ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
UNIVERSITY OF CYPRUS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Επίλυση αυθεντικών προβλημάτων μέσω βιωματικών δραστηριοτήτων: Μια εφαρμογή σε μαθητές που διδάσκονται σε διαφορετικά εκπαιδευτικά συστήματα

Λιόση Ζωή Βενετία
7112122100025

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής

Χρυσαυγή Τριανταφύλλου Επικ. Καθηγήτρια, ΕΚΠΑ

Αθήνα

Σεπτέμβριος 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟΥ ΔΙΠΛΩΜΑΤΟΣ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗΣ

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 11/11/2024 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

	Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪	Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια ΕΚΠΑ
▪	Χ. Τριανταφύλλου (επιβλέπουσα)	Επικ. Καθηγήτρια, ΕΚΠΑ
▪	Γ. Ψυχάρης	Επικ. Καθηγητής, ΕΚΠΑ

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους:

	Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪	Δ. Πόταρη	Καθηγήτρια ΕΚΠΑ
▪	Χ. Τριανταφύλλου (επιβλέπουσα)	Επικ. Καθηγήτρια, ΕΚΠΑ
▪	Γ. Ψυχάρης	Επικ. Καθηγητής, ΕΚΠΑ

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

Την κα. Χρυσαυγή Τριανταφύλλου για την τιμή που μου έκανε να είναι η επιβλέπουσα καθηγήτριά μου. Η συνεργασία μαζί της μου έδωσε την ευκαιρία να αντλήσω πολύτιμες συμβουλές και καθοδήγηση που ήταν κρίσιμες για την επιτυχή ολοκλήρωση του έργου μου. Η υπομονή της και οι λεπτομερείς υποδείξεις που μου προσέφερε αποδείχθηκαν ουσιώδεις παράγοντες στην ολοκλήρωση της διπλωματικής μου εργασίας.

Τον καθηγητή κ. Γεώργιο Ψυχάρη για την τιμή που μου έκανε να βρίσκεται στην συμβουλευτική και εξεταστική επιτροπή της διπλωματικής μου εργασίας και ιδιαιτέρως για τις πολύτιμες παρατηρήσεις του.

Την καθηγήτρια κα. Δέσποινα Πόταρη για την τιμή που μου έκανε να βρίσκεται στην εξεταστική επιτροπή της διπλωματικής μου εργασίας, αλλά κυρίως για την έμπνευση που μου παρείχε κατά την διάρκεια των μαθημάτων της όπως και για τις πολύτιμες συμβουλές στην διάρκεια όλου του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Ευχαριστώ επίσης:

Όλους τους καθηγητές μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα της Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών για τις συμβουλές τους, την καθοδήγησή τους και την πρόθυμη βοήθειά και συνεργασία που μου προσέφεραν.

Τον Νικόλα Χειλάκο που μας εξυπηρέτησε και μας διευκόλυνε μέσω της άψογης δουλειάς του στη γραμματεία του τμήματος.

Τις συμφοιτήτριές μου Γεωργία Παύλου και Ιωάννα Αρμύρα για την πολύτιμη βοήθεια κατά την διάρκεια της φοίτησής μας αλλά και για τις ατελείωτες συζητήσεις μας. Τις ευχαριστώ για την συμπαράσταση που μου προσέφεραν κατά την διάρκεια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος.

Τους καθηγητές Μαθηματικών του Αμερικάνικου Σχολείου Έβελιν Τουμπακάρη, Νικόλαο Παρακάτη, και τον Αριστοτέλη Θυμιανό που μου άνοιξαν τις τάξεις τους και με δέχτηκαν εγκάρδια μαζί με τους μαθητές τους.

Την μητέρα μου Δέσποινα και τον πατέρα μου Παντελεήμονα για την στήριξη και την αγάπη που μου παρέχουν. Ιδιαιτέρως τον αδελφό μου Σταμάτιο που με συνεχείς συζητήσεις, παρατηρήσει και σχόλια με βοήθησε να πετύχω στη συγγραφή της Διπλωματικής. Τους φίλους μου που με στήριξαν σε όλη αυτή τη διαδικασία.

Περίληψη

Η παρούσα έρευνα βασίζεται στην επίλυση αυθεντικών προβλημάτων από μαθητές Γυμνασίου μέσα από βιωματικές δραστηριότητες. Η μάθηση μέσω επίλυσης δραστηριοτήτων έχει βελτιώνει την ικανότητα των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων όπως και την αυτοπεποίθησή τους κατά την έναρξη της επιλυτικής διαδικασίας. Πιο πρόσφατες έρευνες υποδεικνύουν ότι κατά την επίλυση προβλημάτων μέσα από βιωματικές δραστηριότητες ενισχύεται η δημιουργικότητα και το ενδιαφέρον των μαθητών για τα μαθηματικά. Παρόλα αυτά, υπάρχει περιορισμένος αριθμός ερευνών που μελετά τις διαδικασίες επίλυσης προβλήματος μέσω βιωματικών δραστηριοτήτων σε διαφορετικά εκπαιδευτικά συστήματα.

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναλύονται και συγκρίνονται δύο διδασκαλίες σε διαφορετικά εκπαιδευτικά συστήματα: η διδασκαλία στην Β’ Γυμνασίου ενός τυπικού ελληνικού σχολείου και η διδασκαλία στην 8η τάξη ενός αμερικάνικου σχολείου. Το πρόβλημα που δόθηκε στους μαθητές/τριες αφορά τον υπολογισμό του ύψους της αίθουσας διδασκαλίας τους ή ενός δομήματος δικής τους κατασκευής. Οι μαθητές χρησιμοποιήσαν εργαλεία μέτρησης, όπως το γωνιόμετρο. Στην προσπάθεια τους οι μαθητές κλήθηκαν να εμπλακούν σε πρακτικές μοντελοποίησης με τη χρήση τριγωνομετρικών αριθμών. Στην εργασία μελετήθηκαν οι δύο διδακτικοί σχεδιασμοί, οι αλληλεπιδράσεις εκπαιδευτικών –μαθητών καθώς και οι στρατηγικές που χρησιμοποιήσαν οι μαθητές των δύο σχολείων. Το ερευνητικό θέμα ήταν η μελέτη διδασκαλιών που αφορούν βιωματικές δραστηριότητες στα δύο εκπαιδευτικά συστήματα και οι επιρροές που αναγνωρίζουμε λόγω της διαφορετικότητας των Θεσμικών πλαισίων τους. Το Θεωρητικό και Μεθοδολογικό εργαλείο ήταν το Κοινωνικο-Διδακτικό Τετράεδρο.

Τα ερευνητικά δεδομένα είναι (α) οι 2 διδασκαλίες και (β) οι συνεντεύξεις με τους καθηγητές του δεύτερου σχολείου. Μελετώνται οι διαφορές μεταξύ των θεσμικών πλαισίων στα δύο εκπαιδευτικά συστήματα και ώς αυτές επηρεάζουν τις εξέλιξη των δραστηριοτήτων. Παράλληλα, ο εκπαιδευτικός σε κάθε σύστημα διαδραματίζει διαφορετικό ρόλο και είναι σημαντικό να μελετηθεί η αλληλεπίδραση αυτού με τους μαθητές αλλά και οι τρόποι με τους οποίους επηρεάζεται η μοντελοποίηση και επίλυση των προβλημάτων λόγω αυτού. Το βιωματικό πλαίσιο μέσω του οποίου εισάχθηκε η δραστηριότητα αποτέλεσε ένα από τα μέρη μελέτης της έρευνας και εξετάζεται η επίδραση αυτού στην εξέλιξη της μοντελοποίησης αλλά και στην απόδοση αποτελεσμάτων που συνάδουν με αυτό από τους μαθητές.

Από τα αποτελέσματα αναδεικνύεται ότι οι μαθητές του Αμερικάνικου Εκπαιδευτικού Συστήματος φάνηκαν να είναι πιο εξοικειωμένοι με την διεξαγωγή βιωματικών δραστηριοτήτων σε αντίθεση με τους μαθητές του Ελληνικού Εκπαιδευτικού Συστήματος που αναζητούσαν την καθοδήγηση της εκπαιδευτικού. Σημαντικό αποτέλεσμα είναι η πλαισιακή κατανόηση του προβλήματος που αποτελεί κύριο κριτήριο επίλυσης της δραστηριότητας μέσω του βιωματικού μέρους αυτής. Από τα αποτελέσματα προέκυψε ότι οι παράγοντες που επηρέασαν την εξέλιξη της γνώσης των μαθητών ήταν (α) η επικοινωνία, (β) το αυθεντικό πλαίσιο του προβλήματος, (γ) η αναζήτηση ακρίβειας, (δ) οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού και (ε) η χρήση οπτικών αναπαραστάσεων και ψηφιακών εργαλείων.

Λέξεις Κλειδιά: κύκλος μοντελοποίησης, εκπαιδευτικό σύστημα, βιωματικές δραστηριότητες.

Abstract

This research is based on authentic problem solving by high school students through experiential activities. Learning through problem solving activities has improved students' problem solving ability as well as their confidence in starting the solving process. More recent research suggests that problem solving through experiential activities enhances students' creativity and interest in mathematics. However, there is a limited amount of research that studies problem solving processes through experiential activities in different educational systems.

In this thesis two teaching methods in different educational systems are analysed and compared: teaching in the 2nd grade of a typical Greek school and teaching in the 8th grade of an American school. The problem given to the students concerns the calculation of the height of their classroom or of a structure of their own construction. The students used measurement tools such as a protractor. In their efforts, students were asked to engage in modeling practices using trigonometric numbers. The paper studied the two instructional designs, the teacher-student interactions, and the strategies used by the students in the two schools. The research topic was the study of lessons involving experiential activities in the two educational systems and the influences we recognize due to the differences in their institutional frameworks. The theoretical and methodological tool was the Socio-Didactic Tetrahedron.

The research data are (a) the 2 teaching sessions and (b) interviews with the teachers of the second school. The differences between the institutional contexts in the two educational systems and how they affect the development of the activities are studied. At the same time, the teacher in each system plays a different role and it is important to study the interaction of this with the students and the ways in which the modelling and problem solving is affected because of this. The experiential context through which the activity was introduced was one of the parts of the research study and the effect of this on the development of modelling and the performance of results consistent with it by the students is examined.

The results highlight that students in the American Educational System appeared to be more familiar with conducting experiential activities as opposed to students in the Greek Educational System who sought teacher guidance. An important result is the contextual understanding of the problem which is the main criterion for solving the activity through its experiential part. The results showed that the factors that influenced the development of students' knowledge were (a) communication, (b) the authentic context of the problem, (c) the search for accuracy, (d) the teacher's interventions and (e) the use of visual representations and digital tools.

Keywords: modelling cycle, educational system, experiential activities.

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή

Η βιωματική μάθηση (Experiential learning) είναι μια παιδαγωγική προσέγγιση που δίνει έμφαση στη μάθηση μέσω της εμπειρίας και του αναστοχασμού. Έγινε δημοφιλής από τον David Kolb, ο οποίος πρότεινε έναν κύκλο μάθησης τεσσάρων σταδίων: εμπειρία, αναστοχαστική παρατήρηση, αφηρημένη εννοιολόγηση και ενεργός πειραματισμός. Η βιωματική εκπαίδευση είναι μια μέθοδος διδασκαλίας που προωθεί την ενεργητικότητα, την αυτογνωσία, την πρωτοβουλία και τη δημιουργικότητα των μαθητών, την εισαγωγή νέων μεθόδων αυτομελέτης, την ικανότητα εργασίας σε ομάδες, την εξάσκηση δεξιοτήτων για την εφαρμογή της γνώσης στην πράξη, και την συναισθηματική ικανοποίηση ώστε να φέρνουν χαρά καθώς και ενθουσιασμό στους μαθητές (Huu Tong, Phu Loc, Phuong Uyen, Hung Cuong, 2020). Οι βιωματικές δραστηριότητες συνδέονται στενά με τη διδασκαλία και τις εκπαιδευτικές δραστηριότητες σε σχολεία, προκειμένου να δημιουργήσουν ένα περιβάλλον για τους μαθητές, να συνδέσουν τη θεωρία με την πράξη και να ενοποιήσουν την επίγνωση με τη δράση και τους μαθητές, να έχουν την ευκαιρία να βιώσουν τη συμπεριφορά τους (E. Surya, Feria Andriana Putri, M. Mukhtar, 2016) και να ενισχύσουν την κριτική σκέψη και την ακαδημαϊκή ανάπτυξη των μαθητών (Rodríguez, Gallart, Pérez, 2018 - Mutmainah, Rukayah, Mintasih Indriayu, 2019).

Η προσέγγιση αυτή χρησιμοποιείται ευρέως σε διάφορα εκπαιδευτικά περιβάλλοντα με στόχο την βαθιά κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και την απόκτηση πρακτικών επιλυτικών δεξιοτήτων (Rodríguez, Gallart, Pérez, 2018). Η βιωματική μάθηση ενισχύει την κριτική σκέψη και την ακαδημαϊκή ανάπτυξη, καθιστώντας την πολύτιμη μέθοδο για την εκπαίδευση και την πρόοδο των μαθητών (Mutmainah, Rukayah, Mintasih Indriayu, 2019). Η μέθοδος μάθησης αυτή δίνει έμφαση στην εμπειρία των μαθητών δημιουργεί ένα ενεργό μαθησιακό περιβάλλον για τη διαμόρφωση και την ανάπτυξη της προσωπικότητας των μαθητών και βοηθά το σχολείο στην κινητοποίηση των πόρων για την εκπαίδευση προκειμένου να οικοδομηθούν φιλικά σχολεία και ενεργοί μαθητές (E. Surya, Feria Andriana Putri, M. Mukhtar, 2016). Έρευνες που έχουν διεξαχθεί στην Ελλάδα (Kidonia, 2016) αλλά και ανά τον κόσμο (Chesimet, Githua & Ng'eno, 2016 ; Breunig, 2017; Kolb & Kolb 2017) έχουν αναδείξει την σημασία και τα θετικά αποτελέσματα της βιωματικής μάθησης όταν αυτή χρησιμοποιείται ως κύρια μέθοδος διδασκαλίας σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες.

Τα θεμέλια της βιωματικής εκπαίδευσης απαντώνται τόσο στο ελληνικό όσο και στο αμερικάνικο εκπαιδευτικό σύστημα. Οι μαθητές έχουν ευκαιρίες να εφαρμόσουν τις θεωρητικές γνώσεις σε πρακτικές καταστάσεις, ενισχύοντας την κατανόηση και τις δεξιότητές τους. Η βιωματική μάθηση είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με το αμερικάνικο εκπαιδευτικό σύστημα (ΑΕΣ) όπου χαρακτηρίζεται από μια δυναμική και ενθαρρυντική προσέγγιση προς την εκπαίδευση. Οι εκπαιδευτικοί σε αυτό το σύστημα προωθούν την ενεργό συμμετοχή των μαθητών, δίνοντάς τους την ευκαιρία να εμπλακούν σε πρακτικές δραστηριότητες, πειράματα και προσομοιώσεις που θυμίζουν την πραγματική ζωή (Gutstein, 2016). Σε αυτό βοηθά και η τεχνολογία όπου έχει ενσωματωθεί ευρέως στη διδασκαλία των μαθηματικών, με τη χρήση υπολογιστών, λογισμικών και διαδικτυακών πόρων. Αυτό επιτρέπει στους μαθητές να εξερευνήσουν τα μαθηματικά με πιο δυναμικό και πρακτικό τρόπο. Στο αμερικάνικο σύστημα δίνεται έμφαση στην κριτική σκέψη, στην επίλυση προβλημάτων και στις δεξιότητες λήψης αποφάσεων μέσω της βιωματικής μάθησης. Προσφέρεται επίσης πρακτική άσκηση, προγράμματα συνεργατικής εκπαίδευσης και ευκαιρίες μάθησης υπηρεσιών για την προώθηση της βιωματικής εμπειρίας.

Παράλληλα, στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα (ΕΕΣ) παρόλο που η βιωματική μάθηση κερδίζει ολοένα και μεγαλύτερη αναγνώριση, δεν είναι τόσο διαδεδομένη όσο στο αμερικανικό σύστημα. Η παραδοσιακή προσέγγιση που υιοθετείται κατά κύριο λόγο στην τυπική ελληνική τάξη εστιάζει περισσότερο στη θεωρητική γνώση και την απομνημόνευση. Στους μαθητές προσφέρονται περιορισμένες ευκαιρίες να εμπλακούν σε πραγματικές εφαρμογές των εννοιών που έχουν μάθει. Ωστόσο, ορισμένα ελληνικά σχολεία ενσωματώνουν πλέον μεθόδους βιωματικής μάθησης (Kidonia, 2016). Στα ελληνικά σχολεία που έχει ξεκινήσει η χρήση βιωματικών δραστηριοτήτων κατά την μάθηση, οι εκπαιδευτικοί αναζητούν νέους τρόπους για να ενθαρρύνουν την ενεργό συμμετοχή των μαθητών μέσω πρακτικών ρεαλιστικών και αυθεντικών δραστηριοτήτων, πειραμάτων και προσομοιώσεων που επιτρέπουν την άμεση εφαρμογή των γνώσεων στην πραγματική ζωή. Σταδιακά εισάγονται και διδακτικές μέθοδοι με τη χρήση τεχνολογίας και προγραμμάτων όπως το Geogebra κλπ. (Knoblauch, 2022)

Πάνω σε αυτά τα πλαίσια έχει στηριχθεί και η παρούσα έρευνα. Στην εργασία αυτή θα αναλυθεί η διεξαγωγή και η επίλυση μιας βιωματικής δραστηριότητας μέσω αυθεντικού προβλήματος από μαθητές Γυμνασίου 2 εκπαιδευτικών συστημάτων, ΕΕΣ και ΑΕΣ. Η εκπαιδευτικός από το ελληνικό σχολείο δημιουργεί μία δραστηριότητα, που αφορά την Τριγωνομετρία, η οποία πληροί τις απαιτήσεις της βιωματικής μάθησης. Στους εκπαιδευτικούς του αμερικάνικου σχολείου δίνεται η ίδια δραστηριότητα με την ελευθερία να την τροποποιήσουν ή να δημιουργήσουν μία νέα δική τους που πληροί τα ίδια κριτήρια. Ο κάθε εκπαιδευτικός ανάλογα με την τάξη που διδάσκει και τις επιρροές που δέχεται από τα διάφορα περιβάλλοντα που προέρχονται οι μαθητές του, προσαρμόζει κατάλληλα το αυθεντικό πρόβλημα και την επίλυσή του αντίστοιχα. Μετά το πέρας της δραστηριότητας, αν υπάρχει χρόνος, προχωρά σε επέκταση αυτής για την σύνδεσή της με άλλους τομείς των Μαθηματικών και της καθημερινής ζωής.

Η διεξαγωγή και η επίλυση των δραστηριοτήτων θα αναλυθεί εκτενώς καθώς θα θέλαμε να εντοπίσουμε διαφορές από την τυπική επίλυση. Όταν θα αναφερόμαστε σε τυπική επίλυση θα εννοούμε τον κύκλο μοντελοποίησης όπως έχει ορισθεί από τους Niss, Blum, και Galbraith (2007) και τους Blum και Ferri (2009). Θέλοντας να ερμηνεύσουμε τις επιλύσεις των μαθητών μέσω του αυτού, αναγόμαστε στα 7 διαφοροποιημένα στάδια όπως αναφέρουν οι Blum & Leiß (2007). Στόχος της μελέτης είναι να αναδειχτούν οι διαφορές στην δημιουργία βιωματικών δραστηριοτήτων στα έκαστα εκπαιδευτικά συστήματα και η διαχείριση αυτών μεταξύ των μαθητών. Σημαντικό είναι να καταγραφούν οι κύριοι τρόποι αλληλεπίδρασης μαθητών – εκπαιδευτικών κατά την διεξαγωγή της δραστηριότητας. Αυτό προσφέρει πλούσιο περιεχόμενο ως προς την κατανόηση της αλληλεπίδρασης του παραπάνω ζεύγους σε καθημερινή βάση, όχι μόνο κατά την επίλυση της συγκεκριμένης δραστηριότητας. Έτσι θα μπορούν να μελετηθούν εκτενέστερα οι νόρμες που έχουν υιοθετηθεί αλλά και οι «άτυποι νόμοι» που ισχύουν κατά την μάθηση εντός της τάξης. Θα αναζητηθούν, επίσης, οι παράγοντες και οι επιρροές που προτρέπουν τους καθηγητές να δημιουργήσουν πληθώρα διαφορετικών ρεαλιστικών και αυθεντικών δραστηριοτήτων στο αμερικάνικο σύστημα. Από τις συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών του ΑΕΣ θα αναδειχθούν οι διδακτικές επιλογές και οι στόχοι που θέτουν κατά την διεξαγωγή βιωματικών δραστηριοτήτων.

2. Θεωρητικό Πλαίσιο και Ανασκόπηση της Βιβλιογραφίας

2.1 Αυθεντικά Προβλήματα

2.1.1 Ο Ορισμός του Προβλήματος

Αρχικά θα πρέπει να ορίσουμε τί είναι ένα πρόβλημα. Μια μαθηματική δραστηριότητα θεωρείται πρόβλημα όταν απαιτεί περισσότερο από απλή εφαρμογή τύπων ή αλγοριθμικών διαδικασιών για την επίλυσή της. Η επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος απαιτεί συγκεκριμένες δεξιότητες και διαδικασίες. Τα βασικά συστατικά ενός προβλήματος περιλαμβάνουν τη σύνδεση μεταξύ μαθηματικών εννοιών, τη χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων, την ανάπτυξη διαφορετικών στρατηγικών προσέγγισης και τη γενίκευση της εμπειρίας του. Ένα πρόβλημα θεωρείται πολύπλοκο όταν δεν μπορεί να επιλυθεί με απλή εφαρμογή τύπων ή αλγοριθμικών διαδικασιών, αλλά απαιτεί συνδέσεις μεταξύ μαθηματικών εννοιών, αναγνώριση κανονικοτήτων, πολλαπλές αναπαραστάσεις, διάφορες στρατηγικές προσέγγισης και αναστοχασμό. Εάν οι μαθητές μπορούν να αναγνωρίσουν και να εφαρμόσουν άμεσα μια λύση, τότε η δραστηριότητα θεωρείται άσκηση. Το αν μια δραστηριότητα είναι πρόβλημα εξαρτάται από τους μαθητές και την χρονική στιγμή που τους τίθεται το πρόβλημα. Σύμφωνα με τον Kantowski (1977, σελ. 163), *"Ένα άτομο αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα όταν αντιμετωπίζει μια ερώτηση που δεν μπορεί να απαντήσει ή μια κατάσταση που δεν μπορεί να επιλύσει χρησιμοποιώντας τις γνώσεις που έχει άμεσα στη διάθεσή του. Πρέπει τότε να σκεφτεί έναν τρόπο να χρησιμοποιήσει την πληροφορίες που έχει στη διάθεσή του για να φτάσει στο στόχο, τη λύση του προβλήματος"*.

Η σημασία της επίλυσης προβλημάτων με πλαισιακό υπόβαθρο είναι μεγάλη καθώς οι μαθητές καλούνται να εργάζονται μεταξύ δύο συμβολικών κωδικών: τη γραπτή γλώσσα και το μαθηματικό συμβολισμό, πράξεις κατά αντιστοιχία. Όπως επισημαίνει ο Verschaffel et al. (1994), οι μαθηματικοί συμβολισμοί και πράξεις θα πρέπει να συντονίζονται με την φυσική πραγματικότητα. Αυτό που θα πρέπει να επικοινωνηθεί στους μαθητές είναι ότι κατά την εργασία τους σε λεκτικά προβλήματα, θα πρέπει αυτοί να κατανοήσουν πώς διαδικασίες και αντικείμενα του πραγματικού κόσμου μπορούν να μοντελοποιηθούν μέσω των μαθηματικών εργαλείων. Ένας άλλος λόγος για τον οποίο οι μαθητές ωφελούνται από την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων είναι η εξάσκηση της κριτικής τους ικανότητας. Ένας μαθητής όπου ακόμα το περιβάλλον του είναι περιορισμένο και δεν έχει αντιμετωπίσει προβλήματα της καθημερινότητας, θα πρέπει να δημιουργήσει μία φαρέτρα λογικής. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί μέσα από την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων με πλούσιο πλαισιακό υπόβαθρο που στοχεύουν στην αύξηση της κριτικής ικανότητας και της επιλογής τακτικών και μεθοδολογιών με βάση το πλαίσιο εργασίας. Ο Verschaffel et al. (2000) επινόησε την έκφραση «αναστολή της παραγωγής νοήματος» (*suspension of sense-making*) με από το χαρακτηρισμό του τρόπου με τον οποίο οι μαθητές σκέφτονται όταν λύνουν λεκτικά προβλήματα. Όταν οι μαθητές λειτουργούν σε επίπεδο χαρτιού – μολυβιού, φαινομενικά αγνοούν τί γνωρίζουν για τον κόσμο. Ακολουθούν δηλαδή την τυφλή μεθοδολογική επίλυση των προβλημάτων (παράγωγο των ασκήσεων εξάσκησης μεθοδολογιών), ξεχνώντας εντελώς το πλαίσιο εργασίας ή τί γνωρίζουν για τον κόσμο. Έτσι, Επιδίδονται σε υπολογισμούς χωρίς να προσέχουν το ζήτημα του τρόπου με τον οποίο πρέπει να μοντελοποιηθεί.

2.1.2 Αυθεντικά Προβλήματα

Θα πρέπει να μελετήσουμε τί είναι τα αυθεντικά προβλήματα. Για να είναι αυθεντική μια σχολική εργασία με εξωσχολικό πλαίσιο εργασίας θα πρέπει να αντιπροσωπεύει κάποια κατάσταση εργασίας στην πραγματική ζωή και σημαντικές πτυχές αυτής της κατάσταση θα πρέπει να προσομοιώνονται σε κάποιο εύλογο βαθμό. Ο Niss (1992) αναφέρεται στις ικανότητες των ανθρώπων που εργάζονται στον τομέα από τον οποίο προέρχεται το πρόβλημα και ορίζει τα αυθεντικά προβλήματα ως αυτά που αναγνωρίζονται από τους ανθρώπους που εργάζονται σε αυτόν ως πρόβλημα που θα μπορούσαν να συναντήσουν στην καθημερινή τους εργασία. Η βασική ιδέα για τον ορισμό του αυθεντικού προβλήματος βρίσκεται στο ακόλουθο απόσπασμα του Fitzpatrick και Morrison (1971, σελ. 239): *"εάν ένα μέτρο επίδοσης πρέπει να ερμηνευθεί ως σχετικό με την επίδοση στην "πραγματική ζωή", πρέπει να λαμβάνεται υπό συνθήκες αντιπροσωπευτικές της ερεθίσματα και αντιδράσεις που συμβαίνουν στην πραγματική ζωή".* Τα αυθεντικά προβλήματα που μπορεί να προκύψουν στη ζωή του μαθητή ή που είναι γνωστά στον μαθητή έχουν τεράστια δυναμική για τη μάθηση. Τα αυθεντικά προβλήματα απαιτούν συνήθως ένα ευρύ φάσμα γνώσεων και δεξιοτήτων για την επιτυχή επίλυση και ενθαρρύνουν τη μεταφορά, δείχνοντας πότε η γνώση είναι χρήσιμη. Ένα πιο συγκεκριμένο λειτουργικό πλαίσιο (Kolb 2002, 2006) περιλαμβάνει μια σειρά από τέτοιες πτυχές των καταστάσεων εργασίας της πραγματικής ζωής που οι προσομοιώσεις έχουν υποστηριχθεί ότι είναι σημαντικές για τις δυνατότητες των μαθητών να εμπλακούν στις μαθηματικές δραστηριότητες που αποδίδονται στην προσομοιωμένη κατάσταση πραγματικής ζωής.

Μία κατηγορία των αυθεντικών προβλημάτων που ολοένα και γίνεται μέρος της διδασκαλίας στα μοντέρνα σχολεία είναι τα αυθεντικά προβλήματα που χρησιμοποιούν ή εισάγονται από τις νέες τεχνολογίες. Σε μία εποχή ανάπτυξης του νου μέσω της τεχνολογίας, η χρήση τέτοιων προβλημάτων είναι ωφέλιμη για τους μαθητές. Συχνά, σε ένα περιβάλλον με ποικίλα θέματα που καθίσταται δυνατή η χρήση πολυμεσικών πόρων, οι μαθητές θα κατανοήσουν ευκολότερα τις εργασίες από ότι σε ένα παραδοσιακό, αμιγώς λεκτικό πλαίσιο. Το ενδιαφέρον εδώ είναι ότι στο πλαίσιο της εκπόνησης λεκτικών προβλημάτων, διαφαίνεται ότι οι δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε αυτά τα πλαίσια φαίνεται σχετίζεται με το ζήτημα του συντονισμού των πληροφοριών που δίνονται σε γραπτές εργασίες με αυθεντικό τρόπο από έναν πραγματικό κόσμο. Η εξάσκηση και επίλυση προβλημάτων με τη χρήση της τεχνολογίας έχει αποδειχθεί ότι βοηθά περισσότερο και στη Γεωμετρία (Calder, 2018) αφού βρέθηκε ότι οι μαθητές βελτίωσαν τη χωρική τους αντίληψη, την κατανόηση των γωνιών και την τοποθέτηση των συντεταγμένων. Ήδη από τα πρώτα στάδια της εκπαίδευσης των μαθητών, έχει αποδειχθεί από τον χάρτη παιδαγωγικών ευκαιριών των Pierce & Stacey (2010), οι ψηφιακές τεχνολογίες μπορούν να φανούν χρήσιμες σε 3 τομείς: *επανεξισορρόπηση της έμφασης στις δεξιότητες, έννοιες και εφαρμογές*. Στα επόμενα στάδια της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, όπου βρίσκουμε πιο συγκεκριμένες έρευνες για την διδασκαλίας της Γεωμετρίας μέσω ψηφιακών εργαλείων (Calder, 2018), επισημαίνεται ότι η δύναμη της τεχνολογίας να σημειώσει την σκέψη των μαθητών συνάδει με την δυνατότητα να προάγονται συνεργατικές πρακτικές. Προκύπτει, εν τέλει, ότι η τεχνολογία προσθέτει διασκεδαστικά στοιχεία στην μάθηση και επισημαίνεται η ανάγκη των εκπαιδευτικών να καθοδηγούν την επιλογή τεχνολογικών εφαρμογών.

2.1.3 Τα χαρακτηριστικά μιας Μαθηματικής Δραστηριότητας

Όταν αναφερόμαστε στον όρο δραστηριότητα ουσιαστικά μιλάμε για μια αλληλουχία ενεργειών με τις οποίες το άτομο επιδρά σε ένα αντικείμενο (υλικό ή ιδεατό) για να πετύχει ένα αποτέλεσμα. Μια δραστηριότητα δεν είναι μόνο η πρακτική εφαρμογή αλλά δημιουργείται με συγκεκριμένα κίνητρα που εξυπηρετούν την κατανόηση και την ανάπτυξη της νοητικής εξέλιξης του ατόμου (Leont'ev, 1981; Τζεκάκη, 2011). Η διδασκαλία και η μάθηση των Μαθηματικών δεν περιορίζεται στην ανάπτυξη μαθηματικών ιδεών, εννοιών, αλλά ενθαρρύνει την ανάπτυξη ανθρώπινων δραστηριοτήτων μέσα σε πραγματικές καταστάσεις υπό την επίβλεψη του εκπαιδευτικού συστήματος. Η μαθηματική δραστηριότητα χαρακτηρίζεται από κάποιες ιδιότητες που είναι γενικές για όλα τα είδη. Το μεγαλύτερο πλήθος ερευνών συμπεραίνει ότι μία μαθηματική δραστηριότητα προσανατολίζεται στη *διατύπωση και επίλυση προβλημάτων, σκέψη και ευέλικτο συλλογισμό, επιχειρηματολογία και τεκμηρίωση, αναστοχαστική επικοινωνία και γενίκευση*. Έτσι, οι μαθητές αναπτύσσουν συνήθειες και ρουτίνες σκέψης, προδιατίθενται να αναζητούν νόρμες και κανονικότητες κατά την επίλυση, συνδέσεις, πηγές, να αναπτύσσουν κατάλληλους συλλογισμούς που θα τους οδηγήσουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα και άρα να αναπτύξουν εν τέλει μία υψηλού επιπέδου μαθηματική σκέψη (Steinbring, 2005; Schoenfeld, 2016; Resnick, 1987).

Οι μαθηματικές πρακτικές περιγράφονται ως ένα «Ξέρω – πώς», δηλαδή έχει κατανοηθεί το μαθηματικό περιεχόμενο και ακολουθείται μία αλληλουχία πρακτικών που κάνουν οι «γνώστες» των Μαθηματικών: δικαιολόγηση, υποθέσεις, συμβολικές παραστάσεις και γενικεύσεις (Rand, 2002). Ο Freudenthal (1983) κατανοεί τη μαθηματική δραστηριότητα ως ένα τρόπο δημιουργίας μοντέλων για την αντιμετώπιση και κατανόηση των πραγματικών καταστάσεων και ο Brousseau (1997) ως την αναζήτηση κατάλληλων απαντήσεων που προκύπτουν από τις καταστάσεις προβλήματα. Για τον Radford (2006) και την προσέγγιση της «αντικειμενοποίησης» (objectification) η μάθηση των Μαθηματικών ξεπερνάει την επίλυση προβλήματος και το «κάνω Μαθηματικά» και αφορά περισσότερο την απόκτηση μορφών στοχασμού για τον κόσμο σύμφωνα με συγκεκριμένες ιστορικά πολιτιστικές μορφές σκέψης που διαφοροποιούνται από άλλες μορφές σκέψης.

Η ανάπτυξη μαθηματικών δραστηριοτήτων εμπεριέχει 3 στοιχεία τα οποία καθιστούν έκαστη δραστηριότητα ως δραστηριότητα υψηλής μαθηματικής αξίας. Η εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών (1) αναφέρεται στην κατανόηση σημαντικών ιδεών και σχέσεων. Οι μαθητές που δείχνουν εννοιολογική κατανόηση μιας μαθηματικής ιδέας μπορούν να εξηγήσουν γιατί η ιδέα εμπίπτει στη λογική τους, μπορούν να τη χρησιμοποιήσουν για να επιλύσουν προβλήματα και μπορούν να τη σχετίσουν με άλλα συνδεδεμένες θεματικές. Η μαθηματική γνώση για τη διδασκαλία (2) αναφέρεται στη «μαθηματική γνώση που χρειάζεται για να επιτευχθεί η διδασκαλία των μαθηματικών» (Ball, Thames & Phelps , 2008). Αυτό το στοιχείο περιλαμβάνει α) την απαραίτητη γνώση για την αναπαράσταση και την εξήγηση μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών με διαφορετικούς τρόπους, β) το πώς αναλύονται οι συλλογιστικές πορείες και στρατηγικές των μαθητών και κατά πόσο εμπίπτουν στην λογική και γ) πώς να χρησιμοποιείται μία πληθώρα από καθοδηγητικές μαθηματικές στρατηγικές και εργαλεία που αποσκοπούν στην απόδοση λογικής και κατανόησης του μαθηματικού – λεκτικού πλαισίου. Το (3)^{ο} στοιχείο αναφέρεται στις γνωστικές απαιτήσεις μιας δραστηριότητας το οποίο ορίζεται ως «το είδος και επίπεδο της σκέψης που απαιτείται από τους μαθητές ώστε να εμπλακούν και να επιλύσουν το πρόβλημα επιτυχώς» (Stein et al, 2009). Οι εργασίες που έχουν μεγάλη γνωστική απαίτηση χαρακτηρίζονται από προτροπές προς τους μαθητές να εξηγήσουν και να δικαιολογήσουν την σκέψη τους και από ενδιαφέρον να αν αναπτύξουν την κατανόηση των βασικών υποκείμενων εννοιών. Αυτές οι δραστηριότητες συνήθως συνοδεύονται από την οδηγία για την απόδοση πολλαπλών λύσεων και αναπαραστάσεων και σκοπεύουν να στηριχθούν στην ήδη κατακτηθείσα γνώση. Από την άλλη οι δραστηριότητες με μικρή γνωστική απαίτηση χαρακτηρίζονται από την απλή εξάσκηση σε διαδικασίες ή την απομνημόνευση στοιχείων το οποία είναι εμφανή σε μία επιλυτική στρατηγική χωρίς να χρειάζεται η σύνδεση υποκείμενων εννοιών.

2.2 Κοινωνικό – Πολιτισμική Οπτική

2.2.1 Η κοινωνικο-πολιτισμική προσέγγιση στη διδασκαλία των Μαθηματικών

Κατά την εξέλιξη της έρευνας στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης με προσανατολισμό προς την κοινωνική και πολιτισμική διάσταση, η κατανόηση των μαθηματικών αντιλαμβάνεται ως αποτέλεσμα κοινωνικής δραστηριοποίησης. Αυτό υποδηλώνει ότι πλέον δεν έχει σημασία μόνο το γνωστικό υποκείμενο (cognizing subject), αλλά επίσης οι τρόποι με τους οποίους το γνωστικό υποκείμενο αλληλεπιδρά με τα υπόλοιπα μέλη της εκπαιδευτικής κοινότητας στην οποία ανήκει και αντιδρά στις επιδράσεις που δέχεται από περιβαλλοντικούς παράγοντες του εκπαιδευτικού συστήματος στο οποίο συμμετέχει. Όταν εξετάζουμε, λοιπόν, τη μαθηματική εκπαίδευση ως ένα πεδίο πρακτικής που αναπτύσσεται εντός ενός ευρύτερου κοινωνικο-πολιτισμικού πλαισίου πρακτικών και θεσμών, εμφανίζονται ορισμένες διαφοροποιήσεις. Αυτές προκύπτουν από την επιβολή συγκεκριμένων νορμών περιγραφής του κόσμου, καθώς και από την ειδική καθοδήγηση των ενεργειών των μαθητών και την επιτυχημένη συμμετοχή τους στην κοινωνία. Αυτό συμβαίνει διότι από αυτήν την οπτική γωνία της μαθηματικής εκπαίδευσης προκύπτουν κριτήρια αξίας, έννοιες του σωστού και αποδεκτού σε ένα εκπαιδευτικό σύστημα.

Από τις αρχές του 21ου αιώνα και μετά, η μαθηματική ερευνητική κοινότητα έχει συνδέσει άρρηκτα την διδασκαλία των Μαθηματικών με την ψυχολογία και τις κοινωνικό – πολιτισμικές επιρροές που λαμβάνουν οι μαθητές. Υπογραμμίζεται λοιπόν ότι μέσα στο μαθηματικό – ψυχολογικό ρεύμα της έρευνας για την μαθηματική εκπαίδευση ενυπάρχει ένας βαθμός αναγνώρισης ορισμένων «κοινωνικών» παραγόντων, όπως η αλληλεπίδραση μεταξύ των γνωστικών υποκειμένων (“social” interaction όπως αναφέρεται σε κάποιες κονστρουκτιβιστικές θεωρίες) ή οι ανθρωπιστικές και δημοκρατικές ανησυχίες (“social” concerns) των ερευνητών και των εκπαιδευτικών. Ωστόσο, η «κοινωνική στροφή» δεν υιοθετεί αυτές τις έννοιες του όρου «κοινωνικός», αλλά εμμένει σε μια πιο «ουσιαστική» έννοια. Ο Lerman (2004) όρισε αυτήν την κοινωνική στροφή ως «*την ανάδυση στην ερευνητική κοινότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης θεωριών που βλέπουν τα Μαθηματικά*».

Οι Kieran, Forman & Sfard (2003) υποστηρίζουν ότι παρατηρείται μία μεταστροφή από την ιδέα ότι η μάθηση είναι καθαρά ατομική διαδικασία στην ιδέα ότι η μάθηση είναι συλλογιστική με κοινωνικό πολιτισμικές διαστάσεις. Αυτή η προσέγγιση έχει τις απαρχές της στον Vygotsky όπου θεμελίωσε την αντίληψη ότι ένα σύνολο πολιτισμικών εργαλείων, όπως η γλώσσα και τα συμβολικά συστήματα, επηρεάζουν άρρηκτα τις ανθρώπινες αλληλεπιδράσεις και άρα και τη μάθηση. Κατά συνέπεια, η μαθηματική εκπαίδευση ως μετατροπέας του θεωρητικού σε συμβολικού έχει αναλάβει τα ηνία για την μεταφορά του ενδιαφέροντος από το άτομο στο κοινωνικό σύνολο όπου αναπτύσσεται η γνώση (Lave & Wegner, 1991; Van Oers, 2001). Η Valero

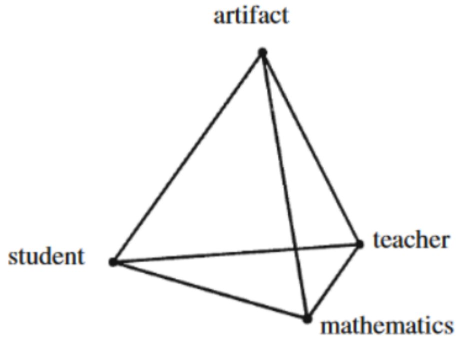
(2008) υποστηρίζει ότι υπάρχουν παράγοντες από τις πρακτικές φορέων και θεσμών της κοινωνίας που συμβάλλουν στη διαμόρφωση της μαθηματικής εκπαίδευσης και θα πρέπει να αναδεικνύονται μέσω των αλληλεπιδράσεων εκπαιδευτικού – μαθητή αλλά και των μαθηματικών δραστηριοτήτων που τους ανατίθενται.

Ο Bernstein (2000) εξετάζει τις κοινωνικογλωσσικές πτυχές της σχολικής εκπαίδευσης προκειμένου να αποκαλύψει πώς αναπαράγεται το κοινωνικό πλεονέκτημα και το μειονέκτημα μέσω των πρακτικών της σχολικής εκπαίδευσης. Σκοπός των ερευνητών έχει γίνει η μελέτη των πρακτικών εντός τάξης υπό το πρίσμα των ιδεών του Bernstein και πώς αυτές συνιστούν συγκεκριμένες μορφές εργασίας και ύπαρξης. Οι πρακτικές αυτές έχουν ελάχιστη σχέση με τα μαθηματικά ή τη νόηση αλλά σχετίζονται εγγενώς με το κοινωνικό πλαίσιο της τάξης των μαθηματικών. Οι τρόποι με τους οποίους συμβαίνει αυτό έχουν προσδιοριστεί ως σχετιζόμενοι με τις πρακτικές δόμησης των σχολικών μαθηματικών – δηλαδή συνδεδεμένοι με το κοινωνικό και πολιτικό πλαίσιο της μάθησης. Κοινώς αποδεκτή θέση στην ερευνητική κοινότητα είναι ότι οι πρακτικές των τάξεων είναι πολιτισμικές αναπαραστάσεις που είναι περισσότερο ή λιγότερο προσιτές στους μαθητές με βάση το πολιτισμικό και κοινωνικό τους υπόβαθρο. Το να είναι κανείς σε θέση, ή όχι, να συμμετέχει στο κοινωνικό περιβάλλον της μαθηματικής τάξης απαιτεί ιδιαίτερη γνώση των άγραφων κανόνων της κουλτούρας της τάξης. Οι μαθητές που είναι σε θέση να εντοπίσουν και να συμμετάσχουν στις κυρίαρχες πρακτικές των σχολικών μαθηματικών είναι πιο πιθανό να θεωρηθούν ως «αποτελεσματικοί» μαθητές των μαθηματικών από εκείνους που δεν είναι.

2.2.2 Το κοινωνικό - διδακτικό Τετράεδρο των Rezat & Strasser (2012)

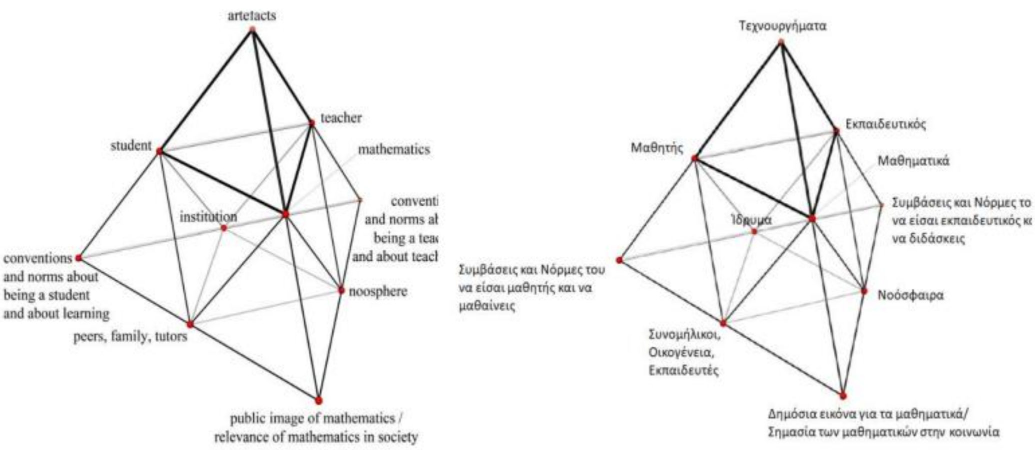
Όσο οι κοινωνικό – πολιτισμικές επιρροές ασκούνται στη διδασκαλία των Μαθηματικών έτσι η μάθηση αυτών ξεπερνά την επίλυση προβλημάτων και αποκτά στοχαστική μορφή καθώς ο εκπαιδευτικός δίνει τα θεωρητικά και πλαισιακά εφόδια στο μαθητή για να “επιλύει το πρόβλημα” κάτω από συνθήκες (Radford, 2006). Οι Lave & Wegner (1991) υπογραμμίζουν ότι η ενεργός συμμετοχής των μαθητών σε δραστηριότητες του κοινωνικού πρακτικού περιβάλλοντος με προϋποθέσεις *μαθηματικής κουλτούρας* οδηγεί σε *δημιουργία μιας ταυτότητας*. Οι μαθητές επαναλαμβάνοντας συνεχώς αυτές τις κοινωνικό – μαθηματικές πρακτικές κατανοούν εις βάθος τη γνώση και αναγνωρίζουν τη σημασία της μαθηματικής δραστηριότητας. Για τα διάφορα χαρακτηριστικά που προσδίδουν σε αυτές αμφότεροι οι εκπαιδευτικοί αλλά και οι ίδιοι οι μαθητές, μιλούν αναλυτικά οι Rezat & Strasser (2012).

Παίρνοντας το διδακτικό τρίγωνο (εκπαιδευτικός – μαθητής – μαθηματικά) των Clarke et al. (2014), το επεκτείνουν με την προσθήκη μιας τέταρτης κορυφής, το τεχνούργημα (artifact) και καθορίζουν το είδος της μαθηματικής δραστηριότητας που αναπτύσσεται σε μία σχολική τάξη. Για να κατανοηθούν τα τεχνουργήματα διαμεσολαβούν τα σχολικά εγχειρίδια, τα ψηφιακά εργαλεία – δραστηριότητες (tasks) και η μαθηματική συμβολική γλώσσα.



Σχήμα 1: Το τετράεδρο της μαθηματικής δραστηριότητας (πριν την επέκτασή του) (Rezat & Strasser, 2012, p. 645)

Αργότερα επεκτείνοντας το τετράεδρο αυτό, καθορίστηκε ως υψίστης σημασίας ο παράγοντας του κοινωνικο – πολιτισμικού πλαισίου στο οποίο αναπτύσσεται μία μαθηματική δραστηριότητα.



Σχήμα 2: Το κοινωνικό – διδακτικό τετράεδρο (ΚΔΤ) (Rezat & Strasser, 2012, p. 648)

Στο νέο διδακτικό τετράεδρο κεντρικότερο σημείο είναι το ίδρυμα. Αυτό είναι που συνδυάζει 4 έδρες που ουσιαστικά αποτυπώνουν και τις πτυχές των μελών που συνιστούν την διδακτική μικροκοινωνία – τάξη. Τόσο οι μαθητές όσο και οι εκπαιδευτικοί ανήκουν σε διακριτούς κύκλους διαβίωσης. Οι μαθητές ανήκουν στον κύκλο των συνομήλικών τους και της οικογένειάς τους ενώ από την άλλη πλευρά οι εκπαιδευτικοί συνυπάρχουν στον κύκλο της εκπαιδευτικής κοινότητας του ιδρύματος. Οι νόρμες και κανόνες θα πρέπει να θεσπίζονται που συνεπάγονται το κοινωνικό και θεσμικό πλαίσιο του εκπαιδευτικού ιδρύματος. Κατά συνέπεια, οι ακμές που ορίζονται από το σημείο του εκπ. ιδρύματος είναι: οι Νόρμες του να είσαι μαθητής και να μαθαίνεις, οι Νόρμες του να είσαι εκπαιδευτικός και να διδάσκεις, η Δημόσια εικόνα των Μαθηματικών στην κοινωνία και τα Τεχνουργήματα. Όπως υπογράμμισε ο Engestrom (1987), οι συμβάσεις και οι κανόνες σχετικά με το να είσαι μαθητής και το να μαθαίνεις, το να είσαι εκπαιδευτικός και το να διδάσκεις σχετίζονται με θεσμικές ρυθμίσεις όπως το τυποποιημένο ωρολόγιο πρόγραμμα, η οργάνωση της τάξης, ή οι τρόποι αξιολόγησης των μαθητών οι οποίες καθορίζονται από το εκπαιδευτικό ίδρυμα στο οποίο μαθητής και εκπαιδευτικός συνυπάρχουν. Τέλος, η τέταρτη κορυφή της βάσης του κοινωνικού τετραέδρου είναι η δημόσια εικόνα για τα μαθηματικά και η σημασία τους στην κοινωνία, το οποίο αφορά το γενικότερο πλαίσιο των εφαρμογών αυτών στην καθημερινή ζωή.

2.2.3 Η διδασκαλία στο Ελληνικό Εκπαιδευτικό Σύστημα

Σύμφωνα με τους Caswell & Campbell (1935) το αναλυτικό πρόγραμμα είναι ένα πρόγραμμα δραστηριοτήτων σχεδιασμένο έτσι ώστε όχι μόνο να αποκτηθούν συγκεκριμένες εμπειρίες από τους μαθητές αλλά και οι ίδιοι να πετύχουν συγκεκριμένους μαθησιακούς στόχους. Στην εργασία αυτή, οι μαθησιακοί στόχοι σχετίζονται με το μάθημα των μαθηματικών. Το ΑΠΣ ενός εκπαιδευτικού συστήματος είναι η απαρχή του, το οποίο εκφράζει την εκπαιδευτική φιλοσοφία του, τις γενικές αρχές που τίθενται σε διδακτικό και μαθησιακό επίπεδο (Μοσχοβίτη, 2019). Στο Ελληνικό Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΕΑΠΣ) σύμφωνα με τις αρχές του Διεθνούς Ενιαίου Πλαισίου Προγραμμάτων Σπουδών (ΔΕΠΠΣ) προτείνονται θεωρητικά και πρακτικά προβλήματα που αφορούν την επιλογή και οργάνωση της σχολικής γνώσης. Στη διαδικασία αυτή λαμβάνεται υπόψιν η ελληνική εκπαιδευτική πραγματικότητα με σκοπό να διατηρούνται τα διακριτά μαθήματα αλλά ταυτόχρονα να προωθούνται και ποικίλοι τρόποι συσχέτισης της γνώσης σε 2 άξονες της διαθεματικότητας, τον κατακόρυφο – διαθεματικός και οριζόντιος – ενιαίος. Σκοπός του ΕΑΠΣ είναι το περιεχόμενό του και η διαδικασία επεξεργασίας των διάφορων εννοιών να διασφαλίζουν την εσωτερική συνοχή, τη συνέχεια και την ενιαία ανάπτυξη, τις διεπιστημονικές θεωρήσεις και συσχετίσεις καθώς και τις διαθεματικές προεκτάσεις.

Το μοντέλο που κυριαρχεί στο Ελληνικό Εκπαιδευτικό Σύστημα βασίζεται κυρίως στην αυτοτελή διδασκαλία των διαφόρων γνωστικών αντικειμένων. Με αυτόν τον τρόπο όμως δεν είναι δυνατόν να εξασφαλιστεί ταυτόχρονα η απαιτούμενη «*εσωτερική συνοχή*» και η «*ενιαία οριζόντια ανάπτυξη των περιεχομένων*». Εισάγεται εντούτοις η Οριζόντια Διασύνδεση η οποία στο επίπεδο των ΑΠΣ σημαίνει κατάλληλη οργάνωση της διδακτέας ύλης με τρόπο που να εξασφαλίζεται η επεξεργασία θεμάτων από πολλές οπτικές γωνίες ώστε αυτά να κατανοούνται πολυπρισματικά και να αναδεικνύεται η γνώση και η σχέση της με την πραγματικότητα. Η γενικότερη αυτή προσέγγιση που ονομάζεται Διαθεματική Προσέγγιση, και έγκειται στην γενικότερη έννοια της Διεπιστημονικότητας, δίνει την δυνατότητα στον μαθητή να συγκροτήσει ένα ενιαίο σύνολο γνώσεων και δεξιοτήτων, μια ολιστική αντίληψη της γνώσης, που του επιτρέπει να διαμορφώνει προσωπική άποψη για θέματα των επιστημών τα οποία σχετίζονται μεταξύ τους καθώς και ζητήματα της καθημερινής ζωής. Η διαθεματική προσέγγιση υποστηρίζεται από μεθόδους ενεργητικής απόκτησης γνώσης, οι οποίες εφαρμόζονται στη διδασκαλία κάθε γνωστικού αντικειμένου και ιδιαιτέρως των μαθηματικών και εξειδικεύονται στις διαθεματικές δραστηριότητες που πραγματοποιούνται στο πλαίσιο της διδασκαλίας κάθε θεματικής ενότητας.

Η οργάνωση διαθεματικών δραστηριοτήτων διευκολύνεται από τη ενίσχυση της διαθεματικότητας στο κείμενο των σχολικών εγχειριδίων μέσα από θεμελιώδεις έννοιες των διαφόρων επιστημών, οι οποίες δύναται να αποτελέσουν βασικούς κρίκους οριζόντιας διασύνδεσης των μαθημάτων. Μερικές θεμελιώσεις έννοιες, που μπορεί να ονομαστούν «διαθεματικές» α) είναι κοινές σε πολλά γνωστικά αντικείμενα της ίδιας τάξης, β) εμφανίζονται συχνά σε γνωστικά αντικείμενα διαφόρων τάξεων και γ) συμβάλλουν στην προώθηση στάσεων και αξιών που συνδέονται άμεσα με τους βασικούς σκοπούς της σχολικής εκπαίδευσης. Ο συνδυασμός τέτοιων εννοιών με την υιοθέτηση κατάλληλων πρακτικών, ενισχύει τη διαθεματική προσέγγιση καθώς συμβάλει στη διάνθηση του πολύ-παραγοντικού σχήματος της ιδεολογίας του μαθητή.

2.2.4 Η διδασκαλία στο Αμερικάνικο Εκπαιδευτικό Σύστημα

Το εθνικό πρόγραμμα σπουδών των Ηνωμένων Πολιτειών της Αμερικής που έχει δημιουργηθεί από το Υπουργείο Εκπαιδευτικής πολιτικής των ΗΠΑ, περιγράφει τις αρχές και τα περιγράμματα της εκπαίδευσης των ΗΠΑ. Σε αυτό περιλαμβάνονται οι γενικοί στόχοι της εκπαίδευσης, μαζί με τους στόχους όλων των θεμάτων των βασικών εννοιών των Μαθηματικών που αναλύονται, οι αρχές των μαθητικών εξετάσεων, οι αρχές της ειδικής εκπαίδευσης, οι κανόνες για την ευημερία και προστασία των μαθητών και οι εκπαιδευτικοί οδηγοί. Δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στις αρχές ενός καλού εκπαιδευτικού περιβάλλοντος, στις μεθόδους διδασκαλίας αλλά και στην έννοια της μάθησης. Συγκεκριμένοι οδηγοί με πληροφορίες και περιεχόμενο για τα σχολικά Μαθηματικά προσδιορίζονται ξεχωριστά για τις τάξεις 1-2, τις τάξεις 3-6 και τις τάξεις 7-9. Το εθνικό πρόγραμμα σπουδών επίσης περιέχει περιγραφές μίας καλής απόδοσης για τις τάξεις 6 και 9 για τα κοινά μαθήματα ώστε να δώσει στους εκπαιδευτικούς ένα περίγραμμα – εργαλείο για τις σχολικές εξετάσεις.

Η έννοια της μάθησης περιγράφεται τονίζοντας την σημαντικότητα και προθυμία «να δράσουμε και να μάθουμε συνοδευόμενοι από τη χαρά της μάθησης» (FNBE, 2016). Το πρόγραμμα σπουδών περιγράφει οριζόντιες γενικές ικανότητες ως ένα τρόπο να συναντήσουμε προκλήσεις στο μέλλον, που προφανώς σχετίζονται με τις ικανότητες του 21^{ου} αιώνα ως προς τη διαθεματική διδασκαλία των σχολικών μαθημάτων. Οι γνωστικοί στόχοι των οριζόντιων ικανοτήτων περιγράφονται ας επτά περιοχές ικανότητας:

(1) Σκέφτομαι και μαθαίνω να μαθαίνω
(2) Πολιτιστική Ικανότητα, Διάδραση και Προσωπική έκφραση
(3) Φροντίδα του εαυτού μας και διαχείριση της καθημερινής ζωής
(4) Γραμματισμός
(5) Επικοινωνιακή και πληροφοριακή ικανότητα τεχνολογίας (ICT)
(6) Ικανότητα εργασιακής ζωής και καινοτομία
(7) Συμμετοχή, εμπλοκή και δημιουργία ενός βιώσιμου μέλλοντος

Το πρόγραμμα σπουδών καλεί για καινοτόμους τρόπους ως προς την επίτευξη των στόχων μέσω της τοπικής εκπαιδευτικής κοινότητας, των σχολείων και των καθηγητών. Ο στόχος όλων των μαθημάτων, συμπεριλαμβανομένων και των Μαθηματικών είναι διασυνδεμένος με τους στόχους των οριζόντιων ικανοτήτων, οι οποίες θέτουν τις βάσεις για την πρόοδο των ατόμων. Η σημασία της διασύνδεσης μεταξύ των διάφορων μαθημάτων έχει αρχίσει να εφαρμόζεται ήδη από τις αρχές της δεκαετίας του 1970. Το πρόγραμμα σπουδών απαιτεί όλα τα σχολεία να δίνουν έμφαση στις ομαδικές πρακτικές στις τάξεις που περιέχουν διεπιστημονικές project-based δραστηριότητες όπου πολλοί καθηγητές μπορούν να εργαστούν με τους μαθητές πάνω στο ίδιο θέμα. Σκοπός αυτού του προγράμματος σπουδών θεμελιώνεται στην πεποίθηση ότι η μάθηση θα γίνει πιο εμπνευσμένη και ουσιαστική αν οι μαθητές λάβουν έναν πιο ενεργό ρόλο στην δημιουργία της σχολικής τους εργασίας, ειδικά στις διεπιστημονικές δραστηριότητες.

Οι εκπαιδευτικοί έχουν τονίσει ιδιαίτερα ότι μία αναλυτική χρήση των ψηφιακών τεχνολογιών στην εκπαίδευση έχει δημιουργήσει την ανάγκη για νέους στόχους και πρακτικές στην ανάπτυξη των παιδαγωγικών μεθόδων και μοντέλων. Υπάρχει λοιπόν μία δυνατή έμφαση στην ενσωμάτωση της τεχνολογίας μέσω καινοτόμων τρόπων ώστε να ευνοηθεί το πέρασμα από επίσημα σε ανεπίσημα περιβάλλοντα (Schmidt, W., Houang, R., & Cogan, L. (2002)). O Ketamo (2014) επισημαίνει ότι εμπειρικά αποτελέσματα αποδίδουν στοιχεία ότι οι μαθητές μαθαίνουν Μαθηματικά όταν παίζουν, π.χ. όταν μαθαίνουν Μαθηματικά σε ένα εικονικό κατοικίδιο μέσω παιχνιδιού. Επίσης, τα στοιχεία δείχνουν ότι οι συμπεριφορές των χρηστών μπορούν να δώσουν στους εκπαιδευτικούς αλλά και στους γονείς αναλυτικές πληροφορίες για την μαθητική πρόοδο των παιδιών και έτσι να υποστηρίξουν την αυτόνομη μάθηση.

Οι Calder και Murphy (2017, 2018a, 2018b) διερευνούν πώς εφαρμογές μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους εκπαιδευτικούς στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση για την προώθηση της μαθηματικής κατανόηση. Τονίζουν ότι οι δυνατότητες των συγκεκριμένων εφαρμογών είναι λιγότερο σημαντικές από τις παιδαγωγικές αποφάσεις που λαμβάνει ο εκπαιδευτικός όταν χρησιμοποιεί την εφαρμογή στην τάξη (Calder & Murphy, 2018a), ωστόσο, διαπιστώνουν ότι ορισμένες δυνατότητες εφαρμογών είναι αποτελεσματικές για την προώθηση της εμπλοκής και της μαθηματικής κατανόησης. Οι εφαρμογές που διευκολύνουν την ταυτόχρονη προβολή οθόνης και τη φωνητική καταγραφή που δημιουργούνται από τους ίδιους τους μαθητές, θεωρήθηκε ότι παρέχουν μια νέα δυναμική μαθησιακή περιβάλλον που αυξάνει την εμπλοκή των μαθητών (Calder & Murphy, 2018b). Αυτή η εργασία επεκτάθηκε περαιτέρω μέσω της εισαγωγής της ιδέας της συναρμολόγησης ως μέσο για την κατανόηση της αλληλεπίδρασης μεταξύ κοινωνικών και τεχνικών οντοτήτων, καθώς οι εφαρμογές είναι χρησιμοποιούνται στην τάξη (Calder & Murphy, 2018c).

Η χρήση του screencasting θεωρήθηκε ως μέσο ενθάρρυνσης συνεργατικών τρόπων εργασίας στο μαθηματικών στην τάξη, διεγείροντας την αμφισβήτηση και την επικύρωση των μαθηματικών ιδεών και διαδικασιών. Οι Prescott και Maher (2018) εξέτασαν επίσης τη χρήση του screencasting, εστιάζοντας ειδικότερα στις εταιρείες Explain Everything και Educreations, ως μέσο που επιτρέπει στους μαθητές να σκέφτονται μαθηματικά. Η μελέτη των παραπάνω αποκάλυψε την ικανότητα του screencasting να διευκολύνει τις στρατηγικές διαμορφωτικής αξιολόγησης των εκπαιδευτικών, καθιστώντας την σκέψη των μαθητών ορατή και δίνοντας τους την ευκαιρία να κριτικάρουν ο ένας τη εργασία του άλλου. Διαπιστώθηκε ότι αυτό το είδος συνεργατικής εργασίας στο πλαίσιο της τάξης των μαθηματικών αυξάνει τη δέσμευση των μαθητών. Ομοίως, σε μια μελέτη 11 πρωτοβάθμιων και δευτεροβάθμιων καθηγητών μαθηματικών, οι Ingram, Williamson-Leadley και Pratt (2016) διαπίστωσαν υψηλή εμπλοκή των μαθητών όταν χρησιμοποιούσαν μια εφαρμογή «Show and tell». Οι συγγραφείς υποθέτουν ότι η πράξη του να γίνεται «η μαθηματική σκέψη ορατή» είχε ως αποτέλεσμα πλούσιες μαθηματικές συζητήσεις σχετικά με την επίλυση προβλημάτων.

Η έννοια της εμπλοκής των μαθητών στα μαθηματικά μέσω της χρήσης της τεχνολογίας σε δημοτικά σχολεία εξετάστηκε άμεσα σε τρεις δημοσιεύσεις (Attard, 2018- Hilton, 2018- Orlando & Attard, 2016). O Attard (2018) συνθέτει τα αποτελέσματα τριών ποιοτικών μελετών που εξετάζουν τις κινητές τεχνολογίες χρησιμοποιώντας παρατηρήσεις στην τάξη, ομάδες εστίασης μαθητών και συνεντεύξεις εκπαιδευτικών. Χρήση του πλαισίου για τη δέσμευση στα Μαθηματικά (FEM) (Attard, 2014) ως φακό, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι οι κινητές τεχνολογίες, όπως τα iPad, έχουν τη δυνατότητα να βελτιώσουν τη δέσμευση των μαθητών στα μαθηματικά. Ωστόσο, αυτό δεν ισχύει καθολικά. Ο βαθμός στον οποίο η εμπλοκή είναι βελτιώνεται εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τις παιδαγωγικές πρακτικές που ενσωματώνουν τη χρήση τους, παρά από τις ίδιες τις τεχνολογικές συσκευές. Σε μια ευρύτερη μελέτη στο Queensland, η Hilton (2018) εξέτασε τον αντίκτυπο της χρήσης iPad στις τάξεις 2-6, συμπεριλαμβανομένης της χρήσης του ελέγχου ομάδων τάξεων χωρίς iPad. Η μελέτη, η οποία χρησιμοποίησε επίσης το FEM του Attard (2014), διαπίστωσε ενδείξεις ότι η χρήση iPads στα μαθηματικά είχε θετική επίδραση στα τη συμμετοχή των μαθητών, την ευχαρίστηση και την αυτοαντίληψη, ιδίως για τα αγόρια.

2.3 Η Τριγωνομετρία στα Μαθηματικά

2.3.1 Εισαγωγή

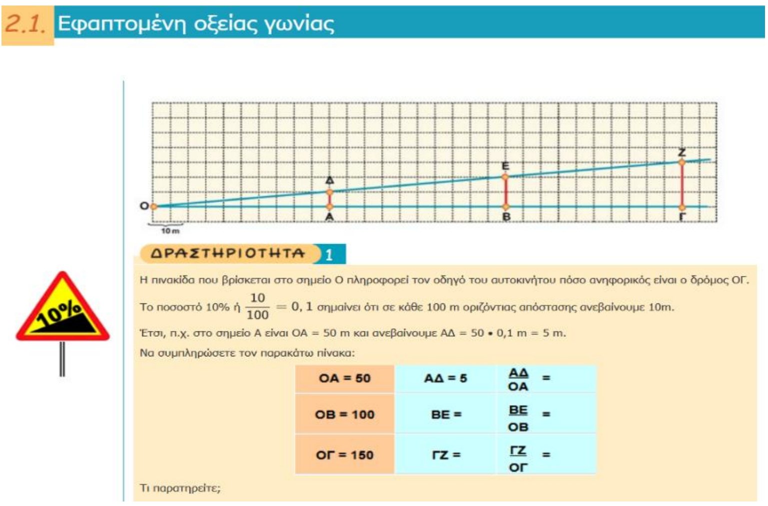
Η τριγωνομετρία είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με τη σχέση μεταξύ των λόγων των πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου με τις γωνίες του. Οι λόγοι που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη αυτής της σχέσης ονομάζονται τριγωνομετρικοί λόγοι, δηλαδή, ημιτονοειδές, συνημίτονο, εφαπτομένη, συνεφαπτομένη. Η λέξη τριγωνομετρία δόθηκε από τον Έλληνα μαθηματικό Ίππαρχο. Η Τριγωνομετρία αναπτύχθηκε αρχικά για τις ανάγκες της Αστρονομίας και της Γεωγραφίας, αλλά χρησιμοποιήθηκε στη διάρκεια πολλών αιώνων και σε άλλους κλάδους των Μαθηματικών, στη Φυσική, στη Μηχανική και στη Χημεία. Η ιστορία της Τριγωνομετρίας αρχίζει με τις πρώτες μαθηματικές καταγραφές στην Αίγυπτο και στη Βαβυλώνα. Οι Βαβυλώνιοι καθιέρωσαν τη μέτρηση των γωνιών σε μοίρες σε πρώτα λεπτά και σε δεύτερα. Οι Βαβυλώνιοι αστρονόμοι είχαν συγκεντρώσει έναν τεράστιο αριθμό δεδομένων από παρατηρήσεις και είναι σήμερα γνωστό ότι ένα μεγάλο μέρος πέρασε στους Έλληνες. Αυτά τα πρώτα βήματα στην Αστρονομία οδήγησαν και στη γέννηση της Τριγωνομετρίας. Μέχρι όμως την εποχή των Ελλήνων καμία καθαρά τριγωνομετρική έννοια δεν είχε κάνει την εμφάνισή της. Και αυτό καθυστέρησε να γίνει και έγινε εξ αρχής σε σύνδεση με την Αστρονομία. Τον 2^{ο} αιώνα π.Χ., ο αστρονόμος Ίππαρχος συνέταξε ένα τριγωνομετρικό πίνακα για την επίλυση τριγώνων. Στον πίνακα αυτόν σε κάθε γωνία απέδιδε μία τιμή που ήταν « το μήκος της χορδής» η οποία αντιστοιχούσε στη γωνία όταν την έκανε επίκεντρη με σταθερή ακτίνα r. Δεν γνωρίζουμε ποια ήταν η σταθερή τιμή που έδινε ο Ίππαρχος στην ακτίνα, αλλά 300 χρόνια αργότερα ο Πτολεμαίος στην Αλμαγέστη χρησιμοποίησε για την ακτίνα του κύκλου την τιμή r= 60 και συνέταξε έναν παρόμοιο πίνακα με Χορδές, μία τιμή χορδής για κάθε γωνία από 1 μοίρα μέχρι τις 1800 .

Την ίδια περίπου εποχή με τον Πτολεμαίο οι Ινδοί αστρονόμοι είχαν αναπτύξει την σύνταξη τριγωνομετρικών πινάκων ένα τριγωνομετρικό σύστημα βασιζόμενο όχι στο μήκος της χορδής αλλά στη συνάρτηση του Ημιτόνου. Το ημίτονο των Ινδών δεν ήταν βέβαια καθαρός αριθμός, όπως είναι σήμερα, αλλά το μήκος της κάθετης πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου με σταθερή υποτείνουσα. Και δεν είχαν αποδεχθεί μία ορισμένη τιμή για το μήκος της υποτείνουσας. Τον 8ο αιώνα οι Άραβες αστρονόμοι κληρονόμησαν τόσο την ελληνική όσο την ινδική παράδοση. Τα έργα τόσο των Ινδών όσο και των Ελλήνων μεταφράστηκαν και διαβάστηκαν από τους μουσουλμάνους μαθηματικούς οι οποίοι χρησιμοποίησαν το ινδικό ημίτονο παράλληλα με την ελληνική χορδή. Ο Muhammad ibn Jabir al-Battani. εισήγαγε και το συνημίτονο. Αργότερα επανεισήγαγαν την εφαπτομένη που είχε αρχικά προταθεί και αναπτυχθεί από τους Κινέζους αστρονόμων, ενώ πρότειναν και τη συνεφαπτομένη.

Στην Δυτική Ευρώπη γνώρισαν τη μουσουλμανική τριγωνομετρία μέσα από τις μεταφράσεις των αραβικών αστρονομικών εγχειριδίων, τον 12ο αιώνα. Ο Richard of Wallingford ήταν ο πρώτος που συσχέτισε το Ινδικό Ημίτονο με την Ελληνική Χορδή και χρησιμοποίησε τα Στοιχεία του Ευκλείδη για την απόδειξη θεωρημάτων τριγωνομετρικών. Τον 15^{ο} αιώνα ο Γερμανός αστρονόμος Rheticus εισήγαγε τη σύγχρονη προσέγγιση των τριγωνομετρικών αριθμών. Μετά από αυτόν κάθε τριγωνομετρική ποσότητα – ημίτονο, συνημίτονο – δεν ήταν πλέον κάποιο μήκος αλλά ένας ΛΟΓΟΣ δύο μηκών, σε κάθε δηλαδή γωνία αντιστοιχούσε ένας αριθμός . Κατά τα τέλη του 16ου αιώνα ο Γάλλος François Viète εμπλούτισε τη σφαιρική τριγωνομετρία, ενώ ο σύγχρονός του σκωτσέζος John Napier, ο οποίος ανακάλυψε και τους λογαρίθμους, στην αυγή του 17ου αιώνα πρότεινε δέκα μνημονικούς κανόνες για την επίλυση σφαιρικών τριγώνων. Πενήντα περίπου χρόνια μετά τη δημοσίευση των λογαριθμικών πινάκων από τον Napier, ο Newton αναπτύσσοντας τον Λογισμό (Calculus) παρουσίασε πολλές συναρτήσεις του x ως Σειρές δυνάμεων του x με άπειρους όρους . Ανάμεσα σε αυτές παρουσίασε και τις συναρτήσεις του ημιτόνου sin(x), του συνημιτόνου cos(x) και της εφαπτομένης tan(x) ως Σειρές. Με την ανάπτυξη του Λογισμού (Calculus), τη μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων ανέλαβε η Ανάλυση και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ξέφυγαν οριστικά από την κηδεμονία της Αστρονομίας και της Γεωγραφίας και άρχισαν να παίζουν έναν απρόβλεπτα σημαντικό ρόλο τόσο για τα καθαρά όσο και για τα εφαρμοσμένα μαθηματικά.

2.3.2 Η τριγωνομετρία στο σχολείο

Σύμφωνα με το ισχύον Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (ΑΠΣ) στην Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, η Τριγωνομετρία εισάγεται στη Β’ Γυμνασίου μετά από επανάληψη των βασικών εννοιών της Γεωμετρίας από την Α’ Γυμνασίου. Οι μαθητές σύμφωνα με το σχολικό εγχειρίδιο αφού διδαχτούν το Πυθαγόρειο Θεώρημα προχωρούν στην Εφαπτομένη οξείας γωνίας . Η εισαγωγή γίνεται με αυθεντική δραστηριότητα καθώς δίνονται οι εικόνες όμοιων τριγώνων σε μιλιμετρέ χαρτί αλλά και η εικόνα μίας πινακίδας οδικής κυκλοφορίας που συνάδει με την εκφώνηση της δραστηριότητας. Έπειτα, με μέσω των λόγων ευθύγραμμων τμημάτων για τα όμοια τρίγωνα αναδεικνύεται ο λόγος της εφαπτομένης. Με αναγωγή στα ορθογώνια τρίγωνα και με εισαγωγή της αντίστοιχης ορολογίας, διατυπώνεται ο τύπος εύρεσης εφαπτομένης οξείας γωνίας σε ορθογώνια τρίγωνα.


2.1. Εφαπτομένη οξείας γωνίας

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1

Η πινακίδα που βρίσκεται στο σημείο Ο πληροφορεί τον οδηγό του αυτοκινήτου πόσο ανηφορικός είναι ο δρόμος ΟΓ.

Το ποσοστό 10% ή $\frac{10}{100} = 0,1$ σημαίνει ότι σε κάθε 100 m οριζόντιας απόστασης ανεβαίνουμε 10m.

Έτσι, π.χ. στο σημείο Α είναι ΟΑ = 50 m και ανεβαίνουμε ΑΔ = 50 • 0,1 m = 5 m.

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

ΟΑ = 50	ΑΔ = 5	$\frac{ΑΔ}{ΟΑ}$ =
ΟΒ = 100	ΒΕ =	$\frac{ΒΕ}{ΟΒ}$ =
ΟΓ = 150	ΓΖ =	$\frac{ΓΖ}{ΟΓ}$ =

Τι παρατηρείτε;

Σχήμα 3: Εισαγωγή εφαπτομένης οξείας γωνίας με δραστηριότητα στο σχολικό εγχειρίδιο

Στο ΑΠΣ διατυπώνεται ότι οι μαθητές πρέπει: «*Να γνωρίζουν πώς ορίζεται η εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου. Να υπολογίζουν την εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου όταν δίνονται οι πλευρές του. Να υπολογίζουν την εφαπτομένη μιας οξείας γωνίας με τη βοήθεια του υπολογιστή τσέπης. Να σχεδιάζουν μια γωνία της οποίας δίνεται η* *εφαπτομένη. Να γνωρίζουν πώς μεταβάλλεται η εφαπτομένη οξείας γωνίας, όταν μεταβάλλεται η γωνία. Να υπολογίζουν με τη βοήθεια της εφαπτομένης διάφορες αποστάσεις.*» Προτείνεται να χρησιμοποιηθούν 2 διδακτικές ώρες για τη διδασκαλία της εφαπτομένης ενώ μία παραδειγματική δραστηριότητα είναι: «*Υπολογισμός του ύψους ενός δένδρου ή ενός κτιρίου από το μήκος της σκιάς του και της γωνίας που σχηματίζουν οι ακτίνες του ήλιου με το έδαφος. «Υπολογισμός του ύψους των πυραμίδων» (Ιστορία).*» Η εισαγωγή στην εφαπτομένη προτείνεται να γίνει κατόπιν των τριγωνομετρικών αριθμών του ημιτόνου και του συνημίτονου. Σε αυτά προτείνεται να δαπανηθούν 5 διδακτικές ώρες και τονίζεται ότι οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να γνωρίζουν τους τύπους και εφαρμογές αυτών σε ασκήσεις. Άλλο ένα σημαντικό στοιχείο του ΑΠΣ είναι η πρόταση για χρήση υπολογιστών τσέπης προκειμένου να βρεθούν ακριβώς οι τριγωνομετρικοί αριθμοί όταν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο δίνονται οι πλευρές.

Θα πρέπει μετά την διδασκαλία των ορισμών και εφαρμογών των αριθμών αυτών, οι μαθητές θα πρέπει να διδαχθούν και την συνεπαγωγή: «*δύο γωνίες που έχουν το ίδιο ημίτονο και συνημίτονο είναι ίσες*». Τονίζεται ότι θα πρέπει οι μαθητές να είναι σε θέση να σχεδιάζουν μία γωνία της οποίας δίνεται κάποιος τριγωνομετρικός αριθμός. Συνεχίζοντας, θα πρέπει να γίνει διδασκαλία για τον τρόπο μεταβολής του ημιτόνου και του συνημίτονου καθόσον μεταβάλλεται η οξεία γωνία αλλά και των μεθοδολογιών με τις οποίες υπολογίζονται διάφορες αποστάσεις έχοντας γνωστή οξεία γωνία. Η διδασκαλία ημιτόνου και συνημίτονου καταλήγει με τον υπολογισμό και εκμάθηση των τριγωνομετρικών αριθμών γνωστών οξειών γωνιών: 30°, 45° και 60°. Η παραδειγματική δραστηριότητα που δίνεται είναι: «*Υπολογισμός του ύψους του κτιρίου που θα φτάσει η σκάλα ενός πυροσβεστικού οχήματος, αν είναι γνωστό το μήκος της και η γωνία που σχηματίζει με το έδαφος.».*

Με βάση αυτές τις προτάσεις του ΑΠΣ, οι εκπαιδευτικοί διαμορφώνουν τις διδασκαλίες τους αφιερώνοντας λίγο παραπάνω χρόνο σε ασκήσεις για την πλήρη κατανόηση των τριγωνομετρικών αριθμών.

2.4 Μοντελοποίηση

2.4.1 Εισαγωγή

Η μοντελοποίηση μαθηματικών προβλημάτων είναι ένα θέμα της Διδακτικής των Μαθηματικών το οποίο έχει μελετηθεί εκτενώς από τους ερευνητές. Σύμφωνα με τον Jurdak (2016) αν και οι ορισμοί για την Μαθηματική Μοντελοποίηση διαφέρουν από ερευνητή σε ερευνητή και από θέμα σε θέμα, εντούτοις η κοινή τους βάση είναι ο πραγματικός κόσμος και το ανθρώπινο υποκείμενο. Μαθηματική μοντελοποίηση είναι η διαδικασία μετάφρασης από τον πραγματικό κόσμο στον κόσμο των Μαθηματικών και αντίστροφα (Blum & Ferri, 2009). Σε αυτήν την «μετάβαση» από τον ένα κόσμο στον άλλον των μαθητών και στις διαφοροποιήσεις στις οπτικές των ερευνητών βασίζονται οι ποικίλοι ορισμοί που έχουν αποδοθεί για την μοντελοποίηση. Οι Julie & Mudaly (2007) διακρίνουν τη μοντελοποίηση ως ένα όχημα προκειμένου να παρακινήσει τους μαθητές και να παρέχει μια βάση για την ανάπτυξη συγκεκριμένου μαθηματικού περιεχομένου και τη μοντελοποίηση ως το ίδιο το περιεχόμενο η οποία στοχεύει στην προώθηση της ικανότητα των μαθητών να αντιμετωπίσουν προβλήματα στον εξωτερικό κόσμο.

Αναζητούνται, κατά συνέπεια, τα θεμελιώδη αίτια κατηγοριοποίησης των οπτικών αυτών τα οποία είναι ο ρόλος του ανθρώπινου υποκειμένου αλλά και το πλαίσιο της μοντελοποίησης. Οι Kaiser και Sriraman (2006) κατηγοριοποίησαν αυτές τις οπτικές σε έξι οπτικές: (1) Ρεαλιστική μοντελοποίηση (Realistic Modelling), (2) Μοντελοποίηση του συγκείμενου (Contextual Modelling), (3) Εκπαιδευτική μοντελοποίηση (Educational Modelling), (4) Κοινωνικό-κριτική μοντελοποίηση (Socio-critical Modelling), (5) Επιστημολογική μοντελοποίηση (Epistemological Modelling), (6) Γνωστική μοντελοποίηση (Cognitive Modelling). Το 2016 ο Jurdak διερευνώντας μία ευρύτερη θεωρητική κατηγοριοποίηση, πρότεινε την οπτική της μοντελοποίησης σαν πρακτική διαδικασία. Συνεπώς, διακρίνονται 3 κατηγορίες: (1) μοντελοποίησης ως μαθηματική πρακτική, (2) μοντελοποίηση ως κοινωνικοπολιτισμική πρακτική και (3) μοντελοποίηση ως γνωσιολογική πρακτική.

Οι Niss, Blum, & Galbraith (2007, σελ.4) δίνουν έναν πιο αναλυτικό και ολιστικό ορισμό. Αρχικά, θα πρέπει να δημιουργηθούν 2 πεδία: το πεδίο D στο οποίο συμπεριλαμβάνονται τα αντικείμενα, οι σχέσεις, τα φαινόμενα, οι εικασίες, τα ερωτήματα κ.λπ. τα οποία αναγνωρίζονται και επιλέγονται κατάλληλα καθώς είναι σχετικά με τον σκοπό και το πλαίσιο της δραστηριότητας και το πεδίο M στο οποίο περιλαμβάνονται οι μαθηματικές σκέψεις, οι αξιολογήσεις, οι μετασχηματισμοί, οι πράξεις, τα εξαγόμενα συμπεράσματα κ.λπ.. Επομένως, ως Μοντελοποίηση χαρακτηρίζεται η διαδικασία που ξεκινά με την κατασκευή του πεδίου D, την μετάφραση των στοιχείων του D, συνεχίζει με την επιλογή του μαθηματικού πεδίου M, τις μαθηματικές διεργασίες εντός του πεδίου M και καταλήγει στην ερμηνεία και αξιολόγηση των συμπερασμάτων αναφορικά με το πεδίο D και την μετάφραση από το πεδίο D στο πεδίο M. Πολλά λοιπόν είναι τα οφέλη των μαθητών από την μοντελοποίηση ρεαλιστικών και αυθεντικών καταστάσεων. Σε έναν κόσμο όπου άρχει η ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογίας, τα μαθηματικά μοντέλα βρίσκονται παντού τριγύρω μας. Η καλύτερη κατανόηση του πραγματικού κόσμου μπορεί να επιτευχθεί από τον μαθητή μέσα από την ανάπτυξη της ικανότητας συνδυασμού εκείνων των χαρακτηριστικών που είναι ικανά και αναγκαία για την μοντελοποίηση των προβλημάτων. Παράλληλα, υποστηρίζεται η εκμάθηση των Μαθηματικών, η ανάπτυξη διάφορων Μαθηματικών ικανοτήτων και κατάλληλων συμπεριφορών και η συνεισφορά για μια πλήρη εικόνα της επιστήμης των μαθηματικών. Εξού και το ρητό των Blum & Ferri (2009): « *Η μοντελοποίηση μπορεί και πρέπει να δώσει νόημα στα Μαθηματικά* ».

Οι Blum & Ferri (2009) αναφέρουν ότι η μοντελοποίηση μπορεί να λειτουργήσει ως γέφυρα ανάμεσα στον πραγματικό κόσμο και των κόσμο των Μαθηματικών. Ωστόσο μπορεί ακόμα περισσότερο να απαλείψει την εντύπωση των μαθητών ότι αυτοί οι κόσμοι είναι ξεχωριστοί (Jurdak, 2016). Αφού όπως επισημαίνουν και οι Niss, Blum, και Galbraith (2007), οι μαθητές λειτουργούν με μεγαλύτερη ασφάλεια και αυτοπεποίθηση όταν γνωρίζουν σε ποιο κόσμο βρίσκονται ειδικότερα όταν αυτό είναι ο κόσμος των Μαθηματικών αφού είναι πολύ εύκολο να διακρίνουν πότε βρίσκονται σε αυτόν.

Μέσω της εμπλοκής των μαθητών στη διαδικασία της μοντελοποίησης, δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να επεξεργαστούν τις έννοιες των Μαθηματικών με σκοπό την καλύτερη σύνδεση αυτών. Η επίδραση ορισμένων χαρακτηριστικών της μαθηματικής επεξεργασίας στις ρεαλιστικές εκτιμήσεις των μαθητών ήταν επίσης το ενδιαφέρον των Cooper και Harries (2002, 2003). Έδωσαν ιδιαίτερη προσοχή στους μαθητές που συμπεριέλαβαν κάποιες ρεαλιστικές εκτιμήσεις σε μια «ρεαλιστική» μαθηματική εργασία (Cooper και Dunne 2000, p. 84) και όρισαν ένα έργο ως «ρεαλιστικό» «εάν περιέχει είτε πρόσωπα είτε μη μαθηματικά αντικείμενα από «καθημερινά περιβάλλοντα»). Διερεύνησαν την ικανότητα ή/και την προθυμία αυτών των μαθητών να εισάγουν ένα διευρυμένο φάσμα ρεαλιστικών εκτιμήσεων στο έργο παρέχοντας στους μαθητές τέσσερις διαφορετικές απαντήσεις (από φανταστικούς άλλους μαθητές) στην εργασία και τους ρώτησαν αν ήταν πρόθυμοι να τις αποδεχθούν ως σωστές απαντήσεις. Με βάση τις συνεντεύξεις κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι μια σημαντική μειοψηφία μαθητών ήταν σε θέση και πρόθυμη να επεκτείνει τις ρεαλιστικές τους εκτιμήσεις και να προσφέρουν υποστήριξη για ορισμένες από τις απαντήσεις που δόθηκαν στην εργασία.

Με βάση αυτή την έρευνα πρότειναν επίσης ότι «αν δοθούν κατάλληλα "ρεαλιστικά" προβλήματα, πολλά παιδιά μπορεί να είναι πιο πρόθυμα και ικανά να εισάγουν ρεαλιστικές απαντήσεις σε ένα πλαίσιο δοκιμασίας απ' ό,τι θα περίμενε κανείς από προηγούμενες έρευνες» (Cooper and Harries 2002, σ. 1).

2.4.2 Κύκλος Μοντελοποίησης

Στον κόσμο της εκπαίδευσης, η μαθηματική μοντελοποίηση βρίσκεται στο επίκεντρο της κατανόησης, της πρόβλεψης και της βελτιστοποίησης διαφόρων καταστάσεων των ρεαλιστικών προβλημάτων. Ο κύκλος της μαθηματικής μοντελοποίησης είναι μια συστηματική διαδικασία με την οποία τα προβλήματα της πραγματικής ζωής μεταφράζονται σε μαθηματικούς όρους, αναλύονται και ερμηνεύονται για την παροχή λύσης. Αυτός ο κύκλος σημαίνει πολλά για την εκπαίδευση, επειδή οι μαθητές μπορούν να μάθουν μαθηματικά αλλά ταυτόχρονα να τα εφαρμόσουν με νόημα. Πολλοί συγγραφείς έχουν συμβάλει στην ανάπτυξη της κατανόησης του τρόπου με τον οποίο μπορεί να διδαχθεί ο κύκλος μοντελοποίησης και πώς προωθεί τη μαθηματική σκέψη.

Ένας κύκλος μοντελοποίησης διέρχεται από μια σειρά αλληλένδετων φάσεων, από ένα πρόβλημα του πραγματικού κόσμου μέσω μιας μαθηματικής λύσης μέχρι την ερμηνεία του στον πραγματικό κόσμο. Με βάση το πλαίσιο των Blum και Leiß (2007), οι κύριες φάσεις του κύκλου είναι οι εξής:

- Κατανόηση του προβλήματος. Το πλαίσιο του προβλήματος στον πραγματικό κόσμο ερμηνεύεται έτσι ώστε να γίνει κατανοητή η δομή του.
- Απλούστευση και δημιουργία υποθέσεων: Σε αυτό το στάδιο αφαιρούνται οι επιπλέον λεπτομέρειες και γίνονται υποθέσεις, έτσι ώστε να προκύψει μια απλοποίηση του πραγματικού προβλήματος.
- Μαθηματικοποίηση: Μετάφραση της απλουστευμένης εκδοχής σε μαθηματικό μοντέλο- αυτό θα περιλαμβάνει γενικά μεταβλητές, σχέσεις και ενίοτε κάποιες εξισώσεις ή συστήματα εξισώσεων.
- Μαθηματική εργασία: Αυτό είναι το κεντρικό μαθηματικό μέρος όπου γίνονται οι υπολογισμοί και όπου κάποιος αναπτύσσει και εφαρμόζει το μαθηματικό του εργαλείο ή τη μαθηματική του μέθοδο.
- Ερμηνεία των αποτελεσμάτων: Αφού πραγματοποιηθεί μια λύση, μετατρέπεται πίσω στον πραγματικό κόσμο για να ελεγχθεί αν έχει νόημα.
- Επικύρωση: Ο έλεγχος της λύσης σε σχέση με το αρχικό πρόβλημα γίνεται για να ελεγχθεί αν το μοντέλο αντιπροσωπεύει πραγματικά και με ακρίβεια τον πραγματικό κόσμο.
- Επανάληψη: Εάν το μοντέλο είναι ανεπαρκές ή χρειάζεται βελτίωση, ο κύκλος ξεκινάει από την αρχή μέχρι να επιτευχθεί η βέλτιστη λύση.

Ολόκληρη η δραστηριότητα των κύκλων μαθηματικής μοντελοποίησης είναι μια διαδικασία συλλογισμού για την κριτική σκέψη και τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων των μαθητών. Σε αυτές τις κατευθύνσεις, η μελέτη των Niss και Jensen (2002) έκανε λόγο για το ρόλο της μοντελοποίησης στην προώθηση ορισμένων από τις βασικές μαθηματικές ικανότητες, συμπεριλαμβανομένης της εννοιολογικής κατανόησης, της διαδικαστικής ευχέρειας και της ικανότητας σύνδεσης των διαφόρων τομέων των μαθηματικών με τα πλαίσια του πραγματικού κόσμου.

Η μοντελοποίηση προκαλεί τους μαθητές να σκέφτονται πέρα από τον τύπο και την αλγοριθμική προσέγγιση και προάγει μια βαθιά εκτίμηση του τρόπου με τον οποίο τα μαθηματικά λειτουργούν στον κόσμο. Κατά τη διαδικασία εργασίας σε εργασίες μοντελοποίησης, οι μαθητές μαθαίνουν να κάνουν υποθέσεις, να δοκιμάζουν υποθέσεις και να βελτιώνουν λύσεις - δεξιότητες που εφαρμόζονται σε ένα ευρύ φάσμα τομέων εκτός των μαθηματικών. Η μοντελοποίηση είναι μια γνήσια γνωστική διαδικασία, αλλά ταυτόχρονα περιλαμβάνει και κάποια κοινωνική διάσταση. Ο Borromeo Ferri (2006, 2018) διερεύνησε τις γνωστικές διαδικασίες που υφίστανται οι μαθητές στο πλαίσιο του κύκλου μοντελοποίησης. Οι μαθητές συνήθως αναπτύσσουν ένα νοητικό μοντέλο που σχετίζεται με την ερμηνεία τους για το πρόβλημα του πραγματικού κόσμου που πρέπει να επιλυθεί. Η εναλλαγή μεταξύ αυτών των νοητικών μοντέλων και των μαθηματικών αναπαραστάσεων μπορεί μερικές φορές να είναι επίπονη- ωστόσο, προάγει τη βαθύτερη μάθηση.

Οι Kaiser και Sriraman (2006) τόνισαν περαιτέρω τις κοινωνικοπολιτισμικές πτυχές της μοντελοποίησης, υποδεικνύοντας ότι οι εμπειρίες των μαθητών, η κοινωνική αλληλεπίδραση και το πολιτισμικό πλαίσιο αλληλεπιδρούν με την προσέγγισή τους σε εργασίες μοντελοποίησης. Η ομαδική εργασία, η συζήτηση και η επίλυση προβλημάτων σε συνεργασία αποτελούν αναπόσπαστο μέρος κάθε επιτυχημένης εκπαίδευσης στη μοντελοποίηση- επιτρέπει στους μαθητές να μοιράζονται ιδέες και να οξύνουν τη σκέψη τους ως ομάδα. Μια προσέγγιση με μεγάλη επιρροή στη μοντελοποίηση της εκπαίδευσης, που αναπτύχθηκε στις Κάτω Χώρες, είναι το πλαίσιο της ρεαλιστικής μαθηματικής εκπαίδευσης. Σύμφωνα με τον Gravemeijer (1994), η προσέγγιση αυτή καλεί τους μαθητές να επιλύσουν ρεαλιστικά προβλήματα και να επανεφεύρουν μαθηματικές έννοιες με βάση τις εμπειρίες τους. Ο κύκλος μοντελοποίησης εντάσσεται αρκετά φυσικά σε αυτή την προσέγγιση, καθώς επιτρέπει στους μαθητές να προχωρήσουν από τους άτυπους καθημερινούς τρόπους συλλογισμού στους τυπικούς, μαθηματικούς τρόπους σκέψης.

Στην ΡΜΕ, ο κύκλος μοντελοποίησης δεν αποτελεί μια συγκεκριμένη μαθηματική δραστηριότητα αλλά ένα αναπόσπαστο συστατικό της μάθησης των μαθηματικών. Ενώ εργάζονται πάνω στα προβλήματα μιας πραγματικής κατάστασης, οι μαθητές καταλήγουν σε βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και μαθαίνουν πώς να τις εφαρμόζουν σε συγκεκριμένες καταστάσεις. Αρκετές μελέτες αποδεικνύουν ότι η επιτυχία της μαθηματικής μοντελοποίησης στην τάξη εξαρτάται από τον αποτελεσματικό σχεδιασμό των εργασιών και την υποστήριξη του εκπαιδευτικού. Πράγματι, ο Maaß (2010) έχει δείξει ότι οι εκπαιδευτικοί χρειάζονται πολύ ειδική προετοιμασία για να ενσωματώσουν τη μοντελοποίηση στο πρόγραμμα σπουδών τους. Επίσης, οι εργασίες πρέπει να σχεδιάζονται προσεκτικά- οι καλά σχεδιασμένες εργασίες πρέπει να είναι ανοιχτές, ώστε να αναδεικνύονται πολλαπλοί τρόποι επίλυσής τους και έχουν ως στόχο να προκαλούν τη δημιουργική επίλυση προβλημάτων.

Ένα άλλο πρόβλημα στη διδασκαλία της μοντελοποίησης είναι ότι οι μαθητές συχνά δεν μπορούν να κάνουν τις πρώτες φάσεις του κύκλου μοντελοποίησης, όπως η απλοποίηση των προβλημάτων του πραγματικού κόσμου και η πραγματοποίηση υποθέσεων. Σε αυτή την περίπτωση, η καθοδήγηση από τον εκπαιδευτικό καθίσταται επιτακτική. Ο δάσκαλος πρέπει να διευκολύνει τους τρόπους με τους οποίους οι μαθητές σκέφτονται- αυτό περιλαμβάνει την καθοδήγηση των μαθητών στο πώς να αναλύουν τα πολύπλοκα προβλήματα σε μικρότερα, πιο διαχειρίσιμα μέρη και να διεξάγουν μια επαναληπτική διαδικασία βελτίωσης των μοντέλων τους. Ενώ η εμπλοκή στον κύκλο μοντελοποίησης ενισχύει σημαντικά τη μάθηση των μαθητών, σύμφωνα με τους Lesh και

Doerr (2012), εάν ένας μαθητής εμπλέκεται συχνά σε εργασίες μοντελοποίησης τότε θα αναπτύξει καλύτερες δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων, κριτική σκέψη και καλύτερη μεταφορά δεξιοτήτων, με την οποία οι μαθηματικές γνώσεις μπορούν να μεταφερθούν από το ένα πλαίσιο στο άλλο. Μέσω της ενεργού εμπλοκής στον κύκλο μοντελοποίησης, οι μαθητές μετατρέπονται από απλοί παθητικοί μαθητές των μαθηματικών σε ενεργούς λύτες προβλημάτων που μπορούν να χειριστούν τα περισσότερα από τα πολύπλοκα προβλήματα του πραγματικού κόσμου.

3. Ερευνητικό Θέμα

3.1 Εισαγωγή

Η έρευνα αυτή πραγματοποιήθηκε με σκοπό να μελετήσει τις ενέργειες των μαθητών κατά την διάρκεια επίλυσης ενός ανοιχτού και ρεαλιστικού προβλήματος που αφορά την εφαρμογή των τριγωνομετρικών αριθμών για την εύρεση του ύψους μίας κατασκευής ή οικοδομήματος. Συγκεκριμένα, οι εκπαιδευτικοί κλήθηκαν να δημιουργήσουν μία δική τους δραστηριότητα που θα έθετε σε εφαρμογή την διδασκαλία τους πάνω στην παράγραφο των τριγωνομετρικών αριθμών οξείας γωνίας χρησιμοποιώντας τους ορισμούς που δίνονται από το βιβλίο της Β’ Γυμνασίου (Γεωμετρία Β’ Γυμνασίου, Κεφάλαιο 2, παράγραφοι Β2.1,Β2.2). Ζητούμενο για τους μαθητές είναι να μοντελοποιήσουν μαθηματικά το ρεαλιστικό πρόβλημα και να παράγουν αποτελέσματα για το ύψος της δομής τα οποία θα υπακούν τους περιορισμούς του πλαισίου της δραστηριότητας.

Οι μαθητές θα πρέπει να εργαστούν σε απτές δομές εκτός φύλλων εργασίας και άρα να χρησιμοποιήσουν την χωρική τους αντίληψη. Η σύνδεση των εννοιών των Μαθηματικών και της Μηχανικής σε ρεαλιστικά απτά προβλήματα όπου ο μαθητής εμπλέκεται πρακτικά στην παραδοσιακή διδασκαλία είτε δεν γίνεται καθόλου είτε αποφεύγεται από τους διδάσκοντες είτε γίνεται σπάνια. Πολλοί ερευνητές έχουν εξάγει θετικά συμπεράσματα για τις έννοιες των Μαθηματικών όταν αυτές συνδέονται με τις έννοιες της Μηχανικής, ειδικά για θέματα τριγωνομετρίας (Christopher, 1999; Sala, Cappellato, Botta, 2019; Reynolds, Mahan, Lee, 2008; Serpe, Frassia, 2021).

Η δραστηριότητα ήταν επιπλέον ανοιχτή ως προς τους τρόπους λύσης και προσέγγισης. Επομένως, οι μαθητές έχουν την δυνατότητα και τις ευκαιρίες να κάνουν εικασίες, να διερευνήσουν διάφορες προοπτικές επίλυσης και ίσως να ανακαλύψουν νέες έννοιες όπως να συνδέσουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς με την ομοιότητα τριγώνων και άρα να αναχθούν στις αναλογίες μεταξύ υψών.

3.2 Ερευνητικά Ερωτήματα

Η βασική εστίαση της έρευνας είναι στις προσπάθειες των μαθητών να μοντελοποιήσουν το πρόβλημα που τους τέθηκε, αλλά και στις επιρροές που δέχθηκαν οι καθηγητές ώστε να δημιουργήσουν τη δραστηριότητα που δόθηκε στους μαθητές. Συγκεκριμένα η παρούσα έρευνα σκοπεύει να απαντήσει στα παρακάτω ερωτήματα:

1º Ερώτημα: Ποιος ο ρόλος του εκπαιδευτικού στις διδασκαλίες και πώς αυτός επηρεάζει τις δραστηριότητες;

2º Ερώτημα: Ποιες είναι οι πρακτικές μοντελοποίησης των μαθητών κατά την επίλυση ενός αυθεντικού προβλήματος και πώς αυτές επηρεάζονται από το βιωματικό πλαίσιο των δραστηριοτήτων;

3º Ερώτημα: Ποιες διαφορές εντοπίζονται μεταξύ των θεσμικών πλαισίων 2 εκπαιδευτικών συστημάτων;

4º Ερώτημα: Ποιοι είναι οι παράγοντες που επηρέασαν την εξέλιξη των δραστηριοτήτων;

4. Μεθοδολογία

4.1 Η Διδασκαλία στο Ελληνικό Σχολείο

4.1.1 Η Ερευνητική Διαδικασία

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 1 διδασκαλία μίας διδακτικής ώρας, διάρκειας 45΄ στην τάξη της Β΄ Γυμνασίου. Το τμήμα αποτελούνταν από 15 μαθητές και η δραστηριότητα διεξήχθη σε ορισμένο από την διδάσκουσα χρόνο εντός των διδακτικών ωρών που κατέχει. Η έρευνα είναι μελέτη περιπτώσεων ομάδων που αποτελούνταν από διαφορετικούς συνδυασμούς μαθητών όσον αφορά το φύλο τους και το μαθησιακό τους επίπεδο.

4.1.2 Οι Συμμετέχοντες

Στην παρούσα έρευνα από την Β΄ Γυμνασίου συμμετείχαν 15 μαθητές. Το τμήμα χωρίστηκε σε 5 ομάδες των 3 συμμετεχόντων η κάθε μία. Οι μαθητές κατείχαν όλοι τις βασικές απαιτούμενες γνώσεις Τριγωνομετρίας. Πιο συγκεκριμένα, είχαν διδαχθεί την έννοια της εφαπτομένης και είχαν ήδη λύσει ασκήσεις προκειμένου να είναι εξοικειωμένοι με τη χρήση της για την δραστηριότητα. Στην μαγνητοσκόπηση η καθηγήτρια υποστηρίζει τον παραπάνω ισχυρισμό αναφέροντάς τον κατά λέξη.

Οι μαθητές τοποθετήθηκαν σε τετράγωνη διάταξη ώστε να είναι εφικτή η συνεργασία με ευκολία αλλά και να παρέχεται η ικανότητα παρακολούθησης του εκπαιδευτικού κατά την εξήγηση των οδηγιών και της δραστηριότητας. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η διάταξη της τάξης, γενικά στο ελληνικό σχολείο, είναι η παραδοσιακή μορφή διδασκαλίας με το ένα θρανίο να είναι πίσω από το άλλο με σκοπό την παρακολούθηση του εκπαιδευτικού κατά τη διδασκαλία και μόνο. Χρησιμοποιήθηκαν χειραπτικά μέσα όπως γωνιόμετρο, μετροταινία και χάρακες όπου οι μαθητές θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουν κατά τη διάρκεια της μοντελοποίησης και επίλυσης της δραστηριότητας.

4.1.3 Τα Ερευνητικά Δεδομένα

Από την έρευνα που πραγματοποιήθηκε στη διδασκαλία της 1 διδακτικής ώρας, συλλέχθηκε προς ανάλυση το αρχείο εικόνας και ήχου από μαγνητοσκόπηση της διδασκαλίας στο οποίο έγινε λεπτομερής και αναλυτική απομαγνητοφώνηση. Το μαγνητοσκοπημένο υλικό ήταν χρήσιμο, ώστε οι κινήσεις και οι χειρονομίες των μαθητών να αξιοποιηθούν στην ανάλυση των δεδομένων. Οι μαθητές στην αρχή της δραστηριότητας κατά την παρουσίαση και την εξήγηση από τη διδάσκουσα φάνηκαν αμήχανοι αφού οι συνθήκες δεν ήταν συνηθισμένες γι' αυτούς. Στη συνέχεια ωστόσο φάνηκαν να εντάσσονται στο κλίμα που δημιουργήθηκε εντός της τάξης πολύ γρήγορα και να προχωρούν κανονικά με τη δραστηριότητα και τις μετρήσεις τους. Κατά τη διεξαγωγή της δραστηριότητας οι μαθητές καταγράφουν δεδομένα και αποτελέσματά τους σε φύλλα εργασίας. Επομένως, ο συνδυασμός και η συλλογή των παραπάνω στοιχείων βοήθησε στην ανάλυση των δεδομένων ώστε να δοθεί όσο το δυνατόν πληρέστερη εικόνα για τις ενέργειες των μαθητών είτε αυτές είναι λεκτικές είτε είναι χειρονομίες είτε είναι παραγωγή σημειώσεων στο φύλλο εργασίας.

4.1.4 Ο Ρόλος του Εκπαιδευτικού

Η εκπαιδευτικός ασχολείται με τη διδασκαλία Μαθηματικών σε Δημόσιο σχολείο και έχει πολυετή εμπειρία. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 1 εκ των τμημάτων που έχει αναλάβει στο σχολείο. Σε όλη τη δραστηριότητα, προσπαθεί να έχει καθοδηγητικό ρόλο ως προς τις στρατηγικές μέτρησης κατά τη διαδικασία της μοντελοποίησης του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, η μαθηματικός μέσω διευκρινιστικών ερωτήσεων και επισήμανση σημείων της επίλυσης, θέτει τους μαθητές σε τροχιά σκέψης και επαναπροσδιορισμό των παραμέτρων και μετρήσεων. Αρχικά εξηγεί αναλυτικά και μετά σε έκαστη ομάδα ξεχωριστά την μέθοδο προσδιορισμού γωνίας από το γωνιόμετρο. Κατά την διάρκεια της μοντελοποίησης του προβλήματος, η εκπαιδευτικός περνά από όλες τις ομάδες επιτηρώντας τη δουλειά τους και διευκρινίζοντας την πορεία που ακολουθούν με σκοπό την επανάληψη ή την επισήμανση κάποιων βασικών στοιχείων που πιθανόν να έχουν παραληφθεί.

Επίσης, υπήρξε προσπάθεια από την εκπαιδευτικό για καλλιέργεια συνεργασίας και συνεργατικότητας των μαθητών και των ομάδων ώστε να επιχειρηματολογήσουν τις ιδέες τους και να εξηγήσουν τον συλλογισμό τους. Για την εκπαιδευτικό ήταν σημαντικό να δοθεί από τους μαθητές έμφαση στον συνδυασμό Τριγωνομετρίας και αυθεντικού πλαισίου. Βασικός άξονας της διδασκαλίας ήταν να δημιουργηθεί ένα κατάλληλο κλίμα για διερεύνηση ώστε οι μαθητές να «μάθουν» την χρήσης της Τριγωνομετρίας μέσω ενός προβλήματος της καθημερινότητας.

4.1.5 Το Πρόβλημα

«Φύλλο εργασίας για μέτρηση ύψους τάξης από ένα σημείο»

1. Με τα υλικά που δίνονται στη κάθε ομάδα (και μόνο αυτά), να υπολογίσετε το ύψος της αίθουσας. Καταστρώσετε το σχέδιό σας. Ποια μεγέθη θα χρειασθεί να μετρήσετε;

2. Σταθείτε σε ένα σημείο όπου οι γωνία του ύψους να είναι οξεία. Επαναλάβετε τις μετρήσεις. Τί παρατηρείτε;

3. Πώς εξηγείται αυτό γεωμετρικά;

4. Επέκταση δραστηριότητας: Θα μπορούσε η μέθοδος που εφαρμόσατε να χρησιμοποιηθεί για την μέτρηση του ύψους και άλλων αντικειμένων, π.χ. το ύψος ενός δέντρου ή ενός κτηρίου;

Η εκπαιδευτικός προσκόμισε μαζί με το φύλλο εργασίας μεγάλα χαρτιά Α5 μία μετροταινία και το γωνιόμετρο. Η κάθε ομάδα σηκώνονταν και έκανε τις μετρήσεις είτε κάθε μία ξεχωριστά είτε και πολλαπλές μαζί. Δεν χρησιμοποιήθηκαν ψηφιακά μέσα μόνο χειραπτικά καθώς κρίθηκε πιο εύκολο κατά την χρήση από τους μαθητές. Οι μαθητές θα έπρεπε να διερευνήσουν το αυθεντικό πρόβλημα και να κάνουν μόνοι τους μετρήσεις με τα δοθέντα εργαλεία ώστε να αναπτύξουν στρατηγικές επίλυσης εφαρμόζοντας γνώσεις από Τριγωνομετρία. Αν και στο φύλλο εργασίας δεν αναφέρεται ότι μπορεί να γίνει χρήση του σχολικού εγχειριδίου, η πλειοψηφία των ομάδων φάνηκε να το χρησιμοποιεί καθώς σε αυτό εμπεριέχεται ένα παρόμοιο πρόβλημα.

Καθώς οι μαθητές έπρεπε να παράγουν μόνοι τους τα δεδομένα που θα τους ήταν χρήσιμα για την μοντελοποίηση και επίλυση της δραστηριότητας, επιδόθηκαν σε πολλαπλές μετρήσεις γωνιών αλλά και του ίδιου τους του ύψους για μέγιστη ακρίβεια στο αποτέλεσμα.

Τα υλικά που ήταν διαθέσιμα από την εκπαιδευτικό για τους μαθητές ήταν:

(1) Το γωνιόμετρο για να μετρηθούν οι γωνίες που θα χρησιμοποιούσαν κατά την μοντελοποίηση του προβλήματος οι μαθητές. Δόθηκε από την εκπαιδευτικό όταν ξεκίνησαν την δραστηριότητα και εξηγήθηκε η χρήση του.
(2) Το φύλλο εργασίας όπου οι μαθητές έπρεπε να συμπληρώσουν και να απαντήσουν τις ερωτήσεις. Μάζι με το φύλλο εργασίας δόθηκε και ένα μεγάλο χαρτί Α5 όπου οι μαθητές καλούνταν να σχεδιάσουν μία γραφική απεικόνιση του έργου.
(3) Μετροταινία και χάρακας που χρειάζονταν για την μέτρηση των αποστάσεων και των υψών των μαθητών.

4.1.6 Ανάλυση Ερευνητικών Δεδομένων

Φάσεις της Ανάλυσης

1η Φάση – Απομαγνητοφώνηση

Κυριότερο λόγο στην ανάλυση των δεδομένων είχε το απομαγνητοφωνημένο κείμενο. Για την απομαγνητοφώνηση χρειάστηκε προσεκτική παρακολούθηση των δεδομένων από την μαγνητοσκόπηση, έτσι ώστε να γίνουν αντιληπτές και οι χειρονομίες των μαθητών για να ενταχθούν στο κείμενο, στον μεγαλύτερο δυνατό βαθμό.

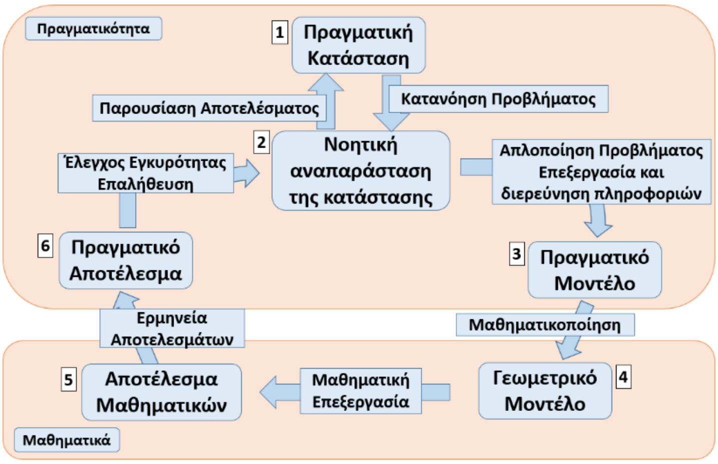
2η Φάση – Ανάλυση των δεδομένων

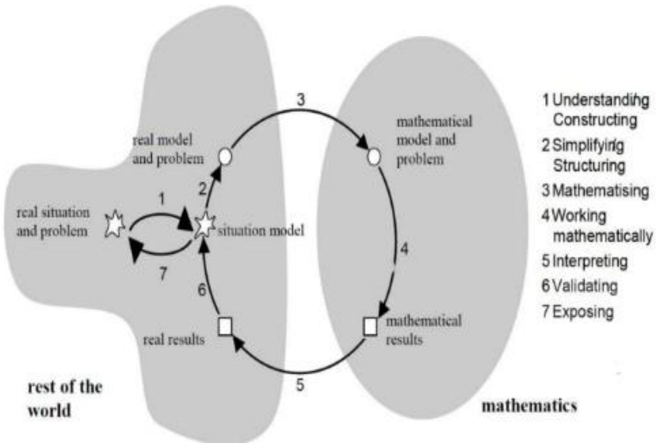
Η ανάλυση των δεδομένων έγινε διεξοδικά καθώς χρειάστηκε να αναλυθούν ξεχωριστά γραμμή – γραμμή το κείμενο. Αυτό προϋποθέτει να ανατρέχουμε πολλές φορές στο οπτικό-ακουστικό μας υλικό. Η δυναμικότητα της ανάλυση κατέχει εξέχουσα θέσει καθώς έχοντας ως βάση το κείμενο που παράχθηκε από το αρχείο της βιντεοσκόπησης κατέστη δυνατή η επιστροφή σε αυτό για συμπλήρωση παρατηρήσεων και λεπτομερειών που δεν ήταν εύκολο να αποτυπωθούν στο κείμενο. Η ανάλυση χρειάστηκε κωδικοποίηση των δεδομένων. Σε αυτή τη φάση της ανάλυσης η ερευνητική μας εστίαση ήταν στις έννοιες της Γεωμετρίας που ανέφεραν οι μαθητές και στον τρόπο με τον οποίο τις συνέδεαν με την δραστηριότητα που επεξεργάζονταν. Έτσι αναζητήθηκαν κωδικοί που να αφορούν αναφορές των μαθητών σε Γεωμετρία (π.χ. χρήση της έννοιας της εφαπτομένης) και στην μοντελοποίηση της δραστηριότητας (π.χ. συνδυασμό μετρήσεων με μαθηματικές έννοιες). Στη συνέχεια αναγνωρίσαμε τους συνδυασμούς των εννοιών της Γεωμετρίας με τις έννοιες της μοντελοποίησης. Αυτός είναι ο λόγος που στρεφόμαστε σε ερευνητικά στην διερεύνηση του κύκλου μοντελοποίησης. Παρόλα αυτά ορισμένοι κωδικοί που αναγνωρίστηκαν σε αυτή τη φάση χρησιμοποιήθηκαν για να απαντηθεί και το 3ο ερευνητικό ερώτημα.

3η Φάση – Εφαρμογή του κύκλου μοντελοποίησης

Κύριο εργαλείο σε αυτή τη φάση της ανάλυσης είναι ο κύκλος μοντελοποίησης που ακολουθούν οι μαθητές. Όλες οι ιδέες και τα μοντέλα των μαθητών αναλύθηκαν με βάση τον κύκλο μοντελοποίησης που αυτοί σκέφτηκαν είτε αυτά εφαρμόστηκαν είτε αυτά απορρίφθηκαν.

Ο παρακάτω κύκλος μοντελοποίησης προέκυψε από την διδασκαλία σε συνδυασμό με αυτών των Blum και Leiß (2006). Παρατίθενται ως προς σύγκριση και οι δύο κύκλοι μοντελοποίησης.





Σχήμα 4.5. Κύκλος Μοντελοποίησης Δραστηριότητας

Σχήμα 4.6. Κύκλος Μοντελοποίησης κατά Blum και Leiß (2006)

Ο παραπάνω κύκλος υποστηρίζει περαιτέρω τις αλλαγές των μοντέλων με σκοπό να υπογραμμισθούν οι λόγοι για τους οποίους εξελίχθηκαν αλλά και βελτιώθηκαν οι διαδικασίες μοντελοποίησης όπως και αυτοί που αφορούν τις μεταβάσεις από τη μία διαδικασία μοντελοποίησης στην άλλη. Διαφαίνεται από τους δύο κύκλους ότι δεν παρουσιάζουν ιδιαίτερες διαφορές καθώς στο Σχήμα 4.5 ο κύκλος μοντελοποίησης που δημιουργήθηκε ενσωματώνει και ετικέτες στα στάδια με σκοπό την καλύτερη κατανόηση της διαδικασίας της μοντελοποίησης.

Παρακάτω δίνεται ένας πίνακας που δημιουργήθηκε σε αντιστοιχία με τον κύκλο μοντελοποίησης του Σχήματος 4.5 στον οποίο γίνεται αρίθμηση των σταδίων και των μεταβάσεων. Αυτή η αρίθμηση βοήθησε στην ανάλυση ώστε να αναγνωρισθούν οι μεταβάσεις στις διαδικασίες μοντελοποίησης των ομάδων σύμφωνα με τον κύκλο μοντελοποίησης από το ένα στάδιο στο άλλο.

Πίνακας 4.1. Στάδια και Μεταβάσεις Κύκλου Μοντελοποίησης της Δραστηριότητας

6 Στάδια	
1	Πραγματική Κατάσταση
2	Νοητική Αναπαράσταση της Κατάστασης
3	Πραγματικό Μοντέλο
4	Γεωμετρικό Μοντέλο
5	Αποτελέσματα Μαθηματικών
6	Πραγματικό Αποτέλεσμα

7 Μεταβάσεις	
1-2	Κατανόηση Πραγματικής Κατάστασης
2-3	Απλοποίηση Προβλήματος, Επεξεργασία και Διερεύνηση πληροφοριών, Δόμηση
3-4	Μαθηματικοποίηση
4-5	Γεωμετρική – Αλγεβρική Επεξεργασία και Εφαρμογή
5-6	Ερμηνεία Αποτελεσμάτων
6-2	Έλεγχος Εγκυρότητας και Επαλήθευση
2-1	Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

4η Φάση – Ανάλυση της εξέλιξης της δραστηριότητας

Η ανάλυση υποστηρίχθηκε από την κωδικοποίηση των δεδομένων. Η κωδικοποίηση έγινε από την ερευνήτρια με βασικό κωδικό την εναλλαγή μεταξύ πλαισίου εργασίας. Ο διαχωρισμός έγινε με τους παρακάτω κώδικες:

$Π_Π$: Οι μαθητές εργάζονται στο πραγματικό πλαίσιο και οι παρατηρήσεις τους αφορούν τα δεδομένα που συλλέγουν από το περιβάλλον.
$Π_Μ$: Οι μαθητές εργάζονται στο μαθηματικό – γεωμετρικό πλαίσιο και οι παρατηρήσεις τους αφορούν τα μαθηματικά αποτελέσματα που εξάγουν.

Στη συνέχεια αναγνωρίστηκαν υπό – κώδικες για τους παράγοντες που επηρέασαν της εξέλιξη της επεξεργασίας και επίλυσης. Οι κώδικες αυτοί ήταν η επικοινωνία, το αυθεντικό πλαίσιο, οι συνδέσεις της Γεωμετρίας και της Πραγματικότητας και η συνοχή των αποτελεσμάτων. Το αυθεντικό πλαίσιο και οι συνδέσεις Γεωμετρίας - Πραγματικότητας ήταν κώδικες που προέκυψαν ήδη από την αρχή της ανάλυσης ενώ η επικοινωνία και η συνοχή προέκυψαν πιο μετά.

$Ε_Δ$: Επικοινωνία
$Α_Δ$: Αυθεντικό πλαίσιο
$ΓΠ_Δ$: Γεωμετρία και Πραγματικότητα
$Σ_Δ$: Συνοχή
Η ανάλυση της εξέλιξης της αναγνώρισης των παραγόντων και των κωδικών προέκυψε αμέσως από την αναγνώριση των διακριτών διαδικασιών μοντελοποίησης και των κύκλων μοντελοποίησης από την 3η φάση.

4.2 Η Διδασκαλία στο Αμερικάνικο Σχολείο

4.2.1 Η Ερευνητική Διαδικασία

Η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε 3 διδασκαλίες μίας διδακτικής ώρας, διάρκειας 70΄ στην 8η τάξη του Γυμνασίου. Τα τμήματα είναι πολυπληθή και το πλήθος των μαθητών διαφέρει σε καθένα για τη σχολική χρονιά 2022 – 2023. Είναι μελέτη περιπτώσεων ομάδων που αποτελούνταν από διαφορετικούς συνδυασμούς μαθητών όσον αφορά το φύλο τους και το μαθησιακό τους επίπεδο. Στην επόμενη παράγραφο παρουσιάζεται αναλυτικά το προφίλ των τάξεων και των ομάδων.

4.2.2 Οι Συμμετέχοντες

Πίνακας 4.2. Προφίλ τμημάτων στο Αμερικάνικο Σχολείο

$8^η$ τάξη Αμερικάνικου Σχολείου	Τμήμα 1	6 ομάδες	3 μαθητές/3 ομάδες 4 μαθητές/3 ομάδες
	Τμήμα 2	5 ομάδες	4 μαθητές/4 ομάδες 3 μαθητές/1 ομάδα
	Τμήμα 3	8 ομάδες	3 μαθητές/7 ομάδες 4 μαθητές/1 ομάδα

Στις τάξεις του αμερικάνικου σχολείου ως πάγια τακτική θεωρείται η δημιουργία ομάδων όλων των μαθησιακών – βαθμολογικών επιπέδων. Συνεπώς στην δραστηριότητά μας δεν μπορούμε να διακρίνουμε τα μαθησιακά επίπεδα των μαθητών της $8^{ης}$ σε κάθε ομάδα. Από τα στατιστικά μαθησιακών επιπέδων που δημιουργούνται και ανανεώνονται καθόλη τη σχολική χρονιά για κάθε τμήμα έκαστης τάξης του αμερικάνικου σχολείου, για την $8^η$ οι μαθητές κυμαίνονται ανάλογα το τμήμα σε όλα τα μαθησιακά επίπεδα. Συγκεκριμένα, στο τμήμα 1 το 57,14% των μαθητών είναι μέτριου επιπέδου, το 23,8% των μαθητών είναι καλού επιπέδου και το υπόλοιπο είναι μαθητές που κάνουν «Fail» στο μάθημα Math 8. Στο τμήμα 2 το 15,8% των μαθητών κάνει «Fail» στο μάθημα Math 8, το 52,6% των μαθητών είναι μετρίου επιπέδου και το υπόλοιπο είναι μαθητές καλού επιπέδου. Τελικώς στο τμήμα 3, 16% των μαθητών κάνει «Fail» στο Math 8, 36% είναι μετρίου επιπέδου και το υπόλοιπο είναι καλού επιπέδου.

Όσον αφορά το γνωστικό επίπεδο των μαθητών, αυτοί είχαν όλες τις βασικές απαιτούμενες γνώσεις Τριγωνομετρίας. Βασική διαφορά είναι ότι στην Β' Γυμνασίου του ελληνικού σχολείου οι μαθητές είχαν διδαχθεί μόνο την έννοια της εφαπτομένης ενώ οι μαθητές της $8^{ης}$ του αμερικάνικου σχολείου είχαν διδαχθεί όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας. Το τελευταίο έδινε μεγαλύτερη ελευθερία στους μαθητές ως προς την επιλογή μεθόδου επίλυσης της δραστηριότητας.

Οι μαθητές και των δύο σχολείων τοποθετήθηκαν σε διάταξη Π ώστε να είναι εφικτή η συνεργασία με ευκολία αλλά και να παρέχεται η ικανότητα παρακολούθησης του εκπαιδευτικού κατά την εξήγηση των οδηγιών και της δραστηριότητας. Η διάταξη Π ή «τετράγωνο» είναι πάγια τακτική του αμερικάνικου σχολείου καθώς η προώθηση ενός ομαδό - συνεργατικού πνεύματος αποτελεί τη φιλοσοφία του σχολείου. Χρησιμοποιήθηκαν χειραπτικά μέσα όπως γωνιόμετρο, υπολογιστής τσέπης, μετροταινία και χάρακες όπου οι μαθητές θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουν κατά τη διάρκεια της μοντελοποίησης και επίλυσης της δραστηριότητας. Για την εισαγωγή και επέκταση της δραστηριότητας επίσης χρησιμοποιήθηκαν διαδραστικοί πίνακες.

4.2.3 Τα Ερευνητικά Δεδομένα

Από την έρευνα που πραγματοποιήθηκε στη διδασκαλία των 3 διδακτικών ωρών, συλλέχθηκε προς ανάλυση το αρχείο εικόνας από φωτογραφίες και ήχου από μαγνητοφώνηση των διδασκαλιών. Έγινε λεπτομερής και αναλυτική απομαγνητοφώνηση (46 σελίδες και 12057 λέξεις). Το μαγνητοφωνημένο υλικό ήταν χρήσιμο, ώστε οι ερωτήσεις και το τόνος αυτών από τους μαθητές αλλά και το υλικό μέσω εικόνων να αξιοποιηθούν στην ανάλυση των δεδομένων. Πιο συγκεκριμένα συλλέχθηκαν προς ανάλυση τα παρακάτω ερευνητικά δεδομένα:

1. Αρχείο εικόνας από τη φωτογράφηση της διδασκαλίας.
2. Αρχείο ήχου από την μαγνητοφώνηση της διδασκαλίας.
3. Φύλλα εργασίας των μαθητών.
4. Αρχεία ήχου από συνεντεύξεις με τους εκπαιδευτικούς.

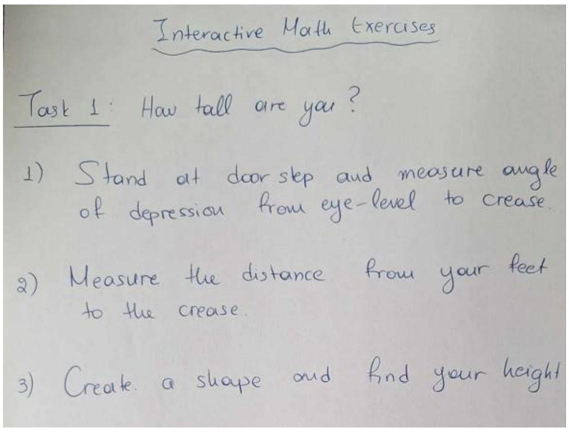
Οι μαθητές όντες γνώριμοι με την ερευνήτρια και συνηθισμένοι από δραστηριότητες τέτοιου τύπου, δημιούργησαν γρήγορα στις ομάδες τους και προετοιμάστηκαν για την εισαγωγή στη δραστηριότητα. Δεν έλειπαν και αυτοί που ήθελαν να δουλέψουν ατομικά, κάτι το οποίο συνήθως επιτρέπεται από τους διδάσκοντες. Ωστόσο σε αυτή τη δραστηριότητα δεν δόθηκε η δυνατότητα διότι η συνεργασία, η ομαδικότητα και η επικοινωνία και αποτελούν σημαντικούς παράγοντες αυτής. Η ερευνήτρια κρατούσε και αρχείο φωτογραφιών στο οποίο οι μαθητές δεν ήθελαν να φαίνονται, αρχικά, αλλά βρέθηκαν να το βλέπουν σαν παιχνίδι και κατέληξαν να παίρνουν πόζες προτρέποντας την ερευνήτρια να επιλέξει την καλύτερη. Κατά τη διεξαγωγή της δραστηριότητας οι μαθητές φαίνονται να γράφουν στα παρεχόμενα φύλλα εργασίας ή και σε μεγάλα χαρτιά τύπου Α5 που παρείχε έκαστος/η διδάσκων/ουσα. Επομένως, το αρχείο φωτογραφιών και η μαγνητοφώνηση αποτελούν τα μόνα υλικά εισαγωγής δεδομένων που θα βοηθήσουν την ερευνήτρια να έχει την ακριβότερη εικόνα για τις ενέργειες των μαθητών είτε αυτές είναι λεκτικές είτε αυτές είναι χειρονομίες.

4.2.4 Ο Ρόλος του Εκπαιδευτικού

Οι 3 εκπαιδευτικοί ασχολούνται με τη διδασκαλία Μαθηματικών σε Ιδιωτικό Αμερικάνικο Σχολείο και έχουν πολυετή εμπειρία. Η έρευνα πραγματοποιήθηκε στα 3 τμήματα της 8^{ης} τάξης που υπάρχουν στο σχολείο. Σε όλη τη δραστηριότητα, οι διδάσκοντες προσπαθούν να έχουν καθοδηγητικό ρόλο ως προς τις στρατηγικές μέτρησης κατά τη διαδικασία της μοντελοποίησης του προβλήματος. Πιο συγκεκριμένα, σε όλα τα τμήματα οι μαθηματικοί εξηγούν αρχικά το πλαίσιο της δραστηριότητας και την μέθοδο προσδιορισμού γωνίας από το γωνιόμετρο. Κατά τη διεξαγωγή των δραστηριοτήτων. Οι εκπαιδευτικοί αναλάμβαναν ρόλο επιτηρητή χωρίς να εμπλέκονται σε μεγάλο βαθμό στις στρατηγικές μέτρησης και επίλυσης. Αυτή είναι μία πρακτική που συναντάται καθολικά στο αμερικάνικο εκπαιδευτικό σύστημα. Δηλαδή, σε όλα τα θετικά και θεωρητικά μαθήματα, οι εκπαιδευτικοί δίνουν στους μαθητές την ελευθερία να αναπτύξουν τις στρατηγικές επίλυσής / απάντησής τους χωρίς να επεμβαίνουν κατά τη διεξαγωγή της ανάπτυξης της σκέψης τους και στο τέλος εκάστοτε δραστηριότητας έχουν προγραμματισμένο χρόνο να εξηγήσουν τις στρατηγικές και τις παρανοήσεις/ λάθη.

Μετά το πέρας της επίλυσης του προβλήματος σε κάθε ομάδα, οι εκπαιδευτικοί επέβλεπαν τη λύση αλλά δεν αναλάμβανα τον ρόλο του τελικού κριτή αλλά άφηναν τα αποτελέσματα ανοιχτά για όλη την τάξη. Ρόλος του εκπαιδευτικού στο αμερικάνικο σύστημα δεν είναι να κρίνει τις λανθασμένες ή σωστές επιλύσεις, αλλά να θέτει τους μαθητές σε τροχιά σκέψης και αυτοελέγχου. Αυτή η πρακτική απαντήθηκε μόνο στην παρούσα δραστηριότητα αλλά και στην ολότητα των μαθημάτων ανά τη σχολική χρονιά.

4.2.5 Το Πρόβλημα



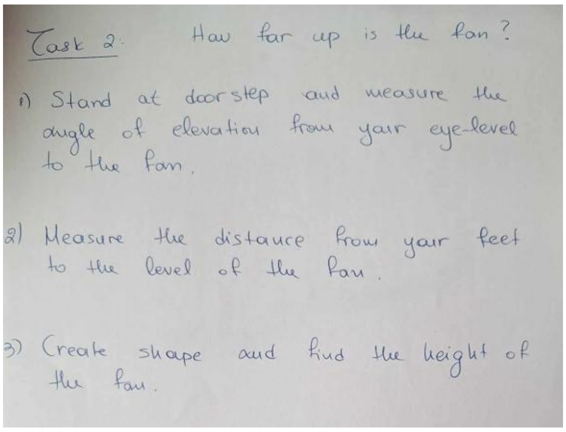
Interactive Math Exercises

Task 1: How tall are you?

1) Stand at door step and measure angle of depression from eye-level to crease.

2) Measure the distance from your feet to the crease.

3) Create a shape and find your height



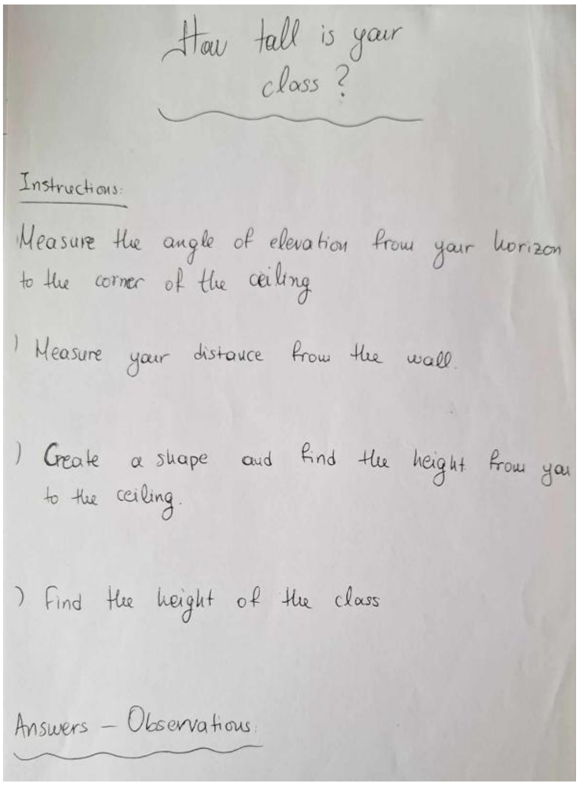
Task 2. How far up is the fan?

1) Stand at door step and measure the angle of elevation from your eye-level to the fan.

2) Measure the distance from your feet to the level of the fan.

3) Create shape and find the height of the fan.

Αυτή η δραστηριότητα δόθηκε στο ένα εκ των 3 τμημάτων και δημιουργήθηκε από την ίδια τη διδάσκουσα η οποία βασίστηκε στην δραστηριότητα από το ελληνικό σχολείο.



How tall is your class?

Instructions:

Measure the angle of elevation from your horizon to the corner of the ceiling

) Measure your distance from the wall.

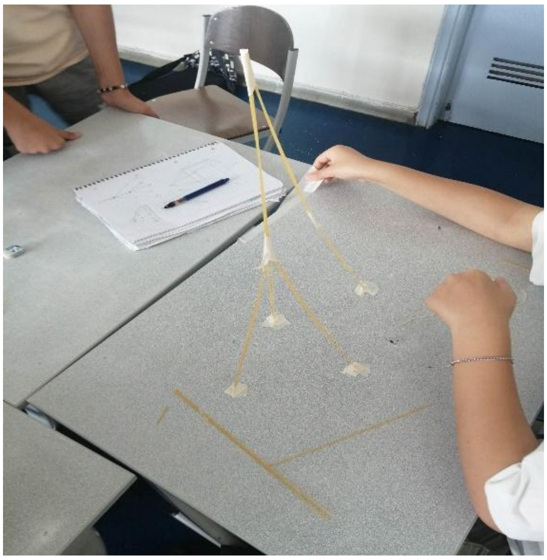
) Create a shape and find the height from you to the ceiling.

) Find the height of the class

Answers – Observations

Η δραστηριότητα αυτή είναι ίδια με αυτή που δόθηκε στη Β’ Γυμνασίου του Ελληνικού Σχολείου.

Στο τελευταίο τμήμα δεν προσκομίθηκε φύλλο εργασίας. Ο εκπαιδευτικός αποφάσισε να ξεφύγει από το πλαίσιο χαρτί – μολύβι και έδωσε μεγαλύτερη σημασία στο δόμημα που θα έπρεπε οι μαθητές να κατασκευάσουν και εν τέλη να μελετήσουν. Ζητήθηκε από τους μαθητές να κατασκευάσουν ένα δόμημα όσο πιο σταθερό και όσο πιο ψηλό μπορούσαν από ξυλάκια και πλαστελίνες. Αφού έγινε αυτό το βήμα θα έπρεπε να βρουν το ύψος του δομήματος με την χρήση τριγωνομετρίας.



Οι εκπαιδευτικοί παρείχαν τα φύλλα εργασίας, μεγάλα χαρτιά Α5 (1 για κάθε ομάδα), μία μετροταινία, το γωνιόμετρο και ένας υπολογιστής τσέπης. Οι υπολογιστές τσέπης είναι πάντα μέρος των επιλύσεων διότι οι μετρήσεις και οι πράξεις γίνονται με έως και 3 δεκαδικά ψηφία και έτσι ελαχιστοποιούνται τα σφάλματα πράξεων για πιο ακριβείς μετρήσεις. Δόθηκε η άδεια σε κάθε ομάδα να σηκωθεί και να κάνει τις μετρήσεις είτε κάθε μία ξεχωριστά είτε και πολλαπλές μαζί. Χρησιμοποιήθηκαν ψηφιακά και χειραπτικά μέσα καθώς κρίθηκε πιο εύκολο κατά την χρήση από τους μαθητές οι οποίοι έχουν συνηθίσει να εργάζονται ταυτόχρονα με μολύβι και υπολογιστή για μετρήσεις και σημειώσεις. Η δραστηριότητα επεκτάθηκε και να αναπαραστάθηκε ψηφιακά στο ψηφιακό εργαλείο Geogebra από έναν εκ των 3 καθηγητών. Οι μαθητές διερεύνησαν το αυθεντικό πρόβλημα και έκαναν μόνοι τους μετρήσεις με τα δοθέντα εργαλεία ώστε να αναπτύξουν στρατηγικές επίλυσης εφαρμόζοντας γνώσεις από Τριγωνομετρία.

Τα υλικά που ήταν διαθέσιμα από τον ερευνητή για τους μαθητές ήταν:

(1) Το γωνιόμετρο ώστε να μετρηθούν οι γωνίες που θα χρησιμοποιούσαν κατά την μοντελοποίηση του προβλήματος οι μαθητές. Τα γωνιόμετρα δόθηκαν από τους εκπαιδευτικούς στην αρχή των δραστηριοτήτων και εξηγήθηκε η χρήση τους.
(2) Τα φύλλα εργασίας όπου οι μαθητές έπρεπε να συμπληρώσουν και να απαντήσουν τις ερωτήσεις. Μάζι με τα φύλλα εργασίας δόθηκε και ένα μεγάλο χαρτί Α5 όπου οι μαθητές καλούνταν να σχεδιάσουν μία γραφική απεικόνιση του έργου.
(3) Μετροταινία και χάρακας που χρειάζονταν για την μέτρηση των αποστάσεων και των υψών των μαθητών. Οι μαθητές ήταν εξοικειωμένοι με την χρήση αυτών των εργαλείων και έτσι οι εκπαιδευτικοί τους έδειχναν μεγαλύτερη εμπιστοσύνη και ελευθερία.
(4) Ξυλάκια και πλαστελίνη που χρησιμοποιήθηκε στην δραστηριότητα ενός εκ των τμημάτων ώστε να χτιστούν τα έργα και να συνεχίσουν οι μαθητές με τις μετρήσεις.

4.2.6 Ανάλυση Ερευνητικών Δεδομένων

Φάσεις της Ανάλυσης

1η Φάση – Στενογραφία και Σημειώσεις

Το κυριότερο εργαλείο της παρούσας ανάλυσης είναι οι στενογραφικές σημειώσεις οι οποίες έγιναν την ώρα της δραστηριότητας. Λόγω πνευματικών δικαιωμάτων δεν επιτρεπόταν η καταγραφή και η μαγνητοσκόπηση των μαθητών και γι’ αυτό η ερευνήτρια κατέγραφε με αμέριστη προσήλωση τα λεγόμενα και τις χειρονομίες ή γκριμάτσες των μαθητών ώστε να υπάρχει όσο το δυνατόν πιο πλήρης εικόνα των γεγονότων εντός των τμημάτων.

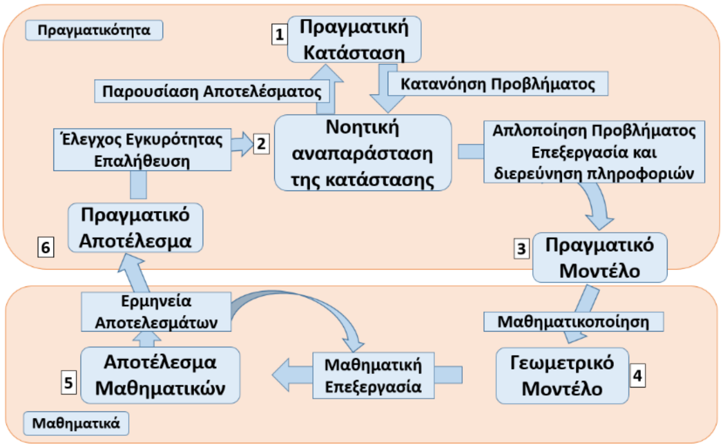
2η Φάση – Ανάλυση των δεδομένων

Η ανάλυση των δεδομένων πραγματοποιήθηκε λεπτομερώς, καθώς έπρεπε να εξεταστεί το κείμενο γραμμή προς γραμμή. Αυτό σήμαινε ότι έπρεπε να ανατρέχουμε επανειλημμένα στο στενογραφικό μας υλικό. Η δυναμική της ανάλυσης είναι ιδιαίτερα σημαντική, καθώς βασισμένη στο κείμενο που δημιουργήθηκε από το αρχείο των σημειώσεων, μπορούσαμε να επιστρέψουμε σε αυτό για να υπογραμμίσουμε παρατηρήσεις και λεπτομέρειες που δεν ήταν εύκολο να εντοπιστούν αρχικά. Η ανάλυση απαίτησε κωδικοποίηση των δεδομένων. Σε αυτό το στάδιο της ανάλυσης, η ερευνητική μας προσοχή εστιάστηκε στις έννοιες της Γεωμετρίας που ανέφεραν οι μαθητές και στον τρόπο με τον οποίο τις συνδέουν με τη δραστηριότητα που επεξεργάζονταν. Έτσι, αναζητήθηκαν κωδικοί που αφορούσαν αναφορές των μαθητών στη Γεωμετρία (π.χ. χρήση της έννοιας της εφαπτομένης) και στη μοντελοποίηση της δραστηριότητας (π.χ. συνδυασμός μετρήσεων με μαθηματικές έννοιες). Στη συνέχεια, αναγνωρίσαμε τους συνδυασμούς των εννοιών της Γεωμετρίας με τις έννοιες της μοντελοποίησης. Αυτός είναι ο λόγος που εστιάζουμε ερευνητικά στη διερεύνηση του κύκλου μοντελοποίησης. Ωστόσο, ορισμένοι κωδικοί που αναγνωρίστηκαν σε αυτή τη φάση χρησιμοποιήθηκαν για να απαντηθεί και το τρίτο ερευνητικό ερώτημα.

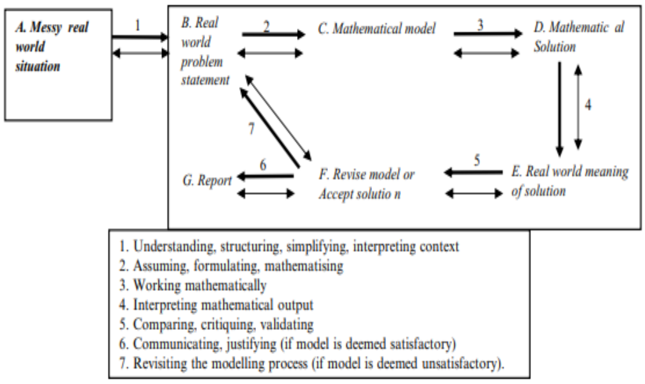
3η Φάση – Εφαρμογή του κύκλου μοντελοποίησης

Κύριο εργαλείο σε αυτή τη φάση της ανάλυσης είναι ο κύκλος μοντελοποίησης που ακολουθούν οι μαθητές. Όλες οι ιδέες και τα μοντέλα των μαθητών αναλύθηκαν με βάση τον κύκλο μοντελοποίησης που αυτοί σκέφτηκαν είτε αυτά εφαρμόστηκαν είτε αυτά απορρίφθηκαν.

Ο παρακάτω κύκλος μοντελοποίησης προέκυψε από την διδασκαλία σε συνδυασμό με αυτών των Blum και Leiß (2006). Παρατίθενται ως προς σύγκριση και οι δύο κύκλοι μοντελοποίησης.



Σχήμα 4.11. Κύκλος Μοντελοποίησης Δραστηριότητας



Σχήμα 4.12. Κύκλος Μοντελοποίησης κατά Stillman et al. (2007)

Ο παραπάνω κύκλος διαφέρει από αυτόν που έχει δοθεί στο σχήμα 4.5 καθώς έχει προστεθεί ένα ενδιάμεσο βήμα πριν την τελική απόφαση για το πραγματικό αποτέλεσμα. Από τις δραστηριότητες διαφάνηκε ότι οι μαθητές πριν δώσουν την τελική απάντηση συζητούσαν είτε εντός των ομάδων τους είτε με άλλες ομάδες τα αποτελέσματα και προσπαθούσαν να βρουν κοινές ή παρόμοιες λύσεις και μεθοδολογίες επίλυσης. Ο κύκλος στο σχήμα 4.12 απορρέει από τις ερευνητικές εργασίες των Stillman et al. (2007) οι οποίοι φαίνεται να συμπεριλαμβάνουν το βήμα της κριτικής των επιλύσεων πριν την απόδοση του τελικού αποτελέσματος. Στο Σχήμα 4.11 ο κύκλος μοντελοποίησης δημιουργήθηκε βάσει του κύκλου των Stillman et al με σκοπό να ενσωματώνει τα στάδια για την καλύτερη κατανόηση της διαδικασίας της μοντελοποίησης.

Παρακάτω δίνεται ένας πίνακας που δημιουργήθηκε σε αντιστοιχία με τον κύκλο μοντελοποίησης του Σχήματος 4.11 στον οποίο γίνεται αρίθμηση των σταδίων και των μεταβάσεων. Αυτή η αρίθμηση βοήθησε στην ανάλυση ώστε να αναγνωρισθούν οι μεταβάσεις στις διαδικασίες μοντελοποίησης των ομάδων σύμφωνα με τον κύκλο μοντελοποίησης από το ένα στάδιο στο άλλο.

Πίνακας 4.3. Στάδια και Μεταβάσεις Κύκλου Μοντελοποίησης

6 Στάδια	
1	Πραγματική Κατάσταση
2	Νοητική Αναπαράσταση της Κατάστασης
3	Πραγματικό Μοντέλο
4	Γεωμετρικό Μοντέλο
5	Αποτελέσματα Μαθηματικών
6	Πραγματικό Αποτέλεσμα

7 Μεταβάσεις	
1-2	Κατανόηση Πραγματικής Κατάστασης
2-3	Απλοποίηση Προβλήματος, Επεξεργασία και Διερεύνηση πληροφοριών, Δόμηση
3-4	Μαθηματικοποίηση
4-5	Γεωμετρική – Αλγεβρική Επεξεργασία και Εφαρμογή
5-6	Ερμηνεία Αποτελεσμάτων
6-2	Έλεγχος Εγκυρότητας και Επαλήθευση
4-5-6	Ερμηνεία και Επαναπροσδιορισμός μοντέλου/ παραμέτρων
6-2	Ερμηνεία Αποτελεσμάτων
2-1	Παρουσίαση Αποτελεσμάτων

4η Φάση – Ανάλυση της εξέλιξης της δραστηριότητας

Η ανάλυση υποστηρίχθηκε από την κωδικοποίηση των δεδομένων. Η κωδικοποίηση διατηρήθηκε όπως έγινε στην ανάλυση του τμήματος Β' Γυμνασίου του ελληνικού σχολείου. Διατηρήθηκε η εναλλαγή μεταξύ πλαισίου εργασίας με τους παρακάτω κώδικες:

$Π_Π$: Οι μαθητές εργάζονται στο πραγματικό πλαίσιο και οι παρατηρήσεις τους αφορούν τα δεδομένα που συλλέγουν από το περιβάλλον.
$Π_Μ$: Οι μαθητές εργάζονται στο μαθηματικό – γεωμετρικό πλαίσιο και οι παρατηρήσεις τους αφορούν τα μαθηματικά αποτελέσματα που εξάγουν.

Στη συνέχεια αναγνωρίστηκαν υπό – κώδικες για τους παράγοντες που επηρέασαν της εξέλιξη της επεξεργασίας και επίλυσης. Οι κώδικες ήταν ίδιοι με αυτούς που δημιουργήθηκαν στην προηγούμενη ανάλυση και αυτοί ήταν η επικοινωνία, το αυθεντικό πλαίσιο, οι συνδέσεις της Γεωμετρίας και της Πραγματικότητας και η συνοχή των αποτελεσμάτων. Το αυθεντικό πλαίσιο και οι συνδέσεις Γεωμετρίας - Πραγματικότητας ήταν κώδικες που προέκυψαν ήδη από την αρχή της ανάλυσης ενώ η επικοινωνία και η συνοχή προέκυψαν πιο μετά.

$Ε_Δ$: Επικοινωνία
$Α_Δ$: Αυθεντικό πλαίσιο
$ΓΠ_Δ$: Γεωμετρία και Πραγματικότητα
$Σ_Δ$: Συνοχή

Η ανάλυση της εξέλιξης της αναγνώρισης των παραγόντων και των κωδικών προέκυψε αμέσως από την αναγνώριση των διακριτών διαδικασιών μοντελοποίησης και των κύκλων μοντελοποίησης από την 3η φάση.

5 Αποτελέσματα

5.1 Οι προσπάθειες μοντελοποίησης που ανέπτυξαν οι μαθητές στα 2 Εκπαιδευτικά Συστήματα

Ο στόχος των μαθητών των 2 σχολείων ήταν να χρησιμοποιήσουν την τριγωνομετρία και τη γνώση των τριγωνομετρικών αριθμών οξειών γωνιών για να υπολογίσουν το ζητούμενο ύψος έκαστης δραστηριότητας που τους δόθηκε.

Στην ανάλυση των δεδομένων με τον Κύκλο Μοντελοποίησης μελετήθηκαν οι διαδικασίες επίλυσης που έφεραν οι ομάδες στη διάρκεια της εργασίας πάνω στο αυθεντικό αυτό πρόβλημα. Οι μαθητές αμφιταλαντεύθηκαν σε κάποια σημεία κατά την δημιουργία των μοντέλων τους αλλά ανταπεξήλθαν τις δυσκολίες ή παρανοήσεις και με τη βοήθεια των μελών της ομάδας προέκυψαν τα μοντέλα που θα τους έδιναν τα αναμενόμενα αποτελέσματα. Η δραστηριότητα είχε κάποια βασικά χαρακτηριστικά, όπως το αυθεντικό ανοιχτό πρόβλημα ως προς τον τρόπο προσέγγισης και την εισαγωγή της Τριγωνομετρίας σε ένα πλαίσιο ομαδικής εργασίας χωρίς το πλαίσιο επίλυσης να είναι διατυπωμένο ξεκάθαρα στους μαθητές.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της ανάλυσης των ερευνητικών δεδομένων που συλλέχθηκαν ώστε αν απαντηθούν τα ερευνητικά ερωτήματα. Βασικό εργαλείο για την ανάλυση ήταν ο κύκλος μοντελοποίησης που ακολούθησαν οι μαθητές. Όλες οι προσπάθειες και ιδέες των μαθητών αναλύθηκαν βάσει αυτού του Κύκλου με σκοπό να γίνουν κατανοητές οι διαδικασίες μοντελοποίησης που σκέφτηκαν και εφάρμοσαν οι μαθητές. Επίσης, μέσα από τη χρήση του έγιναν αντιληπτές οι διαφορές των διαδικασιών μοντελοποίησης, με σκοπό να φανούν οι λόγοι επιλογής έκαστης διαδικασίας από κάθε ομάδα.

5.1.1 Θεσμικό πλαίσιο, ΑΠΣ και Σχολικά βιβλία στα δύο εκπαιδευτικά συστήματα.

Η τάξη στο ΕλΕκΣ

Ένας από τους βασικότερους άξονες ανάλυσης των δραστηριοτήτων στην έρευνα αυτή αφορά το θεσμικό πλαίσιο που έχει τεθεί από τους εκπαιδευτικούς κατά την επίλυσης δραστηριοτήτων. Οι δραστηριότητες είναι δημιούργημα των εκπαιδευτικών με στόχο την πλήρη κατανόηση των τριγωνομετρικών αριθμών, την χρήση τους για την περιγραφή και επίλυση πραγματικών μοντέλων μέσω μαθηματικών μοντέλων. Σε κάθε μοντέλο εσκεμμένα οι εκπαιδευτικοί εμπλέκουν γεωμετρικά εργαλεία για να αποδώσουν και να μετρήσουν βασικές έννοιες μέσω αυτών.

Στην Β’ Γυμνασίου δεν αναφέρονται λεκτικά οι λόγοι για τους οποίους η εκπαιδευτικός επιλέγει να αναλύσει τη συγκεκριμένη δραστηριότητα. Ωστόσο από το υλικό μπορούμε να διακρίνουμε ότι οι 2 κύριοι λόγοι είναι (1) η ενσωμάτωση των τριγωνομετρικών αριθμών σε βιωματικές δραστηριότητες με έμφαση στην ενεργή εμπλοκή των μαθητών και (2) η εισαγωγή και χρήση χειραπτικών εργαλείων. Αρχικά, η εκπαιδευτικός κατά την εισαγωγή της δραστηριότητας δεν δίνει πολλές πληροφορίες στους μαθητές σχετικά με τη χρήση των τριγωνομετρικών αριθμών. Αυτό ίσως να συμβαίνει διότι οι μαθητές έχουν ήδη εργαστεί σε παρόμοιες δραστηριότητες αλλά και επειδή έχουν τη δυνατότητα να συσχετίσουν τη δεδομένη δραστηριότητα με παρόμοια από το σχολικό εγχειρίδιο.

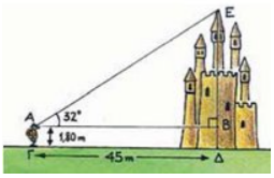
Η δραστηριότητα όπως είδαμε παραπάνω έχει αλυσιδωτή μορφή. Αυτό σημαίνει ότι τα ερωτήματα είναι έτσι δοσμένα στους μαθητές ώστε προοδευτικά οι μαθητές να βρίσκουν δεδομένα που θα τους βοηθήσουν στην τελική μοντελοποίηση και επίλυση του προβλήματος. Από αυτό γίνεται κατανοητό ότι η εκπαιδευτικός θέλει οι μαθητές να αναπτύξουν αυτονομία στην μοντελοποίηση και επίλυση. Δηλαδή βασικός στόχος είναι οι μαθητές μόνοι τους να αναπτύξουν τεχνικές και στρατηγικές επίλυσης χωρίς να περιμένουν την παρέμβαση της εκπαιδευτικού. Αυτό συμβάλλει σε μία ευρύτερη άποψη που επικρατεί στο ΕλΕκΣ, όπου οι μαθητές αναμένονται να λύνουν χωρίς τη βοήθεια του εκπαιδευτικού, στρατηγικά και μέσω μαθηματικών αυτοματισμών τις δραστηριότητες.

Ωστόσο, σε αυτήν την περίπτωση ούτε οι μαθητές αλλά ούτε και η εκπαιδευτικός αναφέρουν κάτι σχετικά με τη δραστηριότητα. Μία πάγια τακτική των μαθητών του ΕλΕκΣ είναι ότι όταν υπάρχει απορία εκείνοι αναζητούν πρώτα τη βοήθεια του εκπαιδευτικού και έπειτα του σχολικού εγχειρίδια ή άλλων πηγών διαθέσιμων σε αυτούς. Όπως φαίνεται παρακάτω οι μαθητές τράπηκαν προς το σχολικό εγχειρίδιο στο οποίο βρήκαν και παρόμοια δραστηριότητα καθώς παρατήρησαν ότι η εκπαιδευτικός δεν είχε τη δυνατότητα εκείνη τη στιγμή να τους βοηθήσει. Παρακάτω δίνεται η δραστηριότητα του σχολικού εγχειριδίου από το Μέρος Β’, Κεφάλαιο 2, Παράγραφος 2.1 και σελ. 139:

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4

Ένας τουρίστας ύψους ΑΓ = 1,80 m «βλέπει» τον πύργο με γωνία 32° και απέχει από αυτόν 45 m. Να υπολογίσετε το ύψος ΕΔ του πύργου.

Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΕ γνωρίζουμε το μήκος της κάθετης πλευράς ΑΒ = 45 m και μια οξεία γωνία 32°. Επομένως, για να υπολογίσουμε την άλλη κάθετη πλευρά ΒΕ, χρησιμοποιούμε την εφαπτομένη της γωνίας των 32°.



Είναι: $\text{εφ}32^\circ = \dfrac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \dfrac{ΒΕ}{ΑΒ} = \dfrac{ΒΕ}{45}$

Από τον πίνακα εφαπτομένων βρίσκουμε: $\text{εφ}32^\circ = 0,62$, οπότε η παραπάνω σχέση

γίνεται: $0,62 = \dfrac{ΒΕ}{45}$, οπότε έχουμε: $ΒΕ = 45 \cdot 0,62 = 27,9$ (m).

Επομένως, το συνολικό ύψος του πύργου είναι: ΔΕ = ΔΒ + ΒΕ = 1,8 + 27,9 = 29,7 (m).

Εικόνα 5.1. Εφαρμογή σχ. εγχειριδίου της εφαπτομένης οξείας γωνίας

<u>ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΕλΕκΣ 1</u>

Μαθ10: Δεν ξέρω τι να κάνουμε μετά. Τι λες;

Μαθ11: Να τη ρωτήσουμε;

Μαθ12: Απαντάει σε άλλους τώρα.

Μαθ11: Να δούμε μία το σχολικό βιβλίο. Κάτι θα έχει.

Μαθ12: Βρήκα εδώ κοιτάξτε έχει την ίδια άσκηση. Λίγο διαφορετική αλλά δεν νομίζω να αλλάζει πολύ σε εμάς.

Στο παραπάνω απόσπασμα διαφαίνεται η ανάγκη των μαθητών να αναζητήσουν άλλες πηγές για επεξήγηση του προβλήματος. Μέσα από την αναζήτησή τους ανακαλύπτουν τρόπους μέτρησης και επίλυσης της δραστηριότητας. Έτσι πετυχαίνουν τους στόχους που πιθανόν είχε θέσει η εκπαιδευτικός για την δραστηριότητα. Οι μαθητές καταλαβαίνουν μέσα από δοκιμές τη χρήση των χειραπτικών εργαλείων και χρησιμοποιούν την εφαπτομένη για την επίλυση του προβλήματος. Σε αυτό το μέρος της δραστηριότητας τονίζεται ιδιαίτερα η ανάγκη για εμπλοκή των μαθητών σε βιωματικές καταστάσεις μέσω των οποίων μπορούν να επανεξετάσουν τα δεδομένα και με νέες μετρήσεις να προβούν σε επαναδιατύπωση του μοντέλου, δηλ. μέσω Ελέγχου Εγκυρότητας των παρόντων αποτελεσμάτων αν μεταβούν σε Επαναδιατύπωση του Μοντέλου όπως αναφέρεται στον Κύκλο Μοντελοποίησης.

Η τάξη στο ΑμΕκΣ

Από την οπτική του ΑμΕκΣ, οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να έχουν έτοιμο πλάνο μαθήματος το οποίο και καταγράφουν σε συγκεκριμένη φόρμα που παραδίδεται στον αντίστοιχο Head of Mathematics και διευθυντή Γυμνασίου ή Λυκείου προς επισκόπηση. Αυτό αργότερα δημοσιεύεται στην πλατφόρμα που χρησιμοποιεί το σχολείο για υβριδική μάθηση μαζί με τις δραστηριότητες στις οποίες θα εργαστούν οι μαθητές κατά τη διδασκαλία τους. Έτσι, οι μαθητές γνωρίζουν εκ των προτέρων τους μαθησιακούς στόχους που έχουν να καλύψουν και προετοιμάζονται κατάλληλα για την διδασκαλία που θα ακολουθήσει.

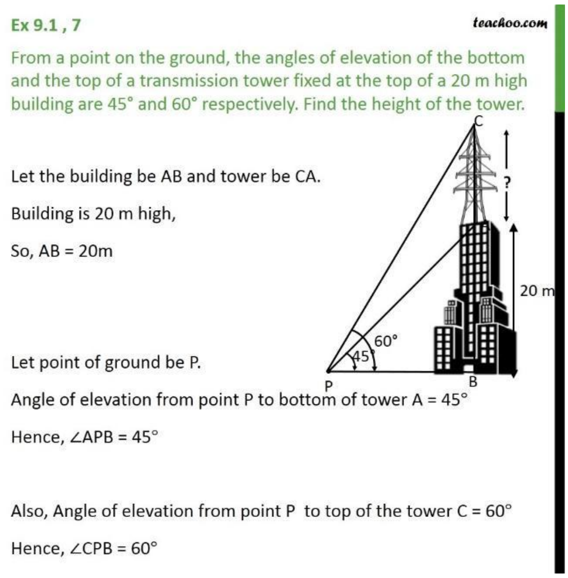
Κύριο μέλημα των εκπαιδευτικών του ΑμΕκΣ είναι η διάνθηση των μαθημάτων με δραστηριότητες που θα μπορέσουν να δώσουν τη δυνατότητα σε όλους τους μαθητές να κατανοήσουν πλήρως τις έννοιες βασιζόμενες στα διάφορα περιβάλλοντα από τα οποία προέρχονται αυτοί. Για αυτό το λόγο ένα μεγάλο μέρος των μαθημάτων στο ΑμΕκΣ είναι κλιμακούμενης δυσκολίας. Αυτό σημαίνει ότι οι εκπαιδευτικοί διαμορφώνουν το υλικό τους ώστε να προσφέρει ασκήσεις πιο εύληπτες από τους μαθητές όλων των μαθησιακών επιπέδων και έτσι να μπορούν να καλύψουν 30 λεπτά διδασκαλίας. Ωστόσο, όσο προχωρά το μάθημα τα προβλήματα να γίνονται ολοένα και αυξανόμενης δυσκολίας ώστε οι μαθητές από μόνοι τους να εντοπίζουν τις παραλήψεις ή παρερμηνεύσεις που έχουν και είτε να δρουν με σκοπό την διόρθωσή τους είτε να αναζητούν τη βοήθεια του εκπαιδευτικού για αυτό.

Οι εκπαιδευτικοί κατά την εισαγωγή και έναρξη του μαθήματος είναι να προβάλουν το πλάνο στον διαδραστικό πίνακα και να κάνουν μία ανασκόπηση αυτού ώστε να λύσουν απορίες σχετικά με τους στόχους που θα καλυφθούν εντός διδακτικής ώρας. Αυτό το μέρος της διδασκαλίας συνήθως δεν διαρκεί πάνω από 10 λεπτά. Συνεχίζοντας, οι εκπαιδευτικοί αφιερώνουν τα επόμενα 10 λεπτά στην εισαγωγή του μαθήματος κατά την οποία ομαλά οι μαθητές αναγνωρίζουν το πλαίσιο στο οποίο θα διεξαχθεί η δραστηριότητα. Αυτό περιλαμβάνει τόσο το πραγματικό μέρος της δραστηριότητας, δηλαδή, το αυθεντικό πλαίσιο εργασίας όσο και τη μαθηματική βάση η οποία θα αναλυθεί και αναπτυχθεί εντός αυτού.

Οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν πολύ πιο συχνά βιωματικές δραστηριότητες ή και ρεαλιστικά προβλήματα. Στόχος των καθηγητών σε κάθε τάξη είναι να εντάσσουν τέτοιες δραστηριότητες ώστε οι μαθητές να κατανοούν πλήρως την χρήση των μαθηματικών εννοιών που εισάγονται και να απαντούν στο κύριο ερώτημα που έχουν οι μαθητές σε αυτήν την ηλικιακή ομάδα: «Και αυτά τα μαθηματικά εγώ που θα τα χρησιμοποιήσουν στην ζωή μου;»

Βασικό μέρος της εργασίας των εκπαιδευτικών στο ΑμΕκΣ είναι η δημιουργία δραστηριοτήτων με σκοπό την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές. Έχοντας αυτό ως αφορμή οι καθηγητές βρίσκουν κατάλληλες ασκήσεις από τον παγκόσμιο ιστό ή δημιουργούν παρόμοιες ασκήσεις ώστε να συμπεριλάβουν όλους τις γνωστικές δεξιότητες και ικανότητες που πρέπει να αναπτύξουν οι μαθητές. Ιδιαιτέρως, οι καθηγητές του συγκεκριμένου εκπαιδευτικού ιδρύματος, επειδή έχουν και μαθητές που έρχονται από διαφορετικά εκπαιδευτικά συστήματα προσαρμόζουν τις δραστηριότητες ώστε να είναι βατές για όλους τους μαθητές ανεξαρτήτως εκπαιδευτικού συστήματος.

Ιδιαίτερη σημασία δίνεται στα λεκτικά προβλήματα. Αυτό συμβαίνει διότι όλοι οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με την κατανόηση των λεπτών εννοιών που παρουσιάζονται μέσω τις εκφώνησης του προβλήματος. Έτσι, οι εκπαιδευτικοί προσαρμόζουν κατάλληλα τις δραστηριότητες αλλά και την παρουσίαση αυτών ώστε οι μαθητές μέσω κατάλληλων ερωτήσεων να μαθαίνουν να εξάγουν δεδομένα και συμπεράσματα. Οι δραστηριότητες που μελετώνται σε αυτήν την έρευνα, όπως είδαμε και στην παράγραφο των προβλημάτων, κατέχουν μία δομή μέσω τις οποίας τα δεδομένα εξάγονται αλυσιδωτά έτσι ώστε οι μαθητές προοδευτικά να φτάνουν στην τελική ιδέα του προβλήματος που είναι η εύρεση έκαστου ύψους.



Εικόνα 5.2. Ρεαλιστικό πρόβλημα από το κεφάλαιο των τριγωνομετρικών αριθμών της 8ης τάξης

Μέσω αυτών των χαρακτηριστικών, η διδασκαλία στο ΑμΕκΣ παίρνει έναν πιο μαθητοκεντρικό χαρακτήρα και αυτό είναι κάτι που έχει υποστηριχθεί ήδη από έρευνες του 20ου αιώνα. Έχοντας αυτό στο μυαλό τους και μέσω προσωπική επαγγελματικής προόδου οι εκπαιδευτικοί ανανεώνουν το υλικό που προσφέρουν και το προσαρμόζουν στους ρυθμούς και τις δυνάμεις της κάθε τάξης που αναλαμβάνουν. Σε αυτό διαδραματίζει πιο μεγάλο ρόλο η κατάληξη που θα έχει έκαστο μάθημα και λαμβάνει χώρα στα τελευταία 20 λεπτά. Αυτό σημαίνει ότι η επέκταση που προσφέρει στο τέλος κάθε μαθήματος ο εκπαιδευτικός ορίζει την πορεία των επόμενων εννοιών και δραστηριοτήτων. Όταν ο εκπαιδευτικός αντιλαμβάνεται ότι για μία έννοια οι μαθητές έχουν δείξει πολύ καλά δείγματα επίλυσης, τότε διαμορφώνει το επόμενο μάθημά του κατάλληλα ώστε να κεντρίσει περισσότερο το ενδιαφέρον στην μαθηματική έννοια που ακολουθεί. Έτσι, δίνεται ιδιαίτερη σημασία στη συζήτηση που γίνεται στο τέλος του μαθήματος και επιδιώκεται οι μαθητές να φέρνουν και να συζητούν τις δικές τους ιδέες πάνω στο θέμα.

Τέλος, ένα ιδιαίτερο στοιχείο σχετικά με τη διεξαγωγή των διδασκαλιών στο ΑμΕκΣ έχει να κάνει με την χωρική διαμόρφωση του χώρου και τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται στις δραστηριότητες. Η διάταξη του χώρου δεν μεταβλήθηκε ιδιαιτέρως για τις δραστηριότητες που διεξήχθησαν. Τα θρανία καθόλη τη διάρκεια της χρονιάς τοποθετούνται σε τετράγωνη ή Π διάταξη εντός τάξης για να προάγεται το ομαδοσυνεργατικό πνεύμα. Η ομάδα είναι η μονάδα μάθησης στο ΑμΕκΣ και αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό που διαχωρίζει τα δύο συστήματα. Οι μαθητές ήδη από τις μικρές τάξεις είναι συνηθισμένοι σε αυτήν την τοποθέτηση στο χώρο όπως και στην οδηγία να φέρουν μαζί τους κάθε φορά γεωμετρικά εργαλεία (χάρακας, μοιρογνωμόνιο και διαβήτη). Ο εκπαιδευτικός δεν χρειάστηκε να προνοήσει για την πληθώρα των εργαλείων εκτός του γωνιομέτρου που είναι κάτι νέο και για τον ίδιο αλλά και για μετροταινίες που δανείστηκε από το εργαστήριο του σχολείου.

5.1.2 Η εισαγωγή του προβλήματος στους μαθητές και οι συνδέσεις με το σχολικό βιβλίο

Η τάξη στο ΕλΕκΣ

Αρχικά θα μελετηθεί η εισαγωγή της διδασκαλίας στην τάξη που ακολουθεί το Ελληνικό Εκπαιδευτικό Σύστημα. Πρώτο μέρος της διδασκαλίας είναι η εισαγωγή και η επεξήγηση της βασικής μαθηματικής έννοιας την οποία πραγματεύεται η τάξη. Από το υλικό μας διαφαίνεται ότι δεν διενεργείται κάποια εισαγωγή στην μαθηματική έννοια που θα εργαστούν οι μαθητές μέσω κάποιου παρόμοιου προβλήματος. Ωστόσο, εξηγείται στους μαθητές ότι θα δοθεί δραστηριότητα που αφορά την μαθηματική έννοια της εφαπτομένης και ο στόχος αυτής. Η διδασκαλία συνεχίζει με την επεξήγηση των χειραπτικών εργαλείων που θα χρειαστούν οι μαθητές για τις μετρήσεις. Σκοπός αυτής της τακτικής είναι η απόδοση όσο των λιγότερων πληροφοριών σχετικά με την διαδικασία που θα ακολουθήσει ώστε οι μαθητές να αποδώσουν με την δική τους λογική το πρόβλημα και να εργαστούν πάνω σε αυτή. Βασικό γνώρισμα της εισαγωγής στη διδασκαλία είναι η επίδειξη και αναγνωριστική χρήση των χειραπτικών μέσων που θα χρησιμοποιηθούν.

Οι μαθητές εμφανώς ξαφνιασμένοι και μπερδεμένοι, όπως διαφαίνεται από το οπτικοακουστικό υλικό, προσπαθούν να κατανοήσουν τη χρήση του γωνιόμετρου και να ορίσουν το σημείο αναφοράς με σκοπό την εκκίνηση της μοντελοποίησης. Οι περισσότερες ομάδες συγκεντρώνονται γύρω από τη διδάσκουσα η οποία εξηγεί ενδελεχώς τη χρήση του συγκεκριμένου εργαλείου.

<u>ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΕλΕκΣ 2</u>

Μαθ6: Κυρία δεν καταλαβαίνω μου βγαίνει λάθος η γωνία!

Εκπ: Ωραία έλα εδώ! Κάτσε σε αυτή τη θέση και κοίτα πάνω στη γωνία της τάξης. Το πρόσωπό σου παίρνει κλίση γιατί μετράμε με το ένα μάτι και ανάλογα πρέπει να στρέφουμε το πρόσωπό μας.

(Δείχνει στο μαθητή πώς να στέκεται και πώς να κοιτά σωστά)

Εκπ.: Μετά τοποθετούμε το γωνιόμετρο κοντά στο μάτι και μετράμε. Για προσπαθήστε!

Οι βιωματικές δραστηριότητες στα ελληνικά σχολεία δεν είναι μεγάλο μέρος της διδασκαλίας. Ωστόσο, στην συγκεκριμένη διδασκαλία η δημιουργία και εφαρμογή της βιωματικής δραστηριότητας με τη χρήση χειραπτικών εργαλείων (γωνιομέτρου) εντός της τάξης ως εισαγωγικό εργαλείο, έγινε με σκοπό να ενισχυθεί η κατανόηση των τριγωνομετρικών αριθμών και η σύνδεση τους με πραγματικές καταστάσεις. Κύριο γνώρισμα της δραστηριότητας αυτής είναι η χρήση του γωνιομέτρου και η βιωματική αναπαράσταση του πραγματικού μοντέλου μέσω των μετρήσεων ώστε να συνδεθεί η Πραγματική Κατάσταση (1) με το Μαθηματικό Μοντέλο (4) μέσω της Νοητικής

Αναπαράστασης του Προβλήματος (2). Έτσι, οι μαθητές κατά την εκκίνηση της διδασκαλίας εμπλέκονται ενεργά, αντιλαμβάνονται τις βιωματικές αλλαγές και μεταφορές από την πραγματικότητα στα Μαθηματικά και αναπτύσσουν την κριτική τους ικανότητα σε σχέση με το πρόβλημα που .

Μέσω της περιγραφής αυτής από την εκπαιδευτικό, οι μαθητές καταλαβαίνουν καλύτερα πώς χρησιμοποιείται το γωνιόμετρο και αποφασίζουν να αλλάξουν κάποιες παραμέτρους της μοντελοποίησης τους και να επιλέξουν τη γωνία της ώστε να δημιουργηθεί τόσο νοητικά όσο και αναπαραστασιακά, αργότερα, το γραφικό δόμημα πάνω στο οποίο θα βασίσουν την επίλυση. Η πρώτη διαδικασία μοντελοποίησης της ομάδας δεν είχε ξεπεράσει το επίπεδο των μετρήσεων και ήδη οι μαθητές από την αρχή εντοπίζουν κατά τη μετατροπή του πραγματικού μοντέλου σε μαθηματικό. Ο λόγος για τον οποίο αποφασίστηκε αυτή η απόρριψη είναι η δημιουργία διαφορετικού σχήματος – τετραπλεύρου – από αυτό που υποδεικνύεται από την δραστηριότητα. Μετά, η ομάδα συνεχίζει με τις μετρήσεις και την μεταφορά του πραγματικού μοντέλου όπου παρατηρούσαν στο αντίστοιχο μαθηματικό συνεχίζοντας έτσι με την επίλυση.

Από το υλικό μας, διαφαίνεται ότι η δραστηριότητα έχει προκαλέσει κάποιες διαφωνίες μεταξύ των ομάδων ως προς την προσέγγισή της. Οι συζητήσεις που έχουν καταγραφεί παρουσιάζουν ανομοιότητες ως προς την κατανόηση του της πραγματικής κατάστασης και τη μετάβαση προς το μαθηματικό μοντέλο. Τονίζεται ιδιαίτερα ότι το μεγαλύτερο μέρος των ομάδων χρησιμοποιεί το σχολικό εγχειρίδιο κατά την αποτύπωση του προβλήματος – το οποίο όπως έχει αναφερθεί περιέχει μία αντίστοιχη δραστηριότητα. Κύριο μέρος όπου παρουσιάζονται ερωτήσεις είναι αυτό της εύρεσης του ύψους ενός μαθητή από κάθε ομάδα καθώς φαίνεται να μετριέται το συνολικό ύψος του μαθητή και όχι αυτό από τα μάτια και κάτω.

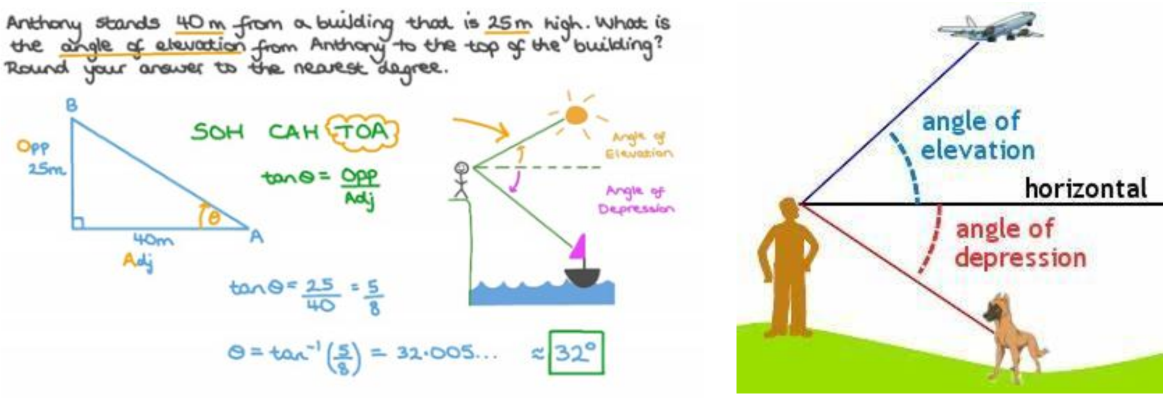
Η τάξη στο ΑμΕκΣ

Συνεχίζοντας, θα αναλυθεί η εισαγωγή της διδασκαλίας η οποία γίνεται μέσω της επεξήγησης της μαθηματικής έννοιας στις τάξεις που ακολουθούν το Αμερικάνικο Εκπαιδευτικό Σύστημα. Σημαντικό είναι να αναφερθεί ότι ο κάθε εκπαιδευτικός στο τμήμα του διαμορφώνει τη διδασκαλία του όπως θεωρεί ότι θα γίνει πιο αντιληπτή η έννοια που πραγματεύεται. Ως επί το πλείστον οι εκπαιδευτικοί αρχίζουν το μάθημά του με αναφορές είτε σε παρόμοιες δραστηριότητες από το σχολικό εγχειρίδιο είτε από υλικό που έχουν συλλέξει οι ίδιοι και συνεχίζουν εισαγωγή της δραστηριότητας. Οι μαθητές φαίνονται πρόθυμοι να εμπλακούν σε βιωματικές δραστηριότητες όπως αυτή που εισάγεται.

Η παρουσίαση της κεντρικής έννοια γίνεται κυρίως με αναφορές και γρήγορες επιλύσεις μικρών δραστηριοτήτων με σκοπό να δώσουν το έναυσμα στους μαθητές να σκεφτούν να αναλύσουν τα δεδομένα ώστε να χρησιμοποιηθούν στην κύρια δραστηριότητα. Πάγια τακτική στο αμερικάνικο σύστημα είναι η εργασία και επίλυση ανοιχτού τύπου προβλημάτων. Οι μαθητές πριν, κατά τη διάρκεια αλλά και αφού έχουν διδαχθεί μία μαθηματική έννοια αναλαμβάνουν να επιλύσουν μία δραστηριότητα στην οποία αναμένεται να χρησιμοποιήσουν την έννοια. Ωστόσο, όλοι οι τρόποι με τους οποίους επιλύεται μία δραστηριότητα είναι αποδεκτοί προκειμένου να προαχθεί η επέκταση δραστηριοτήτων τόσο με μαθηματικό όσο και με άλλων επιστημών υπόβαθρο.

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΑμΕκΣ 1
Εκπ: Σήμερα θα ήθελα να δούμε μία λίγο διαφορετική δραστηριότητα που θεωρώ θα σας αρέσει πολύ.
Μαθ5: Και τί θα περιλαμβάνει αυτή η δραστηριότητα;
Εκπ: Καλύτερα λίγο πριν ξεκινήσουμε το μάθημα όμως να δούμε κάποιες παρόμοιες δραστηριότητες που έχουμε κάνε στο προηγούμενο μάθημα.
Εκπ: Αν ανοίξετε τα βιβλία σας στην σελίδα 186 θα δείτε την άσκηση 9.1. Θα ήθελα λίγο να την σχολιάσουμε.
Μαθ7: Και μετά θα κάνουμε την άλλη που μας είπατε;
Εκπ: Ναι βεβαίως!

Η εν λόγω δραστηριότητα είναι αυτή που δόθηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Επιπλέον, βλέπουμε και άλλες εισαγωγικές δραστηριότητες από άλλα τμήματα μαζί με κανόνες υπενθύμισης που θα χρησιμοποιηθούν στο βήμα της επίλυσης.



Εικόνα 5.3. Εισαγωγικές δραστηριότητες με γωνίες ανύψωσης και βύθισης

5.1.3 Οι Βιωματικές Δραστηριότητες στα 2 Εκπαιδευτικά Συστήματα

Η τάξη στο ΕλΕκΣ

Ο όρος βιωματική δραστηριότητα είναι ένας όρος που έχει κάνει την εμφάνισή του τις τελευταίες δεκαετίες του $20^{ου}$ αιώνα στον Κλάδο της διδακτικής των Μαθηματικών. Έτσι σε κάποια εκπαιδευτικά συστήματα δεν είναι ευρέως διαδεδομένη η χρήση τους με σκοπό την μετάδοση και πλήρη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Ωστόσο στο ΕλΕκΣ γίνονται ολοένα και περισσότερες προσπάθειες για την εισαγωγή περισσότερων δραστηριοτήτων τέτοιου είδους στα σχολεία. Μία τέτοια προσπάθεια αναδεικνύεται από την διδασκαλία που αναλύθηκε από το οπτικοακουστικό υλικό στην Β΄ Γυμνασίου. Η εκπαιδευτικός έχοντας ως απώτερο σκοπό την ανάλυση των τριγωνομετρικών αριθμών, αποφάσισε να διευρύνει την οπτική των μαθητικών ως προς αυτούς μέσα από την αναλυθείσα δραστηριότητα. Η ελευθερία κίνησης που δόθηκε στους μαθητές διαδραμάτισε μεγάλο ρόλο τόσο στην μοντελοποίηση της δραστηριότητας όσο και στην επίλυση και έλεγχο αποτελεσμάτων. Οι μαθητές έχοντας τη δυνατότητα κίνησης στο χώρο και με την εξέταση διαφορετικών μοντέλων απόδοσης του προβλήματος, εισέρχονται βαθύτερα στην λογική δημιουργίας μοντέλου και κατανόησης του χώρου και του αναμενόμενου αποτελέσματος.

Η διάταξη του χώρου από την εκπαιδευτικό έχει γίνει έτσι ώστε η τάξη να φαίνεται πιο ανοιχτή, δηλαδή να δίνονται μεγαλύτερες ευκαιρίες στους μαθητές για κίνηση και κατανόηση του χώρου.

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΕλΕκΣ 3

Εκπ: Παιδιά ο χώρος είναι δικός σας μπορείτε να σηκωθείτε και να μετρήσετε τα ζητούμενα από το φύλλο εργασίας.

Μαθ4: Κυρία δηλαδή μπορούμε να σηκωθούμε τώρα και να βρούμε τη γωνία;

Εκπ: Ναι ναι σηκωθείτε και εξετάστε το χώρο. Βρείτε σημεία που να δουλεύουν καλύτερα για εσάς και ξεκινήστε!

Το απόσπασμα αυτό υποστηρίζει την ελευθερία κίνησης στο χώρο που δίνει η εκπαιδευτικός όπως αναφέρεται παραπάνω. Επιπλέον, οι ίδιοι οι μαθητές αναγνωριστικά με τη χρήση του γωνιομέτρου και την επιλογή κατάλληλου σημείου της οροφής, «ψηλαφίζουν» το χώρο και επιλέγουν κατάλληλα με σκοπό να χρησιμοποιήσουν αυτό το μέρος της τάξης ως έδρα για τις μετρήσεις τους. Η ελευθερία που δίνεται στους μαθητές σε σχέση με το χρόνο αντανακλάται στην ελευθερία που έχουν και οι ίδιοι ως προς τις προσεγγίσεις που θα έχουν ως προς τη δραστηριότητα.

Αυτό αναδεικνύεται έντονα και στην χρήση των χειραπτικών εργαλείων και ιδιαιτέρως του γωνιομέτρου. Η χρήση ενός νέου εργαλείου κατά την μοντελοποίηση δίνει μία νέα οπτική στην διεξαγωγή της δραστηριότητας και των μετρήσεων. Οι μαθητές έχοντας την ανάγκη να δώσουν με μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια τις μετρήσεις τους, δίνουν μεγαλύτερη έμφαση στην χρήση του νέου εργαλείου. Όπως παρατηρήθηκε από το υλικό, οι ομάδες επέλεξαν να κάνουν 1 – 2 μετρήσεις με το γωνιόμετρο ώστε να βεβαιωθούν για τη χρήση του. Μεγάλο μέρος των ομάδων ζητούσε και τη βοήθεια της εκπαιδευτικού με σκοπό να τελειοποιήσει τις πρακτικές μέτρησης γωνίας ώστε να προβεί σε άλλες μετρήσεις και τέλος στη μοντελοποίηση και τη λύση του προβλήματος.

Εικόνα 5.4 Οι μετρήσεις των μαθητών

Η τάξη στο ΑμΕκΣ

Οι βιωματικές δραστηριότητες κατέχουν μία ξεχωριστή θέση στο ΑμΕκΣ. Όπως έχει αναδειχθεί από την έρευνα και από τις παρατηρήσεις, οι βιωματικές δραστηριότητες είναι ένα αναπόσπαστο κομμάτι της διδασκαλίας το ΑμΕκΣ καθώς όπως προέκυψε από συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών, όπου οι ίδιοι τις χρησιμοποιούν ως εργαλείο κατανόησης των εννοιών από τους μαθητές.

Οι βιωματικές δραστηριότητες ενυπάρχουν στα προγράμματα σπουδών του ΑμΕκΣ και χρησιμοποιούνται επίσης ως εργαλεία ελέγχου του επιπέδου κατανόησης των εννοιών. Τέτοιες δραστηριότητες είναι και αυτές που αναπτύχθηκαν από τους διδάσκονται της 8ης τάξης. Οι εκπαιδευτικοί έχοντας ως απώτερο σκοπό την ανάδειξη παρανοήσεων σχετικά με τη χρήση των τριγωνομετρικών αριθμών, αποφάσισαν να οργανώσουν το μάθημά του έτσι ώστε η βιωματική μάθηση να αναλάβει κεντρικό ρόλο και ο μαθητής μέσω αυτής να οδεύσει προς την εύρεση των ζητουμένων των ερωτημάτων. Η ελευθερία κίνησης που προσφέρθηκε στους μαθητές είχε σημαντική επίδραση τόσο στην ανάπτυξη της δραστηριότητας όσο και στην επίλυση και αξιολόγηση των αποτελεσμάτων. Με τη δυνατότητα να κινούνται στον χώρο και να εξετάζουν διάφορα μοντέλα που αφορούν το πρόβλημα, οι μαθητές εμβαθύνουν στη διαδικασία δημιουργίας μοντέλου και στην κατανόηση του χώρου και του αναμενόμενου αποτελέσματος.

Η διάταξη της τάξης από την εκπαιδευτικό έχει σχεδιαστεί ώστε να δημιουργεί μια πιο ανοιχτή ατμόσφαιρα, προσφέροντας στους μαθητές περισσότερες ευκαιρίες για κίνηση και κατανόηση του περιβάλλοντος.

<u>ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΑμΕκΣ 2</u>

Εκπ: Έχοντας αυτά που προηγήθηκαν υπόψιν θα ήθελα να δείτε το φύλλο εργασίας σας και να περιηγηθείτε στο χώρο κάνοντας τις κατάλληλες μετρήσεις αυτές που θεωρείτε εσείς αναγκαίες.

Μαθ15: Κύριε θα μας βοηθήσετε εσείς με το πρόβλημα;

Εκπ: Όταν λες με το πρόβλημα;

Μαθ15: Τί πρέπει να κάνουμε κλπ.;

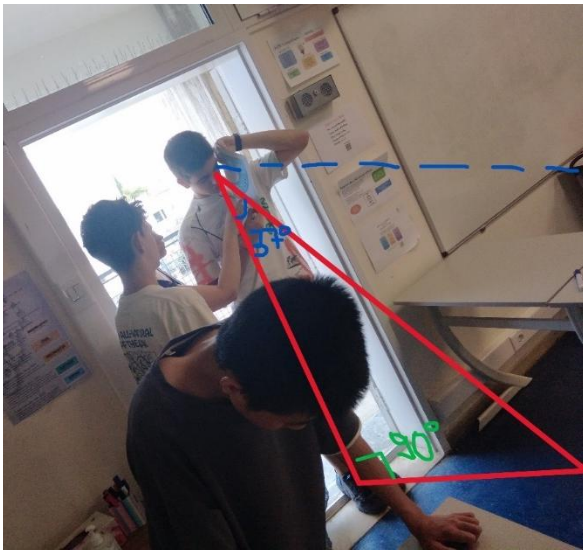
Μαθ13: Αφού αυτό θα το δούμε μόνοι μας. Δεν χρειάζεται να έρθει ο κύριος.

Εκπ: Πολύ σωστά Μαθ13. Και αν χρειαστείτε κάποια βοήθεια με το γωνιόμετρο τότε μόνο θα έρθω για βοήθεια.

Εκπ: Πάμε λοιπόν σηκωθείτε, μετρήστε, περάστε καλά!

Ο διάλογος αυτός επιβεβαιώνει την ελεύθερη κίνηση στο χώρο που δίνει ο εκπαιδευτικός, όπως περιγράφηκε προηγουμένως. Επιπλέον, οι ίδιοι οι μαθητές «αισθάνονται» το χώρο χρησιμοποιώντας το γωνιόμετρο και επιλέγοντας το κατάλληλο σημείο στην οροφή, και κάνουν τις κατάλληλες επιλογές με σκοπό να χρησιμοποιήσουν αυτό το μέρος της τάξης ως βάση μέτρησης. Η ελευθερία που δίνεται στους μαθητές σε σχέση με το χρόνο αντανακλάται επίσης στην ελευθερία που έχουν οι ίδιοι όσον αφορά τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζουν τη δραστηριότητα.

Αυτό αντικατοπτρίζεται έντονα στη χρήση εργαλείων χειρισμού, ιδιαίτερα των μέτρησης. Η χρήση νέων εργαλείων για τη μοντελοποίηση δημιουργεί νέες προοπτικές για την υλοποίηση και τη μέτρηση της δραστηριότητας. Οι μαθητές εστιάζουν στη χρήση νέων εργαλείων επειδή πρέπει να κάνουν πιο ακριβείς μετρήσεις. Όπως παρατηρήθηκε από την τεκμηρίωση, κάθε ομάδα επέλεξε να κάνει πολλαπλές μετρήσεις για να ελέγξει τον τρόπο χρήσης του γωνιόμετρου και να λάβει πιο ακριβή αποτελέσματα. Πολλές ομάδες ζήτησαν επίσης τη βοήθεια του εκπαιδευτικού για άλλες μετρήσεις ή για να βελτιώσουν τον τρόπο μέτρησης των γωνιών, ώστε τελικά να μοντελοποιήσουν και να λύσουν το πρόβλημα.



Εικόνα 5.5 Μέτρηση και κίνηση στο χώρο

5.1.4   Οργάνωση του μαθήματος από τους εκπαιδευτικούς

Η τάξη στο ΕλΕκΣ

Κοινό χαρακτηριστικό των 2 Συστημάτων φαίνεται να είναι η διάταξη και οργάνωση της τάξης. Και στα δύο εκπαιδευτικά συστήματα, οι εκπαιδευτικοί προετοιμάζουν τη διάταξη της αίθουσας ώστε να συμβάλει στην διεξαγωγή μιας ομαδικής δραστηριότητας.
Χαρακτηριστικά, στο ΕΛΕΚΣ η εκπαιδευτικός έχει διατάξει τα θρανία σε τετράγωνο σχηματισμό ενώ όπως καταλαβαίνουμε από το οπτικοακουστικό υλικό αυτές δεν είναι οι συνηθισμένες θέσεις των μαθητών. Όπως προκύπτει από έρευνα, στο ΕΛΕΚΣ βέλτιστη θέση για μάθηση εντός τάξης θεωρείται η διατεταγμένη παράταξη των θρανίων το ένα πίσω από το άλλο σε καθένα από τα οποία να κάθονται το πολύ 2 μαθητές. Αυτό συμβάλει σε μεγαλύτερο βαθμό στην συγκέντρωση των μαθητών προς τον εκπαιδευτικό και προάγει την δασκαλοκεντρική μάθηση που επικρατεί σε αυτό το σύστημα. Επομένως, η διάταξη των μαθητών σε θέσεις με τετράγωνη μορφή εδράνων αποτελεί μία μορφή διδασκαλίας στην οποία φαίνεται να μην είναι συνηθισμένοι.

Μία ιδιαιτερότητα που παρατηρήθηκε κατά τη μελέτη του οπτικοακουστικού υλικού είναι και η αντιμετώπιση του παράγοντα της οργάνωσης της διάταξης από το μαθητικό κοινό. Οι μαθητές έχοντας μία επιπλέον ελευθερία ως προς την κίνησή τους μέσα στην ομάδα και κατ΄ επέκταση μέσα στην τάξη, λαμβάνουν την ιδέα της ελεύθερης χωρίς περιορισμούς κίνησης στο χώρο της τάξης. Αυτή η ιδιαιτερότητα είναι ένας από τους κύριους παράγοντες που κρατά τους μαθητές ενεργούς κατά τη διεξαγωγή της δραστηριότητας. Ως διερευνητικές και βιωματικές οι δραστηριότητες αυτές απαιτούν την ελεύθερη κίνηση στο χώρο με σκοπό την μέτρηση μεγεθών αλλά και αναπαράσταση πραγματικών καταστάσεων που περιγράφονται από το πλαίσιο του προβλήματος. Έχοντας αυτό υπόψιν η εκπαιδευτικός δίνει ελευθερία στους μαθητές έχοντας πρώτα θέσει τους άτυπους κανόνες της τάξης που θα πρέπει να ακολουθούνται από όλους. Και αυτό είναι κάτι που φαίνεται από την κινησιολογία των μαθητών κατά τη διεξαγωγή της μοντελοποίησης της δραστηριότητας.

Ένα ακόμη μέρος της οργάνωσης του μαθήματος είναι η προετοιμασία των εργαλείων που θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές στην ανάλυση και επίλυση της δραστηριότητας. Λόγω της ιδιαίτερης φύσης των εργαλείων για τη συγκεκριμένη δραστηριότητα, πχ. γωνιόμετρο, η εκπαιδευτικός έχει κάνει κατάλληλη προετοιμασία ώστε κάθε ομάδα να έχει το δικό της γωνιόμετρο. Για τα λοιπά εργαλεία αρκεί να είχε δανειστεί μετροταινίες και χαρτιά Α5 από το εργαστήριο του σχολείου.

Η άλλη πτυχή της οργάνωσης του μαθήματος από τον εκπαιδευτικό περιλαμβάνει το πλάνο που καταστρώνει στην αρχή κάθε μαθήματος ο εκπαιδευτικός. Στο ΕλΕκΣ, το οπτικοακουστικό υλικό δεν μας δίνει επαρκείς πληροφορίες ως προς την ανακοίνωση του πλάνου του μαθήματος στην αρχή της διδασκαλίας. Ωστόσο από την διεξαγωγή του μαθήματος φαίνεται πως η εκπαιδευτικός δεν έχει δώσει σαφές πλάνο στους μαθητές πέραν του μέρους της δραστηριότητας για την οποία κάνει μια μικρή άτυπη εισαγωγή. Από έρευνες προκύπτει ότι στο ΕΛΕΚΣ οι εκπαιδευτικοί δίνουν πιο σπάνια ένα πλάνο το οποίο περιλαμβάνει τα μέρη που θα καλύψει η διδασκαλία τους αλλά και τους μαθησιακούς στόχους που στοχεύουν να καλύψουν με τη συγκεκριμένη διδασκαλία.

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΕλΕκΣ 4

Εκπ: Στο φυλλάδιο που σας έχει δοθεί καταγράφονται κάποιες οδηγίες τις οποίες ακολουθώντας και επιλύοντας θα βρείτε το ύψος της τάξης.

Εκπ: Αρχικά θα πρέπει να μετρήσουμε τη γωνία με το γωνιόμετρο όπως μας υποδεικνύει στο φυλλάδιο. Ακολουθώντας τα βήματα θα καταλήξουμε να βρούμε το ύψος της τάξης.

Στο παραπάνω απόσπασμα διαφαίνεται η εκπαιδευτικός με περιληπτική αφήγηση της δραστηριότητας να εξηγεί τον τελικό στόχο αυτής, που είναι η εύρεση του ύψους της αίθουσας. Ωστόσο, αυτός είναι ο στόχος που έχει η δραστηριότητα καθαυτή και όχι ο απώτερος σκοπός της. Η δραστηριότητα όπως καταλαβαίνουμε από το υλικό χρησιμοποιείται ως έναυσμα για μία περαιτέρω συζήτηση η οποία δεν αποτυπώνεται στο υλικό. Αυτή η συζήτηση αφορά την επέκταση που θα μπορούσε να λάβει η δραστηριότητα αλλά και τις εφαρμογές της μαθηματικής έννοιας που εξετάζεται σε άλλους τομείς της καθημερινής ζωής. Παράλληλα μέσω της συζήτησης θα προέκυπταν και άλλες μαθηματικές έννοιες οι οποίες προκύπτουν από το τελευταίο ερώτημα της δραστηριότητας. Αν και η εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να αναπτύξουν το τελευταίο ερώτημα, εντούτοις δεν τέθηκε συζήτηση επ΄ αυτού καθώς δεν έφτασαν όλες οι ομάδες σε αυτό το ερώτημα.

Όσον αφορά τώρα στο τελικό μέρος της διδασκαλίας, το υλικό επίσης δεν δίνει πολλές πληροφορίες καθώς στοχεύει περισσότερο στο επιλυτικό μέρος αυτής. Αυτό προκύπτει και από τη στάση της εκπαιδευτικού που φαίνεται να εστιάζει στην επίλυση περισσότερο από τη συζήτηση που θα επιφέρει η δραστηριότητα καθαυτή.

Η τάξη στο ΑμΕκΣ

Η οργάνωση του μαθήματος στο ΑμΕκΣ είναι ως ένα μέρος διαφορετική. Περιλαμβάνει εργασία του εκπαιδευτικού πριν το μάθημα καθώς έχει αναφερθεί ήδη ότι αναρτάται στην αρχή της σχολικής ημέρας το πλάνο του μαθήματος στην διαδικτυακή πλατφόρμα. Με αφετηρία αυτό, διαμορφώνονται και έτσι τα εργαλεία που θα χρησιμοποιηθούν κατά τη διάρκεια της διδασκαλίας. Οι εκπαιδευτικοί που ερευνήσαμε, είχαν ήδη ανεβάσει το πλάνο του μαθήματος της διαδικτυακή τάξη και ανέμεναν τους μαθητές να φέρουν μαζί τους τα χειραπτικά εργαλεία που τους ζητούνταν εκτός του γωνιομέτρου και της μετροταινίας.

Λόγω της ιδιαίτερης φύσης του εργαλείου του γωνιομέτρου, οι ίδιοι θα πρέπει να εξετάσουν την διαφορά του από ένα οποιοδήποτε μοιρογνωμόνιο και επίσης διενέργησαν προσωπική έρευνα κατά την προετοιμασία των δραστηριοτήτων προετοιμάζοντας τις απαντήσεις σε αναμενόμενες ερωτήσεις του μαθητικού κοινού. Όπως μας εξήγησαν, οι βιωματικές δραστηριότητες βρίσκονται στην καθημερινότητα των μαθητών οπότε η οργάνωση του μαθήματος γίνεται ευκολότερη για τους ίδιους.

Ακολουθεί περιληπτικά μέρος του εισαγωγικού κομματιού που αφορά το πλάνο της διδασκαλίας.

<u>ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΑμΕκΣ3</u>

Εκπ: Σήμερα όπως βλέπετε θα ασχοληθούμε με μια δραστηριότητα στην οποία θα χρειαστεί να κάνετε μετρήσεις τόσο με το χέρι όσο και με μαθηματικά. Θα χρειαστεί να κινηθείτε λίγο μέσα στην τάξη, να επεξεργαστείτε το χώρο και μέσα από καταγραφή δεδομένων και επεξεργασία να προκύψει ένα συμπέρασμα για αυτόν.

[…]

Εκπ: Θα ήθελα να ξεκινήσουμε ωστόσο από μία άσκηση η οποία είναι πιο οικεία για εσάς και την οποία έχουμε ίσως ξαναδεί με διαφορετικό πλαίσιο.

[…]

Εκπ: Στόχος μας είναι να εξάγουμε ένα αποτέλεσμα για το ζητούμενο μας το οποίο όμως θα ταιριάζει τόσο στο μαθηματικό μέρος της δραστηριότητας όσο και στο ρεαλιστικό. Αργότερα θα συζητήσουμε κάποιες ενδεχόμενες επεκτάσεις του προβλήματος, θα μου πείτε τις ιδέες σας και θα παρακολουθήσουμε και άλλες δραστηριότητες που στεγάζονται υπό την ίδια λογική επίλυσης.

Σε αυτό το απόσπασμα ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιώντας πλήρως κατανοητές οδηγίες, εξηγεί στους μαθητές την πορεία της δραστηριότητας αλλά και το πλάνο που θέλει να ακολουθήσει το τμήμα για την επίλυση και επέκταση αυτής. Η εισαγωγή των διδασκαλιών συνήθως περιλαμβάνει μία αντιπροσωπευτική άσκηση για το θέμα που συζητείται ώστε οι μαθητές να συντονιστούν με την θεματική που θα καλυφθεί αλλά και ως μία άσκηση που όταν λυθεί σωστά θα δώσει ένα συναισθηματικό έναυσμα στους μαθητές για να ξεκινήσουν.

Λόγω της ύπαρξης 3 τμημάτων από το ΑΜΕΚΣ προς μελέτη, η εισαγωγή κάθε εκπαιδευτικού στη δραστηριότητα αλλάζει. Ωστόσο όλες οι εισαγωγές χρησιμοποιούν ένα κύριο μοτίβο που είναι γενικώς αποδεκτό από τις διδακτικές νόρμες που έχουν τεθεί για τους εκπαιδευτικούς. Επομένως σε ένα άλλο τμήμα του σχολείου σημαντικό είναι να αναφερθεί ότι κατά την εισαγωγή ρεαλιστικών και αυθεντικών προβλημάτων και ασκήσεων με ορθογώνια τρίγωνα οι εκπαιδευτικοί υπενθυμίζουν ορισμούς και κυρίως τους όρους γωνία βύθισης (angle of depression) και γωνία ανύψωσης (angle of elevation). Αυτοί οι όροι είναι πολύ χρήσιμοι καθώς οι εκπαιδευτικοί δεν δίνουν πάντα στις δραστηριότητές τους τη γωνία που είναι άμεσα χρήσιμη στους μαθητές αλλά δίνουν γωνίες από τις οποίες μπορούν να προκύψουν τα άμεσα χρήσιμα δεδομένα για την επίλυση. Συνεχίζοντας λοιπόν δίνονται αντιπροσωπευτικές ασκήσεις που υποστηρίζουν και υπενθυμίζουν τους όρους που αναφέρονται παραπάνω.

<u>ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΑμΕκΣ 4</u>

Εκπ: Τη δραστηριότητα αυτή την έφτιαξα έτσι γιατί ήθελα οι μαθητές να ξεφύγουν από το περιβάλλον χαρτί και μολύβι που φαίνεται στους μαθητές αυστηρό. Ήθελα να μπορούν να αντιστοιχήσουν τις έννοιες από το χαρτί και το μολύβι σε κάτι που βλέπουν μπροστά τους σε κάτι δηλαδή απτό. Και νομίζω ότι εκεί φαίνεται και η πραγματική μάθηση!

Εκπ: Θεωρώ ότι σε μία τάξη ιδιαίτερα Μαθηματικών πρέπει να βλέπουμε και πράγματα που θα τα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές στην καθημερινή τους ζωή και όχι μόνο για θεωρήματα και τύπους που δεν είναι ουσιαστικά applicable (απτά). Έτσι λοιπόν θεωρώ ότι αυτά τα προβλήματα μπορούν αν φέρουν τη γνώση από το βιβλίο στην πραγματικότητα, οι μαθητές καταλαβαίνουν το λόγο που τα μαθαίνουν και πώς εφαρμόζονται αυτά στην ζωή μας γενικά και εκτιμούν ενδεχομένως λίγο παραπάνω την αξία των μαθηματικών.

Το παραπάνω απόσπασμα προκύπτει από τις συνεντεύξεις των εκπαιδευτικών του ΑΜΕΚΣ όταν αυτοί ερωτήθηκαν τους λόγους και τους τρόπους διαμόρφωσης των βιωματικών δραστηριοτήτων κατά τη διάρκεια των μαθημάτων τους. Οι ίδιοι επίσης απάντησαν ότι οι πηγές από τις οποίες είτε δανείζονται είτε διαμορφώνουν τις δραστηριότητες είναι πάρα πολλές. Κατά κύριο λόγο ακολουθούν το αμερικάνικο πρόγραμμα σπουδών το οποίο αναφέρει είδα δραστηριοτήτων που θα ήταν χρήσιμο για τους μαθητές να γίνουν. Αλλά, ωστόσο, δεν παραλείπουν και εξωτερικές πηγές όπως οι παγκόσμιος ιστός, σχολικά εγχειρίδια από διάφορες πολιτείες των ΗΠΑ αλλά και Ελληνικά σχολικά βοηθήματα.

5.1.5 Τρόποι μοντελοποίησης του προβλήματος

Η τάξη στο ΕλΕκΣ

Οι τρόποι μοντελοποίησης του προβλήματος από τους μαθητές διαφέρουν εμφανώς μεταξύ των συστημάτων. Πρώτα θα αναλύσουμε τις μεθόδους που ακολουθούν οι μαθητές στο ΕλΕκΣ.

Αρχικό βήμα της μοντελοποίησης είναι ο ορισμός ενός σημείου αναφοράς γύρω από το οποίο θα γίνονται οι απαραίτητες μετρήσεις που αφορούν την δραστηριότητα. Οι μαθητές εμφανώς ξαφνιασμένοι και μπερδεμένοι, όπως διαφαίνεται από το οπτικοακουστικό υλικό, προσπαθούν να κατανοήσουν τη χρήση του γωνιόμετρου και να ορίσουν το σημείο αναφοράς με σκοπό την εκκίνηση της μοντελοποίησης. Οι περισσότερες ομάδες συγκεντρώνονται γύρω από τη διδάσκουσα η οποία εξηγεί ενδελεχώς τη χρήση του συγκεκριμένου εργαλείου. Μία ομάδα διαφαίνεται να ξεκινά χωρίς βοήθεια τις μετρήσεις. Αν και μετρούν την απόσταση του «κεντρικού» ατόμου από την γωνία της τάξεως, προχωρούν στην μέτρηση της γωνίας από ένα άλλο τυχαίο σημείο της οροφής. Γρήγορα αντιλαμβάνονται ότι τα δύο σημεία – μέτρησης γωνίας και αποστάσεων – θα πρέπει να ταυτίζονται ώστε να προκύψει το τριγωνικό σχήμα κατά την αποτύπωση της δραστηριότητας στο χαρτί. Οι δύο μαθητές που λειτουργούν ως βοηθοί μετρήσεων απορρίπτουν τις μετρήσεις που έχουν κάνει από τη γωνία της τάξης και προχωρούν σε νέες μετρήσεις από το σημείο που μετρά τη γωνία το «κεντρικό άτομο.

Αυτή σαν τεχνική μετρήσεων παρατηρείται από πολλές ομάδες αλλά γρήγορα απορρίπτεται καθώς η διδάσκουσα βοηθώντας τους μαθητές να κατανοήσουν τη μέτρηση της γωνίας, τους υποκινεί να μετρήσουν από την γωνία τη οροφής.

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΕλΕκΣ 5

Μαθ6: Κυρία δεν καταλαβαίνω μου βγαίνει λάθος η γωνία!
Εκπ: Ωραία έλα εδώ! Κάτσε σε αυτή τη θέση και κοίτα πάνω στη γωνία της τάξης. Το πρόσωπό σου παίρνει κλίση γιατί μετράμε με το ένα μάτι και ανάλογα πρέπει να στρέφουμε το πρόσωπό μας. (Δείχνει στο μαθητή πώς να στέκεται και πώς να κοιτά σωστά)
Εκπ: Μετά τοποθετούμε το γωνιόμετρο κοντά στο μάτι και μετράμε. Για προσπαθήστε!

Μέσω της περιγραφής αυτής από την εκπαιδευτικό, οι μαθητές καταλαβαίνουν καλύτερα πώς χρησιμοποιείται το γωνιόμετρο και αποφασίζουν να αλλάξουν το τυχαίο σημείο της οροφής και να επιλέξουν τη γωνία της ώστε να δημιουργηθεί τόσο νοητικά όσο και αναπαραστασιακά, αργότερα, το γραφικό δόμημα πάνω στο οποίο θα βασίσουν την επίλυση.

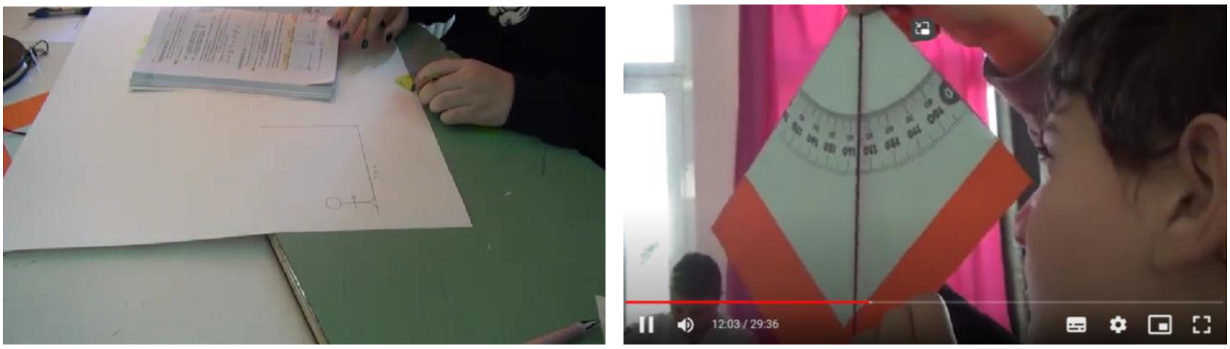
Επόμενο βήμα στις μετρήσεις ήταν η μέτρηση του ύψους των μαθητών και η διαλογή αυτών που μοντελοποιούν κατάλληλα το πρόβλημα. Οι περισσότερες ομάδες φάνηκε να μετρούν τα ύψη των «κεντρικών» ατόμων και να λαμβάνουν αυτά υπόψιν στις διαδικασίες μοντελοποίησης. Ωστόσο σε μία ομάδα όπου η εκπαιδευτικός επέβλεπε τις μετρήσεις, επισήμανε με μεγαλύτερο τόνο ότι τελικώς η μέτρηση που θα χρησιμοποιήσουν για το ύψος του «κεντρικού» ατόμου θα είναι αυτή που ξεκινά από τα πόδια του και καταλήγει στο ύψος των οφθαλμών. Κάποιοι μαθητές από τις ομάδες φαίνεται να αναρωτιόνται γιατί κάποιος να χρησιμοποιήσει το ύψος των ματιών στο μοντέλο του αλλά πολύ γρήγορα αντιλαμβάνονται την ιδιαιτερότητα των μετρήσεων και σπεύδουν να τις επαναλάβουν χρησιμοποιώντας τα νέα δεδομένα.

Από τις παρατηρήσεις και τους διαλόγους που συλλέχθηκαν διαφαίνεται ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει πλήρως το πραγματικό μοντέλο και αυτό φαίνεται να έχει αντίκτυπο στην επίλυση και στα αποτελέσματα που λαμβάνουν. Αν και το μεγαλύτερο μέρος των ομάδων χρησιμοποιεί το σχολικό εγχειρίδιο κατά την αποτύπωση του προβλήματος – το οποίο όπως έχει αναφερθεί περιέχει μία αντίστοιχη δραστηριότητα – φαίνεται πώς και αυτή η δραστηριότητα δεν έχει κατανοηθεί πλήρως.

Κατ΄ επέκταση παρατηρούνται δύο κρίσιμα σημεία στην μοντελοποίηση της δραστηριότητας τόσο κατά την μεταφορά από τον Πραγματικό στον Μαθηματικό Κόσμο όσο και κατά την ερμηνεία αποτελεσμάτων από το Μαθηματικό στο Πραγματικό Μοντέλο. Στο πρώτο κρίσιμο σημείο, οι μαθητές με την βοήθεια της εκπαιδευτικού αποκτούν τις μετρήσεις που τους είναι απαραίτητες για τη δημιουργία του μοντέλου. Όταν το συζητούν μόνοι τους, στο πλαίσιο της ομάδας τους, αποφασίζουν να ακολουθήσουν το γενικό κανόνα : “Λαμβάνω όλο το ύψος του «κεντρικού» ατόμου”. Μόνο όταν εισέρχεται η καθηγήτρια στον διάλογο φαίνεται να κατανοούν ότι θέλουν συγκεκριμένο ύψος μέχρι το επίπεδο των ματιών. Εδώ, κατά συνέπεια, φαίνεται να υπάρχει σύγχυση των μαθητών καθώς πηγαίνουν από την Νοητική Αναπαράσταση της Κατάστασης (2) προς το Πραγματικό Μοντέλο (3) όπως αναφέρονται τα βήματα από τον Κύκλο Μοντελοποίησης.

Στο δεύτερο κρίσιμο σημείο, οι μαθητές έχουν κάνει τις μετρήσεις και έχουν ήδη περάσει από το στάδιο της μοντελοποίησης του προβλήματος στο στάδιο της επίλυσης και ερμηνείας των αποτελεσμάτων. Κατά την ερμηνεία των αποτελεσμάτων παρατηρούν ότι έχουν λάβει ένα αποτέλεσμα για το ύψος της τάξης το οποίο δεν συνάδει με τα δεδομένα που έχουν από τις αισθήσεις τους. Οι μαθητές μετά συζήτησαν το αποτέλεσμα και προσπάθησαν να δικαιολογήσουν το εύρημα τους κάνοντας αναγωγή στις 4 γωνίες της τάξης: «*Βρήκαμε 64 μοίρες από εκεί που μετρήσαμε και αν το κάνεις επί 4 τότε θα βρεις …*» «*Κοίτα μετρήσαμε από εκεί και βρήκαμε 64 μοίρες και μετά* *μετρήσαμε από εδώ και βρήκαμε 66 μοίρες. Οπότε από όπου και να μετρήσεις θα βρεις το ίδιο. Άρα είναι όλες ίδιες και το βρήκαμε σωστά…».* Το επιχείρημα που θέτουν οι μαθητές εδώ δεν αφορά άμεσα το ύψος που βρήκαν αλλά την μέτρηση των γωνιών. Θεωρούν ότι εφόσον οι μετρήσεις των γωνιών είναι παρόμοιες από 2 γωνίες της οροφής και άρα θα βρουν κάτι παρόμοιο σε ύψος τότε θα ισχύει για όλες τις γωνίες της οροφής και άρα αυτό που βρήκαν είναι αληθές.

Ωστόσο, αυτές οι αναγωγές δεν διαψεύδονται ποτέ από την διδάσκουσα διότι η ομάδα δεν ζητά επαλήθευση από αυτή ούτε συζητά τα ευρήματά της με άλλη ομάδα. Αργότερα, βέβαια, όταν η διδάσκουσα ελέγξει την ομάδα θα εντοπίσει την παρανόηση των μαθητών και θα τους καθοδηγήσει θυμίζοντας την διαδικασία που ακολούθησαν για την μοντελοποίηση και τονίζοντας από ποιο σημείο ορίσθηκε η γωνία προς την οροφή. Αυτό οδηγεί τους μαθητές να κατανοήσουν το λάθος στην μοντελοποίηση και να επαναλάβουν την επίλυση.



Εικόνα 5.6. Μοντελοποίηση και γραφική αναπαράσταση του πραγματικού προβλήματος

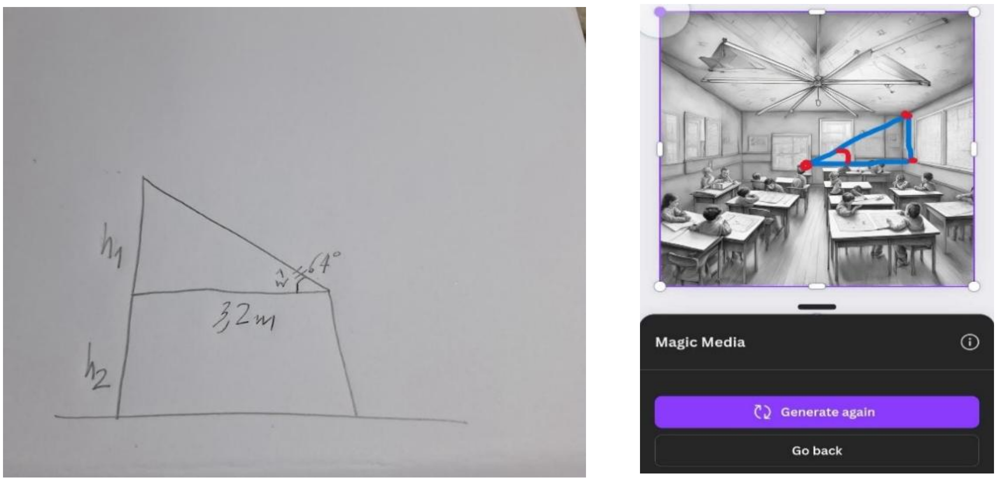
Η τάξη στο ΑμΕκΣ

Συνεχίζουμε με την ανάλυση των τρόπων μοντελοποίησης των δραστηριοτήτων από τους μαθητές του ΑΜΕΚΣ. Ως πρώτο αυτό βήμα, οι μαθητές καλούνται να εξοικειωθούν με τη χρήση του γωνιομέτρου. Οι μαθητές αφού άτυπα τοποθετούν το κεντρικό πρόσωπο στο σημείο της τάξης που θέλουν, αρχίζουν να στρέφουν το γωνιόμετρο κατάλληλα ώστε να πετύχουν την κατεύθυνση που θα τους δώσει τη γωνία βύθισης. Η εκπαιδευτικός αφού τους δίνει αρκετό χρόνο να το επεξεργαστούν, εμβόλιμα προσφέρει βοήθεια χωρίς να δίνει ακριβώς τη λύση. Με κατάλληλες ερωτήσεις κινεί τη περιέργειά τους και τους προτρέπει να χρησιμοποιήσουν όλες τις κατευθύνσεις του γωνιομέτρου μέχρι να λάβουν τα κατάλληλα δεδομένα τους. Γνωρίζει ότι μπορεί να υπάρχουν παρανοήσεις και ότι κάποια ομάδα θα λάβει λανθασμένα τη γωνία αλλά δεν τους αποτρέπει από την συνέχεια της μοντελοποίησης τους. Όλες οι επιλύσεις θα αναλυθούν στο τέλος και θα διορθωθούν με σκοπό την πλήρη κατανόηση της δραστηριότητας. Επόμενο βήμα μετά την γωνία είναι η μέτρηση της απόστασης του κεντρικού ατόμου από της γωνία του δαπέδου. Χρησιμοποιώντας την μετροταινία οι μαθητές εύκολα διεξάγουν αυτή την μέτρηση.

Έχοντας, επομένως, τα δεδομένα τους οι μαθητές ξεκινούν την μοντελοποίηση. Καλούνται από τη διδάσκουσα να σχεδιάσουν το μοντέλο στο φύλλο εργασίας. Η μοντελοποίηση που αποδίδει κάθε ομάδα συνήθως διαφέρει διότι κάποιες ομάδες επιδίδονται στη δημιουργία του ρεαλιστικού προβλήματος ενώ άλλες σχεδιάζουν το καθαρό γεωμετρικό μοντέλο πάνω στο οποίο βασίζεται η δραστηριότητα. Πιο συγκεκριμένα μία ομάδα, στην οποία περιλαμβανόταν μία μαθήτρια η οποία είναι πολύ καλή με την χρήση των υπολογιστών, αποφάσισε να δημιουργήσει την οπτική αναπαράσταση της τάξης με τη βοήθεια της τεχνητής νοημοσύνης (AI – Artificial Intelligence). Η χρήση της AI τεχνολογίας είναι μία πρακτική όπου ολοένα και χρησιμοποιείται περισσότερο στην καθημερινότητα. Έτσι και στην σχολική τάξη επιτρέπεται η χρήση της υπό την επίβλεψη του εκπαιδευτικού. Πιο συγκεκριμένα η εκπαιδευτικός ανέφερε ότι επιβλέπει τις ομάδες που της ζητούν άδεια για χρήση AI τεχνολογίας και ως βασικό κανόνα θέτει ότι αυτή χρησιμοποιείται αποκλειστικά για εύρεση πληροφοριών που βοηθούν την επίλυση και όχι για εύρεση της λύσης αμέσως. Αντιθέτως, σε μία άλλη ομάδα στην οποία οι συμμετέχοντες δεν ασχολούνται πολύ με το σχέδιο αποφάσισαν να ζωγραφίσουν το γεωμετρικό μοντέλο πάνω στο οποίο θα στήριζαν την επίλυσή τους στην οποία και επιδόθηκαν αμέσως μετά.

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΑμΕκΣ 5

Μαθ16: Παιδιά τώρα πρέπει να κάνουμε το σχήμα.
Μαθ18: Παιδιά να το φτιάξει η Μαθ17 στο Canva AI; Θα δείχνει πολύ ωραίο.
(Canva AI – διαδικτυακός ιστότοπος παραγωγής εικόνων με τη χρήση της τεχνητής νοημοσύνης)
Μαθ17: Ναι αμέ ότι θέλετε. Δεν έχω κανένα θέμα!
Εκπ: Παιδιά πώς είμαστε εδώ;
Μαθ15: Όλα καλά! Μόνο που ήθελα να ρωτήσω … το σχήμα πρέπει να έχει πολλές λεπτομέρειες ή θέλετε να είναι απλό;
Εκπ: Παιδιά μου όπως θεωρείτε εσείς ότι πρέπει να γίνει το σχήμα. Εγώ το αφήνω πάνω σας.
Μαθ17: Κυρία μπορούμε να το κάνουμε με AI;
Εκπ: Καλό θα ήταν να το ζωγραφήσετε!
Μαθ15: Κυρία θα δείχνει πιο ωραίο όμως σαν αληθινή ζωγραφιά.
Εκπ: Αν θέλετε τόσο πολύ εντάξει. Αλλά θα σας επιβλέπω για να μην ψάξετε τίποτα άλλο!
Μαθ17: Όχι κυρία Μόνο αυτό!
Εκπ: Εντάξει είναι πολύ ωραίο αλλά θα προτιμούσα το δικό σας. Και θα πρέπει να δείχνετε και το μοντέλο. Ναι;
Μαθ17: Εντάξει κυρία. Σας ευχαριστούμε!



Εικόνα 5.7 Αναπαραστάσεις μοντέλων από διαφορετικές ομάδες

Μία ιδιαίτερη προσέγγιση στην μοντελοποίηση της δραστηριότητας ακολούθησε μια εκ των ομάδων του τρίτου κατά σειρά τμήματος του Αμερικανικού σχολείου. Κατά τη μοντελοποίηση της δραστηριότητας εντοπίστηκε μία βασική διαφοροποίηση από τις δραστηριότητες που δόθηκαν στα άλλα τμήματα. Στο μοντέλο που έπρεπε να δημιουργήσουν οι ομάδες το ύψος του δομήματός τους ήταν αυτό που θα έβρισκαν από τις μετρήσεις τους χωρίς την προσθήκη και άλλων μετρήσεων. Αυτό αποτέλεσε ανασταλτικό παράγοντα για την εύρεση του ύψους σε ορισμένες ομάδες οι οποίες έλαβαν ως πρόβλημα – οδηγό τη δραστηριότητα που τους παρουσιάστηκε κατά την εισαγωγή της διδασκαλίας. Χαρακτηριστικά καταγράφηκε ο εξής διάλογος.

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΑμΕκΣ 6

Μαθ8: Βρήκα τη γωνία.
Μαθ7: Εγώ βρίσκω το μήκος της βάσης.
Μαθ9: Κάνω τι πράξεις και βρίσκω 34cm ύψος του πύργου μας.
Μαθ7: Ωραία και πρέπει να βάλουμε και το ύψος που μένει.
Μαθ8: Ποιο ύψος;
Μαθ7: Κάτι δεν μένει; Αφού και στην άσκηση στο τέλος έκανε μία πρόσθεση
Μαθ9: Και εδώ τί μένει;
Μαθ8: Ρε παιδιά δεν μένει τίποτα. Κοίτα. Αφού μετρήσαμε ουσιαστικά από το δάπεδο μέχρι το τέλος του πύργου. Τον καλύψαμε όλο!
Μαθ7: Και η πρόσθεση;
Μαθ9: Ααα εδώ δεν χρειάζεται πρόσθεση αφού το μετρήσαμε όλο με τη γωνία.
Μαθ7: Άρα αυτό ήταν;
Μαθ8: Ναι!
Μαθ7: Και η άσκηση του πίνακα γιατί ήταν διαφορετική;
Μαθ9: Έτσι για να δούμε διάφορες ασκήσεις.
Μαθ8: Μην μας το δώσει έτοιμο. Αφού τον ξέρεις τώρα!
Μαθ7: Ναι ισχύει έχετε δίκιο!

Όπως διαφαίνεται από τους παραπάνω διαλόγους κάποιες ομάδες επηρεάστηκαν από την δραστηριότητα που παρουσίασε στην εισαγωγή της διδασκαλίας ο εκπαιδευτικός. Θεωρώντας ότι υπάρχει ένα επιπλέον ύψος που πρέπει να προστεθεί στο αποτέλεσμα που έβρισκαν από την επίλυσή τους, στο τελικό στάδιο της απάντησης συζητούσαν πιο μέγεθος θα ήταν. Συνεπώς, εδώ φαίνεται να υπάρχει ένας παράγοντας που θα αναστείλει την μετάβαση από το Μαθηματικό Αποτέλεσμα(5) προς το Πραγματικό Αποτέλεσμα (6) όπως αναφέρονται τα βήματα από τον Κύκλο Μοντελοποίησης. Από τις συζητήσεις που καταγράφηκαν, τονίσθηκε ότι οι ομάδες είχαν τις γνωστικές ικανότητες αλλά και την κατανόηση του πλαισίου ώστε να επιλύουν εντός αυτών τις απορίες τους. Όπως είναι αναμενόμενο οι μαθητές αναζητούσαν την απάντηση στην απορία που είχαν για την προσθήκη περαιτέρω ύψους. Ωστόσο ενώ σύνηθες είναι αυτές οι απορίες να επιλύονται από τον εκάστοτε διδάσκοντα, παρατηρήθηκε ότι η νόρμα της τάξης περιλάμβανε την συζήτηση αποτελεσμάτων και αποριών πρώτα μεταξύ των ομάδων και έπειτα με τον εκπαιδευτικό. Έτσι οι διαφορές στη μοντελοποίηση και επεξεργασία των προβλημάτων μεταξύ των μαθητών των 2 Συστημάτων φαίνονται να είναι πολύ περισσότερες από τις ομοιότητες.

5.1.6 Χρήση διδακτικών και ψηφιακών εργαλείων

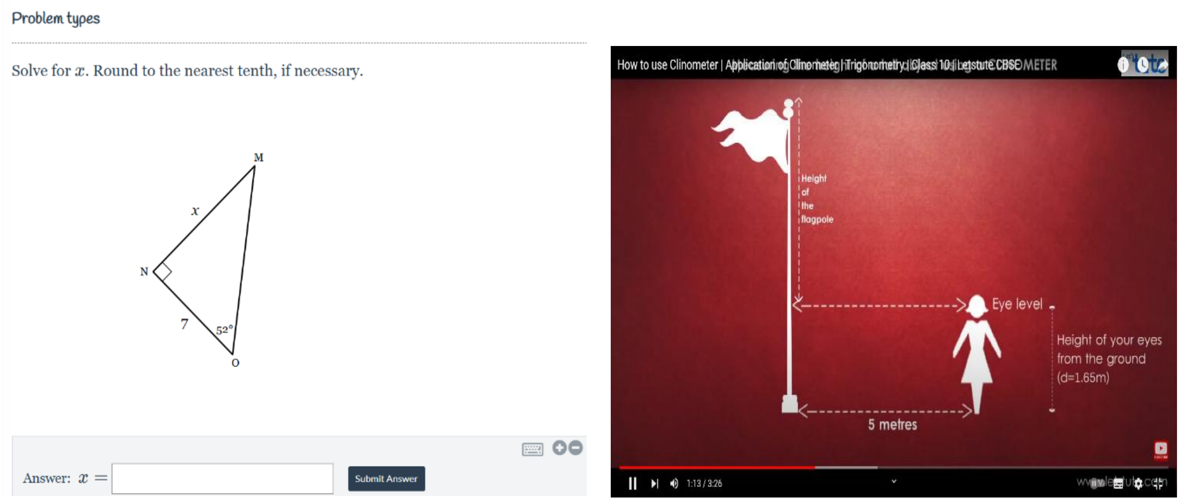
Η τάξη στο ΑμΕκΣ

Οι μαθητές του ΑμΕκΣ είναι εξοικειωμένοι με την διεξαγωγή βιωματικών δραστηριοτήτων καθώς αυτές αποτελούν μέρος της μαθησιακής τους καθημερινότητας. Επομένως, είναι προετοιμασμένοι όταν ενημερώνονται και απαιτείται να έχουν τα κατάλληλα διδακτικά εργαλεία. Σε αυτά για το μάθημα των Μαθηματικών περιλαμβάνεται ο χάρακας, το μοιρογνωμόνιο, ο υπολογιστής τσέπης, ο διαβήτης και ο προσωπικός υπολογιστής. Έτσι, και για τις δραστηριότητες που αναπτύχθηκαν οι μαθητές γνώριζαν ότι θα πρέπει να έχουν τα δικά τους προσωπικά εργαλεία. Ένας από τους κανόνες που ισχύει στο ΑΜΕΚΣ είναι ο κάθε μαθητής οφείλει να έχει τα δικά του διδακτικά εργαλεία αλλιώς θα σταλεί αυτοματοποιημένο μήνυμα στην οικογένεια του μαθητή όπου ενημερώνονται πότε εκείνος δεν έχει μαζί του τα απαραίτητα για την διεξαγωγή του μαθήματος εργαλεία. Ο εκπαιδευτικός έχει τον πλήρη έλεγχο αυτών των μηνυμάτων και τα αποστέλλει όταν αυτό είναι αναγκαίο.

Επομένως οι μαθητές στην 8η τάξη κατείχαν τα διδακτικά εργαλεία όπως όφειλαν και τα μόνα εργαλεία όπου έπρεπε να φέρει ο καθηγητής ήταν το φύλλο εργασίας και οι μετροταινίες. Η ιδιαιτερότητα των δραστηριοτήτων ήταν ότι έκαναν χρήση ενός νέου εργαλείου (γωνιόμετρο) το οποίο προσκόμισε ο εκπαιδευτικός σε κάθε ομάδα. Λόγω αυτού κατά την εισαγωγή των δραστηριοτήτων στα πρώτα 20 λεπτά οι εκπαιδευτικοί ανέλαβαν το ρόλο του αναλυτή και έδωσαν οδηγίες στους μαθητές για τη χρήση του γωνιομέτρου. Ακολούθησε και μία επίδειξη μέτρησης γωνιών από τους ίδιους τους εκπαιδευτικούς και έπειτα οι μαθητές είχαν λίγο χρόνο 5 λεπτά πριν ξεκινήσουν τη δραστηριότητα ώστε να γνωρίσουν και να κατανοήσουν τη χρήση του εργαλείου. Με την αρχή της μοντελοποίησης οι μαθητές έκαναν χρήση όλων των εργαλείων που κατείχαν. Αρχικά με το γωνιόμετρο και τη μετροταινία, μέτρησαν τις διαστάσεις της τάξης που θα τους χρειάζονταν, το ύψος τους και τη γωνία ανάκλασης όπως τους υπέδειξε ο καθηγητής. Όταν σε μετέπειτα στάδια οι μαθητές ήθελαν να εξακριβώσουν τις μετρήσεις τους ή να δημιουργήσουν νέα μοντέλα επίλυσης χρησιμοποιούσαν τα ίδια διδακτικά εργαλεία.

Στη χρήση του γωνιομέτρου δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή από τους εκπαιδευτικούς καθώς είναι ένα νέο εργαλείο μέτρησης που οι μαθητές δεν ήταν εξοικειωμένοι. Δόθηκε, λοιπόν, αρκετός χρόνος στην εισαγωγή κάθε διδασκαλίας στα 3 τμήματα για την εξήγηση του σκοπού και της χρήση του εργαλείου αυτού. Ένας εκπαιδευτικός έκανε αναδρομή στο παρελθόν και εξήγηση την προέλευση του γωνιομέτρου από αρχαιοτάτων χρόνων και τη διαμόρφωση του εργαλείου ανά τους αιώνες. Ένας άλλος εκπαιδευτικός έκανε αναγωγή της χρήσης του γωνιομέτρου σε έννοιες της τριγωνομετρίας που ήταν ήδη γνωστές στους μαθητές – το γωνιόμετρο είναι ιδανικό εργαλείο για μέτρηση γωνίας ανύψωσης. Και η τρίτη εκπαιδευτικός έκανε έναν συνδυασμό των δύο εισαγωγών αναφέροντας λίγες πληροφορίες από το κάθε μέρος. Και οι 3 εκπαιδευτικοί κατέληξαν στην αναλυτική επίδειξη μετρήσεων με τη βοήθεια του γωνιομέτρου ώστε να δώσουν στους μαθητές μία βάση κατανόησης αυτού και το έναυσμα για χρήση του.

Βέβαια τα διδακτικά δεν ήταν τα μόνα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν κατά την πρόοδο των δραστηριοτήτων. Όπως έχει αναφερθεί η τεχνολογία διαδραματίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην εκπαιδευτική καθημερινότητα των μαθητών του ΑμΕκΣ. Αρχικά, οι καθηγητές επιμένουν στην χρήση προσωπικών υπολογιστών κατά την διάρκεια των μαθημάτων και υποστηρίζουν την προσωπική εργασία των μαθητών ακόμα και εντός τάξης. Χαρακτηριστικό γνώρισμα των μαθημάτων Μαθηματικών είναι η ανάθεση εργασιών εντός τάξης μέσω πλατφόρμας ασκήσεων (Delta Math) στην οποία οι μαθητές μπορούν να βρουν μία πληθώρα εργασιών. Σκοπός αυτής είναι η προσωπική ή ομαδική εργασία των μαθητών ώστε να εντοπίσουν αδυναμίες ανά θεματική ενότητα και να εργαστούν πάνω σε αυτές. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να μείνει εντελώς αποστασιοποιημένος από την εργασία αν το επιθυμεί καθώς ότι απορίες προκύψουν μπορούν εύκολα να λυθούν με βίντεο που συνοδεύει την άσκηση και εξηγεί αναλυτικά παρόμοιας φιλοσοφίας ασκήσεις. Εν τέλει ο μαθητής έχει τη δυνατότητα να δει ολοκληρωμένη την επίλυση της άσκησης ανεξαρτήτως της απάντησης που έχει δει ο ίδιος.



Εικόνα 5.8. Άσκηση τριγωνομετρίας από το Delta Math και εκπαιδευτικό βίντεο επέκτασης

Ένα ακόμη μέρος του μαθήματος όπου οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν την ψηφιακή τεχνολογία είναι κατά την επέκταση και συζήτηση μετά το πέρας της δραστηριότητας. Πιο συγκεκριμένα, όταν ο εκπαιδευτικός αναλαμβάνει το ρόλο της επεξήγησης των λειτουργιών και ρυθμίσεων των υπολογιστών τσέπης (calculators) που χρησιμοποιήσαν οι ομάδες στην επίλυση, προβάλει ένα διαδικτυακό calculator στον διαδραστικό πίνακα όπου και καλεί τους μαθητές να εντοπίσουν τις διαφορές με τα δικά τους. Συνεχίζει με πιθανά λάθη που θα μπορούσαν να γίνουν κατά την επίλυση που αφορούν κυρίως τους υπολογιστές τσέπης και γενικεύει με λάθη που πιθανόν να έγινα και κατά την μοντελοποίηση. Με σκοπό να υποστηρίξει τις διαφορές των επιλύσεων των ομάδων, χρησιμοποιεί το διαδραστικό πίνακα για να παρουσιάσει βίντεο που έχουν να κάνουν με τη παρούσα δραστηριότητα και τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν.

Οι μαθητές παρακολουθούν τα βίντεο που παρουσιάζει ο εκπαιδευτικός και ρωτούν απορίες που προκύπτουν για τις δραστηριότητες που εμφανίζονται ή για τις μεθόδους επίλυσης. Με την προβολή εκπαιδευτικών βίντεο και την προτροπή των μαθητών να αναζητούν δικές τους πηγές από όπου μπορούν να αναχθούν σε δικά τους συμπεράσματα τα οποία συζητούνται στην τάξη, προάγεται το αίσθημα της αυτοβελτίωσης και η αρχή του «*Αναζητώ – Συζητώ – Ελέγχω – Επαναλαμβάνω*». Αυτή η αρχή χρησιμοποιείται ευρέως στα θετικά και θεωρητικά μαθήματα στο αμερικάνικο σύστημα και προάγεται από τους εκπαιδευτικούς όλων των βαθμίδων από τις νεαρές ηλικίες έως και την αποφοίτηση. Οι μαθητές έτσι αποκτούν τον έλεγχο και το φιλτράρισμα των δεδομένων τους, τον συνδυασμό εννοιών με σκοπό την επίτευξη του στόχου τους είτε αυτός αφορά τα μαθήματα του σχολείου είτε εξωσχολικές δραστηριότητες και την αποβολή του εκπαιδευτικού ως τη μοναδική πηγή μάθησης. Διαφαίνεται ότι το αμερικάνικο σύστημα μάθησης έχει ξεφύγει από το τυπικό δασκαλοκεντρικό σύστημα διδασκαλίας και έχει περάσει σε ένα μαθητοκεντρικό σύστημα όπου όλα τα μέσα είναι διαθέσιμα ως προς τη διδασκαλία των μαθητών.

Το μάθημα ολοκληρώνεται με συζήτηση των βίντεο και διόρθωση από τους μαθητές των πιθανών παρανοήσεων και λανθασμένων λεπτομερειών. Ο εκπαιδευτικός πάντα δίνει λίγο χρόνο στο τέλος της διδακτικής ώρας για πιθανές ερωτήσεις και παρατηρήσεις.

Η τάξη στο ΕλΕκΣ

Από την άλλη πλευρά οι μαθητές στο ΕΛΕΚΣ λόγω μη εξοικείωσης με βιωματικές δραστηριότητες παρατηρήθηκε ότι δεν έφεραν όλοι τα κατάλληλα εργαλεία για την διεξαγωγή της δραστηριότητας. Όπως φάνηκε από το οπτικοακουστικό υλικό κάποιοι μαθητές ήδη ζητούσαν χάρακα από άλλα άτομα της ίδιας ή διαφορετικής ομάδας. Ωστόσο, στην πληθώρα τους τα εργαλεία που χρησιμοποιήθηκαν δόθηκαν από την εκπαιδευτικό. Μέσα σε αυτά περιλαμβανόταν μετροταινία αλλά και το γωνιόμετρο που κατείχε κεντρική θέση στην μοντελοποίηση του προβλήματος. Οι μαθητές όπως ήταν αναμενόμενο δεν γνώριζαν την ακριβή χρήση του γωνιομέτρου. Έτσι η εκπαιδευτικός αφιέρωσε λίγα λεπτά στην επίδειξη και χρήση του εργαλείου το οποίο δεν ήταν αρκετό για την πλήρη κατανόηση αυτού. Οι μαθητές φάνηκαν να είχαν απορίες σχετικά με τη χρήση του κάτι το οποίο είναι αναμενόμενο. Ωστόσο, ακόμη και μετά την παρέμβαση της εκπαιδευτικού, φάνηκε κάποιοι να το χρησιμοποιούν λανθασμένα. Χρειάστηκε η άμεση επέμβαση της εκπαιδευτικού σε κάποιες ομάδες ώστε να προσδιοριστεί ακριβώς η γωνία που χρειάζονταν για την μοντελοποίηση του προβλήματος.

Όσον αφορά το φύλλο εργασίας που αποτελεί και αυτό εργαλείο της δραστηριότητας, οι μαθητές φάνηκαν να είναι αρκετά εξοικειωμένοι. Με προτροπή της εκπαιδευτικού ακολούθησαν τις οδηγίες του φύλλου εργασίας και το συμπλήρωσαν ώστε να προκύψει το τελικό ζητούμενο αποτέλεσμα. Ωστόσο, αν και η εκπαιδευτικός εξήγησε ότι το φύλλο εργασίας είναι το κύριο έγγραφο όπου οι μαθητές θα μπορούσαν να συγκεντρώσουν τα δεδομένα και τα ζητούμενά τους, εντούτοις οι περισσότερες ομάδες επέλεξαν το φύλλο Α5 που παρεχόταν για να δημιουργήσουν την ρεαλιστική οπτικοποίηση του προβλήματος. Αυτό δεν αποτέλεσε ανασταλτικό παράγοντα κατά την επιλυτική διαδικασία και οι μαθητές μπόρεσαν να μεταβούν στο κύριο αποτέλεσμα της εργασίας που ήταν η εύρεση του ύψους.

Η εκπαιδευτικός επέλεξε να μην χρησιμοποιήσει ψηφιακά εργαλεία για την επεξεργασία ή επέκταση της δραστηριότητας. Όπως είδαμε στο ΑΜΕΚΣ, η χρήση της ψηφιακή τεχνολογίας είναι ένας τρόπος για να επεκταθεί και να διευκολυνθεί η διεξαγωγή της δραστηριότητας. Όπως έχουμε αναφέρει, στο ΕΛΕΚΣ η χρήση της τεχνολογίας βρίσκεται ακόμη σε πρώιμα στάδια καθώς τα τελευταία έτη και μέσω των Νέων Προγραμμάτων Σπουδών που μένει να τεθούν σε ισχύ, εισάγονται δειλά τα ψηφιακά μέσα στην διδασκαλία. Δραστηριότητες όπως αυτή που αναπτύχθηκε στη Β' Γυμνασίου, οφείλουν να υποστηρίζονται και να επεκτείνονται μέσω της ψηφιακής τεχνολογίας. Αν και οι εκπαιδευτικοί ακόμα δεν είναι εξοικειωμένοι με την χρήση ψηφιακών προγραμμάτων όπως Geogebra, MaLT2 κ.λπ., ωστόσο θα μπορούσαν να τραπούν σε πλατφόρμες όπως το YouTube μέσω των οποίων μπορούν παρόμοιες δραστηριότητες και άρα να προσφέρουν επεκτάσεις και διασυνδέσεις με άλλες θεματικές ενότητες και επιστήμες.

5.1.7 Αλληλεπίδραση Εκπαιδευτικού – Μαθητή

Οι αλληλεπιδράσεις μαθητών – εκπαιδευτικών στα 2 συστήματα φαίνεται να είναι πολύ διαφορετικές και κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων αλλά και κατά την συνύπαρξή τους εντός τάξης. Αρχικά στο ΕΛΕΚΣ, η εκπαιδευτικός αφού τελειώσει με το εισαγωγικό κομμάτι όπου έχει το ρόλο του αναλυτή τρέπεται σε βοηθό – μέλος κάθε ομάδας. Αυτό υποστηρίζεται από επαναλαμβανόμενα μέρη της διδασκαλίας όπου οι μαθητές ζητούν την βοήθεια της ώστε να προχωρήσει η δραστηριότητα.

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΕλΕκΣ 6

Μαθ3: Κυρία δεν μπορώ να βρω τη γωνία εδώ. Μπορείτε να βοηθήσετε;
Εκπ: Ναι έρχομαι σε ένα λεπτό. (Βοηθά άλλη ομάδα)
[…]
Εκπ: Ωραία εδώ για να δούμε τη γωνία πώς τη βρίσκουμε. Κάτσε εδώ και …[..]
(Συνεχίζει με αναλυτικές οδηγίες για την εύρεση της γωνίας και επισκόπηση της διαδικασίας με έλεγχο της γωνίας που βρέθηκε)
Εκπ: Ωραία αφού τι βρήκες τώρα τί πρέπει να βρείτε;
Μαθ2: Την απόσταση από τον τοίχο.
Εκπ: Ωραία εσύ δεν κουνιέσαι από εδώ. Μαθ2 πάρε το μέτρο και βρες την κάθετη απόσταση.
[…]

Όπως φαίνεται στο παραπάνω απόσπασμα η εκπαιδευτικός βοηθά σε πολύ μεγάλο βαθμό στην μέτρηση των μεγεθών που χρειάζεται αλλά και δίνει αρκετές πληροφορίες για την μοντελοποίηση του προβλήματος. Από ότι καταλαβαίνουμε η εκπαιδευτικός έχει αντιληφθεί ότι οι μαθητές δεν έχουν κατανοήσει πλήρως τη δραστηριότητα και μέσα από οδηγίες και ερωτήσεις τους καθοδηγεί στην λύση. Έτσι, λοιπόν, οι αλληλεπιδράσεις της εκπαιδευτικού με τους μαθητές είναι αρκετές καθώς η ίδια διαδραματίζει μεγάλο ρόλο στην διεξαγωγή και πρόοδο της δραστηριότητας.

Από την άλλη πλευρά, οι αλληλεπιδράσεις των εκπαιδευτικών με τους μαθητές του ΑμΕκΣ ακολουθούν σχεδόν διαφορετικές πορείες. Οι περισσότεροι από τους εκπαιδευτικούς πέραν του μέρους της εισαγωγής και της επέκτασης, έχουν ω αρχή την ελάχιστη δυνατή αλληλεπίδραση με τους μαθητές κατά την πρόοδο της επίλυσης. Στην εισαγωγή οι εκπαιδευτικοί είναι πρόθυμοι να απαντήσουν οποιεσδήποτε απορίες των μαθητών και να επιδείξουν τη χρήση του νέου εργαλείου (γωνιομέτρου). Ωστόσο, κατά την έναρξη και ανάλυση της δραστηριότητας, οι εκπαιδευτικοί προσπαθούν να αλληλεπιδρούν όσο το δυνατόν λιγότερο με τις ομάδες. Αυτό οφείλεται στην τακτική που ακολουθούν οι εκπαιδευτικοί του ΑμΕκΣ όπου μέσω ελάχιστης αλληλεπίδρασης κατά την επιλυτική διαδικασία δίνουν τη δυνατότητα στους μαθητές να λειτουργήσουν ομαδικά και να ελέγξουν τις λύσεις τους με τους συμμαθητές τους. Μέσω αυτού μειώνουν τις ερωτήσεις περί ορθότητας των λύσεων στους εκπαιδευτικούς και προωθείται έτσι ένα αίσθημα αυτοελέγχου και αυτοβελτίωσης μέσω προσωπικής έρευνας. Έτσι οι μαθητές μαθαίνουν να βρίσκουν μόνοι τους πηγές που να τους δίνουν είτε βήματα για την ανάλυση της δραστηριότητας είτε παρόμοιες δραστηριότητες και άρα τρόπους επίλυσης.

Αυτό ωστόσο δεν σημαίνει ότι οι εκπαιδευτικοί κατά το επιλυτικό μέρος της δραστηριότητας είναι εντελώς αποκομμένοι από το μαθητικό κοινό. Αντιθέτως οι εκπαιδευτικοί αναλαμβάνουν το ρόλο του παρατηρητή και σε καίρια σημεία της επίλυσης των ομάδων εισέρχονται και επισημαίνουν σημεία που ίσως αναστείλουν την ομαλή επίλυση. Οι μαθητές έτσι γνωρίζουν ότι οι εκπαιδευτικοί μπορούν να δώσουν απάντηση σε οποιοδήποτε μέρος της επίλυσης οι ίδιοι βρεθούν σε αδιέξοδο χωρίς ωστόσο να τους δώσουν την ολοκληρωμένη λύση.

Όταν έρχεται το κομμάτι της παρουσίασης και επέκτασης, οι εκπαιδευτικοί αναλαμβάνουν έναν πιο κεντρικό ρόλο και αλληλεπιδρούν έτσι σε μεγαλύτερο βαθμό με τις ομάδες. Αυτό περιλαμβάνει τον συντονισμό των ομάδων στο κομμάτι της παρουσίασης αλλά και την ανάλυση των λύσεων των μαθητών με σχόλια από τον διδάσκοντα προς ευρεία κατανόηση έκαστης λύσης από το μαθητικό κοινό. Στο κομμάτι της επέκτασης ο εκπαιδευτικός έχει ακόμα περισσότερες αλληλεπιδράσεις με τους μαθητές καθώς μέσα από τα εκπαιδευτικά βίντεο και την ψηφιακή ανάλυση παρόμοιων δραστηριοτήτων οι μαθητές δοκιμάζουν νέες τεχνικές και τρόπους που ίσως να χρησιμοποιηθούν αργότερα σε άλλα προβλήματα. Τέλος, μέσω τις επέκτασης ο εκπαιδευτικός ακούει τις ιδέες των μαθητών και τις συνδέει κατάλληλα με άλλες μαθηματικές έννοιες και άλλες επιστήμες, π.χ. Φυσική κ.λπ.

5.1.8 Παράγοντες Εξέλιξης των διαδικασιών μοντελοποίησης στο ΕλΕκΣ

Κατά την ανάλυση της διαδικασίας μοντελοποίησης των μαθητών, παρατηρήθηκε ότι οι ίδιοι βελτίωναν τις διαδικασίες μοντελοποίησης κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας. Ορισμένες διαδικασίες μοντελοποίησης εξελίχθηκαν περισσότερο από άλλες, ωστόσο, οι παράγοντες εξέλιξης ήταν κοινοί. Οι πέντε παράγοντες που παρατηρήθηκαν ήταν οι εξής: η επικοινωνία και η ομαδική εργασία των μαθητών, το ρεαλιστικό πλαίσιο του προβλήματος, οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού που επηρέαζαν την εξέλιξη των διαδικασιών μοντελοποίησης, η χρήση γραφικών αναπαραστάσεων από τους μαθητές και η διερεύνηση ακρίβειας του αποτελέσματός τους.

1. Επικοινωνία

Το κλίμα της τάξης είναι συνεργατικό και οι ομάδες φαίνεται να έχουν συνοχή και καλή επικοινωνία μεταξύ τους. Βασικός άξονας της διδασκαλίας ήταν να δημιουργηθεί ένα κατάλληλο περιβάλλον για βιωματική ενασχόληση με τη δραστηριότητα και «βιωματική μοντελοποίηση» του προβλήματος. Με τον όρο βιωματική μοντελοποίηση εννοείται ότι οι μαθητές μέσω προσωπικών εμπειριών στις μετρήσεις είναι ικανοί να προσδιορίσουν κατάλληλα τα στοιχεία που θα τους φανούν χρήσιμα στη δραστηριότητα.

Οι μαθητές από τις αρχές της δραστηριότητας σκέφτηκαν να διαμερίσουν τα «καθήκοντά» τους δίνοντας το ρόλο του «κεντρικού» ατόμου σε ένα μέλος της ομάδας, το ρόλο του «μετρητή» σε ένα άλλο και τον ρόλο του «καταγραφέα» στο τρίτο μέλος της ομάδας. Αυτή τους η ενέργεια είναι συνδυασμός της παρότρυνσης από την εκπαιδευτικό αλλά και της ανάγκης τους να καταγράφουν τις μετρήσεις τους προκειμένου να χρησιμοποιηθούν στην επίλυσης της δραστηριότητας.

Παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές στο στάδιο των μετρήσεων προσπαθούν να είναι πολύ προσεκτικοί. Βέβαια όλες οι ομάδες δεν έδειχναν το ίδιο ζήλο για τις μετρήσεις. Από άλλα αποσπάσματα του διαλόγου παρατηρείται ότι πολλοί μαθητές δεν ήθελαν να χρησιμοποιήσουν μετρήσεις με 2 δεκαδικά ψηφία, οπότε έκανα στρογγυλοποιήσεις στο πρώτο δεκαδικό ψηφίο. Αυτό βέβαια προκαλούσε σφάλματα μετρήσεων και η αντιμετώπιση αυτών δεν ήταν μέρος της δραστηριότητας. Λόγω του ανοιχτού τύπου της δραστηριότητας, όλες οι απαντήσεις που έδιναν οι ομάδες και βρίσκονταν μέσα στα αριθμητικά πλαίσια του πραγματικού ύψους ήταν αποδεκτά. Έτσι, λοιπόν, εφόσον υπήρχε συμφωνία όλων των μελών της ομάδας και επομένως ομαλή επικοινωνία, αυτά τα σφάλματα παραβλέπονταν και κυλούσε ομαλά η διαδικασία της μοντελοποίησης και της επίλυσης.

2. Το Αυθεντικό Πλαίσιο του Προβλήματος

Το πρόβλημα που δόθηκε στους μαθητές ήταν ένα αυθεντικό πρόβλημα όπου το πραγματικό πλαίσιο κατείχε πολύ σημαντικό ρόλο στις σκέψεις και διαδικασίες που ανέπτυξαν οι μαθητές. Γρήγορα αντιλήφθηκαν ότι το αποτέλεσμα που τους ζητείται ανήκει σε ένα αριθμητικό σύνολο. Αυτό σημαίνει ότι οι μετρήσεις που θα κάνουν πρέπει να έχουν αριθμητική ακρίβεια και αν προέκυπτε σφάλμα μετρήσεων τότε το αποτέλεσμα στην περίπτωση που ήταν πολύ μεγάλο έπρεπε να απορριφθεί και να επανεξεταστεί η κατάσταση ή στην περίπτωση που ήταν μικρό τότε η τιμή αυτή αν και όχι εντελώς ακριβής μπορούσε να γίνει αποδεκτή. Συνεπώς, προβάλλεται συνεχώς η ανάγκη στα φύλλα εργασίας να διαφαίνεται η συλλογιστική τους πορεία και κατά συνέπεια να καταγράφονται όλες οι πιθανές επιτυχείς ή μη στρατηγικές που ακολουθούνται κατά τις δύο προτελευταίες φάσεις της δραστηριότητας (μοντελοποίηση και επίλυση). Αυτό γίνεται διότι από όλες τις στρατηγικές που ακολουθούνται, οι μαθητές ανατροφοδοτούνται και επαναπροσδιορίζουν τις μεταβλητές τους ώστε το αποτέλεσμα να έρθει όσο πιο κοντά γίνεται κοντά στο ακριβές αποτέλεσμα όπως αυτό θεωρείται ότι είναι από την ομάδα.

Λόγω εσφαλμένων αναγωγών στις σκέψεις τους κάποιοι μαθητές θεωρούν ότι το αποτέλεσμα είναι σωστό. Αυτή είναι μία ιδιαίτερη περίπτωση ομάδας η οποία δεν λαμβάνει σαν παράμετρο στην σκέψη της το αυθεντικό πλαίσιο και εστιάζει στο μαθηματικό κομμάτι της επίλυσης. Χρειάζεται η βοήθεια της εκπαιδευτικού ώστε να επανέλθει η ομάδα στο αυθεντικό τμήμα της δραστηριότητας και να ληφθεί υπόψιν.

3. Αναζήτηση της Ακρίβειας

Η ανάγκη για την ακρίβεια του αποτελέσματος δόθηκε από τις απαντήσεις των μαθητών αλλά και από τις στιχομυθίες που καταγράφηκαν κατά την απομαγνητοφώνηση. Κατά την διάρκεια της επίλυσης του προβλήματος, πολλές ομάδες ακούστηκαν αν αναζητούν ακριβή δεδομένα θεωρώντας ότι τα αποτελέσματα που θα προέκυπταν θα ήταν λανθασμένα λόγω λανθασμένων δεδομένων. Σε όλη τη δραστηριότητα, οι μαθητές εκφράζουν την ανάγκη να έχουν ακριβή δεδομένα είτε από μόνοι τους είτε υποκινούμενοι από την εκπαιδευτικό. Χαρακτηριστικά φαίνεται παρακάτω η εμμονή των μαθητών στην πρόσληψη ακριβών δεδομένων αλλά και η προτροπή της εκπαιδευτικού να λαμβάνουν οι μαθητές ακριβή δεδομένα.

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΕλΕκΣ 7
Εκπ: Ωραία Μαθ7 πάμε να βρούμε τη γωνία.
Μαθ7: Δεν ξέρω πόσο είναι κουνιέται πολύ η μπάλα!
Εκπ: Περιμένουμε μέχρι να σταθεροποιηθεί! Μαθ8 έλα να δεις εσύ τη γωνία!
Μαθ8: Ναι κυρία
Μαθ9: Και θα γράψουμε ότι βγάλει;
Εκπ: Ναι

Μαθ9: Δηλαδή αν είναι ανάμεσα σε 2 γωνίες θα πάρουμε δεκαδική γωνία;
Εκπ: Ωραία ερώτηση! Τί κάνουμε τότε; Για πείτε οι άλλοι!
Μαθ7: Εε να κάνουμε κυρία μία στρογγυλοποίηση προς τα κάτω να είναι πιο μικρά τα νούμερα;
Μαθ8: Όχι ρε αν είναι για να μην μπλέξουμε με δεκαδικούς να πάρουμε τη γωνία που είναι πιο κοντά η γραμμή της.
Εκπ: Ωραίες οι ιδέες. Επιλέξτε αυτή που σας βγάζει περισσότερο νόημα για το πρόβλημά μας και προχωρήστε.

Στο παραπάνω απόσπασμα διαφαίνεται η ανάγκη για την πρόσληψη ακριβών δεδομένων. Εδώ η εκπαιδευτικός δεν ωθεί τους μαθητές σε μία στρατηγική που θα ήταν αποδεκτή ως γενικευμένη μέθοδος αλλά τους δίνει το χώρο να αναπτύξουν τις δικές τους ιδέες. Ακούγοντας προσεκτικά όλες τις ιδέες εφιστεί την προσοχή στο πραγματικό πλαίσιο του προβλήματος και προτρέπει τους μαθητές να ακολουθήσουν την στρατηγική που θα τους δώσει το ακριβότερο πραγματικό αποτέλεσμα. Η παράμετρος της ακρίβειας σε προβλήματα όπου οι μαθητές μπορούν εύκολα να λάβουν την απάντηση χρησιμοποιώντας καθαρά χειραπτικά μέσα, όπως πχ. μία μετροταινία προκειμένου να μετρήσουν απευθείας το ύψος της τάξης, διαδραματίζει πολύ σημαντικό ρόλο.

4. Παρεμβάσεις Εκπαιδευτικού

Η εκπαιδευτικός κατείχε πολύ σημαντικό ρόλο στη δραστηριότητα αφού με αναγνωριστικές και διευκρινιστικές ερωτήσεις καλούσε τους μαθητές να αναπτύξουν και να υποστηρίξουν τις ιδέες τους είτε στη φάση της μοντελοποίησης είτε κατά την διαδικασία της επίλυσης. Έτσι, όλοι οι μαθητές συμμετείχαν στη διαδικασία διαπραγμάτευσης, προσπαθώντας να κατανοήσουν, να βελτιώσουν, να αμφισβητήσουν και να αποσαφηνίσουν τις ιδέες των συμμαθητών τους. Επίσης, ήταν σημαντικό να μην κατευθύνει τις στρατηγικές μέτρησης και μοντελοποίησης των μαθητών με το υλικό που τους παρείχε. Συνεπώς, έδινε το κατάλληλο υλικό (π.χ. κόλλα Α5 για γραφική απεικόνιση του πραγματικού πλαισίου) ώστε οι μαθητές να έχουν την ελευθερία όπως και έγινε να σχεδιάζουν και να αλλάζουν κάθε φορά την μοντελοποίηση του προβλήματος ανάλογα με τις παραμέτρους που λαμβάνουν υπόψιν τους. Κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας, συχνά οι μαθητές εξέφραζαν τις ιδέες τους είτε μόνο στον εκπαιδευτικό είτε σε κάποιον συμμαθητή τους, χωρίς να τις ακούει όλη η ομάδα. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η εκπαιδευτικός αναλάμβανε να μεταφέρει την ιδέα στην ομάδα ή να ζητά από τον μαθητή να την επαναλάβει σε όλους.

Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να δημιουργείται ένα ομαδοσυνεργατικό πνεύμα και να μειώνονται οπουδήποτε είδους παρανοήσεις για τη δραστηριότητα ή την εξέλιξή της. Τέλος, σε περιπτώσεις που οι μαθητές δεν κατανοούσαν κάτι που ανέφερε ο συμμαθητής τους ή χρειαζόταν κάποια γνωστική υπενθύμιση, η εκπαιδευτικός συνέβαλε ώστε να συνεχιστεί η δραστηριότητα.

5. Χρήση αναπαραστάσεων και χειραπτικών εργαλείων

Οι μαθητές χρησιμοποίησαν στην διάρκεια της δραστηριότητας αρκετές φορές γραφικές αναπαραστάσεις και με αυτό τον τρόπο οπτικοποίησαν τα μοντέλα και τα επιχειρήματά τους. Σ' αυτό συνέβαλε και η χρήση του χειραπτικού εργαλείου φύλλο Α5 ως εποπτικού μέσου όπου έκαστη ομάδα μπορούσε να παρουσιάσει τις οπτικοποιήσεις των μοντέλων τους ώστε να μπορούν να συζητήσουν για αυτά και να τα συγκρίνουν με άλλα προηγούμενα ή επόμενα βέλτιστα μοντέλα. Οι αναπαραστάσεις έπαιξαν κρίσιμο ρόλο στην πρόοδο των διαδικασιών μοντελοποίησης του προβλήματος. Η δημιουργία και η ανάλυση ρεαλιστικών εικόνων που δημιουργούσαν τους επέτρεψε να βελτιώνουν τις γνώσεις τους και να μεταβαίνουν από τη διαίσθηση ή τα άτυπα επιχειρήματα σε επιχειρήματα βασισμένα στο γράφημα. Επιπλέον, μετά την εμφάνιση των γραφημάτων, οι μαθητές τα αναφέρουν συχνά και ελέγχουν τους ισχυρισμούς τους ανατρέχοντας σε αυτά.

Η ομάδα που στην αρχή επέλεξε να κάνει μία νοητική απεικόνιση του προβλήματος, κατάλαβε πολύ γρήγορα ότι δεν θα μπορούσε να τροποποιήσει εύκολα το μοντέλο όταν παραστεί ανάγκη.

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΕλΕκΣ 7

Μαθ7: Κοίτα έτσι όπως το σκέφτομαι θα βγει ένα τρίγωνο.
Μαθ9: Καλά δεν το ξέρεις αυτό. Θα δούμε.
Μαθ8: Θέλουμε τη γωνία πρώτα.
Εκπ: Ναι αρχικά μπορείτε να βρείτε τη γωνία.
(χρησιμοποιούν το γωνιόμετρο και βρίσκουν τη γωνία)
Εκπ: Μετά τι χρειάζεστε;
Μαθ7: Την απόσταση από τον τοίχο;
Εκπ: Ναι! Μετά πώς θα συνεχίσετε;
Μαθ8: Βγαίνει ένα τρίγωνο όντως! Κάπως έτσι … (με νόημα δείχνει το τρίγωνο στον αέρα)
Εκπ: Ωραία. Και;
Μαθ8: Εε ας πάμε να το λύσουμε αφού ξέρουμε τις μετρήσεις.

Μετά την πρώτη προσπάθεια όπου η ομάδα δεν βρήκε αποτέλεσμα ικανοποιητικό γι' αυτούς, αποφάσισαν να επαναπροσδιορίσουν τα δεδομένα τους και εν τέλει να αναπαραστήσουν γραφικά το μοντέλο. Αυτό τους έδωσε τη δυνατότητα να εντοπίσουν λάθη στις μετρήσεις ή να σκεφτούν την χρήση ενός διαφορετικού τρόπου επίλυσης από αυτόν που είχαν εφαρμόσει ήδη.

5.1.9 Παράγοντες Εξέλιξης των διαδικασιών μοντελοποίησης στο ΑμΕκΣ

Κατά την εξέταση της διαδικασίας μοντελοποίησης από τους μαθητές, διαπιστώθηκε ότι βελτίωναν τις τεχνικές τους κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας. Ορισμένες διαδικασίες μοντελοποίησης προχώρησαν περισσότερο από άλλες, αλλά οι παράγοντες που οδήγησαν στην εξέλιξή τους ήταν κοινοί. Οι πέντε παράγοντες που εντοπίστηκαν ήταν οι εξής: η επικοινωνία και η συνεργασία των μαθητών, το ρεαλιστικό πλαίσιο του προβλήματος, οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού που επηρέασαν την πρόοδο των διαδικασιών, η χρήση γραφικών αναπαραστάσεων από τους μαθητές, καθώς και η διερεύνηση της ακρίβειας των αποτελεσμάτων τους

1. Επικοινωνία

Το κλίμα στα τμήματα είναι συνεργατικό και οι ομάδες έχουν συνοχή και καλή επικοινωνία μεταξύ τους. Έναν από τους κύριους άξονες στην διδασκαλία στο αμερικάνικο σύστημα αποτελεί η δημιουργία ενός ομαδικού περιβάλλοντος το οποίο προάγει την βιωματική ενασχόληση και την εμπειρική μαθηματική μοντελοποίηση ενός αυθεντικού προβλήματος. Στο πλαίσιο της ομαδικότητας και συνεργασίας, οι μαθητές διαμερίζουν τα καθήκοντά τους χωρίς ωστόσο να ορίζονται αυστηρά ρόλοι για τους συμμετέχοντες. Όλοι οι συνεργάτες σε μία ομάδα αναλαμβάνουν να κάνουν τις μετρήσεις και να ελέγξουν την ορθότητά τους πολλαπλώς. Κάποιος αναλαμβάνει να καταγράφει τα δεδομένα αλλά συνήθως δεν θα είναι και ο ίδιος που θα αποτυπώσει την λύση όπως αυτή θα είναι τελικά. Στις δραστηριότητες όπου χρειάζεται η μέτρηση του ύψους ενός ατόμου για την εργασία, ορίζεται και πάλι το «κεντρικό» άτομο το οποίο ωστόσο δεν αλλάζει κατά τη διεξαγωγή της δραστηριότητας για λόγους ορθότητας.

<u>ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΑμΕκΣ 7</u>
Μαθ6: Θα πρέπει ένας από μας να κάτσει για να μετρήσουμε το ύψος του.
Μαθ5: Θα κάτσω εγώ.
Μαθ6: Αλλά θα πρέπει να μετράμε τα δικά σου δεδομένα κάθε φορά. Ύψος, απόσταση από τοίχο κλπ.
Μαθ7: Ωραία εγώ μπορώ να τα γράφω στο χαρτί για να μην φεύγετε από τις θέσεις σας.
Μαθ5: Τέλεια! Το ‘χουμε!

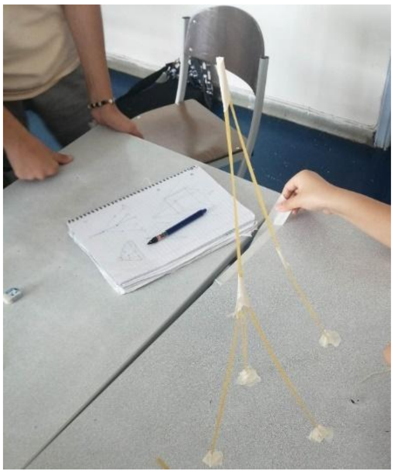
Βασικό στοιχείο που υποστηρίζει την ομαλή επικοινωνία είναι η εμμονή των μαθητών στην ακρίβεια των δεδομένων. Θέλοντας να δημιουργήσουν ένα σταθερά δομημένο μοντέλο το οποίο δεν θα επιδέχεται διορθώσεις, θα επιστήσουν την προσοχή τους στον ορισμό αρμοδιοτήτων σε κάθε μέλος της ομάδας και στην απόκτηση ακριβών μετρήσεων. Οι μαθητές συνηθισμένοι από ομαδικές δραστηριότητες είχαν μία ευχέρεια στην επικοινωνία και στην διεξαγωγή καθηκόντων. Έτσι, λοιπόν, υπήρχε ομοφωνία όλων των μελών των ομάδων χωρίς να δημιουργούνται εντάσσεις και κυλούσε ομαλά η διαδικασία της μοντελοποίησης και επίλυσης των προβλημάτων.

2. Το Αυθεντικό Πλαίσιο του Προβλήματος

Οι δραστηριότητες που δόθηκαν από τους εκπαιδευτικούς ήταν αυθεντικά προβλήματα όπου το πραγματικό πλαίσιο ήταν από τους κύριους άξονες μοντελοποίησης και επίλυσης στις διαδικασίες που ανέπτυξαν οι μαθητές. Κατά την εισαγωγή στις δραστηριότητες όπως είναι φυσικό οι εκπαιδευτικοί είτε περιέγραφαν το αυθεντικό πλαίσιο είτε έδινα ένα παρόμοιο ρεαλιστικό πρόβλημα που είχε αναλυθεί παλαιότερα εντός τάξης ή υπάρχει στο σχολικό εγχειρίδιο. Μέσω αυτού προαγόταν η ρεαλιστική οπτική των αποτελεσμάτων και επιτεύχθηκε η αντίληψη ότι τα αποτελέσματα θα πρέπει να ανήκουν σε ένα σύνολο λύσεων όπου θα συνάδει με τις πραγματικές μετρήσεις και εμπειρίες. Εμμένοντας στην μαθηματική ακρίβεια των μετρήσεων, απορρίπτονταν και επανεξετάζονταν διάφορα μοντέλα που θα έδιναν πιθανώς αποτελέσματα που δεν ικανοποιούν τα δεδομένα.

Κάποιες ομάδες ήταν ικανές να ελέγξουν τα αποτελέσματά της και να τα διορθώσουν ώστε να συνάδουν με το αυθεντικό πλαίσιο το προβλήματος. Έχοντας έναν ελεγκτικό μηχανισμό (μετροταινία) μπόρεσαν να επαληθεύσουν τα δεδομένα τους. Αν και το αποτέλεσμα που βρήκαν δεν ήταν ακριβώς το ίδιο με την πραγματική μέτρηση θεώρησαν ότι δεν θα ήταν καλό για το μοντέλο τους να λάβουν την μέτρηση αυτή αλλά να κρατήσουν το αποτέλεσμα όπως προέκυψε. Σε άλλη ομάδα που συνέβη το ίδιο γεγονός αποφάσισαν αν επανεξετάσουν τις μετρήσεις τους ώστε να είναι σε συμφωνία με την πραγματική κατάσταση.

Εικόνα 5.9. Επανεξέταση δεδομένων και αποτελεσμάτων εντός ομάδας



3. Αναζήτηση της Ακρίβειας

Καθόλη τη διάρκεια των δραστηριοτήτων οι μαθητές είχαν ως κύριο στόχο να επιτύχουν όσο το δυνατό ακριβέστερο αποτέλεσμα. Αυτό διαφαίνεται από τη χρήση υπολογιστών τσέπης, κινητών συσκευών αλλά και φορητών υπολογιστών που είναι επιτρεπτό να χρησιμοποιούνται κατά τη διεξαγωγή των δραστηριοτήτων. Συγκεκριμένα, η καταγραφή πράξεων στις εργασίες θετικών επιστημών απαιτείται μέχρι τα μέσα της 7ης τάξης όπου οι μαθητές ακόμη εργάζονται πάνω στις βασικές αλγεβρικές πράξεις. Εφόσον περάσει το διάστημα αυτό οι μαθητές δεν είναι υποχρεωμένοι να κάνουν καταγραφή και προάγεται η διευκόλυνσή τους προκειμένου να εστιάσουν στο πλαίσιο και στην επίλυση των εργασιών τους παρά στο αλγεβρικό κομμάτι.

Βασική απαίτηση των εκπαιδευτικών αλλά και των δραστηριοτήτων που αναθέτουν είναι η εύρεση πλησιέστερου στο πραγματικό αποτέλεσμα. Για αυτό το λόγο οι μαθητές χρησιμοποιούν 3-4 δεκαδικά ψηφία κατά τις επιλύσεις τους. Η στρογγυλοποίηση των μετρήσεων θεωρείται ο πρόδρομος δημιουργίας σφαλμάτων μέτρησης και επομένως αποφεύγεται στα περισσότερα πραγματικά πλαίσια.

ΑΠΟΣΠΑΣΜΑ ΑμΕκΣ 8

Μαθ17: Είπε πόσα δεκαδικά πρέπει να έχει το ύψος;
Μαθ15: Όχι δεν είπε αλλά για να είμαστε σίγουροι δεν βάζουμε 3;
(η σιγουριά που αναφέρεται δεν ανταποκρίνεται τόσο στον έλεγχο που θα κάνει αργότερα ο εκπαιδευτικός όσο στην ακρίβεια του αποτελέσματος που προσπαθούν να βρουν)
Μαθ16: Έχει δίκιο. Καλύτερο και για εμάς.
Μαθ17: Αν είναι έτσι βρήκα 2.962 μέτρα.
Μαθ15: Γιατί δεν το κάνουμε 3 μέτρα να τελειώνουμε;
Μαθ17: Κοίτα εμένα στο κομπιουτεράκι έτσι μου το βγάζει λόγω της γωνίας. Αλλά αν θέλετε το γράφω 3 μέτρα.
Μαθ16: Προτείνω να γράψουμε 2.962 μέτρα και με στρογγυλοποίηση 3 μέτρα, Και να του γράψουμε σε σημείωμα από κάτω: Κοιτάχτε πιο πιθανό είναι τα 3 μέτρα παρά τα … 0.038 μέτρα κάτω αλλά εσείς πάρτε όποιο θέλετε! Χαχαχα
Μαθ17: Έλα όχι μην γράψεις αυτό. Απλά γράψε και τα δύο αποτελέσματα να τελειώνουμε.

Η παραπάνω συζήτηση είναι αντιπροσωπευτικό παράδειγμα της ακρίβειας που προσπαθούν να επιτύχουν σε κάθε δραστηριότητα οι μαθητές. Αν και διαισθητικά τους φαίνεται πιο λογικό η τάξη να έχει ύψος 3 μέτρα εν τούτοις εμμένουν στο αποτέλεσμα που έχουν παράγει. Ο συνδυασμός αυτός της μαθηματικής ακρίβειας με την εμπειρική άποψη που κατέχουν οι μαθητές είναι ο λόγος για τον οποίο η επανεξέταση των δεδομένων είναι μία από τις θεμελιώσεις αρχές κατά την επίλυση δραστηριοτήτων. Σημαντικό είναι ότι πολλές ομάδες και από τα 3 τμήματα πρώτα ελέγχουν την λογικότητα των αποτελεσμάτων, δηλαδή αν τα δεδομένα που μετρήθηκαν παράγουν κάτι το οποίο να ανήκει στο σύνολο των πιθανών τιμών που αναμένουν για την παράμετρο που εξετάζουν.

Έπειτα προχωρούν στην εύρεση των ζητουμένων υπό το πρίσμα της ακρίβειας. Οι εκπαιδευτικοί όπως είναι εμφανές δεν εμπλέκονται στις ομάδες μόνο αν τους ζητηθεί βοήθεια. Παρατηρήθηκε ότι η εμπλοκή των εκπαιδευτικών συνήθων λάμβανε χώρα προς τα τελικά στάδια των δραστηριοτήτων αλλά και πάλι δεν αναλάμβαναν το ρόλο του ελεγκτή παρά μόνο του επιτηρητή ως προς την ορθότητα των βημάτων της δραστηριότητας. Οι μαθητές συνηθισμένοι στην λογική της αυτοβελτίωσης και του αυτοελέγχου, ζητούν την βοήθεια του εκπαιδευτικού ελάχιστα. Ωστόσο βασίζονται ιδιαίτερα στη συζήτηση με τις άλλες ομάδες όπου ανταλλάσσουν θεωρίες και μοντέλα. Τέλος, θα πρέπει να τονισθεί πως σε δραστηριότητες όπου ήταν εύκολο να επαληθευτούν άμεσα τα αποτελέσματα των ομάδων με τη χρήση μετροταινίας, οι μαθητές φάνηκαν να τροποποιούν πολλαπλώς τα μοντέλα και τις μετρήσεις ώστε να επιτευχθεί το ακριβές πραγματικό αποτέλεσμα.

Εικόνες 5.10. Επαλήθευση αποτελεσμάτων για επίτευξη ακρίβειας

4. Παρεμβάσεις Εκπαιδευτικού

Οι εκπαιδευτικοί καθόλη τη διάρκεια των δραστηριοτήτων κατείχαν 2 σημαντικούς ρόλους: αναλυτή και παρατηρητή. Ο ρόλος του αναλυτή εμφανιζόταν κατά κύριο λόγο στην εισαγωγή των δραστηριοτήτων. Εκεί ο εκπαιδευτικός έπρεπε να εξηγήσει περισσότερο τη χρήση του γωνιομέτρου και να αναλύσει το πρόβλημα που δόθηκε σε κάθε τάξη. Σε αυτή τη φάση των δραστηριοτήτων, οι εκπαιδευτικοί δεν έδιναν πάντα άμεσες απαντήσεις αλλά με αναγνωριστικές ερωτήσεις προσπαθούσαν να ωθήσουν τους μαθητές να απαντήσουν οι ίδιοι τις ερωτήσεις τους. Προτρέπουν, έτσι, τους μαθητές να εκτελούν προσωπική έρευνα με την προϋπόθεση ότι αυτή θα μεταφερθεί και θα συζητηθεί εντός τις τάξης.

Σε επόμενο βήμα, ο καθηγητής λαμβάνει τον ρόλο του παρατηρητή, ο οποίος δίνει το χώρο στους μαθητές να μελετήσουν αναλυτικά το πρόβλημα και να δημιουργήσουν τα δικά τους μοντέλα. Κύριο χαρακτηριστικό της συμπεριφοράς του εκπαιδευτικού σε αυτή τη φάση είναι ότι για ένα μικρό χρονικό διάστημα περιφέρεται εντός της τάξης επιβλέποντας τους μαθητές και ρωτώντας τους για το μοντέλο που αναπτύσσουν ενώ για τον υπόλοιπο χρόνο της μοντελοποίησης – επίλυσης κάθεται στην έδρα και ασχολείται είτε με την εργασία είτε με άλλες εργασίες του μαθήματος. Είναι πάντα διαθέσιμος για όποια απορία αλλά με παραπάνω κίνηση δείχνει έμπρακτα στους μαθητές ότι πρέπει να λαμβάνουν το χώρο τους για να σκεφτούν, να αναλύσουν και να δημιουργήσουν ένα μοντέλο όπως οι ίδιοι θέλουν χωρίς τις παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι μαθητές να αναπτύξουν αυτοέλεγχο και συνεργασία με άλλες ομάδες χωρίς να στηρίζονται για κάθε βήμα της επιλυτικής διαδικασίας στον καθηγητή.

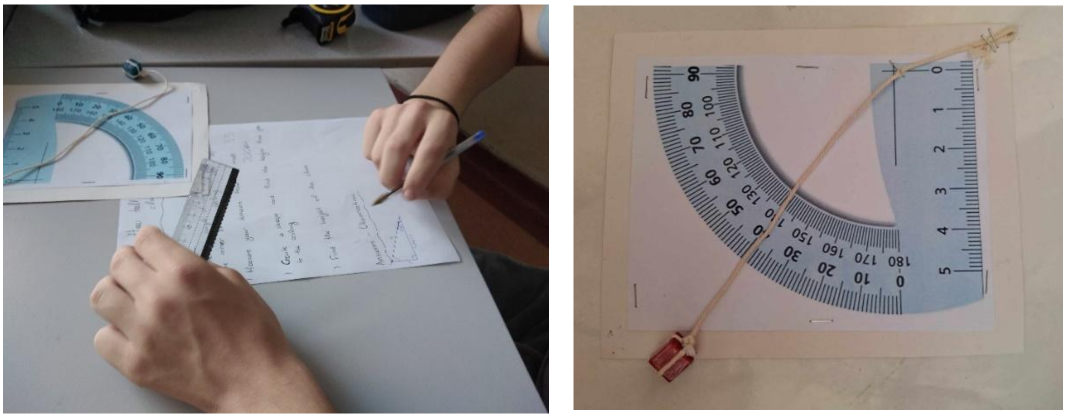
Η παραπάνω φιλοσοφία χρησιμοποιείται ευρέως από τους καθηγητές όλων των ειδικοτήτων και αποτελεί πολύ σημαντικό κομμάτι της φιλοσοφίας του αμερικάνικου εκπαιδευτικού συστήματος. Στο τελευταίο μέρος της δραστηριότητας όπου είναι και η παρουσίαση των λύσεων κάθε ομάδας, ο εκπαιδευτικός αναλαμβάνει έναν πιο κεντρικό ρόλο. Δίνει την δυνατότητα στις ομάδες να παρουσιάσουν τα αποτελέσματά τους μέσω αντιπροσώπου και βοηθά εκείνες όπου ίσως να είναι πιο αδύναμες σε αυτό το κομμάτι. Σκοπός του εκεί δεν είναι να υποδείξει ορθές ή λανθασμένες τεχνικές και αποτελέσματα αλλά να ωθήσει τους μαθητές του να προβούν μόνοι τους σε τέτοιου είδους συνειδητοποιήσεις. Οι αναγνωριστικές ερωτήσεις είναι από τα βασικότερα εργαλεία του καθηγητή σε αυτήν την φάση.

Τελικό στάδιο των δραστηριοτήτων είναι η επέκταση αυτών. Εδώ, ο εκπαιδευτικός αναλαμβάνει κεντρικό ρόλο με τους μαθητές να προσέχουν τις παρουσιάσεις που ακολουθούν. Σκοπός της επέκτασης είναι η σύνδεση της παρούσας μαθηματικής έννοιας με έννοιες από άλλες θετικές επιστήμες ή με άλλους τομείς της καθημερινότητας. Η χρήση διαδραστικών εργαλείων είναι πολύ ισχυρή καθώς μέσα από επιμορφωτικά βίντεο και συζητήσεις οι μαθητές κάνουν τις απαραίτητες συνδέσεις. Στις συγκεκριμένες δραστηριότητες, οι εκπαιδευτικοί αποφάσισαν να αποδώσουν την έννοια της εφαπτομένης και των τριγωνομετρικών αριθμών με εργαλεία όπως το Geogebra. Αναπαριστώντας το πρόβλημα σε διαδραστική μορφή κάλεσαν τους μαθητές να αναλογιστούν με ποιες άλλες μαθηματικές έννοιες θα μπορούσαν να το συνδέσουν. Στο τελευταίο τμήμα, ο εκπαιδευτικός διεξήγαγε μία συζήτηση για το πώς τέτοιου είδους δραστηριότητες μπορούν να ενταχθούν σε τομείς όπως η Αρχιτεκτονική, η Τέχνη, κλπ. , προβάλλοντας παράλληλα και το αντίστοιχο διαδραστικό υλικό. Έτσι, ο εκπαιδευτικός σε αυτό το κομμάτι διαδραματίζει κύριο ρόλο για την ομαλή ολοκλήρωση της δραστηριότητας.

Εικόνα 5.11. Επέκταση δραστηριότητας από εκπαιδευτικό

5. *Χρήση αναπαραστάσεων και χειραπτικών εργαλείων*

Δραστηριότητες όπως αυτές που δόθηκαν στα 3 τμήματα βασίζονται σε μεγάλο βαθμό στη χρήση οπτικών μέσων και χειραπτικών εργαλείων. Η οπτική αναπαράσταση ενός αυθεντικού προβλήματος για τους μαθητές είναι το μέσο που τους βοηθά να προχωρήσουν στην μοντελοποίηση και έπειτα στην επίλυση. Η χρήση των Α5 φύλλων συνέβαλε σε αυτό αφού συνείσφερε στην ρεαλιστικοποίηση του προβλήματος. Εδώ η λέξη «ρεαλιστικοποίηση» χρησιμοποιείται για να ορίσει την μεταφορά ενός αυθεντικού προβλήματος σε ρεαλιστική μορφή με σκοπό την ευκολότερη μοντελοποίηση και επίλυσή του. Σκοπός της είναι η ανάλυση απτών εικόνων από τους μαθητές και η μετάβαση από τα διαισθητικά επιχειρήματα σε μαθηματικές προτάσεις βασισμένες στο γράφημα.



Εικόνα 5.12. Αναπαραστασιακά εργαλεία και εργαλεία μοντελοποίησης

Εκτός από τα αναπαραστασιακά εργαλεία και τα εργαλεία μοντελοποίησης, χρησιμοποιήθηκαν και κατασκευαστικά μέσα ώστε να δημιουργήσουν μόνοι τους το δόμημα που θα μελετούσε κάθε ομάδα. Ουσιαστικά, στο ένα εκ των τριών τμημάτων η μελέτη αυθεντικού προβλήματος βασιζόταν στο δόμημα που θα έφτιαχναν ομάδες. Η κατασκευή ενός δομήματος από τους μαθητές ως μαθηματική δραστηριότητα επιφέρει πολλά θετικά οφέλη. Πρώτον, μεταφέρει πρακτικά τη γνώση των μαθητών από το φαινομενικό επίπεδο μιας ιδέας, γεγονός το οποίο ενισχύει την κατανόηση κάθε έννοιας. Δεύτερον, μέσα από τη διαδικασία αυτή αναπτύσσονται οι δεξιότητές των μαθητών, δηλαδή η συνεκτική κριτική σκέψη και η ανάπτυξη δημιουργικής ικανότητας είναι μερικά χαρακτηριστικά που ενισχύονται εδώ, αλλά και προσόντα των μαθητών για συνεργασία λόγω της ομαδικότητας ως μεθόδου εργασίας. Τέλος, δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να ασχοληθούν με την αισθητική των μαθηματικών, τον τρόπο που μπορούν αυτά να μεταφερθούν σε μία απτή κατασκευή αλλά και τη φαντασία.

6 Συμπεράσματα

Στην παρούσα έρευνα επιχειρήθηκε να μελετηθούν οι δράσεις μοντελοποίησης μαθητών της Β' Γυμνασίου από 2 εκπαιδευτικά συστήματα, Ελληνικό και Αμερικάνικο, μέσω μιας βιωματικής δραστηριότητας ανοιχτού προβλήματος. Το πρόβλημα διατυπώθηκε σε αυθεντικό πλαίσιο και περιελάμβανε τη χρήση τριγωνομετρικών αριθμών. Το πρόβλημα διατυπώθηκε σε ένα αυθεντικό πλαίσιο σύμφωνα με τη θεωρία του Kolb (2017) περί Βιωματικής Εκπαίδευσης και περιελάμβανε έννοιες από την Τριγωνομετρία και την Άλγεβρα. Το πρόβλημα που δόθηκε στους μαθητές κάθε συστήματος είχε ως γενική βάση την εύρεση ύψους της αίθουσας διδασκαλίας ή του δομήματος που θα κατασκεύαζαν οι ίδιοι. Συγκεκριμένα, μελετώνται οι μεταβάσεις - διαδικασίες από το Αυθεντικό πλαίσιο του προβλήματος στο Μαθηματικό μέσω ενός Μαθηματικού μοντέλου, το θεσμικό πλαίσιο πάνω στο οποίο βασίστηκαν οι δραστηριότητες αλλά και οι παράγοντες που συνέβαλαν στη δημιουργία και εξέλιξή τους.

Από τα αποτελέσματα της έρευνας προέκυψαν ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των μεθόδων προσέγγισης και επεξεργασίας των δραστηριοτήτων τόσο από τους μαθητές όσο και από τους εκπαιδευτικούς. Μεγάλο ρόλο στη δημιουργία των δραστηριοτήτων από τους εκπαιδευτικούς του ΑμΕκΣ διαδραμάτισε το θεσμικό πλαίσιο πάνω στο οποίο βασίζονται οι διδασκαλίες αλλά και περιβάλλον από του οποίο έρχονται οι μαθητές. Στο ΕλΕκΣ, η δραστηριότητα δημιουργήθηκε με σκοπό την πλήρη κατανόηση της έννοιας της εφαπτομένης πριν οι μαθητές εισαχθούν στις έννοιες του ημιτόνου και συνημιτόνου. Το ΑΠΣ κάθε συστήματος προτείνει να δίνονται λεκτικά προβλήματα ρεαλιστικού και αυθεντικού πλαισίου ώστε να μεγιστοποιείται η κατανόηση των πλαισιακών συνδέσεων με τις αντίστοιχες μαθηματικές έννοιες. Κύρια διαφορά εντοπίζεται στην πρόταση των δύο ΑΠΣ για διεξαγωγή βιωματικών δραστηριοτήτων. Το Αμερικάνικο Εκπαιδευτικό Σύστημα προβάλει την ανάγκη για ανάπτυξη και διεξαγωγή τέτοιων δραστηριοτήτων σε κάθε Κεφάλαιο που περιλαμβάνεται στην διδασκόμενη ύλη των Μαθηματικών ήδη από την 6η τάξη έως και την 12η. Αντιθέτως, στο Ελληνικό Εκπαιδευτικό Σύστημα η διεξαγωγή βιωματικών δραστηριοτήτων αφήνεται στην ευχέρεια των εκπαιδευτικών ενώ το ΑΠΣ δίνει παραδειγματικές ασκήσεις για ανοιχτού ή κλειστού τύπου λεκτικά προβλήματα.

Ένας επιπλέον παράγοντας που διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη δημιουργία δραστηριοτήτων αλλά και στη διεξαγωγή των διδασκαλιών είναι η χρήση των σχολικών εγχειριδίων αλλά και οι επιρροές που δέχονται από αυτά κατά τη δημιουργία των δραστηριοτήτων. Όπως φάνηκε από τα αποτελέσματα, και στα 2 συστήματα οι δραστηριότητες που δημιουργήθηκαν ήταν βασισμένες σε αντίστοιχες ασκήσεις των σχολικών εγχειριδίων. Η μετάβαση από τα ρεαλιστικά Μαθηματικά που προσφέρει το σχολικό βιβλίο στην αυθεντική βιωματική δραστηριότητα είναι παράγοντας - κλειδί για την πλήρη κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας όπως η εφαπτομένη. Για αυτό το λόγο και οι εκπαιδευτικοί του ΑμΕκΣ επέλεξαν να δημιουργήσουν δραστηριότητες ή να χρησιμοποιήσουν την ίδια με αυτή που προσέφερε το ΕλΕκΣ καθώς, όπως αναφέρθηκε, υπάρχει αντίστοιχη δραστηριότητα στο αμερικάνικο σχολικό εγχειρίδιο που οι μαθητές θα μπορούσαν να χρησιμοποιήσουν ως βάση. Στο ΕλΕκΣ αν και δεν αναφέρεται ρητά από την εκπαιδευτικό ο λόγος δημιουργίας της συγκεκριμένης δραστηριότητας, διαφαίνεται η επιρροή της από την αντίστοιχη ρεαλιστική δραστηριότητα που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο. Συνεπώς, και τα δύο συστήματα βασίζονται σε μεγάλο βαθμό στις δραστηριότητες που προσφέρονται από τα σχολικά εγχειρίδια για τη δημιουργία νέων δραστηριοτήτων επέκτασης της διδασκαλίας.

Από τα αποτελέσματα, επίσης τονίζεται η αναγκαιότητα και των δύο συστημάτων να εντάξουν βιωματικές δραστηριότητες στην σχολική τους καθημερινότητα. Στο ΕλΕκΣ, η χρήση βιωματικών δραστηριοτήτων δεν είναι διαδεδομένη ως πρακτική κατανόησης και επέκτασης της διδασκαλίας. Με τις ισχύουσες προϋποθέσεις, το ΑΠΣ δεν αναφέρει ρητά ότι θα πρέπει να γίνονται τέτοιου είδους δραστηριότητες. Ωστόσο, τα νέα ΑΠΣ αναμένεται να δίνουν προτάσεις για βιωματικές δραστηριότητες βασιζόμενα στην διεθνή βιβλιογραφία που θέλει αυτές να κατέχουν εξέχουσα θέση στην διδακτική καθημερινότητα των τάξεων των Μαθηματικών. Αντιθέτως, στο ΑμΕκΣ οι βιωματικές δραστηριότητες διαδραματίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην κατανόηση των διδασκόμενων εννοιών. Όπως αναφέρθηκε από τους εκπαιδευτικούς, οι βιωματικές δραστηριότητες χρησιμοποιούνται είτε εισαγωγικά, είτε ως κριτήρια ελέγχου κατανόησης των εννοιών κατά τη διάρκεια ή κατά το πέρας διδασκαλίας της έννοιας. Έτσι, οι μαθητές έρχονται σε μεγαλύτερη επαφή με το περιβάλλον τους και μαθαίνουν να επεξεργάζονται και να λαμβάνουν υπόψιν τους όλους τους παράγοντες που συγκροτούν μία πολυεπίπεδη μαθηματική βιωματική δραστηριότητα.

Κύριες διαφορές εντοπίστηκαν και κατά την οργάνωση των διδασκαλιών στα δύο εκπαιδευτικά συστήματα. Στο ΕλΕκΣ, όπως φάνηκε από το υλικό, δεν ανακοινώθηκε κάποιο πλάνο διδασκαλίας ή κάποιοι διδακτικοί στόχοι που θα έπρεπε να επιτευχθούν. Αντιθέτως, οι μαθητές καθόλη τη διάρκεια της δραστηριότητας αναζητούσαν την καθοδήγηση της εκπαιδευτικού για το επόμενο βήμα σε αυτή. Σημαντικό είναι να αναφερθεί ότι και η διάταξη του χώρου είναι κάτι που ξάφνιασε τους μαθητές καθώς στο τυπικό ελληνικό σχολείο η διάταξη των θρανίων είναι σε σειρές το ένα πίσω από το άλλο. Εδώ οι μαθητές έπρεπε να εξοικειωθούν με την αναδιάταξη των θρανίων και την εργασία σε ομάδες των 3-4 ατόμων. Ωστόσο, κάτι τέτοιο δεν φαίνεται να ισχύει για το ΑμΕκΣ στο οποίο οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με την διδακτική τεχνική εργασίας σε ομάδες. Η διάταξη του χώρου στο αμερικάνικο σχολείο δεν άλλαξε καθώς τα θρανία είναι πάντα διατεταγμένα σε μορφή Π για να μεγιστοποιείται η ομαδοσυνεργατική μάθηση. Ακόμη, κατά την εισαγωγή αναρτήθηκε το πλάνο του μαθήματος στον πίνακα και εξηγήθηκαν οι διδακτικοί στόχοι ακολουθούμενοι από μία περιληπτική περιγραφή της δραστηριότητας πριν την έναρξή της. Σε αυτόν τον παράγοντα εντοπίζονται οι μεγαλύτερες διαφορές μεταξύ των δύο συστημάτων.

Η μοντελοποίηση του προβλήματος και οι διάφορες προσεγγίσεις των μαθητών κατέχουν το κύριο μέρος της έρευνας. Στο ΑμΕκΣ, διαφαίνεται η ανοιχτή προσέγγιση του προβλήματος από τους μαθητές κάτι το οποίο ενθαρρύνεται από τους εκπαιδευτικούς. Οι προσεγγίσεις που συναντήθηκαν κατά τη μελέτη της έρευνας αυτής περιείχαν επιλύσεις που έκανα χρήση όλων των τριγωνομετρικών αριθμών αλλά και άλλων εννοιών που είχαν προηγηθεί όπως το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Οι μαθητές είτε ξεχωριστά στις ομάδες τους είτε μέσα από συνεργασία αυτών επιλέγουν ευφάνταστους τρόπους προσέγγισης και επίλυσης της δραστηριότητας. Όπως φάνηκε, κατ' αυτούς μεγάλη σημασία έχει η εύρεση πολλών και μαθηματικώς ορθών τρόπων. Η ορθότητα ελεγχόταν είτε από άμεσες μετρήσεις είτε από συγκρίσεις αποτελεσμάτων των άλλων ομάδων. Αυτό είναι ένα χαρακτηριστικό που τονίσθηκε ιδιαίτερα στη μελέτη των διαδικασιών μοντελοποίησης και επίλυσης από τους μαθητές του ΑμΕκΣ. Στον Κύκλο Μοντελοποίησης που εφαρμόσθηκε στο ΑμΕκΣ παρατηρείται μία επιπλέον μετάβαση: «Ερμηνεία και Επαναπροσδιορισμός μοντέλου/ παραμέτρων». Αυτό συμβαίνει διότι οι μαθητές με την εφαρμογή ενός μοντέλου δεν προχωρούν άμεσα στον Έλεγχο Αποτελεσμάτων, αλλά μέσα από συζητήσεις επανεξετάζουν τα δεδομένα τους, επαναλαμβάνουν τις μετρήσεις τους και διαμορφώνουν κατάλληλα το μοντέλο τους ώστε να περιγράφει με μεγάλη ακρίβεια και μαθηματική ορθότητα την πραγματική κατάσταση που τους παρουσιάζεται. Ιδιαίτερα, η συζήτηση και ο επαναπροσδιορισμός του μοντέλου γίνεται αμιγώς από τις ομάδες μέσω συνεργασίας. Ο καθηγητής έχει το ρόλο του παρατηρητή και οι μαθητές γνωρίζουν ότι δεν βρίσκεται εκεί ούτε για να δώσει το ορθό μοντέλο ούτε την ακριβή λύση. Έτσι, επιτυγχάνεται η ανταλλαγή ιδεών, αποτελεσμάτων και προάγεται ο υγιής διάλογος μεταξύ των συμμαθητών που εν τέλει αποφέρει και τα επιθυμητά αποτελέσματα.

Στο ΕλΕκΣ, από την άλλη πλευρά, παρατηρείται η ανάγκη των μαθητών για επιβεβαίωση από την εκπαιδευτικών. Ο εκπαιδευτικός, σε αυτό το σύστημα, κατέχει για τους μαθητές το ρόλο της αυθεντίας, δηλαδή του ατόμου που γνωρίζει και θα τους δώσει τη λύση αμέσως. Έτσι δεν αναπτύσσεται σε πολλές περιπτώσεις διάλογος μεταξύ των μαθητών και άρα η μετάβαση: «Ερμηνεία και Επαναπροσδιορισμός μοντέλου/ παραμέτρων» δεν κατέχει εξέχουσα θέση στον Κύκλο Μοντελοποίησης που απαντάται στο ΕλΕκΣ. Η εκπαιδευτικός βέβαια μέσα από ερωτήσεις προσπαθεί να θέσει τους μαθητές σε τροχιά και περαιτέρω σκέψη αλλά σε πλείστες των περιπτώσεων αυτό δεν επιτυγχάνεται καθώς οι μαθητές εμμένουν στο αρχικό τους μοντέλο και περιμένουν τον έλεγχο στο τέλος της δραστηριότητας. Αυτή η πρακτική αποτελεί τροχοπέδη στην ανάπτυξη της κριτικής ικανότητας των μαθητών οι οποίοι φάνηκαν να εμμένουν σε ένα μόνο μοντέλο περιγραφής της πραγματικής κατάστασης, αυτό που περιείχε την εφαπτομένη οξείας γωνίας. Αυτή η προσέγγιση, ωστόσο, δικαιολογείται καθώς η δραστηριότητα εξελίχθηκε την χρονική περίοδο που οι μαθητές είχαν μάθει την εφαπτομένη και δεν είχαν εισαχθεί ακόμα στο ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας. Έτσι, περιορίσθηκε το πρόβλημα από ανοικτού τύπου σε κλειστού με μονόδρομο τη χρήση της εφαπτομένης.

Πολλές διαφορές, επίσης, εντοπίζονται και στην χρήση διδακτικών και ψηφιακών εργαλείων από τα δύο συστήματα. Κυρίαρχο ρόλο στα διδακτικά εργαλεία κατέχει το γωνιόμετρο καθώς η δημιουργία των δραστηριοτήτων βασίζεται σε αυτό. Οι μαθητές κάθε συστήματος έλαβαν μία επίδειξη χρήσης του γωνιομέτρου κατά την εισαγωγή της δραστηριότητας. Αργότερα, οι εκπαιδευτικοί αναλάμβαναν το ρόλο του βοηθού σε όποια ομάδα είχε απορία σχετικά με τη χρήση του εργαλείου. Στο ΕλΕκΣ, οι μαθητές αντιμετώπισαν το γωνιόμετρο ως ένα ακόμη εργαλείο μέτρηση γωνιών και δεν δόθηκε ιδιαίτερη προσοχή στη φύση του εργαλείου αλλά ούτε και στον διδακτικό στόχο που κατείχε. Αντιθέτως, στο ΑμΕκΣ, οι μαθητές φάνηκε να κατανόησαν τόσο τη χρησιμότητα αλλά και τον διδακτικό στόχο του εργαλείου καθώς αυτό συμπληρώνει την διδασκαλία περί γωνιών. Πιο συγκεκριμένα, το γωνιόμετρο μετρά την γωνία από το ύψος του ματιού ως το επιθυμητό ύψος ανάλογα με τη δραστηριότητα. Η διαφοροποίηση αυτή περιλαμβάνεται στο αμερικάνικο πρόγραμμα σπουδών και κατέχει την ονομασία γωνία ανύψωσης (angle of elevation) ενώ αντίστοιχα δίνεται και η γωνία βύθισης (angle of depression) από το ύψος των οφθαλμών ως το επίπεδο της γης. Έτσι, για τους μαθητές του ΑμΕκΣ έγινε πιο ισχυρή συσχέτιση του γωνιομέτρου με την δραστηριότητα από ότι για τους μαθητές του ΕλΕκΣ.

Όσον αφορά λοιπά εργαλεία, έντονες διαφορές εντοπίστηκαν και κατά τη χρήση της τεχνολογίας. Οι μαθητές του ΕλΕκΣ δεν χρησιμοποίησαν καθόλου τεχνολογικά μέσα, ούτε υπολογιστή τσέπης. Αυτό οφείλεται στην ύπαρξη ενός πίνακα που δίνει αναλυτικά τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών από 0 έως 90 μοίρες στο σχολικό εγχειρίδιο. Έτσι, οι μαθητές δεν τράπηκαν ποτέ στην χρήση τεχνολογικών εργαλείων. Αντιθέτως, οι μαθητές του ΑμΕκΣ έχουν συνδέσει άμεσα την χρήση τεχνολογίας με την μάθηση. Είναι υποχρεωμένοι να φέρνουν προσωπικό φορητό υπολογιστή μαζί τους και υπολογιστή τσέπης. Αυτό συμβαίνει διότι οι εκπαιδευτικοί ανεβάζουν υλικό για την διδασκαλία σε πλατφόρμα του σχολείου. Επίσης, η φιλοσοφία του συστήματος επιβάλει λιγότερο χρόνο σε πράξεις και περισσότερο σε σκέψη και πολλαπλά μοντέλα εργασίας. Έτσι, η χρήση της τεχνολογίας διαδραμάτισε πολύ σημαντικό ρόλο στην διεξαγωγή της δραστηριότητας.

Στον τελευταίο παράγοντα που εξετάζεται για αυτή τη δραστηριότητα ο οποίος είναι η αλληλεπίδραση εκπαιδευτικού – μαθητή εντοπίζονται και εκεί διαφορές. Στο ΑμΕκΣ, οι εκπαιδευτικοί είναι πιο αποστασιοποιημένοι από τους μαθητές. Αναλαμβάνουν ενεργό ρόλο κατά την εισαγωγή της διδασκαλίας, την περιληπτική περιγραφή της δραστηριότητας, κατά την παρουσίαση των αποτελεσμάτων και στην επέκταση αυτής. Κατά την μοντελοποίηση και επίλυσης της δραστηριότητας αναλαμβάνουν το ρόλο του επιτηρητή και μόνο μέσω διερευνητικών ερωτήσεων προσπαθούν να εκμαιεύσουν τις απαντήσεις στις ερωτήσεις των μαθητών. Οι μαθητές έχουν μάθει να ενεργούν αυτόνομα και να μην ζητούν την βοήθεια του εκπαιδευτικού παρά μόνο σε περιπτώσεις μεγάλης σύγχυσης. Οι ομαδικές δραστηριότητες έχουν απώτερο σκοπό την διαλεύκανση προβλημάτων εντός του μαθητικού κοινού χωρίς την μεγάλη παρέμβαση του εκπαιδευτικού. Αντιθέτως, στο ΕλΕκΣ, εκπαιδευτικός και μαθητής είναι άρρηκτα συνδεδεμένοι. Έχοντας οι διδασκαλίες έναν δασκαλοκεντρικό χαρακτήρα και οι μαθητές για οποιαδήποτε απορία που μπορεί να λυθεί εντός συνόλου τους στρέφονται στον εκπαιδευτικό χωρίς να ψάξουν σε πλείστες περιπτώσεις άλλες διόδους επίλυσης. Η εκπαιδευτικός, στην παρούσα έρευνα, φαινόταν ως επιπλέον μέρος των ομάδων με λίγες φορές να είναι απλός παρατηρητής των επιλύσεων. Έτσι, και μέσα από αυτόν τον παράγοντα τονίζονται οι μεγάλες διαφορές των δύο συστημάτων.

Η παρούσα μελέτη επίσης ερευνά και την σύνδεση των εκπαιδευτικών συστημάτων με το Κοινωνικό Διδακτικό Τετράεδο (ΚΔΤ). Στο κέντρο του ΚΔΤ βρίσκεται το εκπαιδευτικό ίδρυμα στο οποίο βασίζονται οι άλλες 3 έδρες του: Μαθητές, Εκπαιδευτικοί και Τεχνουργήματα. Οι μαθητές ανήκουν στον διακριτό κύκλο διαβίωσης που περιλαμβάνει τους συνομήλικούς τους και την οικογένειά τους. Αυτό επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό την νοοτροπία τους, τη συνύπαρξή τους με τους εκπαιδευτικούς αλλά και τον τρόπο με τον οποίο επεξεργάζονται τα τεχνουργήματα – προβλήματα που τους δίνονται. Από την άλλη, οι εκπαιδευτικοί συνδυάζοντας τις επιρροές από το μαθητικό κοινό αλλά και τις νόρμες – κανόνες που θέτουν στην τάξη, δημιουργούν τεχνουργήματα ώστε να συνάδουν με τους παραπάνω παράγοντες. Στο ΕλΕκΣ, τονίσθηκε ιδιαίτερα επιρροή των μαθητών από την επεξεργασία μίας ομαδικής δραστηριότητας. Η ατομική εργασία των μαθητών είναι μία νόρμα που υπάρχει στο εκπαιδευτικό αυτό σύστημα και η οποία συνεχώς αλλάζει με την εισαγωγή ομαδικών δραστηριοτήτων στα σχολεία. Ωστόσο, οι μαθητές φάνηκαν να ξαφνιάζονται καθώς οι κινησιολογία τους αλλά και η αναζήτηση της επαλήθευσης από την εκπαιδευτικό. Αυτό επαληθεύει την πρόταση που θέλει του μαθητές να ξεφεύγουν από τη νόρμα που επικρατεί εντός τάξης – ατομική εργασία και έλεγχος αποτελεσμάτων από εκπαιδευτικό. Έτσι, συμπεραίνεται ότι η αλλαγή σε μία από τις έδρες που επηρεάζεται κατά κύριο λόγο τελευταία στο ΚΔΤ επέφερε αλλαγές και μεγάλες επιρροές στις άλλες που θέτουν τις βάσεις στην τάξη του ΕλΕκΣ.

Από τις μεγαλύτερες επιρροές που δέχτηκε το ΚΔΤ του ΕλΕκΣ είναι η εισαγωγή μιας βιωματικής δραστηριότητας στην μαθητική καθημερινότητα. Από το υλικό παρατηρήθηκε ότι οι αλλαγές από ατομική εργασία σε ομαδική και από το περιβάλλον χαρτί – μολύβι σε μέτρηση – μοντελοποίηση, αποτέλεσαν παράγοντες επιβράδυνσης της επιλυτικής διαδικασίας. Αυτό οφείλεται στην αλλαγής τις νόρμες των μαθητών αλλά και στην μαθητική τους καθημερινότητα. Σε αυτό το σημείο αναδεικνύεται η επιρροή από το περιβάλλον του μαθητή που τον θέλει είτε ενεργό είτε απαθές μέλος σε ομαδικές δραστηριότητες είτε ακόμα και απλό παρατηρητή με απόδοση μικρών προτάσεων για την δραστηριότητα. Στη συγκεκριμένη μελέτη εντοπίσθηκαν τα 2 από τα 3 είδη μαθητών, είτε είχαμε πολύ ενεργούς μαθητές είτε παρατηρητές που με τον έναυσμα της εκπαιδευτικού μετατρέπονταν σε ενεργά μέλη. Κατά συνέπεια, Οι επιρροές των μαθητών από το περιβάλλον τους αποδείχθηκαν θετικές και άρα υποστηρίζεται έτσι η εισαγωγή περισσότερων βιωματικών ομαδικών δραστηριοτήτων στο ΕλΕκΣ.

Στο ΑμΕκΣ, οι παρατηρήσεις που έγιναν σε σχέση με το ΚΔΤ παρουσιάζουν διαφορές. Εδώ, το εκπαιδευτικό ίδρυμα κατέχει μεγαλύτερη επιρροή στην μαθητική καθημερινότητα. Οι κανονισμοί, σε σχέση με την διδακτέα ύλη που έχουν τεθεί από αυτό, βασίζονται σε διεθνή στάνταρ τα οποία δημιουργούνται από τα Προγράμματα Σπουδών διάφορων εκπαιδευτικών συστημάτων. Έτσι, οι άλλες έδρες του ΚΔΤ επηρεάζονται άμεσα από αυτό. Οι νόρμες που έχει θέσει κάθε εκπαιδευτικός εντός της τάξης του είναι μοναδικές και βασίζονται στο μαθητικό κοινό που αυτές περιέχουν. Έτσι, εντοπίζονται και άμεσες επιρροές του εκπαιδευτικού ιδρύματος στους μαθητές και στους εκπαιδευτικούς με το συμπέρασμα να είναι ότι στο ευρύτερο περιβάλλον μαθητών και εκπαιδευτικών, που όπως αναφέρθηκε είναι η οικογένεια και οι συνομήλικοι, να εμπλέκεται και το εκπαιδευτικό ίδρυμα. Όπως παρατηρήθηκε, το σχολικό περιβάλλον συνδέεται άμεσα και άρρηκτα με το οικογενειακό καθώς υπάρχει συνεχής ενημέρωση είτε μέσω διαδικτυακής πλατφόρμας είτε με πιο άμεση επικοινωνία με τους γονείς. Έτσι, οι επιρροές των μαθητών από εξωτερικούς παράγοντες περιορίζονται αλλά παράλληλα προσδίδουν έναν ιδιαίτερο χαρακτήρα εντός τάξης που εμφανίζεται μέσω των δραστηριοτήτων.

Πιο συγκεκριμένα, η επιρροή του περιβάλλοντος εντοπίστηκε κατά τη βιωματική δραστηριότητα όπου λόγω Προγράμματος Σπουδών ήταν προγραμματισμένη να γίνει. Οι μαθητές εξοικειωμένοι με την ιδέα των βιωματικών δραστηριοτήτων, δεν τις θεωρούν ως ακόμη μία άσκηση αλλά σαν μία ευκαιρία για να δράσουν και να εξετάσουν τα μαθηματικά από μία άλλη οπτική γωνία. Πολλοί ωθούνται από το περιβάλλον τους, οικογένεια και εκπαιδευτικούς, να συμμετάσχουν σε προγράμματα STEAM οπότε είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με την ενεργό δράση κατά την επίλυση. Άρα η ενεργή ενασχόληση και επεξεργασία της βιωματικής δραστηριότητας αποτελεί ακόμη ένα στοιχείο που υποστηρίζει την θέση ότι το εκπαιδευτικό ίδρυμα επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό το μαθητικό και εκπαιδευτικό κοινό. Επίσης, η χρήση χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων που προωθείται από το πρόγραμμα σπουδών ενισχύει και την έδρα που αφορά τα τεχνουργήματα. Οι δραστηριότητες είναι διαμορφωμένες έτσι ώστε να προσφέρουν όσο τον δυνατόν περισσότερη χρήση των χειραπτικών εργαλείων και διδασκαλία μέσω της πράξης. Έτσι, το ΑμΕκΣ μέσω του εκπαιδευτικού ιδρύματος και του Προγράμματος Σπουδών που έχει δημιουργήσει, προσφέρει ευκαιρίες ανάπτυξης και εξέλιξης στις άλλες έδρες του ΚΔΤ, μαθητές, εκπαιδευτικοί και τεχνουργήματα.

Η παρούσα έρευνα συνιστά μια διδακτική πρόταση η οποία αποτελείται όμως από σημαντικούς και αναπόσπαστους παράγοντες. Οι παράγοντες αυτοί είναι η φύση του προβλήματος ως ανοιχτό πρόβλημα σε ένα αυθεντικό πλαίσιο, το καλό κλίμα συνεργασίας και επικοινωνίας μεταξύ των μαθητών, οι παρεμβάσεις του εκπαιδευτικού αλλά και η χρήση του διδακτικού εργαλείου στο αρχικό στάδιο της δραστηριότητας. Ο συνδυασμός των παραπάνω παραγόντων αλλά ειδικότερα η απαραίτητη συνύπαρξή τους είναι καθοριστικής σημασίας για αυτή την διδακτική πρόταση. Επομένως η απουσία κάποιων παραγόντων ίσως επιφέρει διαφορετικά αποτελέσματα.

Η διδακτική πρόταση στοχεύει στην ανάπτυξη και εφαρμογή στρατηγικών επίλυσης προβλήματος αλλά και της κατανόησης εννοιών της Τριγωνομετρίας. Το πλαίσιο χρήσης των

εννοιών της Τριγωνομετρίας μέσα από στρατηγικές και διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων προτείνεται εξαιτίας των δυσκολίων που αντιμετωπίζουν οι μαθητές και οδηγούνται μακριά από την εννοιολογική κατανόηση αφού εστιάζουν περισσότερο στις διαδικασίες. Συγκεκριμένα η έννοια του της εφαπτομένης προτείνεται να προσεγγιστεί μέσω πραγματικής κατάστασης μέσα από προβλήματα που αφορούν την εύρεση ύψους κτίσματος ή δομήματος. Σκοπός είναι οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν μεθόδους που περιλαμβάνουν την χρήση εφαπτομένης και λοιπών τριγωνομετρικών αριθμών χρησιμοποιώντας την γεωμετρική ερμηνεία της εφαπτομένης ως λόγου ύψους από το επίπεδο των οφθαλμών προς την οριζόντια απόσταση του μαθητή από το αντικείμενο υπό μελέτη. Συνεπώς, η ιδέα της χρήσης τριγωνομετρικών αριθμών λειτουργεί ως προσεγγιστικός τρόπος υπολογισμού του ύψους, ενώ παράλληλα συνυπάρχει με την έννοια του λόγου ευθυγράμμων τμημάτων όπου για την καλύτερη προσέγγιση (approximation) λαμβάνονται πολλαπλές και ακριβείς μετρήσεις μέσω του διδακτικού εργαλείου, γωνιομέτρου. Τα παραπάνω επομένως έχουν δύο στόχους την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της εφαπτομένης αλλά και την κατασκευή του μέσα από την μέθοδο της εύρεσης ύψους δομήματος η οποία προτείνεται ώστε να αποτελέσει το τελικό άτυπο στάδιο μετά την τυπική έννοια της εφαπτομένης.

7 Βιβλιογραφία

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? Journal of mathematical modelling and application, 1(1), 45-58.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? In Mathematical modelling (pp. 222-231). Woodhead Publishing.

Boaler, J. (1998). Open and closed mathematics: student experiences and understandings. Journal for Research in Mathematics Education, 29 (1) 41-62.

Doerr, H. M. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? In Modelling and applications in mathematics education (pp. 69-78). Springer, Boston, MA.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Freudenthal, H. (1987). Mathematics starting and staying in reality. In Proceedings of the USCMP Conference on Mathematics Education on Development in School Mathematics around the World, NCTM, Reston, VA.

Freudenthal, H. (1971). Geometry Between the Devil and the Deep Sea. Educational Studies in Mathematics, 3, 413-435.

Galbraith, P. (2007). Dreaming a 'possible dream': More windmills to conquer. In Mathematical Modelling (pp. 44-62). Woodhead Publishing.

Haines, C. R., & Crouch, R. (2013). Remarks on a modeling cycle and interpreting behaviours. In Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies (pp. 145-154). Dordrecht: Springer.

Hancock, C. L. (1995). Enhancing mathematics learning with open-ended questions. The Mathematics Teacher, 88(6), 496.

Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., ... & Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. Educational researcher, 25(4), 12-21

Jurdak, M. (2016). Learning and teaching real world problem solving in school mathematics. Cham: Springer.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. ZDM, 38(3), 302-310.

Lesh, R., Lester, F. K., & Hjalmarson, M. (2003). A models and modeling perspective on metacognitive functioning in everyday situations where problem solvers develop mathematical constructs. Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching, 383-403.

Mousoulides, N., SRIRAMAN, B., & CHRISTOU, C. (2007). From problem solving to modelling. Education, 12(1), 23-47.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Part 1: Introduction. Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study. New York/etc.: Springer, New ICMI Studies series, 10.

Polya, G. (1945/1973). How to solve it. Princeton, NJ: Princeton University.

Sawada, T. (1997). Developing Lesson Plans. In J. Becker, & S. Shimada (Eds.), The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics. (p. 23-35). National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. H. (1985). Mathematical problem solving. New York, NY: Academic Press.

Sullivan, P. A. (2003). The potential of open-ended mathematics tasks for overcoming barriers to learning. In Annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia 2003 (pp. 813-816). Deakin University.

Τριανταφύλλου, Χ., Μπακογιάννη, Δ., Κόσυβας, Γ. (2017). Η Πορεία διαμόρφωσης του συλλογικού συλλογισμού μιας ομάδας μαθητών. Πρακτικά 7ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Μαθηματική Γνώση και Διδακτικές Πρακτικές. Αθήνα: ΕΝΕΔΙΜ.

Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Drijvers, P. (2014). Realistic mathematics education. Encyclopedia of mathematics education, 521-525.

Morris, T. H. (2019). Experiential learning – a systematic review and revision of Kolb's model. *Interactive Learning Environments*, *28*(8), 1064–1077.

Kolb, D. A. (2014). *Experiential learning: Experience as the source of learning and development*. FT press.

Tong, D. H., Loc, N. P., Uyen, B. P., & Cuong, P. H. (2020). Applying Experiential Learning to Teaching the Equation of a Circle: A Case Study. *European Journal of Educational Research*, *9*(1), 239-255.

Surya, E., & Putri, F. A. (2017). Improving mathematical problem-solving ability and self-confidence of high school students through contextual learning model. *Journal on Mathematics Education*, *8*(1), 85-94.

Mayoral-Rodríguez, S., Timoneda-Gallart, C., & Pérez-Álvarez, F. (2018). Effectiveness of experiential learning in improving cognitive Planning and its impact on problem solving and mathematics performance/Eficacia del aprendizaje experiencial para mejorar la Planificación cognitiva y su repercusión en la resolución de problemas y el rendimiento matemático. *Culture and Education*, *30*(2), 308-337.

Uyen, B. P., Tong, D. H., & Lien, N. B. (2022, April). The effectiveness of experiential learning in teaching arithmetic and geometry in sixth grade. In *Frontiers in Education* (Vol. 7, p. 858631). Frontiers Media SA.

Mutmainah, M., Rukayah, R., & Indriayu, M. (2019). Effectiveness of experiential learning-based teaching material in Mathematics. *International Journal of Evaluation and Research in Education (IJERE)*.

Chesimet, M. C., Githua, B. N., & Ng'eno, J. K. (2016). Effects of Experiential Learning Approach on Students' Mathematical Creativity among Secondary School Students of Kericho East Sub-County, Kenya. *Journal of Education and Practice*, *7*(23), 51-57.

Breunig, M. (2017). Experientially learning and teaching in a student-directed classroom. *Journal of Experiential Education*, *40*(3), 213-230.

Kolb, A. Y., & Kolb, D. A. (2017). Experiential learning theory as a guide for experiential educators in higher education. *Experiential Learning & Teaching in Higher Education*, *1*(1), 7-44.

Gutstein, E. R. (2016). "Our issues, our people—Math as our weapon": Critical mathematics in a Chicago neighborhood high school. *Journal for Research in Mathematics Education*, *47*(5), 454-504.

Kidonia, Z. I. (2016). Experiential learning of English in Greek all-day primary schools: Investigating curriculum implementation. *Research Papers in Language Teaching and Learning*, *7*(1), 105.

Knoblauch, C. (2022, June). Experiential Learning in Digital Contexts—A Case Study. In *The Learning Ideas Conference* (pp. 181-191). Cham: Springer International Publishing.

Stillman, G. Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H-W., & Niss, M. (eds) (2007). Modelling and applications in mathematics education: the 14th ICMI study. New ICMI Study Series Volume 10. *ZDM Mathematics Education* **40**, 337–340 (2008).

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt. *Journal of mathematical modelling and application*, *1*(1), 45-58.

Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems. *Mathematical modelling (ICTMA 12): Education, engineering and economics*, 222-231.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and instruction*, *4*(4), 273-294.

Calder, N. S. (2018). Using Scratch to facilitate mathematical thinking. *Waikato Journal of Education*, 23(2), 43–58.

Pierce, R., & Stacey, K. (2010). Mapping pedagogical opportunities provided by mathematics analysis software. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*, 1-20.

Leikin, R. (2014). Challenging mathematics with multiple solution tasks and mathematical investigations in geometry. *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices*, 59-80.

Τζεκάκη, Μ. (2011). Μαθηματική Δραστηριότητα και Μαθηματικά Έργα. Κεντρική Ομιλία. Στο Καλδρυμίδου, Μ. & Βαμβακούση, Ξ. (επιμ.). Πρακτικά του 4ου Συνέδριο της Ένωσης Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών (σ.51-66). Ιωάννινα, ΕΝΕΔΙΜ - Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων.

Steinbring, H. (2005). Analyzing mathematical teaching-learning situations—the interplay of communicational and epistemological constraints. *Educational studies in mathematics*, *59*, 313-324.

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of education*, *196*(2), 1-38.

Resnick, L. B. (1987). Education and learning to think.

Loewenberg Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Kieran, C., Forman, E., & Sfard, A. (2002). *Learning discourse*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Valero, P. (2010). Mathematics education as a network of social practices. In *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. LIV-LXXX). Institut National De Recherche Pédagogique.

Bernstein, B. (2000). *Pedagogy, symbolic control and identity: Theory, research, critique*. Rowman & Littlefield.

Rezat, S., & Sträßer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM*, *44*, 641-651.

Caswell, H. L., & Campbell, D. S. (1935). *Curriculum development*. American Book Co.

Μοσχοβίτη Α., (2019). Μελέτη πτυχών της Μαθηματικής Δραστηριότητας στο πλαίσιο του Διπλώματος του Διεθνούς Απολυτηρίου (INTERNATIONAL BACCALAUREATE DIPLOMA)

Schmidt, W., Houang, R., & Cogan, L. (2002). A coherent curriculum. *American Education*, *26*(10), 1-18.

Willacy, H., West, A., Murphy, C., & Calder, N. S. (2017). Personalised learning with mobile technologies in mathematics: An exploration of classroom practice. Teachers and Curriculum, 17(2), 77–84.

Prescott, A., & Maher, D. (2018). The Use of Mobile Technologies in the Primary School Mathematics Classroom—Developing 'Create-Alouds'. *Using mobile technologies in the teaching and learning of mathematics*, 283-300.

Ingram, N., Williamson-Leadley, S., & Pratt, K. (2016). Showing and telling: using tablet technology to engage students in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *28*, 123-147.

Attard, C., Calder, N., Holmes, K., Larkin, K., & Trenholm, S. (2020). Teaching and learning mathematics with digital technologies. *Research in mathematics education in Australasia 2016–2019*, 319-347.

Orlando, J., & Attard, C. (2016). Digital natives come of age: The reality of today's early career teachers using mobile devices to teach mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *28*, 107-121.

Hilton III, J. (2020). Open educational resources, student efficacy, and user perceptions: A synthesis of research published between 2015 and 2018. *Educational Technology Research and Development*, *68*(3), 853-876.

Julie, C., & Mudaly, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14 th ICMI Study*, 503-510.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zdm*, *38*, 302-310.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study*. Boston, MA: Springer US.

Cooper, B., & Dunne, M. (1999). *Assessing children's mathematical knowledge: Social class, sex, and problem-solving*. McGraw-Hill Education (UK).

Cooper, B., & Harries, T. (2002). Children's Responses to ContrastingRealistic'Mathematics Problems: Just how realistic are children ready to be?. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(1), 1-23.

Ferri, R. B. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education* (pp. 121-133). New York: Springer International Publishing.

Maaß, C. (2010). *Diskursdeixis im Französischen: eine korpusbasierte Studie zu Semantik und Pragmatik diskursdeiktischer Verweise* (Vol. 355). Walter de Gruyter.