In Step Maths» παρουσιάζουν εξαιρετικά υψηλά ποσοστά της δραστηριότητας του υπολογισμού σε όλα τα κεφάλαια που μελετήθηκαν. Έπειτα, για την πολυπλοκότητα (K) διαπιστώθηκε ότι το επικρατέστερο επίπεδο στα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» είναι αυτό της απλής εφαρμογής γνώσεων και δεξιοτήτων (K1), ενώ για τα «In Step Maths» είναι η δημιουργία και η αντιμετώπιση συνδέσεων (K2). Ακόμα, και στις δύο σειρές εγχειριδίων υπερτερούν οι κλειστές δομημένες απαντήσεις (A1), ενώ σε μικρότερο βαθμό εμφανίζεται η μορφή των πολλαπλών επιλογών (A3). Τέλος, το πλασματικό πλαίσιο (C2) είναι το πιο σύνθητες πλαίσιο στις εργασίες που εξετάστηκαν, ενώ το αυθεντικό πλαίσιο (C3) εμφανίζεται συνολικά λιγότερο συχνά και ιδιαίτερα σπάνια στα εγχειρίδια της Σιγκαπούρης.

Προχωρώντας στη μελέτη των πινάκων περιεχομένων των δύο σειρών σχολικών βιβλίων μαθηματικών έγινε φανερό, ότι στα ελληνικά εγχειρίδια περιέχεται έναν ευρύτερο πλαίσιο γνώσεων ανά ενότητα, καθώς διαθέτουν πολύ μεγαλύτερο αριθμό κεφαλαίων. Μάλιστα, κάποιες από τις γνώσεις που εισάγονται στα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού», δεν εμφανίζονται καθόλου στα «In Step Maths». Ωστόσο, ενώ τα βιβλία της Σιγκαπούρης διαθέτουν πολύ λιγότερα κεφάλαια, προσφέρουν αρκετά μεγαλύτερη έκταση επαναληπτικού υλικού σε σχέση με τα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού». Γενικότερα, τα εγχειρίδια της Σιγκαπούρης υπερτερούν πάνω από τρεις φορές των σελίδων των εγχειριδίων της Ελλάδας, έχουν δηλαδή σημαντικά μεγαλύτερη έκταση, με την κυριότερη διαφορά να εμφανίζεται στα τετράδια εργασιών. Από την μεριά τους τα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» διαθέτουν πολύ λίγες ευκαιρίες για επανάληψη και τα τεύχη ασκήσεων έχουν μικρή έκταση, τόσο σε σχέση με τα βιβλία μελέτης, όσο και σε σχέση με το πλήθος των κεφαλαίων τους. Αυτά τα ευρήματα συναντούν τις πληροφορίες που προέκυψαν από την έρευνα και

ανάλυση των εργασιών, συνηγορώντας στο ότι οι εργασίες είναι αρκετά λιγότερες στα ελληνικά εγχειρίδια.

Με βάση τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω, μπορούν να απαντηθούν τα δύο ερευνητικά ερωτήματα, που έχουν τεθεί στο αρχικό κεφάλαιο της μελέτης.

Το πρώτο ερευνητικό ερώτημα αφορά το κατά πόσο οι εργασίες στα «In Step Maths» και στα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» αφορούν όλο το φάσμα των τύπων εργασιών, παρέχουν δηλαδή ίσες ευκαιρίες για μάθηση. Η ανάλυση των δεδομένων φανέρωσε ότι τα εν λόγω εγχειρίδια δεν διαθέτουν ποικιλία και πλούτο εργασιών, αφού διαπιστώθηκαν πολύ υψηλές, αλλά και αρκετές μηδενικές τιμές μεταβλητών. Μάλιστα, οι κατηγορίες που αφορούν τις περισσότερες εργασίες και στα δύο βιβλία είναι: η δραστηριότητα του υπολογισμού (H2), η απλή εφαρμογή γνώσεων και δεξιοτήτων (K1), ο κλειστός τύπος απαντήσεων (A1) και το πλασματικό ρεαλιστικό πλαίσιο (C2). Τόσο οι έντονες ανισοροπίες που προέκυψαν, όσο και η σταθερή κυριαρχία συγκεκριμένων τύπων εργασιών έναντι των υπολοίπων, δεν επιτρέπουν την ποικιλομορφία που θα ήταν ιδανικότερη για το σύνολο των μαθητών. Αυτοί είναι και οι λόγοι για τους οποίους, οι δύο σχολικές σειρές βιβλίων μαθηματικών δεν προσφέρουν ισότιμες ευκαιρίες μάθησης (Vincent & Stacey, 2008).

Το δεύτερο ερώτημα προς διερεύνηση σχετίζεται με χαρακτηριστικά που διαφοροποιούν τα σχολικά βιβλία μαθηματικών της Σιγκαπούρης σε σχέση με αυτά της Ελλάδας, ως προς την αποτελεσματικότητά τους ως εργαλεία μάθησης. Κατ' αρχήν, τα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών της Σιγκαπούρης, προσφέρουν περισσότερες ευκαιρίες μάθησης, καθώς περιέχουν μεγαλύτερο πλήθος εργασιών. Από την άλλη τα ελληνικά σχολικά βιβλία παρουσιάζουν καλύτερη ισορροπία σε όλες τις διαστάσεις τύπων εργασιών, δηλαδή μεγαλύτερη ποικιλομορφία. Ωστόσο, αυτό ισχύει εν μέρει για τη διάσταση της πολυπλοκότητας (K). Στα «In Step Maths», τα δύο πρώτα επίπεδα πολυπλοκότητας, της απλής εφαρμογής (K1) και της δημιουργίας συνδέσεων (K2), έχουν μικρή διαφορά, με μόνη σημαντικά αδύναμη την παρουσία του αναστοχασμού (K3). Επιπλέον, ενώ θεωρητικά τα ελληνικά εγχειρίδια προσφέρουν περισσότερη ισοτιμία ευκαιριών κατανόησης, το σημαντικά μικρότερο πλήθος εργασιών, αποτελεί βασική αδυναμία, καθώς δίδονται λιγιστές ευκαιρίες στον μαθητή να διαχειριστεί κάθε διαφορετικό είδος και επίπεδο εργασιών.

Συνολικά για τα «In Step Maths» μπορεί να αναφερθεί, ότι σε σχέση με τα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» έχουν μεγαλύτερο πλήθος εργασιών, αλλά μικρότερη ποικιλομορφία τύπων εργασιών. Ουσιαστικής σημασίας, επίσης, είναι τα πολύ υψηλά ποσοστά επικράτησης της δραστηριότητας του υπολογισμού (H2) σε αυτά τα εγχειρίδια. Έπειτα, ενώ παρουσιάζουν συνολικά υψηλότερη πολυπλοκότητα (K) σε σχέση με τα ελληνικά εγχειρίδια, εν τούτοις το επίπεδο πολυπλοκότητας που κυριαρχεί αφορά στη δημιουργία και την αντιμετώπιση συνδέσεων (K2) και όχι στις δραστηριότητες αναστοχασμού (K3), που είναι οι πιο απαιτητικές. Από την οπτική της μελέτης των περιεχομένων, εντοπίστηκαν συνολικά λιγότερα κεφάλαια στα εγχειρίδια αυτά, αλλά με σημαντικά μεγαλύτερη έκταση αριθμού σελίδων και επαναληπτικού υλικού. Τα παραπάνω ευρήματα επιτρέπουν την εξαγωγή χρήσιμων συμπερασμάτων και εγείρουν προβληματισμούς, που χρήζουν περαιτέρω διερεύνησης, σε σχέση με τα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών των δύο χωρών.

4. Συμπεράσματα

Τα περισσότερα από τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν παραπάνω συμφωνούν με τα ευρήματα της Gracin (2018) σε έρευνα που πραγματοποίησε σε σχολικά βιβλία Μαθηματικών της Κροατίας (βλ. 1.4). Έτσι, τόσο για τα «In Step Maths» όσο και για τα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού», δεν παρατηρήθηκε σημαντική ποικιλία ή πλούτος σε εργασίες. Μάλιστα, κυριάρχησαν οι ίδιες τάσεις και στα δύο εγχειρίδια. Συγκεκριμένα, με βάση τις διαστάσεις του αναλυτικού εργαλείου της Gracin, επικράτησαν οι κατηγορίες της δραστηριότητας του υπολογισμού, του επιπέδου απλής εφαρμογής γνώσεων και δεξιοτήτων, του κλειστού τύπου απαντήσεων και του πλασματικού πλαισίου. Είναι ενδιαφέρον το γεγονός, ότι η μικρότερη ποικιλία τύπων εργασιών εμφανίζεται στη σειρά «In Step Maths», ενώ ηπιότερες δυσαναλογίες παρουσιάζουν τα ελληνικά εγχειρίδια. Συνολικά, όμως και τα δύο σχολικά βιβλία μαθηματικών έχουν έντονες ή μικρότερες ανισορροπίες στο φάσμα τύπων εργασιών και έτσι δεν προσφέρουν ισότιμες ευκαιρίες μάθησης (Vincent & Stacey, 2008).

Ένα από τα κύρια ευρήματα της μελέτης αποτελεί το σημαντικά μεγαλύτερο πλήθος εργασιών που βρέθηκε στα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών της Σιγκαπούρης σε σχέση με τα εγχειρίδια της Ελλάδας, για κάθε ένα από τα κεφάλαια που μελετήθηκαν. Η αφθονία εργασιών εξυπηρετεί την τακτική της *κατάκτησης δεξιοτήτων*, που προωθείται από το εκπαιδευτικό πρόγραμμα της Σιγκαπούρης. Όπως αναφέρεται και στο κεφάλαιο 1.5, η *κατάκτηση δεξιοτήτων* αποτελεί τη μέθοδο κατά την οποία επιδιώκεται η πλήρης κατανόηση μίας έννοιας, πριν προχωρήσει ο μαθητής στην επόμενη. Το μεγάλο πλήθος εργασιών δίνει πολλαπλές ευκαιρίες στον μαθητή να εξασκήσει τις πρακτικές που έχει διδαχτεί και να τις αφομοιώσει μέσω τριβής και επανάληψης. Από την πλευρά τους τα ελληνικά εγχειρίδια, ενώ διαθέτουν πιο ισορροπημένη ποικιλομορφία διαφορετικών ειδών δραστηριοτήτων και επιπέδων, περιέχουν αρκετά μικρό αριθμό εργασιών. Έτσι, αυτή η ποικιλία τύπων εργασιών δεν αποδίδει σε επιδόσεις, αφού το μεγαλύτερο μέρος των μαθητών πιθανώς να μην έχει κατορθώσει να κατανοήσει πλήρως κάποια μαθηματική έννοια ή μέθοδο, προτού εισαχθεί σε μια πιο σύνθετη μορφή εργασίας ή σε ένα νέο κεφάλαιο. Κατά συνέπεια, τα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» προσφέρουν στον μαθητή περιορισμένο χρόνο εμπέδωσης μέσω των γραπτών ασκήσεων, δηλαδή λιγότερες ευκαιρίες μάθησης (Törnroos, J., 2005).

Σε παρόμοια συμπεράσματα οδηγούν και τα αποτελέσματα που αφορούν την έκταση και τη δομή των περιεχομένων των δύο εγχειριδίων. Τα ελληνικά σχολικά βιβλία μαθηματικών, ενώ περιέχουν πάνω από τα διπλάσια κεφάλαια συγκριτικά με τα βιβλία της Σιγκαπούρης, διαθέτουν σημαντικά λιγότερες σελίδες για αυτά. Τα «In Step Maths» έχουν μεγαλύτερο αριθμό σελίδων συνολικά, αλλά και για κάθε επιμέρους κεφάλαιο. Οι πιο έντονες διαφορές πλήθους σελίδων αφορούν τα τεύχη των τετραδίων εργασιών, όπως επίσης και το επαναληπτικό υλικό των τευχών. Πιο ειδικά, τα εγχειρίδια της Σιγκαπούρης προσφέρουν συνολικά 103 σελίδες επανάληψης για την εμπέδωση 29 κεφαλαίων, έναντι των 10 σελίδων που διατίθενται στα ελληνικά εγχειρίδια για την ύλη 71 κεφαλαίων (βλ. 3.6). Τα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» διαθέτουν πολύ λίγες ευκαιρίες για επανάληψη και τα τεύχη εργασιών έχουν μικρή έκταση, τόσο σε σχέση με τα βιβλία μελέτης, όσο και σε σχέση με το πλήθος των κεφαλαίων προς μάθηση. Φαίνεται και πάλι, ότι το συγκεκριμένο εγχειρίδιο ευνοεί τους «γρήγορους» μαθητές της Στ' τάξης, ενώ δεν εξυπηρετεί όσους χρειάζονται περισσότερο χρόνο μάθησης (Törnroos, J., 2005).

Μάλιστα, η τελευταία κατηγορία μαθητών, σύμφωνα με τα σημεία αναφοράς επιδόσεων των TIMSS 2019, αποτελεί την πλειονότητα των μαθητών παγκοσμίως. Το βασικό επίπεδο μαθηματικών δεξιοτήτων κατακτιέται από τους περισσότερους μαθητές που συμμετέχουν στις αξιολογήσεις, αλλά όσο αυξάνεται το επίπεδο δυσκολίας, τόσο λιγότεροι μαθητές μπορούν να ανταποκριθούν. Η σειρά σχολικών βιβλίων της Σιγκαπούρης ανταποκρίνεται σε αυτή την χρόνια πρόκληση δίδοντας μεγαλύτερη έμφαση στο μεσαίο επίπεδο πολυπλοκότητας, καθώς επικρατούν οι ασκήσεις που απαιτούν δημιουργία και αντιμετώπιση συνδέσεων (K2) (διάγραμμα 1). Αντίθετα στα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» κυριαρχεί η απλή εφαρμογή γνώσεων και δεξιοτήτων (K1), που αφορά την απλούστερη μορφή δραστηριότητας. Τα ποσοστά υψηλότερου επιπέδου δραστηριοτήτων, όπως ο αναστοχασμός (K3), είναι χαμηλά και στα δύο εγχειρίδια και ιδιαίτερα στα «In Step Maths». Ίσως αυτός να ήταν και ένας από τους λόγους που, αργότερα, δημιουργήθηκαν τα δύο επίπεδα τάξεων για τα μαθηματικά (βλ. σελ. 17). Επιδιώχθηκε δηλαδή, να δοθεί η δυνατότητα σε μαθητές με υψηλότερη ταχύτητα μάθησης να φτάσουν στο καλύτερο δυνατό επίπεδο, χωρίς να αγνοηθεί το μέρος των μαθητών που διατηρούν μια πιο αργή μαθησιακή πορεία, χαμηλής ή μεσαίας ταχύτητας. Άλλωστε, όπως αναφέρθηκε και στο θεωρητικό πλαίσιο της εργασίας, η ισορροπία θα πρέπει να είναι διαφορετική για μαθητές με υψηλές και

χαμηλές επιδόσεις, αλλά όλοι οι μαθητές χρειάζεται να εκτίθενται σε όλο το φάσμα των τύπων εργασιών (Vincent J., Stacey K., 2008).

Ένα ακόμα αποτέλεσμα που ξεχώρισε για τα «In Step Maths» ως προς την ανάλυση των ασκήσεων, είναι η επικράτηση της δραστηριότητας του υπολογισμού (H2) με πολύ υψηλά ποσοστά (βλ. 3.2.). Αυτή αναδεικνύει την έμφαση που δίδεται στη τελειοποίηση δεξιοτήτων σωστής επιλογής, ακολουθίας και εκτέλεσης πράξεων, σε απλό και πιο σύνθετο επίπεδο πολυπλοκότητας (K2). Ωστόσο, θα μπορούσε κανείς να ισχυριστεί ότι αυτό συμβαίνει εις βάρος των υπόλοιπων ειδών δραστηριοτήτων. Υπό το πρίσμα όμως της *κατάκτησης δεξιοτήτων* (Lindorff, Hall, & Sammons, 2019), θα πρέπει ο μαθητής να έχει κατακτήσει σε μέγιστο βαθμό την γνώση των αλγορίθμων και την υπολογιστική ικανότητα που είναι βασικές, ώστε να μπορεί έπειτα να αναπαριστά ευκολότερα μια μαθηματική πρόταση με πολλαπλούς τρόπους (H1), χωρίς να πέφτει σε υπολογιστικά σφάλματα κατά τη διαδικασία. Με τις ίδιες προϋποθέσεις, θα έχει μια πιο γερή βάση για να ερμηνεύει ορθά μια παρουσίαση δεδομένων (H3) ή να αιτιολογεί τις επιλογές του χρησιμοποιώντας μαθηματικά επιχειρήματα (H4). Φαίνεται για ακόμα μία φορά, ότι τα βιβλία της Σιγκαπούρης ακολουθούν ένα πιο τεχνικό μοντέλο ασκήσεων, ενώ στα ελληνικά εγχειρίδια επιχειρείται, σχεδόν ταυτόχρονα με τη διδασκαλία μιας νέας μαθηματικής έννοιας, η ένταξή της σε ένα πιο σύνθετο και ρεαλιστικό πλαίσιο.

Στην περίπτωση των βιβλίων της Ελλάδας, η καλύτερη ισορροπία των διαφορετικών τύπων εργασιών, ευνοεί τη σύνδεση των Μαθηματικών με τον πραγματικό κόσμο και, συνεπώς, την απόκτηση του «μαθηματικού γραμματισμού» (Romberg, T., 2000), όπως αυτός ορίζεται από το πρόγραμμα σπουδών της Ελλάδας για τα Μαθηματικά. Τουλάχιστον τρία από τα τέσσερα είδη περιεχομένου (I2, I3, I4), παρουσιάζουν πιο ισορροπημένη ποικιλομορφία στις κατηγορίες των διαστάσεων της δραστηριότητας (H), της πολυπλοκότητας (K), της απάντησης (A) και του πλαισίου περιεχομένου (C) (βλ. διάγραμμα 1). Από τα παραπάνω στοιχεία, προκύπτει η σημασία που δίδεται στα ελληνικά εγχειρίδια στην ποικιλομορφία των ασκήσεων και στην διαχείριση διαφορετικών πλαισίων, με στόχο την προετοιμασία του μαθητή να αντιμετωπίσει πραγματικά καθημερινά προβλήματα. Και η σειρά σχολικών βιβλίων μαθηματικών της Σιγκαπούρης, εστιάζει στη δεξιότητα επίλυσης προβλημάτων, επενδύοντας όμως περισσότερο στην κατάκτηση επιμέρους δεξιοτήτων, όπως η ικανότητα στην εκτέλεση πράξεων και στη διαχείριση δεδομένων (βλ. σελ. 19).

Συνοπτικά, τα παραπάνω συμπεράσματα επιβεβαιώνουν ότι τα εγχειρίδια μαθηματικών που μελετήθηκαν ακολουθούν σε αρκετό βαθμό τα αντίστοιχα προγράμματα σπουδών των δύο χωρών, αλλά δεν προσφέρουν ισοτιμία ευκαιριών μάθησης. Στα θετικά στοιχεία για τα σχολικά βιβλία της Σιγκαπούρης βρίσκεται η ποιότητα της μάθησης, η οποία προκύπτει από τη δεξιοτεχνία που επιδιώκεται, μέσω μεγαλύτερου πλήθους εργασιών, με έμφαση στην υπολογιστική ευχέρεια και στον σύνθετο τρόπο σκέψης, για την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων. Ωστόσο, η σειρά αυτή υστερεί σε ποικιλομορφία, κάτι που μειώνει σε ένα βαθμό τον πλούτο ευκαιριών μάθησης. Από την άλλη, τα ελληνικά εγχειρίδια, ενώ διαθέτουν καλύτερη ισορροπία τύπων εργασιών, γεγονός που συντελεί στην ποιότητα μάθησης, εν τούτοις περιέχουν σημαντικά μικρό αριθμό σελίδων, εργασιών και επαναλήψεων ανά μαθηματικό κεφάλαιο. Έτσι, ως εργαλείο μάθησης τα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» υστερούν σε πλήθος ευκαιριών για τη μάθηση Μαθηματικών.

Τα ευρήματα της παρούσης συγκριτικής μελέτης προβληματίζουν και εγείρουν την ανάγκη για περισσότερη έρευνα, τόσο όσον αφορά άλλες πτυχές των σχολικών εγχειριδίων μαθηματικών ανάμεσα στις δύο χώρες, όσο και σε σχέση με τον τρόπο αξιοποίησης των εγχειριδίων στην τάξη, το επίπεδο κατάρτισης των εκπαιδευτικών, καθώς και τις εκάστοτε πολιτικοοικονομικές και κοινωνικές παραμέτρους. Συνεπώς, οι πληροφορίες που έχουν προκύψει, μπορούν να ενταχθούν σε ένα ευρύτερο πλαίσιο παραγόντων, που διατηρούν τις επιδόσεις της πλειονότητας των Ελλήνων μαθητών κάτω από το μέσο όρο στις διεθνείς κατατάξεις (TIMSS 2019, PISA 2018).

5. Περιορισμοί

Κατά την εκπόνηση της εργασίας παρατηρήθηκαν περιορισμοί, οι οποίοι ελάττωσαν το εύρος της, αλλά δεν αναιρούν τη συνεισφορά της στην έρευνα της διδακτικής των μαθηματικών. Τα αποτελέσματα μπορούν να αξιοποιηθούν, σε συνδυασμό με άλλες πηγές και να αποτελέσουν μέρος μια ευρύτερης έρευνας, που προτείνεται, σχετικά με τα σχολικά εγχειρίδια, αλλά και την εκπαίδευση Μαθηματικών της Ελλάδας και της Σιγκαπούρης.

Ένας από τους περιορισμούς αφορά στην πρόσβαση σε εγχειρίδια Μαθηματικών της Σιγκαπούρης για το Δημοτικό. Η σειρά «In Steps» ήταν η μοναδική διαθέσιμη ως αρχείο στο διαδίκτυο, σε αγγλική γλώσσα και σε χρήση την εξεταζόμενη χρονική περίοδο. Υπήρχε δυνατότητα παραγγελίας δύο αντίστοιχων σειρών εγχειριδίων, από εκδοτικούς οίκους της Σιγκαπούρης, αλλά το διάστημα αποστολής προβλεπόταν σημαντικά μεγάλο (4 τουλάχιστον μήνες). Επιπλέον περιορισμό αποτελεί και ο διαχωρισμός που ισχύει από το 2009 στη Σιγκαπούρη, σε standard και foundation τάξεις Μαθηματικών για την 5^η και 6^η τάξη (βλ. σελ. 18). Επειδή το ελληνικό εγχειρίδιο για την 6^η τάξη απευθύνεται στο σύνολο των μαθητών, κρίθηκε αναγκαία η σύγκριση με ένα αντίστοιχο εγχειρίδιο. Τέλος, έπρεπε να έχει αξιοποιηθεί σε κοινά χρονικά πλαίσια με το εγχειρίδιο σύγκρισης και να αντιστοιχεί σε υψηλές επιδόσεις των μαθητών της Σιγκαπούρης στις διεθνείς αξιολογήσεις.

Εν συνεχεία, περιορισμοί παρουσιάστηκαν και κατά την αξιοποίηση του πενταδιάστατου εργαλείου ανάλυσης της Gracin (2018). Στις περιπτώσεις που συνυπήρχαν δύο κατηγορίες μίας διάστασης σε μία εργασία, η επιλογή πραγματοποιήθηκε με τον τρόπο που περιεγράφηκε στο κεφάλαιο «Μεθοδολογία» της παρούσης μελέτης (σελ. 30). Η κατηγορία, δηλαδή, που τελικά καταχωρήθηκε, ήταν η κυρίαρχη για την επίλυση της εργασίας, με βάση την εστίαση του πλαισίου της και το κεφάλαιο στο οποίο εντασσόταν. Ωστόσο, αυτή η μέθοδος εμπεριέχει τον κίνδυνο της υποκειμενικότητας. Αυτό επιδιώχθηκε να αποφευχθεί, με την επανεξέτασή των συγκεκριμένων εργασιών από την ερευνήτρια σε συνεργασία με τους επιβλέποντες καθηγητές.

Επιπλέον, το εργαλείο ανάλυσης της Gracin (2018), που αξιοποιήθηκε, εστιάζει στον τρόπο που κάθε μαθηματική εργασία δραστηριοποιεί τον μαθητή, ώστε να φτάσει

στη λύση της. Με αυτόν τον τρόπο καλύπτεται μία συγκεκριμένη πτυχή του περιεχομένου των εγχειριδίων, ενώ υπάρχουν και άλλες πτυχές εξίσου σημαντικές για την επιτυχία των μαθητών της Σιγκαπούρης στα Μαθηματικά. Για παράδειγμα, αναδείχθηκε η μέθοδος της *κατάκτησης δεξιοτήτων* (mastery), αλλά δεν προέκυψαν στοιχεία για το γνωστό ως «bar model», που αφορά οπτικές αναπαραστάσεις που βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν προβλήματα και να οργανώσουν τις σκέψεις τους (Hoven, 2007). Ωστόσο, τα εγχειρίδια «In Steps» περιείχαν τέτοιου είδους αναπαραστάσεις σχεδόν σε όλη τους την έκταση. Συνεπώς, τα συγκεκριμένα σχολικά εγχειρίδια Μαθηματικών των δύο χωρών επιδέχονται περαιτέρω μελέτης, που να αφορά διαφορετικά χαρακτηριστικά των εγχειριδίων (π.χ. γλώσσα κειμένων, δομή εργασιών, κλπ.), από αυτά που καλύφθηκαν στην παρούσα εργασία.

6. Επίλογος

Για τα περισσότερα εκπαιδευτικά συστήματα παγκοσμίως, τα σχολικά εγχειρίδια αναδεικνύονται ως ο πιο βασικός παράγοντας που επηρεάζει τις καθημερινές διδακτικές πρακτικές των εκπαιδευτικών (Mullis, Martin, Foy, Arora, 2012). Η μέθοδος των μαθηματικών της Σιγκαπούρης έχει επηρεάσει πολλά εκπαιδευτικά συστήματα παγκοσμίως, καθώς έχει αναγνωριστεί για την αποτελεσματικότητά της στην προώθηση της μαθηματικής κατανόησης και την ανάπτυξη των δεξιοτήτων των μαθητών. Από τις πιο γνωστές πτυχές αυτής της μεθόδου είναι η *κατάκτηση δεξιοτήτων* (Lindorff, Hall, Sammons, 2019), η οποία αναδείχθηκε και στην παρούσα μελέτη.

Στο πλαίσιο αυτό, κάθε μαθητής καλείται να εξασφαλίσει την κατανόηση μιας συγκεκριμένης έννοιας πριν προχωρήσει στην επόμενη, αντίθετα με την προτεραιότητα της απλής κάλυψης υλικού που χαρακτηρίζει πολλά από τα παραδοσιακά προγράμματα σπουδών. Παρότι τα «Μαθηματικά Στ' Δημοτικού» ακολουθούν σύγχρονες αξιολογες εκπαιδευτικές θεωρίες μάθησης Μαθηματικών, από τα ευρήματα προκύπτει ότι δεν προσφέρεται επαρκής έκταση γραπτού υλικού για κάθε κεφάλαιο και επίπεδο γνώσης. Αντίθετα, τα αποτελέσματα της ανάλυσης των ασκήσεων και των περιεχομένων των «In Step Maths» μαρτυρούν την εφαρμογή της *κατάκτησης δεξιοτήτων*, μέσω της αφθονίας εργασιών, της έμφασης σε δραστηριότητες υπολογισμού και την επικράτηση ασκήσεων, που απαιτούν δημιουργία και αντιμετώπιση συνδέσεων.

Ωστόσο, σχεδόν ποτέ, τα σχολικά βιβλία δεν ευνοούν την ανάπτυξη ενός πλήρους φάσματος μαθηματικών ικανοτήτων (Berisha, 2020). Ως εκ τούτου, ο ρόλος των εκπαιδευτικών στην αποτελεσματικότερη μάθηση μαθηματικών είναι εξέχουσας σημασίας. Η κατάρτιση των εκπαιδευτικών και οι μέθοδοι που αυτοί εφαρμόζουν στις τάξεις, όπως για παράδειγμα το μοντέλο CPA (Concrete - Pictorial – Abstract), που εφαρμόζεται στη Σιγκαπούρη, αποτελούν βασικούς παράγοντες μάθησης. Έτσι, οι διαφορές που δημιουργούν το χάσμα ανάμεσα στις μαθηματικές επιδόσεις των μαθητών της Ελλάδας και της Σιγκαπούρης, πρέπει να αναζητηθούν στο σύνολο της εκπαίδευσης Μαθηματικών κάθε χώρας, σε συνδυασμό με τις ιστορικές, κοινωνικοπολιτικές και οικονομικές συνθήκες τους.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση

Bellens, K., Van Damme, J., De Fraine, B., & Van Den Noortgate, W. (2018). The informed choice: The relation between mathematics textbook and educational outcomes in Grade 4. In European Conference on Educational Research (ECER 2018), Date: 2018/09/04-2018/09/07, Location: Bolzano, Italy.

Bellens, K., Van den Noortgate, W., & Van Damme, J. (2020). The informed choice: mathematics textbook assessment in light of educational freedom, effectiveness, and improvement in primary education. School Effectiveness and School Improvement, 31(2), 192-211.

Berisha, V., & Bytyqi, R. (2020). Types of Mathematical Tasks Used in Secondary Classroom Instruction. International Journal of Evaluation and Research in Education, 9(3), 751-758.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). A history of mathematics. John Wiley & Sons.

Charalambous, C. Y., Delaney, S., Hsu, H. Y., & Mesa, V. (2010). A comparative analysis of the addition and subtraction of fractions in textbooks from three countries. Mathematical thinking and learning, 12(2), 117-151.

Common Core State Standards Initiative (2016). About the Standards. Available online at: <http://www.corestandards.org/about-the-standards/>

Department for Education (2016). 8,000 Primary Schools in England Will Receive £41 Million over 4 Years to Support the 'Maths Mastery' Approach. School and College Qualifications and Curriculum, July 12. Available online at: <https://www.gov.uk/government/news/south-asian-method-of-teaching-maths-to-be-rolled-out-in-schools>

Fan, L., & Zhu, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and US mathematics textbooks. Educational studies in Mathematics, 66(1), 61-75.

Fan, L. (2011). *Textbook research as scientific research: Towards a common ground for research on mathematics textbooks.*

Fan, L., Zhu, Y., & Miao, Z. (2013). *Textbook research in mathematics education: development status and directions. Zdm, 45(5), 633-646.*

Fan, L., & Kaeley, G. S. (2000). *The Influence of Textbooks on Teaching Strategies: An Empirical Study. Mid-Western Educational Researcher, 13(4), 2-9.*

Fuchs, E., & Bock, A. (Eds.). (2018). *The Palgrave handbook of textbook studies (p. 25). New York: Palgrave Macmillan.*

Glasnovic Gracin, D. (2018). *Requirements in mathematics textbooks: a five-dimensional analysis of textbook exercises and examples. International journal of mathematical education in science and technology, 49(7), 1003-1024.*

Hadar, L. L. (2017). *Opportunities to learn: Mathematics textbooks and students' achievements. Studies in Educational Evaluation, 55, 153-166.*

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). *Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. Journal for research in mathematics education, 28(5), 524-549.*

Hiebert, J., & Grouws, D. A. (2007). *The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 1(1), 371-404.*

Hoven, J., & Garelick, B. (2007). *Singapore math: Simple or complex?. Educational Leadership, 65(3), 28.*

Husén, T. (1967). *INTERNATIONAL STUDY OF ACHIEVEMENT IN MATHEMATICS, A COMPARISON OF TWELVE COUNTRIES, VOLUME II.*

Hwang, S., Yeo, S., & Son, T. (2021). *A comparative analysis of fraction addition and subtraction contents in the mathematics textbooks in the US and South Korea. International Electronic Journal of Elementary Education, 13(4)*

Institut für Didaktik der Mathematik. Standards für die mathematischen Fähigkeiten erster reichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe [Standards for the mathematical competencies of Austrian students at the end of the 8th grade]. Klagenfurt: Alpen-Adria-Universität; 2007. German.

Johnston-Wilder, S., & Mason, J. (2004). Fundamental constructs in mathematics education. Routledge.

Kaur, B. (2019). Overview of Singapore's education system and milestones in the development of the system and school mathematics curriculum. In Mathematics education in Singapore (pp. 13-33). Springer, Singapore.

Lee, N. H., Ng, W. L., & Lim, L. G. P. (2019). The intended school mathematics curriculum. In Mathematics education in Singapore (pp. 35-53). Springer, Singapore.

Leuders, T., Dörfler, T., Leuders, J., & Philipp, K. (2018). Diagnostic competence of mathematics teachers: unpacking a complex construct (pp. 3-31). Springer International Publishing.

Lindorff, A. M., Hall, J., & Sammons, P. (2019, May). Investigating a Singapore-based mathematics textbook and teaching approach in classrooms in England. In Frontiers in education (Vol. 4, p. 37). Frontiers Media SA.

Mullis, I. V., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). TIMSS 2011 international results in mathematics. International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Herengracht 487, Amsterdam, 1017 BT, The Netherlands.

Niss, M. (2015). Mathematical competencies and PISA. In Assessing mathematical literacy (pp. 35-55). Springer, Cham.

Niss, M., Bruder, R., Planas, N., Turner, R., & Villa-Ochoa, J. A. (2016). Survey team on: Conceptualisation of the role of competencies, knowing and knowledge in mathematics education research. ZDM, 48, 611-632.

Oates, T. (2014). Why textbooks count. A policy paper, 10.

OECD, P. (2018). Greece: What 15-year-old students in Greece know and can do Figure 1. Snapshot of performance in reading, mathematics and science, 1-10.

OECD (2003). *The PISA 2003 assessment framework. mathematics, reading, science and problem solving knowledge and skills*. Paris: OECD.

Research Advisory Committee of the National Council of Teachers of Mathematics. (1988). *NCTM curriculum and evaluation standards for school mathematics: Responses from the research community*. *Journal for Research in Mathematics Education*, 338-344.

Romberg, T. (2000). *Mathematical literacy. What Does It Mean For School Mathematics*, *Association of Mathematics Teachers*, 56(4).

Sáenz, C. (2009). *The role of contextual, conceptual and procedural knowledge in activating mathematical competencies (PISA)*. *Educational Studies in Mathematics*, 71(2), 123-143.

Shen, K., Crossley, J. N., Lun, A. W. C., & Liu, H. (1999). *The nine chapters on the mathematical art: Companion and commentary*. Oxford University Press on Demand.

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. S. (2007). *How curriculum influences student learning*. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319 – 369). Information Age Publishing.

Stein, M. K., Grover, B. W., & Henningsen, M. (1996). *Building student capacity for mathematical thinking and reasoning: An analysis of mathematical tasks used in reform classrooms*. *American educational research journal*, 33(2), 455-488.

Stevens, F. I. (1993). *Applying an opportunity-to-learn conceptual framework to the investigation of the effects of teaching practices via secondary analyses of multiple-case-study summary data*. *The journal of Negro education*, 62(3), 232-248.

Stylianides, G. J. (2009). *Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks*. *Mathematical thinking and learning*, 11(4), 258-288.

Sullivan, P., Clarke, D. J., Clarke, D. M., Farrell, L., & Gerrard, J. (2013). *Processes and priorities in planning mathematics teaching*. *Mathematics Education Research Journal*, 25(4), 457-480.

Tban, K. J., Ismail, Z., & Abidin, M. (2018). A comparative analysis on cognitive domain for the Malaysian primary four textbook series. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 14(4), 1273-1286.

Tay, E. G., Toh, T. L., & Kaur, B. (2019). *Surprising Singapore*. In *Mathematics Education in Singapore* (pp. 1-9). Springer, Singapore

Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in educational evaluation*, 31(4), 315-327.

Turner, R., Dossey, J., Blum, W., & Niss, M. (2013). Using mathematical competencies to predict item difficulty in PISA: A MEG study. In *Research on PISA: Research outcomes of the PISA Research Conference 2009* (pp. 23-37). Springer Netherlands.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Springer Science & Business Media.

van den Ham, A. K., & Heinze, A. (2018). Does the textbook matter? Longitudinal effects of textbook choice on primary school students' achievement in mathematics. *Studies in Educational Evaluation*, 59, 133–140.

Vincent, J., & Stacey, K. (2008). Do mathematics textbooks cultivate shallow teaching? Applying the TIMSS video study criteria to Australian eighth-grade mathematics textbooks. *Mathematics Education Research Journal*, 20(1), 82-107.

Zhu, Y., & Fan, L. (2006). Focus on the representation of problem types in intended curriculum: A comparison of selected mathematics textbooks from Mainland China and the United States. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 4(4), 609-626.

Henningsen, M., & Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for research in mathematics education*, 28(5), 524-549.

Vincent, J., & Stacey, K. (2008). *Do mathematics textbooks cultivate shallow teaching? Applying the TIMSS video study criteria to Australian eighth-grade mathematics textbooks. Mathematics Education Research Journal, 20(1), 82-107.*

Stenmark, J. K. (1991). *Mathematics Assessment: Myths, Models, Good Questions, and Practical Suggestions. National Council of Teachers of Mathematics, 1906 Association Drive, Reston, VA 22091-1593.*

Ελληνόγλωσση

Γιαλαμάς, Β. (2005). *Στατιστικές τεχνικές και εφαρμογές στις επιστήμες της αγωγής. Αθήνα: Εκδόσεις Πατάκη.*

Τσκοπούλου, Σ. (2008). *Ο ρόλος των δραστηριοτήτων στα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.), Το βιβλίο στη διδασκαλία των Μαθηματικών, 7^ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, 211-223. Θεσσαλονίκη.*

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, (2022), *Πρόγραμμα Σπουδών για το Μάθημα των Μαθηματικών στο Δημοτικό, 2^η έκδοση, Αθήνα, ΙΕΠ.*

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. και Οικονόμου, Θ. (2006), *Μαθηματικά Στ' Δημοτικού, Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων, Διόφαντος.*

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. και Οικονόμου, Θ. (2006), *Μαθηματικά Στ' Δημοτικού, Τετράδιο εργασιών, α', β', γ', δ' τεύχος, Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.*

Κασσώτη, Ο., Κλιάπης, Π. και Οικονόμου, Θ. (2006), *Μαθηματικά Στ' Δημοτικού, Βιβλίο Δασκάλου, Αθήνα: Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.*

Κολέζα, Ε. (2009). *Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών. Δ' Έκδοση. Αθήνα: Τόπος.*

Χασάπης, Δ. (2008). *Το βιβλίο στη διδασκαλία των Μαθηματικών: ένα πρόβλημα υπό διαρκή διερεύνηση. Στο Δ. Χασάπης (Επιμ.), Το βιβλίο στη διδασκαλία των Μαθηματικών, 7^ο Διήμερο Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών, 11-20. Θεσσαλονίκη.*