ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
UNIVERSITY OF CYPRUS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Δ Ι Π Λ Ω Μ Α Τ Ι Κ Η Ε Ρ Γ Α Σ Ι Α

Μαθηματικά σε ένα εργαστήριο ξυλουργικής: Δράσεις διερεύνησης μαθητών.

Γκοσδής Χρήστος
7112122100033

Επιβλέπουσα Συμβουλευτικής Επιτροπής

Χρυσαυγή Τριανταφύλλου **Επίκουρη Καθηγήτρια**

Αθήνα
Νοέμβριος 2024

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το
Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 11/11/2024 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Δέσποινα Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Γεώργιος Ψυχάρης	Επίκουρος Καθηγητής
▪ Χρυσαυγή Τριανταφύλλου	Επίκουρη Καθηγήτρια

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα
▪ Δέσποινα Πόταρη	Καθηγήτρια
▪ Γεώργιος Ψυχάρης	Επίκουρος Καθηγητής
▪ Χρυσαυγή Τριανταφύλλου	Επίκουρη Καθηγήτρια

Αφιερώνεται στη μητέρα μου, Ελένη
και το θείο μου, Ιερόθεο.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά:

Την επιβλέπουσα καθηγήτρια κα Χρυσαυγή Τριανταφύλλου τόσο για τις συμβουλές που μου παρείχε και το χρόνο που αφιέρωσε για τη συγγραφή της παρούσας εργασίας, όσο και το μάθημα της «Η Διδασκαλία μέσω επίλυσης προβλήματος – Μαθηματικοποίηση», που ήταν η αφορμή για το θέμα της διπλωματικής εργασίας.

Τον κο Γ. Ψυχάρη και την κα Δ. Πόταρη που με τίμησαν με τη συμμετοχή τους στην τριμελή συμβουλευτική επιτροπή της διπλωματικής μου εργασίας.

Τους μαθητές μου Πέτρο, Τάσο, Λεωνίδα, Νικολέτα, Γιώργο, Κωνσταντίνο και Μαριεύη που συμμετείχαν στην έρευνα για την άψογη συνεργασία τους.

Τη φίλη μου Μαντώ για την φιλολογική επιμέλεια της παρούσας εργασίας.

Το φίλο μου Σωτήρη, για τις επαγγελματικές συμβουλές του πάνω στις ξυλουργικές κατασκευές.

Το φίλο μου Σαράντη, που μου δάνεισε το απαραίτητο ηλεκτρικό εργαλείο ώστε να ολοκληρωθούν οι ξύλινες κατασκευές της έρευνας.

Τέλος, την οικογένεια μου η οποία με στηρίζει και είναι πάντα δίπλα μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη……………………..…………………………………………………………….7
Abstract……………………..……………………………………………………………….7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο…………..…………………………………………………………………8
Εισαγωγή…………………..……………………………………………………………….8
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο ………………..……………………………………………………..12
Θεωρητικό Πλαίσιο - Βιβλιογραφική ανασκόπηση………..……………………12
2.1 Επίλυση Προβλήματος σε αυθεντικά πλαίσια………………………….....12
2.1.1 Εισαγωγή ………………………………………………………………..12
2.1.2 Ρεαλιστικά Προβλήματα………………………………………………..12
2.1.3 Αυθεντικά προβλήματα…………………………………………………18
2.2 Διερευνητική Μάθηση….………………………………………………22
2.2.1 Δράσεις Διερεύνησης ………………………………………………...22
2.2.3 Ο Ρόλος του Εκπαιδευτικού στη Διερευνητική Μάθηση….…………...23
2.2.4 Μαθηματικά έργα που προτείνονται στη Μάθηση μέσω διερεύνησης…………………………………………………………..25
2.3 Στάσεις και αντιλήψεις των μαθητών για τη σημασία των Μαθηματικών ….……………………………………………27
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο………..…………………………………………………………...30
Μεθοδολογία………………………………………………………………………30
3.1 Ερευνητικό Θέμα και Ερευνητικά Ερωτήματα……………………......30
3.2 Συμμετέχοντες…………………………………………………………..30
3.2.1 Συμμετέχοντες Μαθητές………………………………………………..30
3.2.2 Ο ερευνητής και ο ρόλος του…………………………………………...32
3.3 Υλικά και Εργαλεία του Εργαστηρίου ……………………………………32
3.4 Μέσα Συλλογής Δεδομένων……………………………………………33
3.5 Περιγραφή Φάσεων της Έρευνας………………………………………..34
3.6 Τα μαθηματικά έργα……………………………………………………...37
3.6.1 Μαθηματικό Έργο 1 (ΜΕ1): Κατασκευή Οβάλ Τραπεζιού……………37
3.6.2 Μαθηματικό έργο 2 (ΜΕ2): Κατασκευή Πλαισίου Τέντας……………..38
3.6.3 Μαθηματικό έργο 3 (ΜΕ3): Κατασκευή Ξύλινης Στέγης………………39
3.7 Μέθοδοι Ανάλυσης των ερευνητικών δεδομένων 40
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο …………..……………………………..………………………41
Αποτελέσματα …………..………………………………………………………41
4.1 Δράσεις Διερεύνησης των συμμετεχόντων κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε ένα εργαστήριο ξυλουργικής…….…....... 41
4.1.1 Συνεργασία - Ανάθεση Εργασιών..…………………………………42
4.1.2 Διατύπωση Ερωτημάτων...……………………………………….. 42
4.1.3 Διατύπωση Ισχυρισμών………………………………………………..43
4.1.4 Τρόποι διερεύνησης πιθανών λύσεων.…………………………………..44
4.1.4.α Μέσω Μοντελοποίησης του Προβλήματος …………………………..44
4.1.4.β Με τη χρήση Γεωμετρικών Οργάνων……………………………....47
4.1.4.γ Με τη χρήση υλικών του εργαστηρίου ………………………………48
4.1.5 Κριτήρια απόρριψης ή αποδοχής προτεινόμενων Λύσεων …………………………………………………………………51
4.1.5.α Με κριτήριο τη μαθηματική ορθότητα……….…………………..51
4.1.5.β Με κριτήριο το χρόνο υλοποίησης………..…………………….52

***4.1.5.γ Με κριτήριο την ακρίβεια στη χάραξη της κοπής*……………………....52
4.1.5.δ Με κριτήριο το οικονομικό κόστος…………………………………....53
4.1.6 Ανάπτυξη κυκλικών δράσεων διερεύνησης ……………………………..54
4.2 Στάσεις των συμμετεχόντων ……………………………………………..55
4.2.1 Στάσεις πριν την παρέμβαση στο εργαστήριο ξυλουργικής…………....55
4.2.1.α ***Στην καθημερινή ζωή***……………………………………………………56
4.2.1.β ***Στο χώρο εργασίας*** ……………………………………………………57
4.2.1.γ ***Τρόπος σκέψης***…………………………………………………………...59
4.2.2 Αρνητικές στάσεις για τη χρησιμότητα των μαθηματικών……………..60
4.2.3 Θετικές στάσεις για τη χρησιμότητα των μαθηματικών………………..63
4.2.3 Στάσεις μετά την παρέμβαση στο εργαστήριο της ξυλουργικής……….63
4.2.3.α Χρήση στην καθημερινότητα……………………………………………63
4.2.3.β Χρήση στο χώρο εργασίας……………………………………………..64
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5^ο……………..………………………………………………………...66
Συμπεράσματα-Συζήτηση……………..…………………………………………….....66
5.1 Συμπεράσματα ………………………………………………………………66
5.2 Συζήτηση …………………………………………………………………..69

Βιβλιογραφία………………..……………………………………………………..70

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία μελετά τις δράσεις διερεύνησης πέντε μαθητών και δυο μαθητριών Γ΄ Γυμνασίου και Α΄ Λυκείου κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε ένα εργαστήριο ξυλουργικής. Παράλληλα, μελετώνται οι στάσεις των συμμετεχόντων για το ρόλο των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή και το χώρο εργασίας και αν η εμπλοκή τους στη συγκεκριμένη δραστηριότητα επηρέασε τις παραπάνω στάσεις. Για τη συλλογή των δεδομένων στο εργαστήριο ξυλουργικής χρησιμοποιήθηκαν οπτικοακουστικά μέσα. Για τον προσδιορισμό των δράσεων διερεύνησης χρησιμοποιήθηκε το θεωρητικό πλαίσιο της Διερευνητικής Μάθησης (inquiry-based learning), μια παιδαγωγική μέθοδο που εστιάζει στην ενεργό συμμετοχή των μαθητών κατά τη μάθηση μέσω ερωτήσεων, έρευνας, αναστοχασμού και συνεργασίας με τους συμμαθητές τους. Μέσω της εμπλοκής τους στην επίλυση των προβλημάτων ξυλουργικής της έρευνας αυτής, οι συμμετέχοντες συνεργάστηκαν, ανέθεσαν ρόλους, διατύπωσαν ερωτήματα και συλλογισμούς και διερεύνησαν πιθανές λύσεις τις οποίες απέρριψαν ή αποδέχτηκαν με γνώμονα τους περιορισμούς του χώρου εργασίας της ξυλουργικής. Επίσης, πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις πριν και μετά την εμπλοκή των συμμετεχόντων στη συγκεκριμένη δραστηριότητα οι οποίες περιελάμβαναν ερωτήσεις σε σχέση με τις αντιλήψεις των συμμετεχόντων για την ωφέλεια των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή και το χώρο εργασίας. Από τις απαντήσεις των συμμετεχόντων πριν και μετά την εμπλοκή τους στην επίλυση των προβλημάτων ξυλουργικής της έρευνας φαίνεται οτι η παραπάνω διαδικασία συνέβαλε στη μεταβολή της στάσης τους για τη σημασία των Μαθηματικών στην ανθρώπινη καθημερινότητα.

Λέξεις κλειδιά: επίλυση προβλημάτων, διερευνητική μάθηση, στάσεις για τα μαθηματικά, μαθηματικά στην καθημερινή ζωή, μαθηματικά και χώροι εργασίας

Abstract

This thesis studies the exploratory actions of five students and two female students of the third grade of Junior High School and first grade of Senior High School in solving mathematical problems in a carpentry workshop. At the same time, the participants' attitudes about the role of mathematics in everyday life and the workplace and whether their involvement in this activity influenced these attitudes are studied. Audiovisual media were used to collect data in the carpentry workshop. The theoretical framework of inquiry-based learning, a pedagogical method that focuses on students' active participation in learning through questioning, inquiry, reflection and collaboration with their peers, was used to identify inquiry activities. Through their engagement in solving the carpentry problems in this research, participants collaborated, assigned roles, formulated questions and reflections, and explored possible solutions that they rejected or accepted based on the limitations of the carpentry workplace. Interviews were also conducted before and after participants' engagement in the activity which included questions in relation to participants' perceptions of the benefits of mathematics in their daily lives and workplace. From the participants' responses before and after their involvement in solving the carpentry problems in the research, it appears that the above process contributed to the change in their attitudes about the importance of mathematics in human daily life.

Keywords: problem solving, exploratory learning, attitudes, mathematics in everyday life, mathematics and workplaces

Κεφάλαιο 1ο
Εισαγωγή

Η παρούσα έρευνα εστιάζει στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε αυθεντικά πλαίσιά από μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης και συγκεκριμένα, στον χώρο της ξυλουργικής τέχνης. Το ιδιαίτερο ενδιαφέρον για την έρευνα και τη συγγραφή της ως άνω θεματικής, προκύπτει από προηγούμενη προσωπική μου εμπλοκή σε επίλυση αυθεντικών μαθηματικών προβλημάτων σε εξωσχολικά πλαίσια. Η έρευνα εξετάζει τον τρόπο με τον οποίο η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε πραγματικά εργασιακά περιβάλλοντα δύναται να προάγει την ενεργό συμμετοχή και την κριτική σκέψη των μαθητών. Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να εφαρμόσουν κεκτημένες θεωρητικές γνώσεις σε ρεαλιστικές καταστάσεις, με στόχο την ενίσχυση της ικανότητας επίλυσης σύνθετων προβλημάτων. Έτσι, παράλληλα αναδεικνύεται και ο καθοριστικός ρόλος που διαδραματίζουν τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή των ανθρώπων καθώς και στον χώρο εργασίας τους.

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφική μου ανασκόπηση, ο χώρος της διδακτικής των Μαθηματικών υποστηρίζει –σε παγκόσμιο επίπεδο- την εξής θέση. Για την πλειονότητα των μαθητών, ο κύριος στόχος της μαθηματικής εκπαίδευσης θα πρέπει να είναι η βελτίωση των ευκαιριών και των επιδόσεών τους στην εργασία καθώς και στη ζωή. Μάλιστα, την ίδια στιγμή κεντρικό θέμα πολιτικής έχει γίνει η σύνδεση της μαθηματικής εκπαίδευσης με την ετοιμότητα για εργασία (Grubb & Lazerson, 2004, Mehta, 2013, Miller).

Η έρευνα της Διδακτικής των Μαθηματικών εστιάζει στην απόσταση μεταξύ των μαθηματικών που αποτελούν αντικείμενο διδασκαλίας στο σχολείο και των μαθηματικών που ενυπάρχουν σε διάφορες ανθρώπινες δραστηριότητες. Το κενό αυτό, μεταξύ του σχολικού μαθήματος και της καθημερινής εφαρμογής των μαθηματικών δηλαδή, έχει ως αποτέλεσμα την αδυναμία προσαρμογής των μαθητών σε κοινωνικές και εργασιακές δραστηριότητες, καθώς δυσκολεύονται να αποδώσουν νόημα σε αυτό που κάνουν. (Τριανταφύλλου, 2010). Η παραδοσιακή διδασκαλία των Μαθηματικών συχνά επικεντρώνεται σε αφηρημένες έννοιες και τυποποιημένες διαδικασίες, οι οποίες δεν συσχετίζονται άμεσα με πραγματικές καταστάσεις που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην καθημερινή τους ζωή. Αυτό μπορεί να οδηγήσει σε έλλειψη ενδιαφέροντος και παρακίνησης, αφού οι μαθητές δεν εντοπίζουν την άμεση ή έστω έμμεση συνάφεια των Μαθηματικών με τις προσωπικές και επαγγελματικές τους φιλοδοξίες. Προκειμένου να γεφυρωθεί αυτό το χάσμα, καθίσταται αναγκαίο να ενσωματώνονται στην εκπαιδευτική διαδικασία πραγματικά παραδείγματα και προβλήματα από την καθημερινότητα, τα οποία απαιτούν την άμεση εφαρμογή μαθηματικών εννοιών. Με αυτόν τον τρόπο, αφενός οι μαθητές θα καταστούν ικανοί ώστε να αντιληφθούν την αξία των Μαθηματικών στην επίλυση αληθινών προβλημάτων. Αφετέρου η διαδικασία αυτή θα συμβάλλει στην καλλιέργεια και ανάπτυξη δεξιοτήτων που θα αποδειχθούν μελλοντικά χρήσιμες σε ποικίλες κοινωνικές και επαγγελματικές καταστάσεις. Επιπλέον, μία μέθοδος διδασκαλίας βασισμένη στην πρακτική παρέχει τη δυνατότητα ενίσχυσης της κριτικής σκέψης και την ικανότητα προσαρμογής σε νέα δεδομένα, καθιστώντας έτσι τους μαθητές ικανότερους στην αντιμετώπιση των προκλήσεων του σύγχρονου κόσμου.

Οι Akkerman et al. (2010) πρεσβεύουν πως η πρόκληση για την εκπαίδευση είναι η δημιουργία ευκαιριών τόσο για τη συμμετοχή, όσο και για τη συνεργασία των μαθητών σε ποικίλα γνωστικά και επαγγελματικά πεδία. Οι παραπάνω προκλήσεις είχαν σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση ενός νέου ρεύματος στην έρευνα που αφορά τη μελέτη σπουδαστών και εκπαιδευτικών που εμπλέκονται σε δραστηριότητες, σε αυθεντικά περιβάλλοντα χώρων εργασίας (Williams & Wake, 2007, Triantafillou, 2010, Akkerman & Baker, 2011). Η μελετητές αυτής της προσέγγισης υποστηρίζουν ότι πρέπει να δίνεται η ευκαιρία στους μαθητές να εφαρμόζουν τις θεωρητικές τους γνώσεις σε πραγματικά περιβάλλοντα εργασίας. Έτσι, ώστε να αναπτύσσονται οι δεξιότητες, αλλά και οι ικανότητές τους με τρόπο που να είναι άμεσα σχετικές και αξιοποιήσιμες στην μετέπειτα επαγγελματική τους πορεία. Επιπρόσθετα, οι ερευνητές υπογραμμίζουν την σπουδαιότητα της ανάπτυξης δεξιοτήτων συνεργασίας και επικοινωνίας των μαθητών, οι οποίες είναι απαραίτητες πλέον σε οποιονδήποτε επαγγελματικό κλάδο αυτοί επιλέξουν. Με την εμπλοκή των μαθητών σε αυθεντικές δραστηριότητες, επιτυγχάνεται επίσης η βαθύτερη κατανόηση των επαγγελματικών πρακτικών και των απαιτήσεων της αγοράς εργασίας, πράγμα που συνεισφέρει στην καλύτερη προετοιμασία για τη μελλοντική τους σταδιοδρομία.

Ένα πολύ μικρό ποσοστό μαθητών καθίσταται ικανό να κατανοήσει τον τρόπο με τον οποίο οι διδαχθείσες μαθηματικές έννοιες σχετίζονται με αυθεντικές καταστάσεις που μπορεί να συναντήσουν στην καθημερινή ζωή, ακόμη και στις περιπτώσεις που απολαμβάνουν τη διδασκαλία και τη μελέτη των Μαθηματικών (Borko et al., 1992). Τα προηγούμενα χρόνια είχαν διεξαχθεί μελέτες σχετικά με τις στάσεις των μαθητών για τη σημασία των Μαθηματικών στην ανθρώπινη καθημερινότητα, αλλά και για την αξιοποίησή αυτών στις μελλοντικές σπουδές και την επαγγελματική εξέλιξή τους. Οι μελετητές επιχείρησαν να εντοπίσουν τη σχέση ανάμεσα στη στάση των μαθητών προς τα Μαθηματικά και την επιδοσή τους σε αυτά (π.χ. Farooq & Shah, 2008- Schoenfeld, 1989). Από αυτές τις μελέτες, κατέστη σαφές ότι η αδυναμία των μαθητών να αντιληφθούν τη σπουδαιότητα των μαθηματικών έγκειται στην αρνητική στάση τους απέναντι στα ίδια τα Μαθηματικά, αφού ακόμα και οι μαθητές με υψηλές επιδόσεις στο αντικείμενο αμφισβητούσαν τη σημασία τους στην καθημερινή ζωή. (Musto, 2008). Μια κοινή αντίληψη σχετική με τη συμβολή των Μαθηματικών στην καθημερινή ζωή των ανθρώπων αφορά την αναγκαιότητα ένταξης του μαθήματος σε κατάλληλο πλαίσιο, ούτως ώστε να εξυπηρετεί τον στόχο του, επιτρέποντας σε όλους τους μαθητές να αποκτήσουν επίγνωση του σημαντικού ρόλου των Μαθηματικών στην κοινωνία (Julie, 2002- Sealey & Noves, 2010). Τα συμπεράσματα της έρευνας των Dié Gijsbers, Lesley de Putter-Smits & Birgit Pepin, που διεξήχθη στις Κάτω Χώρες το 2019, σχετικά με το πώς η διδασκαλία μαθηματικών εννοιών σε αυθεντικό πλαίσιο μεταβάλλει τις στάσεις των μαθητών για τη σημασία των μαθηματικών στην ανθρώπινη καθημερινότητα, απέδειξαν τα εξής. Οι μαθητές όχι μόνο κατανόησαν τις διδασκόμενες μαθηματικές έννοιες, αλλά η διδασκαλία σε αυθεντικό πλαίσιο επέτρεψε στους μαθητές να ενισχύσουν και τις στάσεις τους για τη σπουδαιότητα των μαθηματικών.

Η παρούσα διπλωματική εργασία μελετά τις ενέργειες που πραγματοποιούν επτά μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και της Α΄ Λυκείου κατά την επίλυση αυθεντικών προβλημάτων με την μορφή βιωματικών δραστηριοτήτων, εμπνευσμένων από το χώρο της ξυλουργικής τέχνης. Οι δραστηριότητες αυτές αποτελούνται από τρεις ημιτελείς κατασκευές από ξύλο και περιλαμβάνουν υπολογισμούς διαστάσεων και γωνιών με ακρίβεια, χρησιμοποιώντας τα εργαλεία μέτρησης που έχει στη διάθεσή του ένας ξυλουργός και λαμβάνοντας πάντα υπόψη τους περιορισμούς ενός επαγγελματία τεχνίτη σε διαθέσιμους πόρους, ώστε να είναι βιώσιμη η εργασία. Παράλληλα μελετά τις μεταβολές των αντιλήψεων και των στάσεων τους απέναντι στη σημασία των μαθηματικών στην ανθρώπινη καθημερινότητα πριν και μετά την εφαρμογή των βιωματικών δραστηριοτήτων.

Το <u>δεύτερο κεφάλαιο</u> περιλαμβάνει τη θεωρητική προσέγγιση της έρευνας. Το κεντρικό θέμα της συνίσταται στην περιγραφή των αυθεντικών προβλημάτων, καθώς και στην αλληλένδετη σχέση μεταξύ επίλυσης αυθεντικών προβλημάτων και διερευνητικής μάθησης. Παράλληλα, παρουσιάζεται μια βιβλιογραφική ανασκόπηση που αφορά τις στάσεις και τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τη σημασία των μαθηματικών στην ανθρώπινη καθημερινότητα.

Στο <u>τρίτο κεφάλαιο</u> αναλύεται η μεθοδολογία της έρευνας, η οποία αποτελείται από τα ερευνητικά ερωτήματα, την παρουσίαση του προφίλ των συμμετεχόντων όπως αυτά προκύπτουν από τις συνεντεύξεις, την περιγραφή των προβλημάτων στα οποία εμπλέκονται οι μαθητές, τη ροή των φάσεων, τα διαθέσιμα μέσα για την υλοποίηση των κατασκευών, τα μέσα συλλογής και τη μέθοδο ανάλυσης των δεδομένων.

Στο τέταρτο κεφάλαιο εμπεριέχονται τα αποτελέσματα της έρευνας, όπου και καταγράφονται αναλόγως.

Στο πέμπτο κεφάλαιο αναδεικνύεται το σύνολο των συμπερασμάτων, τα οποία προκύπτουν από τα αποτελέσματα, και η σύνδεσή τους με τη βιβλιογραφία.

Κεφάλαιο 2ο
Θεωρητικό Πλαίσιο

2.1 Επίλυση Προβλήματος σε αυθεντικά πλαίσια

2.1.1 Εισαγωγή

Ένα μεγάλο μέρος των εκπαιδευτικών σε διεθνές επίπεδο επιλέγει ακόμη να χρησιμοποιεί την παραδοσιακή μέθοδο διδασκαλίας, κατά την οποία τα μαθηματικά εμφανίζονται ως μια θεωρητική επιστήμη, που αναπτύσσεται σε αφηρημένη βάση (Soedjadi, 2000). Ο τρόπος αυτός λειτουργεί αρνητικά στην κατανόηση των μαθητών και προωθεί την αποστήθιση των μεθόδων και των εννοιών, γεγονός που δρα αποτρεπτικά στην ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων και δυσκολεύει τους μαθητές στην επίλυση σύνθετων προβλημάτων. Οι μαθητές εμφανίζουν χαμηλές επιδόσεις στα μαθηματικά και τείνουν να σχηματίζουν μια συνολικά αρνητική σχέση με το μάθημα, καθώς το θεωρούν δυσνόητο και ανιαρό. Ταυτόχρονα, φαίνονται να δυσκολεύονται ακόμη και στην επίλυση απλών προβλημάτων μέσω αριθμητικών πράξεων, καθώς δε λαμβάνουν υπόψη καθόλου το πλαίσιο μέσα στο οποίο αναπτύσσεται το πρόβλημα (Schoenfeld, 1991, Greer, 1997). Η προσέγγιση των μαθηματικών ως μια ανθρώπινη δραστηριότητα από τον Freudenthal (1978) υπήρξε η αφορμή για την παρουσίαση του διαφορετικού αυτού τρόπου διδασκαλίας στους μαθητές, οι οποίοι μέσω της Ρεαλιστικής Εκπαίδευσης ενθαρρύνονται να συνδέσουν την νέα γνώση με προηγούμενες σχετικές εμπειρίες.

2.1.2 Ρεαλιστικά Προβλήματα

Πληθώρα ερευνών έχουν αναδείξει την αξία της χρήσης των Ρεαλιστικών Μαθηματικών ως μέθοδο προσέγγισης της μαθηματικής επιστήμης και της κατανόησης του μαθηματικού τρόπου σκέψης (Reinke, Luke T. & Casto, Amanda R., 2020) Η σύνδεση των μαθηματικών με τις προηγούμενες προσωπικές εμπειρίες των μαθητών στον πραγματικό κόσμο φαίνεται να επηρεάζει την αύξηση της προσοχής των μαθητών στη διδασκαλία (Allsopp , Kyger, & Lovin, L. A., 2007). Τα ρεαλιστικά προβλήματα αποτελούν τη προσπάθεια για απτή σύνδεση της πραγματικής ζωής με τα μαθηματικά. Έχουν κατά καιρούς χρησιμοποιηθεί πολλοί όροι για να περιγράψουν τα ρεαλιστικά προβλήματα, από τους διάφορους μελετητές που επιχείρησαν να τα προσεγγίσουν ως διδακτική μέθοδο. Κάποιοι από αυτούς ήταν τα πραγματικά προβλήματα, τα προβλήματα με τη χρήση μοντελοποίησης, τα προβλήματα μέσω των συμφραζόμενων, και τα εφαρμοσμένα προβλήματα (Cooper and Harries, 2005, Blum and Borromeo Ferri, 2009 & Palm, 2006). Έχει επίσης κατά το παρελθόν δημιουργηθεί ένα πλήθος ορισμών που προσπαθούν να ερμηνεύσουν τον τομέα αυτών των προβλημάτων, με αποτέλεσμα να έχουν δημιουργηθεί και διάφορα μοντέλα βάση των εκπαιδευτικών και λειτουργικών αναγκών που προσπαθούσαν να επιτύχουν. Σε κάθε περίπτωση, κάποια από τα χαρακτηριστικά που αφορούν την κοινή φύση των ρεαλιστικών προβλημάτων παραμένουν αμετάβλητα σε όλα τα μοντέλα.

Αρχικά, η γλώσσα των προβλημάτων είναι απλή και κατανοητή, αντλημένη μέσα από το καθημερινό λεξιλόγιο. Τα σύμβολα και τα δεδομένα του προβλήματος περιγράφονται με βάση την απλότητα και είναι αντλημένα από το καθημερινό περιβάλλον της εκάστοτε κοινωνίας (Larina, 2016). Μέσω αυτών, προσφέρονται στους μαθητές η ευκαιρία να επιλύσουν διαθεματικά προβλήματα, τα οποία αντλούνται από την καθημερινότητα, κάνοντας χρήση των μαθηματικών τους γνώσεων και δεξιοτήτων. Μια από τις προκλήσεις που εμφανίζει η χρήση των ρεαλιστικών προβλημάτων κατά τη διδασκαλία των μαθηματικών είναι οι διαφορετικές ερμηνείες που συνηθίζουν να δίνουν οι εκπαιδευτικοί στον όρο ρεαλιστικά προβλήματα (Gainsburg, 2008). Οι παρερμηνείες αυτές μπορούν σε πολλές περιπτώσεις να αλλοιώσουν το νόημα αλλά και τη χρησιμότητα αυτού του είδους των προβλημάτων, οδηγώντας σε παραπλανητικά αποτελέσματα σε σχέση με την αποτελεσματικότητά τους.

Η επίλυση των μαθηματικών ρεαλιστικών προβλημάτων διέρχεται μέσα από την υλοποίηση κάποιων επιμέρους ενεργειών. Η πρώτη από αυτές τις ενέργειες είναι η μετάφραση. Με τον όρο μετάφραση νοείται η διαδικασία κατά την οποία ο μαθητής καλείται να μετατρέψει τον θεωρητικό λόγο του προβλήματος σε μαθηματικές έννοιες. Καλείται δηλαδή να μετατρέψει σε σχέσεις , σύμβολα και αριθμούς τα δεδομένα του προβλήματος, να τα καταγράψει και να αντιληφθεί υπό μαθηματική σκέψη τις πληροφορίες που του παρέχει το πρόβλημα (Talyzina, 1988). Στη συνέχεια, η επόμενη πράξη κατά την επίλυση του προβλήματος είναι η μοντελοποίηση. Κατά το στάδιο αυτό ο μαθητής προχωρά στη διαμόρφωση των σχέσεων που υφίστανται μεταξύ των δοθέντων αντικειμένων. Το στάδιο αυτό αποτελεί ένα καθοριστικό παράγοντα στην επιτυχία της επίλυσης ου προβλήματος. Σε τρίτο και τελευταίο στάδιο, ο μαθητής καλείται να επανατοποθετήσει το αποτέλεσμα στο οποίο κατέληξε από τις προηγούμενες διαδικασίες μέσα στο πραγματικό πλαίσιο από το οποίο αντλείται το πρόβλημα. (Blum, Niss, 1991) Το στάδιο αυτό είναι ένα ιδιαίτερα σημαντικό βήμα στην επίλυση των ρεαλιστικών προβλημάτων, καθώς αποτελεί ένα ξεχωριστό μέρος που υφίσταται μόνο σε αυτού του είδους τα προβλήματα. Το στάδιο αυτό, το οποίο αποτελεί ένα από τα χαρακτηριστικά που διακρίνουν αυτά τα προβλήματα, δίνει την άμεση ευκαιρία στον μαθητή να αντιμετωπίσει στην πράξη τα αποτελέσματα των διεργασιών του. Τα πλεονεκτήματα που προκύπτουν κατά τη διαδικασία αυτή είναι πολλά και καθιστούν εμφανείς οι προκύπτουσες διαφορές με τα παραδοσιακά θεωρητικά προβλήματα που στερούνται επαφής με την πραγματικότητα.

Σε πρώτη φάση, η εφαρμογή των αποτελεσμάτων αποτελεί μια πρώτη πηγή ανατροφοδότησης για τον μαθητή, ο οποίος πιθανόν σε πολλές περιπτώσεις να βρεθεί αντιμέτωπος με την αποτυχία εφαρμογής των αποτελεσμάτων του, λόγο λάθος που έχει προηγηθεί κατά την επίλυση του προβλήματος ή λοιπών παραγόντων που δύνανται να οδηγήσουν σε αποτυχία. Παράδειγμα αποτελεί η αποτυχία ενός μαθητή να ολοκληρώσει την κατασκευή ενός ραφιού μιας βιβλιοθήκης, του οποίου το πάχος θα πρέπει να αντέξει το βάρος κάποιων βιβλίων χωρίς να κάμπτεται, μπορεί να αποδειχθεί με την τοποθέτηση των βιβλίων στο ράφι και την κατάρρευση της κατασκευής. Η εφαρμογή των προδιαγραφών για την κατασκευή και η υλοποίησή της χωρίς επιτυχία αποτελούν μέρος της επίλυσης του συγκεκριμένου προβλήματος, θέτοντας τον μαθητή στον ρόλο του ερευνητή, και αποδεικνύοντάς του με άμεσο τρόπο τη σημασία και τη χρησιμότητα των γνώσεων που λαμβάνει. Το τρίτο και τελευταίο βήμα της επίλυσης κατ' ουσία είναι εκείνο που αποδίδει νόημα στη διαδικασία και στο αποτέλεσμα, με βάση τη καθημερινή ζωή (Fridman, 1977).

Το PISA (Programme for International Student Assessment), έθεσε κάποια βασικά κριτήρια, όσον αφορά κυρίως τον τομέα της εκπαίδευσης, τα οποία χαρακτηρίζουν ένα πρόβλημα ως ρεαλιστικό. Το πρώτο κριτήριο, προέρχεται από τον τομέα της λεκτικής έκφρασης και της γλώσσας που χρησιμοποιείται κατά την εκφώνησή του. Πιο συγκεκριμένα, το πρόβλημα το οποίο τίθεται προς επίλυση από τους μαθητές, απαιτείται να είναι διατυπωμένο κατά τέτοιο τρόπο, ώστε να μπορεί να γίνει κατανοητό από το σύνολο των μαθητών, δεδομένων των προηγούμενων εμπειριών και βιωμάτων τους.

Επιπρόσθετα, ένα ακόμη κριτήριο που τίθεται ως απαραίτητο κατά το σχεδιασμό και την επίλυση των ρεαλιστικών προβλημάτων είναι το κριτήριο της σχετικότητας. Πιο συγκεκριμένα, τα δεδομένα που δίδονται, οι μέθοδοι και οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται κατά την επίλυση και οι πληροφορίες οι οποίες δίδονται θα πρέπει να είναι κατάλληλα συνδεδεμένα και σχετικά με το δοθέν πλαίσιο.(Larina, 2016, σελ. 151-16). Το πρόβλημα έτσι μετατρέπεται από μια αφηρημένη σκέψη σε ρεαλιστική συνθήκη και οι μαθητές κατανοούν με αυτό τον τρόπο την αξία του καθώς το συνδέουν με την καθημερινότητα και την ζωή εκτός σχολικού πλαισίου.

Λοιποί ερευνητές, προσεγγίζουν με διαφορετικό τρόπο την επίλυση των ρεαλιστικών προβλημάτων, θέτοντας υπόψη λοιπά χαρακτηριστικά που μπορούν να επηρεάσουν την εξέλιξη της διαδικασίας κατά την επίλυση των προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα, κατά τον Palm, (2006), τα εργαλεία που προσφέρονται ή απαιτούνται για την επίλυση των προβλημάτων αποτελούν κυρίαρχο χαρακτηριστικό τους. Η ύπαρξη εργαλείων μέτρησης για παράδειγμα σε ένα πρόβλημα ξυλουργικής μπορεί όχι απλά να επηρεάσει αλλά να καθορίσει ολοκληρωτικά τη πορεία και την προσέγγιση του προβλήματος εκ μέρους των μαθητών. Ταυτόχρονα, η προσπάθεια που πρέπει να καταβάλλουν οι μαθητές έτσι ώστε να μπορέσουν να επιλέξουν τα εργαλεία που είναι απαραίτητα για την επίλυση του αυθεντικού προβλήματος καθώς και ο τρόπος με τον οποίο θα τα χειριστούν ούτως ώστε να οδηγηθούν σε αληθή συμπεράσματα αποτελούν επίσης απαιτήσεις της διδασκαλίας. Οι μαθητές έτσι ασκούνται στην ανάπτυξη όχι μόνο των θεωρητικών γνώσεων των μαθηματικών, αλλά και στην ταυτόχρονη ανάπτυξη πρακτικών δεξιοτήτων, αυξάνοντας έτσι τον βαθμό δυσκολίας των προβλημάτων αλλά και των εφοδίων που προσλαμβάνουν από τη συμμετοχή τους στη μαθησιακή διαδικασία.

Επιπλέον για τον ίδιο ερευνητή, ο χρόνος ο οποίος δίδεται στον μαθητή για την λύση, αλλά και οι τυχόν βοήθειες που μπορεί να του προσφέρονται κατά τη διάρκεια της διαδικασίας, από τον εκπαιδευτικό, από συμμαθητές ή από λοιπές πηγές είναι επίσης κάποια από τα στοιχεία που τροποποιούν σε μεγάλο βαθμό την εξέλιξη της διαδικασίας και την τελική γνώμη του μαθητή για αυτού του είδους τα προβλήματα.

Ακόμη μια ερευνήτρια η οποία ασχολήθηκε με τα εν λόγω προβλήματα στον τομέα των μαθηματικών υπήρξε η Yulia Tyumeneva (2014), η οποία ασχολήθηκε ανέδειξε την έννοια της ευκαμψίας και των πολλαπλών λύσεων στην επίλυση των προβλημάτων που σχετίζονται με την καθημερινότητα. Ακόμη, τονίστηκε η ύπαρξη πολλαπλών μεθόδων και τεχνικών μέσω των οποίων οι μαθητές μπορούν να οδηγηθούν στην ίδια τελική λύση. Όπως συμβαίνει με τα περισσότερα προβλήματα της καθημερινότητας, καθ΄ αυτόν τον τρόπο και τα ρεαλιστικά μαθηματικά προβλήματα ενδέχεται να επιδέχονται τροποποιήσεων και μικρών αλλαγών ως προς τη δομή και την εύρεση του αποτελέσματος που αποκαθιστά και επιλύει το πρόβλημα. Επιπλέον η ίδια επισήμανε και την ανάγκη αποφυγής χαρακτηρισμού ως ρεαλιστικών κάποιων προβλημάτων των οποίων η λύση είναι προφανής και αυταπόδεικτη και η επίλυση των οποίων δεν απαιτεί κάποια ιδιαίτερη νοητική ή μαθηματική διεργασία.

Φυσικά , λόγω των διαφόρων δυσκολιών με τις οποίες έρχονται αντιμέτωποι οι εκπαιδευτικοί και οι ερευνητές κατά την υλοποίηση αλλά και τον σχεδιασμό προβλημάτων που πηγάζουν από την καθημερινή ζωή, απαιτείται η παραχώρηση αρκετών συμβιβασμών, προκειμένου το αποτέλεσμα να οδηγήσει στους επιθυμητούς στόχους. Πιο συγκεκριμένα, κατά τον Wiggins, (1993), η προσπάθεια για διατήρηση της εγκυρότητας των προβλημάτων, πολλές φορές αποτελεί ανασταλτικό παράγοντα στην επίτευξη της αξιοπιστίας του αποτελέσματος. Εν προκειμένω, στην προσπάθεια που καταβάλλεται έτσι ώστε τα δεδομένα και η δομή του προβλήματος να πηγάζει από την καθημερινότητα και τα αποτελέσματά του να ανταποκρίνονται σε πραγματικά δεδομένα, η δυσκολία και η πολυπλοκότητά τους αυξάνεται σε τέτοιο βαθμό , ούτως ώστε να μην μπορούν να υλοποιήσουν τους στόχους για τους οποίους σχεδιάστηκαν.

Επιπρόσθετα, βάση προηγουμένων ερευνών αναδεικνύεται η κοινή τάση των μαθητών να αγνοούν τις ρεαλιστικές συνθήκες του προβλήματος, όταν έρχονται αντιμέτωποι με λεκτικά μαθηματικά προβλήματα είναι ακόμη ένα ζήτημα το οποίο καλούνται να αντιμετωπίσουν τα ρεαλιστικά προβλήματα (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000). Η απουσία πλαισίου και η μη συσχέτιση του με ήδη γνωστά σε αυτούς δεδομένα και συνθήκες οδηγεί τους μαθητές στην αντιμετώπιση των μαθηματικών ως αυτούσιες και αποκομμένη γνώση. Η σύνδεσή τους με την πραγματικότητα δεν αυτοματοποιείται και οι μαθητές αρκούνται στην υιοθέτηση της αποστήθισης των διαδικασιών των οποίων διδάσκονται για την επίλυση κάθε προβλήματος. Οι λεκτικές περιγραφές των προβλημάτων δυσκολεύουν τους μαθητές, ειδικότερα όταν οι ίδιοι δεν μπορούν να συνδέσουν αυτές τις προσλαμβάνουσες με προηγούμενες εμπειρίες του στον πραγματικό κόσμο. Ταυτόχρονα, τα παραδοσιακά θεωρητικά προβλήματα που στερούνται ρεαλισμού και αυθεντικότητας αντιμετωπίζονται από τα παιδιά ως ανιαρά και μη χρήσιμα στην καθημερινότητά τους. Το γεγονός αυτό είναι λογικό αν σκεφτεί κανείς ότι οι μαθητές αναγνωρίζουν την επίλυση προβλημάτων των οποίων η λύση είναι εκ των προτέρων γνωστή και η διαδικασία που θα ακολουθηθεί για την επίλυσή τους προκαθορισμένη. Μάλιστα στις περισσότερες περιπτώσεις οποιαδήποτε προσπάθεια απόκλισης της προκαθορισμένης διεργασίας αποθαρρύνεται, λειτουργώντας ως αντικίνητρο στην ανάπτυξη πρωτοβουλίας.

Σε μελέτες που διεξήχθησαν στις περιοχές της Βόρειας Ιρλανδίας και του Βελγίου, οι ερευνητές επιχείρησαν να συγκρίνουν την επίδραση των μαθηματικών ρεαλιστικών προβλημάτων στους μαθητές, συγκριτικά με τα παραδοσιακά θεωρητικά εκφρασμένα προβλήματα μαθηματικών. Οι μελέτες αυτές, μαζί με σύνολο άλλων ερευνών σε πολλές χώρες όπως η Γερμανία, η Ελβετία και η Ιαπωνία ανέδειξαν επίσης την τάση των μαθητών σε διεθνές επίπεδο να μη συμπεριλαμβάνουν τη ρεαλιστική σκέψη κατά την επίλυση των προβλημάτων των μαθηματικών, αφαιρώντας και αγνοώντας τις παραμέτρους που συντρέχουν και επηρεάζουν την επίλυσή τους στην καθημερινότητα (Yoshida, Verschaffel, & De Corte, 1997, Verschaffel, De Corte, & Lasure, 1999, Reusser & Stebler, 1997a). Η τάση αυτή των μαθητών αντιμετωπίστηκε επιτυχώς με τη χρήση ρεαλιστικών παραγόντων κατά την επίλυση των ρεαλιστικών προβλημάτων. Πιο συγκεκριμένα, κατά τη διενέργεια μελετών αποδείχθηκε ότι η μεταφορά των μαθηματικών προβλημάτων στην πράξη με χρήση πραγματικών υλικών βοήθησε τους μαθητές να εντάξουν τους ρεαλιστικούς παράγοντες του προβλήματος (DeFranco & Curcio, 1997). Επιπλέον, η υιοθέτηση τεχνικών που προάγουν την συλλογική εργασία όπως οι ομαδικές συζητήσεις έδειξαν επίσης ευεργετικά αποτελέσματα στην αύξηση της αποτελεσματικότητας των μαθητών στο εν λόγω ζήτημα (Reusser & Stebler, 1997b).

2.1.3 Αυθεντικά προβλήματα

Το National Council of Teachers of Mathematics , το οποίο αποτελεί μια από τις πλέον αναγνωρισμένες ενώσεις εκπαιδευτικών της μαθηματικής επιστήμης στον κόσμο, με έδρα την Αμερική, έχει ευρέως τοποθετηθεί σε σχέση με την ένταξη των αυθεντικών προβλημάτων στην εκπαίδευση των μαθηματικών (NCTM, 2000) . Η μέθοδος αυτή της διδασκαλίας απαιτεί από τους μαθητές να εργαστούν και να εφαρμόσουν μαθηματικές γνώσεις πάνω σε υπαρκτά προβλήματα, βασισμένα σε ρεαλιστικές καταστάσεις, καταλήγοντας σε λύσεις οι οποίες δεν έχουν βρεθεί και δεν είναι προφανείς. Τα προβλήματα αυτά έχουν αναδειχθεί ως ιδιαίτερα αποδοτικά όσον αφορά τη βελτίωση της συγκέντρωσης της προσοχής των μαθητών, όσο και της αύξησης των κινήτρων τους για συμμετοχή στη μάθηση, καθώς φαίνεται να εντείνουν το ενδιαφέρον τους για το αντικείμενο διδασκαλίας και την εκπαιδευτική διαδικασία (Cai, 2000).

Η συνεισφορά της υιοθέτησης μιας πιο αυθεντικής μαθηματικής σκέψης έχει επίσης μελετηθεί και από πλευράς επαγγελματικών απαιτήσεων του σύγχρονου εργασιακού περιβάλλοντος. Ήδη από το 1992, η Darling-Hammond εστίασε στην απαίτηση της σύγχρονης ανταγωνιστικής κοινωνίας που απαιτεί από τους εργαζόμενους των διαφόρων αντικειμένων να μπορούν να εφαρμόσουν την θεωρητική του γνώση σε πραγματικά προβλήματα του υπαρκτού κόσμου και να μεταφέρουν τις γνώσεις του επιλύοντας ρεαλιστικές καταστάσεις. Οι εργαζόμενοι πρέπει να είναι σε θέση να εφαρμόζουν μεθόδους που θα τους οδηγήσουν σε ασφαλή αποτέλεσμα, σε προβλήματα των οποίων η λύση δεν είναι γνωστή. Με την πάροδο των ετών η απαίτηση αυτή των επιχειρήσεων και συνολικά των επαγγελμάτων διαρκώς εντείνεται και η προετοιμασία των μαθητών για την αντιμετώπιση υπαρκτών προβλημάτων, με κριτική σκέψη και με την αυτοπεποίθηση της προηγούμενης εμπειρίας όσον αφορά τη διαδικασία αποτελεί αν μη τι άλλο μια πρόκληση για το εκπαιδευτικό σύστημα.

Η παροχή γνώσεων, υπό τη έννοια της εκμάθησης συγκεκριμένων μεθόδων, τυποποιημένης δομής, μέσω των οποίων οι μαθητές καλούνται κατ ουσία να απομνημονεύσουν και να επαναλάβουν όταν απαιτηθεί την πορεία για την επίλυση ενός μαθηματικού προβλήματος εμφανίζεται πλέον ανεπαρκής. Αντίθετα, μέσω των αυθεντικών προβλημάτων, οι μαθητές κατανοούν εις βάθος την πολυπλοκότητα της εκπαιδευτικής διαδικασίας (Cobb, 1994). Μέσα από τις γνωστικές συγκρούσεις με τις οποίες έρχονται αντιμέτωποι, και με σύμμαχο τη παροχή μιας πληθώρας πληροφοριών και δεδομένων, καλούνται να εποικοδομήσουν τη γνώση και να καταλήξουν στην κατάκτησή της μέσα από μια αυθεντική διαδικασία, όπως ακριβώς θα κληθούν στο μέλλον να αντιμετωπίσουν πρωτόγνωρα προβλήματα στο εργασια εργασιακό τους περιβάλλον. Η γνώση ότι το πρόβλημα που επιλύουν δεν αποτελεί την επανάληψη με στόχο την εύρεση μια ήδη γνωστής λύσης αλλά την ανάδειξη της λύσης μιας αυθεντικής προβληματικής αποτελεί ένα από τα κίνητρα που εμφανίζεται ως παράγοντας αύξησης της αποδοτικότητας των μαθητών (Prawat, 1998).

Ένα σύνολο ερευνητών κατά το παρελθόν έχει ασχοληθεί με την επίλυση αυθεντικών προβλημάτων κατά την εκπαιδευτική διαδικασία καθώς και με τα προβλήματα και τις συνέπειες που προέκυψαν κατά τη μέθοδο αυτή της διδασκαλίας. Οι Verschaffel, Greer, and De Corte (2000) εξέτασαν τη δυνατότητα των μαθητών στην επίλυση αυθεντικών προβλημάτων, χωρίς προηγούμενη σχετική εμπειρία. Τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξαν ανέδειξαν δυσκολίες των μαθητών στην υλοποίηση όλων των σταδίων της επίλυσης του προβλήματος, από την αναγνώριση των ζητούμενων και των δεδομένων, έως και την εφαρμογή των απαιτούμενων μεθόδων και διεργασιών για την κατάληξη στο ζητούμενο αποτέλεσμα . Αντίθετα, η ύπαρξη κάποιας εμπειρίας ως προς την ανάπτυξη μεταγνωστικών δεξιοτήτων κατά την εκπαίδευσή τους στο παρελθόν φαίνεται να λειτουργεί ευεργετικά στην ικανότητα επίλυσης των αυθεντικών προβλημάτων στο μέλλον (Kramarski, Mevarech, and Liberman, 2001). Μάλιστα, ακόμη και οι μαθητές που εμφανίζουν γενικότερα χαμηλές επιδόσεις στην επίλυση μαθηματικών προβλημάτων φαίνεται να αυξάνουν την αποδοτικότητά τους έπειτα από την παρακολούθηση και την κατάκτηση μεταγωστικών δεξιοτήτων (Cardel-Elawar, 1995). Το γεγονός αυτό αναδεικνύει υπό μια ακόμη πλευρά την συσχέτιση των αυθεντικών μαθηματικών με υψηλού επιπέδου γνωστικές διεργασίες και με την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης.

Μια ακόμη τεχνική που φάνηκε επίσης να επιδρά ευεργετικά όταν οι μαθητές κλήθηκαν να επιλύσουν αυθεντικά προβλήματα ήταν η οργάνωσή τους σε ομάδες και η συνεργατική επίλυση του προβλήματος. Η μέθοδος αυτή φαίνεται να βελτίωσε την επίδοση των μαθητών στο σύνολό τους, χωρίς όμως να υποβαθμίζει τις επιδόσεις των μαθητών των οποίων το επίπεδο ήταν υψηλότερο και κατά την ατομική εργασία **(**Hoek, Van den Eeden, and Terwel, 1999)**.** Οι μαθητές μάλιστα που σε ατομική εργασία έδειξαν υψηλότερα ποσοστά φαίνεται να ήταν και εκείνοι οι οποίοι επωφελήθηκαν εν τέλει περισσότερο από την ομαδική οργάνωση της τάξης κατά την επίλυση των αυθεντικών προβλημάτων.

Η επίλυση ενός αυθεντικού προβλήματος σε περιβάλλον μικτής μάθησης ήταν το εγχείρημα βάση του οποίου εξετάστηκε η τοποθέτηση των μαθητών σε ομάδες και η ανάθεση της αποστολής που περιλάμβανε την αναδιαμόρφωση ιστότοπων, κάνοντας χρήση γνώσεων που είχαν λάβει κατά τη διδασκαλία του μαθήματος. Η εργασία υλοποιήθηκε στο πλαίσιο μικρών ομάδων των 5- 6 ατόμων, και στην έρευνα συμμετείχε ένα δείγμα 79 προπτυχιακών φοιτητών χωρίς προηγούμενη εμπειρία στην επίλυση παρόμοιων προβλημάτων. Η εν λόγω έρευνα διατήρησε κατά το δυνατόν το σύνολο των αρχών της αυθεντικής μάθησης, όπως αυτά ορίζονται από τους Herrington και Kervin (2007). Δόθηκε στους φοιτητές η ελευθερία κι η ευθύνη της εύρεσης του τρόπου και της διαδικασίας μέσω της οποίας θα επέλυαν το πρόβλημα, χωρίς να τους υποδειχθεί ένας τυποποιημένος αλγόριθμος βάση του οποίου θα κατέληγαν στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Ταυτόχρονα, υπήρξε ελευθερία ως προς την πρόσβαση των μαθητών σε πηγές πληροφοριών και στην μελέτη προηγουμένων παρόμοιων εργασιών, αλλά και στην έκφραση του διαφορετικών ιδεών και απόψεων προκειμένου να οδηγηθεί η ομάδα στην τελική επιλογή της διαδικασίας. Τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας ανέδειξαν τη θετική στάση των μαθητών όσον αφορά την υλοποίηση του έργου τους αλλά και την ανάπτυξη της αυτοπεποίθησής τους σε εφαρμογή της αποκτηθείσας γνώσης τους στο μέλλον. Οι ίδιοι οι φοιτητές εκτίμησαν ιδιαίτερα τη χρησιμότητα που τους παρείχαν οι αποκτηθείσες γνώσεις και κατανόησαν τη σημασία της επίλυσης αυθεντικών προβλημάτων στην απόκτηση μεταγνωστικών δεξιοτήτων. Επιπρόσθετα, επισημάνθηκε η καθοριστικής σημασίας συμμετοχή του εκπαιδευτικού στην διαδικασία της επίλυσης του προβλήματος και στις ομαδικές συζητήσεις των φοιτητών ως αναπόσπαστο παράγοντα που διασφάλισε την αποτελεσματικότητα του έργου (Heidi Yeen- Ju Tan , Mai Neo, Bhawani Selvaretnam, 2015).

Συμπληρωματικά, καθίσταται εύκολα αντιληπτό το συμπέρασμα ότι τα αυθεντικά προβλήματα εισάγουν τους μαθητές σε πραγματικές καταστάσεις, όπου οι απαιτήσεις και οι πληροφορίες είναι συνδεδεμένες με σύνθετο τρόπο και η επίλυσή τους απαιτεί κριτική σκέψη. Η εμπειρία της συσχέτισης και της επίλυσης αυτού του είδους των πραγματικών προβλημάτων προσδίδει στους μαθητές ένα ιδιαίτερα σημαντικό εφόδιο και τους καθιστά ικανούς να αντιμετωπίσουν παρόμοια προβλήματα στο μέλλον (Forman, S. L., & Steen, L. A., 1995). Κάποια από τα χαρακτηριστικά που είναι απαραίτητα προκειμένου να αποτελούν τα αυθεντικά προβλήματα εφόδιο ισχυρό για τη διδασκαλία των μαθητών, απαιτείται η διατήρηση κάποιων παραμέτρων που αποτελούν προϋπόθεση της αυθεντικότητας των προβλημάτων. Η διατήρηση του πλαισίου, η χρήση πολλαπλών αξιών, η παροχή ελευθερίας στην πρόσβαση, η ύπαρξη μιας άγνωστης λύσης η οποία απαιτεί διερεύνηση και τέλος η άμεση σύνδεσή τους με τη πραγματικότητα αποτελούν τα βασικά στοιχεία που χαρακτηρίζουν τα αυθεντικά προβλήματα. Τα στοιχεία αυτά είναι και εκείνα που προσδίδουν τα ευεργετικά αποτελέσματα στη διδακτική αυτή μέθοδο.

Κάποια από τα παραδείγματα που παραθέτονται από τους Forman, S. L., & Steen, L. A.,(1995), αναφέρονται στην έρευνά τους και είναι η οργάνωση του αποθηκευτικού χώρου σε ένα κατάστημα παπουτσιών και ο υπολογισμός των διαστάσεων για τις κουρτίνες ενός δωματίου. Η χρήση αυτού του είδους των προβλημάτων που στηρίζονται στην αυθεντική μάθηση ενισχύει τους μαθητές στην απόκτηση εφοδίων που θεωρούνται απαραίτητα στην αγορά εργασίας, συμβάλλοντας έτσι στην προετοιμασία των μαθητών για την ενήλικη ζωή. Ταυτόχρονα, τα αυθεντικά μαθήματα προωθούν τη συλλογική εργασία και το ομαδικό έργο, προκειμένου να ολοκληρωθεί η επίλυση των προβλημάτων με τον πλέον αποδοτικό τρόπο. Η διδακτική αυτή τεχνική έχει ιδιαίτερη αξία καθώς οι περισσότερες πλέον εργασίες στις οποίες μπορεί να βρεθεί ο μαθητής στο μέλλον αναλαμβάνουν την επίλυση των διαφόρων προβληματικών στο πλαίσιο ομαδικών project.

2.2 Διερευνητική Μάθηση

Η διερευνητική μάθηση (inquiry-based learning) είναι μια παιδαγωγική μέθοδος που δίνει έμφαση στην ενεργό συμμετοχή των μαθητών κατά τη μάθηση. Οι μαθητές δεν παραμένουν παθητικοί δέκτες πληροφοριών, αλλά εμπλέκονται ενεργά μέσω ερωτήσεων, έρευνας, αναστοχασμού και συνεργασίας με τους συμμαθητές τους (Artigue & Blomhøj, 2013). Αυτό το πλαίσιο μάθησης ενθαρρύνει την ανακάλυψη και τη διερεύνηση, ιδίως μέσω της εξέτασης ανοιχτών προβλημάτων και καταστάσεων.

Η διερευνητική μάθηση επηρεάζεται από διάφορες εκπαιδευτικές θεωρίες, δίνοντας έμφαση στην κατασκευή της γνώσης μέσω της κατανόησης και της αλληλεπίδρασης (Σκουμπουρδή & Βαϊτσίδη, 2019). Οι ίδιοι ερευνητές υπογραμμίζουν την καινοτόμο φύση αυτής της προσέγγισης, ειδικά όσον αφορά τη συνεργατική διαδικασία, που ευθυγραμμίζεται με τις πρακτικές των επιστημονικών ερευνητών, ενώ οι Bosch & Winsløw (2015) επισημαίνουν ότι μέσω αυτής της προσέγγισης επιδιώκεται η καλλιέργεια μιας γενικότερης νοοτροπίας αναζήτησης και ανακάλυψης, όπου τα λάθη θεωρούνται ευκαιρίες μάθησης και ο διάλογος διαδραματίζει κεντρικό ρόλο. Ωστόσο, η εφαρμογή της στην πράξη μπορεί να παρουσιάζει δυσκολίες. Όπως σημειώνουν οι Hersant & Choquet (2019), απαιτείται η κατάλληλη προετοιμασία των εκπαιδευτικών, η διαθεσιμότητα των πόρων και η σχεδίαση κατάλληλων προβλημάτων. Παρόλα αυτά, όταν εφαρμόζεται σωστά, συμβάλλει ουσιαστικά στην ανάπτυξη της δημιουργικότητας και της μαθηματικής σκέψης των μαθητών.

2.2.1 Δράσεις Διερεύνησης

Στη διερευνητική μάθηση, οι μαθητές παίζουν έναν ενεργό ρόλο στη μαθησιακή διαδικασία. Ενθαρρύνονται να θέτουν ερωτήματα, να αξιολογούν διάφορες πιθανές λύσεις και να διευρύνουν τις ιδέες τους. Η μάθηση επικεντρώνεται στον μαθητή, δίνοντας έμφαση στην ανάπτυξη κριτικής σκέψης και στην αυτοκατευθυνόμενη μάθηση (Artigue & Blomhøj, 2013).

Μία από τις βασικές δραστηριότητες είναι η διατύπωση ερωτήσεων. Οι μαθητές διερευνούν το πρόβλημα, θέτουν κρίσιμα ερωτήματα και αποκτούν βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών (Maass & Artigue, 2013). Μέσα από αυτή τη διαδικασία, καλλιεργούν δεξιότητες ανάλυσης και επεξεργασίας πληροφοριών.

Ένα άλλο βασικό στοιχείο της διερευνητικής μάθησης είναι η συνεργατικότητα. Οι μαθητές εργάζονται σε ομάδες, μοιράζονται ιδέες και αναζητούν λύσεις από κοινού. Μέσα από αυτή τη συλλογική διαδικασία, συγκρίνουν διαφορετικές προσεγγίσεις και φτάνουν σε κοινές αποφάσεις, ενισχύοντας τις δεξιότητες διαπραγμάτευσης και κριτικής σκέψης (Doorman et al., 2016).

Επιπλέον, οι μαθητές εκπαιδεύονται στην αξιολόγηση των λύσεων που προτείνουν. Καλούνται να συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους με πραγματικά δεδομένα, να στηρίζουν τις υποθέσεις τους με λογικά επιχειρήματα και να εξετάζουν την αποτελεσματικότητα της μεθόδου που ακολούθησαν (Bosch & Winsløw, 2015). Με αυτόν τον τρόπο, αναπτύσσουν μεταγνωστικές δεξιότητες και βελτιώνουν τις ιδέες τους (Bosch & Winsløw, 2015).

Τέλος, συχνά χρησιμοποιούνται δραστηριότητες που σχετίζονται με πραγματικά προβλήματα. Οι μαθητές εφαρμόζουν μαθηματικές έννοιες σε καταστάσεις της καθημερινότητας, συνδέοντας τη θεωρία με την πράξη. Αυτό το είδος μάθησης τους ενθαρρύνει να συμμετέχουν ενεργά και να αποκτήσουν μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση στην επίλυση προβλημάτων.

2.2.3 Ο Ρόλος του Εκπαιδευτικού στη Διερευνητική Μάθηση

Στη διερευνητική προσέγγιση, ο εκπαιδευτικός έχει τον ρόλο του καθοδηγητή και διευκολυντή της μάθησης. Δεν λειτουργεί ως αυθεντία, αλλά δημιουργεί ένα μαθησιακό περιβάλλον που προάγει την εξερεύνηση και τη σκέψη των μαθητών (Artigue & Blomhøj, 2013). Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές ενθαρρύνονται να ανακαλύψουν γνώσεις, να θέσουν ερωτήσεις και να αναζητήσουν λύσεις.

Κύριο καθήκον του εκπαιδευτικού είναι να δημιουργήσει ένα ασφαλές περιβάλλον, όπου οι μαθητές θα νιώθουν άνετα να εκφράσουν απορίες, να κάνουν λάθη και να συζητήσουν τις διάφορες απορίες. Προσφέροντας υποστήριξη, χωρίς έτοιμες λύσεις, παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα να αναπτύξουν τη δική τους συλλογιστική (Maass & Artigue, 2013). Αυτή η υποστηρικτική προσέγγιση βοηθά τους μαθητές να οικοδομήσουν την αυτοπεποίθησή τους και να γίνουν πιο αυτόνομοι στη μαθησιακή διαδικασία.

Επιπλέον, ο εκπαιδευτικός εναρμονίζει τον τρόπο καθοδήγησής του, ανάλογα με το επίπεδο δυσκολίας του προβλήματος και τις ανάγκες των μαθητών. Μπορεί να παρέχει ενδείξεις ή να θέτει συγκεκριμένες ερωτήσεις, βοηθώντας τους μαθητές να εστιάσουν στα σημαντικά στοιχεία του προβλήματος και ενίοτε να αφήνει περισσότερο χώρο για ελεύθερη εξερεύνηση, ενθαρρύνοντας τους μαθητές να αναπτύξουν τις δικές τους μεθόδους (Doorman et al., 2016).

Οι Σκουμπουρδή & Βαϊτσίδη (2019) αναφέρουν πως ο εκπαιδευτικός πρέπει να ενθαρρύνει και να καθοδηγεί τους μαθητές, συνδέοντας τις σκέψεις τους με την τυπική μαθηματική γνώση. Αυτή η προσέγγιση βοηθά τους μαθητές να αναπτύξουν κριτική σκέψη και να κάνουν συνδέσεις μεταξύ των μαθηματικών εννοιών και των πρακτικών εφαρμογών τους. Επίσης, οι Hersant & Choquet (2019) επισημαίνουν ότι οι εκπαιδευτικοί χρειάζεται να υποστηρίζουν τις δραστηριότητες των μαθητών και να τους καθοδηγούν στη διατύπωση και επίλυση προβλημάτων. Ως εκ τούτου, η θέση του εκπαιδευτικού δεν περιορίζεται στην παροχή πληροφοριών, αλλά δημιουργεί ένα περιβάλλον που ευνοεί τη διερεύνηση και τη μάθηση.

Η ανατροφοδότηση είναι εξίσου σημαντική. Μέσα από την παροχή σχολίων, ο εκπαιδευτικός εμψυχώνει τους μαθητές να αξιολογήσουν τις λύσεις τους και να αναστοχαστούν τις στρατηγικές τους (Bosch & Winsløw, 2015). Με αυτόν τον τρόπο, αναπτύσσουν κριτική σκέψη και προσαρμόζουν τις μεθόδους τους στην επίλυση προβλημάτων.

Συνοπτικά, ο εκπαιδευτικός στη διερευνητική μάθηση λειτουργεί με στόχο την καθοδήγηση και τη διευκόλυνση των μαθητών. Βασικό του μέλημα είναι η ενίσχυση της σκέψης και της δημιουργικότητας των μαθητών, προσαρμόζοντας την υποστήριξή του σύμφωνα με τις ανάγκες και την αυτονομία τους (Σκουμπουρδή & Βαϊτσίδη, 2019).

2.2.4 Μαθηματικά έργα που προτείνονται στη Μάθηση μέσω διερεύνησης

Η διερευνητική διδασκαλία προσφέρει διάφορες δραστηριότητες που παρακινούν τους μαθητές να συμμετέχουν στη μαθησιακή διαδικασία. Οι ερωτήσεις ανοικτού τύπου αποτελούν μια κρίσιμη μορφή δραστηριότητας. Αυτές οι προκλήσεις δεν έχουν μια μοναδική απάντηση ή μια καθορισμένη μέθοδο. Με τη διερεύνηση διαφόρων στρατηγικών οι μαθητές ενισχύουν τις ικανότητες επίλυσης προβλημάτων και τη δημιουργικότητά τους (Artigue & Blomhøj, 2013).

Ένας άλλος τύπος δραστηριότητας αφορά τα προβλήματα με πολλαπλές μεθόδους επίλυσης. Σε αυτές τις περιπτώσεις, οι μαθητές μπορούν να αναπτύξουν διάφορες στρατηγικές για την επίλυση ενός προβλήματος, χρησιμοποιώντας διαφορετικές μαθηματικές έννοιες και αξιολογώντας τις λύσεις που προκύπτουν κάθε φορά (Maass & Artigue, 2013). Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα μπορεί να λυθεί τόσο με αλγεβρικές όσο και με γεωμετρικές μεθόδους, δίνοντας στους μαθητές την ευκαιρία να ανακαλύψουν τις συνδέσεις μεταξύ των διαφόρων κλάδων των μαθηματικών (Maass & Artigue, 2013).

Η διερευνητική μάθηση περιλαμβάνει επίσης ασκήσεις που απαιτούν κριτική σκέψη και αναστοχασμό. Μέσω αυτών των δραστηριοτήτων, οι μαθητές διατυπώνουν υποθέσεις, εξετάζουν εναλλακτικές λύσεις και εφαρμόζουν τα μαθηματικά σε πρακτικές καταστάσεις (Doorman et al., 2016).

Συνολικά, οι δραστηριότητες της διερευνητικής μεθόδου διαμορφώνουν ένα περιβάλλον που ενισχύει την αυτονομία των μαθητών, επιτρέπει την ανάπτυξη διαφορετικών τρόπων σκέψης και συνδέει τη μαθηματική γνώση με τον πραγματικό κόσμο.

Η επίλυση προβλήματος συνδέεται στενά με τη διερευνητική μάθηση. Μέσα από τη διερεύνηση, οι μαθητές αποκτούν την ευκαιρία να καλλιεργήσουν την κριτική σκέψη και να κατανοήσουν σε βάθος μαθηματικές έννοιες, εφαρμόζοντας πρακτικές και πειραματισμούς (Maass & Artigue, 2013). Σε αντίθεση με τις παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας, εδώ οι μαθητές αναλαμβάνουν το ρόλο του "ερευνητή," θέτοντας ερωτήματα, παρατηρώντας, αναλύοντας και συζητώντας για να βρουν απαντήσεις (Maass & Artigue, 2013). Μάλιστα, έρευνες έχουν δείξει ότι όταν η διερεύνηση συνδέεται με πραγματικές εφαρμογές στον τομέα των STEM, ενισχύει σημαντικά την εμπλοκή των μαθητών (Attard et al., 2021).

Η διερευνητική μάθηση δεν αφορά μόνο τη λύση ενός συγκεκριμένου προβλήματος, αλλά καλλιεργεί μια συνολική νοοτροπία αναζήτησης και ανακάλυψης. Οι μαθητές μαθαίνουν να θέτουν υποθέσεις, να συλλέγουν δεδομένα και να αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης (Doorman et al., 2016). Ενθαρρύνονται να εμβαθύνουν στην ουσία των εννοιών και να βλέπουν τα λάθη ως μέρη της διαδικασίας μάθησης. Μέσω των μεθόδων διερεύνησης οι μαθητές εμπλέκονται στη μάθηση, ενώ αντιμετωπίζουν αποτελεσματικά μαθηματικά ζητήματα. Με την υιοθέτηση αυτής της τεχνικής οι μαθητές βελτιώνουν τις δεξιότητές τους στη διαμόρφωση ερωτήσεων, στην επεξεργασία πληροφοριών και στην αναζήτηση λύσεων (Artigue & Blomhøj, 2013). Η διερεύνηση ξεπερνά τα στενά όρια της απλής αναζήτησης μιας λύσης, αλλά εμβαθύνει στη γνώση των ποικίλων πτυχών ενός μαθηματικού προβλήματος και των μαθηματικών εννοιών που εμπεριέχει (Artigue & Blomhøj, 2013).

Κεντρικό στοιχείο αυτής της μεθόδου είναι η ικανότητα των μαθητών να θέτουν ερωτήματα και να σε πιθανές λύσεις. . Ως αποτέλεσμα αυτής της προσέγγισης οι μαθητές καλλιεργούν μια ερευνητική στάση, όπου τα λάθη γίνονται εφόδιο μάθησης μέσα από τον πειραματισμό και τον αναστοχασμό (Maass & Artigue, 2013). Για παράδειγμα, σε ένα γεωμετρικό πρόβλημα, οι μαθητές μπορούν να εξετάσουν διάφορες ιδιότητες των σχημάτων και να δοκιμάσουν διαφορετικές προσεγγίσεις πριν καταλήξουν σε μια λύση.

Η διερεύνηση προάγει επίσης τη συνεργασία. Μέσα από τον διάλογο και την ανταλλαγή ιδεών, οι μαθητές μαθαίνουν να αξιολογούν τις πληροφορίες, να συγκρίνουν διάφορες μεθόδους και να αναπτύσσουν την κριτική τους σκέψη, τη δημιουργικότητα και την καινοτομία στην τάξη (Doorman et al., 2016).

Τέλος, η μελέτη των Σκουμπουρδή & Βαϊτσίδη (2019) επισημαίνει ότι η διερευνητική μάθηση δεν περιορίζεται σε απλά στάδια επίλυσης, αλλά αντίθετα, επιδιώκει την καλλιέργεια δεξιοτήτων που επιτρέπουν στους μαθητές να υιοθετήσουν ουσιαστικούς ρόλους, να διατυπώνουν υποθέσεις, να πειραματίζονται και να αξιολογούν τις στρατηγικές τους. Οι Hersant & Choquet (2019) τονίζουν ότι η αποτελεσματική εφαρμογή της διερευνητικής μάθησης απαιτεί μια αλλαγή στον τρόπο με τον οποίο σχεδιάζονται και προσεγγίζονται τα προβλήματα στην τάξη, καθώς όταν ενσωματώνονται πρακτικά προβλήματα της καθημερινότητας των παιδιών και σύνδεση αυτών με τον επιχειρηματικό τομέα, τότε αυξάνεται το ενδιαφέρον και η κινητοποίηση των μαθητών (Attard et al., 2021).

Παραδείγματα όπου η διερεύνηση μπορεί να εφαρμοστεί περιλαμβάνουν την εξερεύνηση γεωμετρικών σχημάτων, την ανάλυση δεδομένων και τη διατύπωση αλγορίθμων για την επίλυση σύνθετων προβλημάτων. Μέσα από αυτήν την πρακτική, οι μαθητές αναπτύσσουν μια βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και αποκτούν τα εφόδια για να αντιμετωπίσουν παρόμοια προβλήματα στο μέλλον. Συνεπώς, η διερεύνηση δεν αποτελεί απλώς μια μέθοδο επίλυσης προβλημάτων αλλά μια ολιστική προσέγγιση στη μαθηματική σκέψη (Σκουμπουρδή & Βαϊτσίδη, 2019)

2.3 Στάσεις και αντιλήψεις των μαθητών για τη σημασία των μαθηματικών

Το μάθημα των μαθηματικών, για αρκετούς μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, δεν αποτελεί μια εύκολη υπόθεση ή, καλύτερα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι μαθητές δεν είναι σε θέση να σταθμίσουν σωστά όλα τα πλεονεκτήματα που μπορεί να έχουν από το μάθημα αυτό στο μέλλον (Onion, 2004). Κι αυτό διότι τα μαθηματικά αποτελούνται από μία πολύπλοκη διαδικασία και κάποια χαρακτηριστικά που κάνουν το μάθημα αυτό δυσνόητο για κάποιους, με αποτέλεσμα μαθητές να απομακρύνονται όλο και περισσότερο από την κατάκτηση της μαθηματικής γνώσης (Τουμάσης, 2002).

Πάνω σε αυτό το ζήτημα συμφωνούν και άλλοι μελετητές, μεταξύ των οποίων ο Outhred και οι συνεργάτες του (2000), οι οποίοι αναφέρουν ότι πρόκειται για ένα μάθημα που διακρίνεται από αλγοριθμική προσέγγιση, η οποία καταλήγει στην τυπολατρία, κάτι που αναπόφευκτα οδηγεί στην ελλιπή κατανόηση, αναγκάζοντας παράλληλα πολλούς μαθητές να καταφεύγουν στην αποστήθιση απλά και μόνο για να καταφέρουν να ολοκληρώσουν το μάθημα της τάξης τους (Outhred et al., 2000). Πολλοί μαθητές, όπως χαρακτηριστικά αναφέρει η Zevenbergen (2000) καλούνται να καταλάβουν και να αντιληφθούν ένα εξειδικευμένο και «δύσκολο» λεξιλόγιο για τους ίδιους, κάτι το οποίο μπορεί να υπονομεύσει τις επιδόσεις τους, αλλά και να τους απομακρύνει ακόμη περισσότερο από το μάθημα αυτό, χωρίς να αντιλαμβάνονται στην παρούσα τουλάχιστον φάση τι σημαίνει αυτό για τη μελλοντική τους πορεία.

Πολλές έρευνες έχουν γίνει για τις στάσεις των μαθητών απέναντι στα μαθηματικά, καθώς αυτά αποτελούν μια πολυδιάστατη έννοια, και πρόκειται για ένα μάθημα που προκαλεί προβλήματα και αδιαφορία για αρκετούς μαθητές.

Η έρευνα που διεξήχθη από τους Kapetanas & Zachariades, to 2007, σε διάφορα ελληνικά σχολεία (δημόσια, ιδιωτικά και τεχνικά) είχε σκοπό να διερευνήσει τους διάφορους παράγοντες που επηρεάζουν τις στάσεις των μαθητών Λυκείου στα μαθηματικά. Στη συγκεκριμένη έρευνα έλαβαν μέρος στο σύνολο 1.645 μαθητές από την περιοχή της Αττικής και από τα 3 αυτά σχολεία. Στην προκειμένη περίπτωση ακολουθήθηκε η μέθοδος των ερωτήσεων (στο σύνολο 27 ερωτήσεις), που κατανεμήθηκαν σε 3 διαφορετικές κατηγοριοποιήσεις στους συμμετέχοντες: 15 ερωτήσεις αφορούσαν γενικότερα θέματα απόψεων των μαθητών από τα σχολεία αυτά για τα μαθηματικά, 8 σχετίζονταν με τις στάσεις τους απέναντι στο μάθημα αυτό (π.χ., αν το έβρισκαν ενδιαφέρον κ.λπ.), ενώ τέλος υπήρχαν και 3 σύντομες ασκήσεις. Επίσης, ο κάθε ερωτώμενος στο τέλος του τεστ έπρεπε να σημειώσει και τη βαθμολογία του στα μαθηματικά το προηγούμενο έτος. Οι μελετητές αναλύοντας τις απαντήσεις κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι οι απαντήσεις που δόθηκαν από τους μαθητές από 3 διαφορετικά είδη σχολείων δεν σχετίζονταν σε οικονομικές διαφορές ή σε θέματα κοινωνικού status. Επίσης, διαπίστωσαν ότι υπήρχαν διαφοροποιήσεις στις απαντήσεις τους στο είδος του σχολείου, όπου οι συμμετέχοντες των ιδιωτικών έδειξαν να δείχνουν μεγαλύτερο εμπιστοσύνη στη χρησιμότητα του μαθήματος αυτού σε σχέση με τους συμμετέχοντες που προέρχονταν από δημόσια σχολεία. Οι απαντήσεις των παιδιών των τεχνικών λυκείων υπέδειξαν ότι αυτά πιστεύουν ότι η κατανόηση τέτοιων εννοιών μπορεί να επιτευχθεί μέσα από κάποιες διαδικασίες, καθώς στα μαθηματικά χρησιμοποιούνται μεταβλητές, αλγόριθμοι και άλλα, που είναι δύσκολα θέματα. Οι μαθητές των τεχνικών λυκείων φάνηκε ότι αντιμετώπιζαν περισσότερα προβλήματα.

Η μελέτη του Van Elst (2013), που έλαβε χώρα στην Ολλανδία, σε μαθητές δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, εστίασε σε ένα επιπλέον μάθημα μαθηματικών, που δίνονταν στην τελευταία τάξη του σχολείου, ως μια εναλλακτική, κυρίως για μαθητές που έδειχναν ιδιαίτερο ενδιαφέρον ή μεγάλη κλίση στο μάθημα αυτό. Αν και ο αρχικός σκοπός του προγράμματος αυτού ήταν να δοθεί έμφαση στη σύνδεση μαθηματικών με άλλες επιστήμες (π.χ., βιολογία ή οικονομικά), ωστόσο η έρευνα αυτή έδειξε ότι οι μαθητές που στο μάθημα αυτό χρησιμοποιούσαν το συνηθισμένο πλάνο και υλικό μαθηματικών αποτύγχαναν να καταλάβουν τη χρησιμότητα του μαθήματος αυτού. Πιο αναλυτικά, στην έρευνα αυτή, ο Ολλανδός ερευνητής παρακολούθησε τις στάσεις 112 μαθητών για 3 χρόνια, και αποτελέσματά του έδειξαν ότι οι περισσότεροι συμμετέχοντες δεν ήταν πεπεισμένοι για τη χρησιμότητα του μαθήματος αυτού. Καθώς πολλοί μαθητές εκδήλωσαν το ενδιαφέρον τους για το επιπλέον αυτό μάθημα, οι ιθύνοντες αποφάσισαν να διαφοροποιήσουν το πρόγραμμα με νέο υλικό με τον απαραίτητο σχεδιασμό, προσφέροντας παράλληλα στους ενδιαφερόμενους μαθητές διάφορες εργασίες που βασίζονταν και σε άλλα προβλήματα, όπως για παράδειγμα οικονομικής φύσεως. Αρχικός στόχος ήταν οι μαθητές να βελτιώσουν τους τρόπους και σκέψης για την καλύτερη κατανόηση σχετικά με το πώς διάφορα στοιχεία (πχ. θεωρία των συνηθισμένων διαφορικών εξισώσεων) μπορούν να τους βοηθήσουν και στο μέλλον, όπως για παράδειγμα στο πανεπιστήμιο ή αργότερα στην κοινωνία. Με αυτόν τον τρόπο στην ουσία αποδείχθηκε ότι μέσα από διάφορες παρεμβάσεις (π.χ. νέο προτεινόμενο υλικό) μπορούν οι μαθητές να αλλάξουν τις στάσεις τους σχετικά με τα μαθηματικά.

Από αυτές τις έρευνες γίνεται αντιληπτό ότι ένα μεγάλο ποσοστό αποτυχίας όσον αφορά την ικανότητα των μαθητών να αντιληφθούν τη χρησιμότητα των μαθηματικών στο μέλλον δεν είχε σχέση μόνο με την αρνητική στάση τους για το μάθημα αυτό, τις πράξεις και τους υπολογισμούς κ.λπ.

Από τα παραπάνω εύλογα συμπεραίνεται ότι ο τρόπος διδασκαλίας είναι σημαντικός, καθώς και ο σωστός σχεδιασμός του μαθήματος, έτσι ώστε οι μαθητές να δείχνουν μεγαλύτερο ενδιαφέρον και να μη θεωρούν το μάθημα αυτό ως «αχρείαστο». Σύμφωνα με την Julie (2002), για να ενισχυθούν οι αντιλήψεις των μαθητών για το ζήτημα αυτό μπορεί να σχεδιαστεί, για παράδειγμα, ένα νέο πρόγραμμα διδασκαλίας (όπως συνέβη και στην Ολλανδία), με βάση τις διαφορικές εξισώσεις, καθώς και να έχουν οι μαθητές από εκεί και πέρα τη δυνατότητα επιλογής μεταξύ πλαισίων, ανάλογα με τα ενδιαφέροντά τους.

Κεφάλαιο 3^{ο}
Μεθοδολογία

3.1 Ερευνητικό Θέμα και Ερευνητικά Ερωτήματα

Η παρούσα διπλωματική εργασία μελετά τις δράσεις διερεύνησης επτά μαθητών/τριών δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε ένα εργαστήριο ξυλουργικής.

Σκοπός της παρούσας έρευνας είναι η μελέτη των δράσεων που πραγματοποιούν οι επτά συμμετέχοντες μαθητές καθώς προσπαθούν να επιλύσουν τρία αυθεντικά προβλήματα, τα οποία δόθηκαν υπό τη μορφή ημιτελών, ξύλινων κατασκευών.

Παράλληλα, μελετήθηκαν οι στάσεις των μαθητών για τη σημασία των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή και το χώρο εργασίας πριν και μετά την εμπλοκή τους στα προβλήματα της ξυλουργικής του εργαστηρίου μέσα από ατομικές συνεντεύξεις. Τα ερευνητικά ερωτήματα τα οποία προέκυψαν είναι τα ακόλουθα:

α) Ποιες δράσεις διερεύνησης εντοπίζονται κατά την επίλυση των αυθεντικών προβλημάτων από τους μαθητές;

β) Με ποιον τρόπο η εμπλοκή τους στην επίλυση προβλημάτων ξυλουργικής επηρέασε τις στάσεις τους για τη σημασία των μαθηματικών στην καθημερινότητα και στον χώρο εργασίας;

3.2 Συμμετέχοντες

3.2.1 Συμμετέχοντες Μαθητές

Στην έρευνα συμμετείχαν επτά μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης, τέσσερις από τη Γ΄ Γυμνασίου (ΜΓ$_1$, ΜΓ$_2$, ΜΓ$_3$ και ΜΓ$_4$, τρία αγόρια και ένα κορίτσι) και τρεις από την Α΄ Λυκείου (ΜΛ$_5$, ΜΛ$_6$ και ΜΛ$_7$, δύο αγόρια και ένα κορίτσι). Τόσο το γνωστικό επίπεδο όσο και το ενδιαφέρον των μαθητών για τα Μαθηματικά ποικίλουν.

Συγκεκριμένα, οι ΜΓ$_1$, ΜΓ$_2$ και ΜΛ$_5$, ενώ έχουν υψηλό επίπεδο μαθηματικών γνώσεων, επιδεικνύουν μέτριο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά. Ο ΜΓ$_3$ έχει χαμηλό μαθηματικό υπόβαθρο και παρουσιάζει χαμηλό ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Οι $ΜΓ_4$ και $ΜΛ_6$ έχουν μέτριο επίπεδο μαθηματικών γνώσεων, ενώ η $ΜΛ_7$ χαμηλό επίπεδο και παρουσιάζουν μέτριο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά.

Όλοι οι συμμετέχοντες είχαν ολοκληρώσει την διδακτέα ύλη της τάξης τους. Αξίζει να σημειωθεί ότι από τους επτά συμμετέχοντες, μόνο ο $ΜΓ_2$ έχει εφαρμόσει τις μαθηματικές γνώσεις που έχει αποκομίσει από τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση στο παρελθόν σε μια πραγματική κατάσταση (υπολογισμός επιφάνειας με χρήση τύπων εμβαδού με σκοπό την αφισοκόλληση).

ΜΑΘΗΤΗΣ	ΦΥΛΟ	ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟ ΕΠΙΠΕΔΟ	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΥΠΟΒΑΘΡΟ
$ΜΓ_1$	Αγόρι	Γ’ Γυμνασίου	Υψηλό
$ΜΓ_2$	Αγόρι	Γ’ Γυμνασίου	Υψηλό
$ΜΓ_3$	Αγόρι	Γ’ Γυμνασίου	Χαμηλό
$ΜΓ_4$	Κορίτσι	Γ’ Γυμνασίου	Μέτριο
$ΜΛ_5$	Αγόρι	Α’ Λυκείου	Υψηλό
$ΜΛ_6$	Αγόρι	Α’ Λυκείου	Μέτριο
$ΜΛ_7$	Κορίτσι	Α’ Λυκείου	Χαμηλό

Ο ερευνητής είναι για περισσότερα από δυο χρόνια εκπαιδευτικός των συμμετεχόντων σε ιδιωτικό φροντιστήριο. Τόσο το γνωστικό υπόβαθρο όσο και το ενδιαφέρον των μαθητών για τα Μαθηματικά προκύπτει από την γραπτή εξέταση και από τη συνολική τους επίδοση κατά τη διάρκεια των μαθημάτων.

Οι $ΜΓ_1$, $ΜΓ_2$ και $ΜΛ_5$ πετυχαίνουν υψηλές βαθμολογίες (άνω του 18) στα τετράμηνα και στα διαγωνίσματα εντός και εκτός σχολείου. Οι $ΜΓ_1$ και $ΜΛ_5$ παρουσιάζουν μεγαλύτερη ευχέρεια στο μάθημα της Γεωμετρίας, ενώ ο $ΜΓ_2$ προτιμά την Άλγεβρα. Οι

$ΜΓ_4$ και $ΜΛ_6$, παρότι έχουν υψηλές βαθμολογίες στο σχολείο, παρουσιάζουν ελλείψεις στις προαπαιτούμενες γνώσεις και δεν πετυχαίνουν υψηλές βαθμολογίες στα γραπτά τεστ του ερευνητή-εκπαιδευτικού (13-16). Ο $ΜΓ_3$ είναι ένας μαθητής που δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα μαθήματα του σχολείου. Εκτός σχολικού ωραρίου, εργάζεται ως βοηθός του πατέρα του σε εργαστήριο κουφωμάτων αλουμινίου και θέλει να συνεχίσει το επάγγελμα αυτό, αφού αποφοιτήσει από το Επαγγελματικό Λύκειο. Η $ΜΛ_7$ αν και ενδιαφέρεται για το μάθημα των Μαθηματικών, παρουσιάζει ελλείψεις στις προαπαιτούμενες γνώσεις του Γυμνασίου και συνήθως πετυχαίνει χαμηλές εώς μέτριες επιδόσεις τόσο στη βαθμολογία του σχολείου, όσο και στα γραπτά τεστ του ερευνητή κατά τη διάρκεια των δυο ετών.

3.2.2 Ο ερευνητής και ο ρόλος του

Ο ερευνητής έχει εργαστεί στο παρελθόν ως βοηθός σε εργαστήριο εγκαταστάσεων επίπλων κουζίνας και είναι εξοικειωμένος με κατασκευές και χειρωνακτικές εργασίες. Ο ρόλος του ως εκπαιδευτικός στόχευε στην υποστήριξη της διερεύνησης των συμμετεχόντων μέσω ερωτήσεων και παρεμβάσεων, χωρίς όμως να κατευθύνει τους μαθητές στη σωστή απάντηση.

Ταυτόχρονα, επιδίωξε να χρησιμοποιήσει όσο το δυνατόν απλούστερη γλώσσα, απαλλαγμένη από μαθηματικούς όρους, οι οποίοι θα ευνοούσαν την κατεύθυνση προς την επίλυση των προβλημάτων.

Τέλος, πραγματοποίησε όλες τις απαραίτητες εργασίες, με τον τρόπο που του υπέδειξαν οι μαθητές, για την κοπή των τεμαχίων ξυλείας με ηλεκτρικά εργαλεία.

3.3 Υλικά και Εργαλεία του εργαστηρίου

Για την πραγματοποίηση των μετρήσεων και τη χάραξη των κοπών οι μαθητές είχαν στη διάθεση τους:

Χάρακας αλουμινίου 1m

Μετροταινία 5m

Σπαστό μέτρο 2 m

Γωνιόμετρο ξυλουργού

Ψηφιακό μοιρογνωμόνιο

Μολύβι μαραγκού

Από τον χάρακα αλουμινίου αφαιρέθηκαν τα αλφάδια τα οποία περιείχε. Η ύπαρξη αλφαδιών θα μπορούσε να περιορίσει τη διερευνητική δραστηριότητα των μαθητών κατά την χάραξη μιας παράλληλης ευθείας.

Για την πραγματοποίηση των κοπών των ξύλινων τεμαχίων, ο ερευνητής χρησιμοποίησε δύο ηλεκτρικά εργαλεία, συγκεκριμένα ένα δισκοπρίονο χειρός και μια σέγα ταλάντωσης.

Εκτός από την απαραίτητη ξυλεία για την υλοποίηση των κατασκευών, ο ερευνητής είχε στη διάθεση του ορισμένα τεμάχια ξύλου, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν ως βοηθητικά μέσα. Στον χώρο εργασίας της ξυλουργικής, τα τεμάχια αυτά είναι μηδενικού κόστους αφού προκύπτουν από προηγούμενες κοπές και εφόσον δεν αξιοποιούνται στο εκάστοτε έργο, αποθηκεύονται για μελλοντική χρήση είτε σε κάποια κατασκευή είτε σαν βοηθητικά μέσα.

Όνομα Τεμαχίου	Αριθμός τεμαχίων	Διαστάσεις σε εκατοστά (μήκος x πλάτος)	Μαθηματικό Έργο
Βοηθητικό Πηχάκι Α	6	350 x 7	$ΜΕ_2$
Βοηθητικό Πηχάκι Β	6	300 x 4	$ΜΕ_2$, $ΜΕ_3$
Ελεύθερη Δοκός	3	200 x 12	$ΜΕ_2$
Φύλλο Στέγης	1	125 x 85	$ΜΕ_3$
Φύλλο Τραπεζιού	1	125 x 125	$ΜΕ_1$

3.4 Μέσα Συλλογής Ερευνητικών Δεδομένων

Ως μέσα συλλογής των δεδομένων της έρευνας χρησιμοποιήθηκαν η μαγνητοφώνηση των *κλινικών συνεντεύξεων των μαθητών* πριν και μετά την εμπλοκή τους στην επίλυση των προβλημάτων του εργαστηρίου, *η βιντεοσκόπηση* της δραστηριότητας που ανέπτυξαν οι μαθητές στο εργαστήριο ξυλουργικής και *οι σημειώσεις πεδίου* του ερευνητή εκπαιδευτικού κατά τη διάρκεια της έρευνας. Παράλληλα, χρησιμοποιήθηκαν και οι *σημειώσεις-σχέδια των μαθητών σε φύλλα χαρτιού* στην προσπάθεια τους να μαθηματικοποιήσουν το πρόβλημα. Όλες οι συνεντεύξεις και βιντεοσκοπήσεις απομαγνητοφωνήθηκαν.

3.5 Περιγραφή Φάσεων της Έρευνας

Η 1η φάση της έρευνας περιελάμβανε τη διεξαγωγή ημιδομημένων συνεντεύξεων (semi-structured) με τον κάθε μαθητή, χωρίς την παρουσία άλλων στο χώρο. Οι ερωτήσεις των συνεντεύξεων αφορούσαν τη σχέση, το ενδιαφέρον για τα μαθηματικά και τις στάσεις τους για τη σημασία των μαθηματικών στην ανθρώπινη καθημερινότητα. Οι απαντήσεις δόθηκαν προφορικά, καταγράφηκαν και στη συνέχεια απομαγνητοφωνήθηκαν. Από την ανάλυση των απαντήσεων προκύπτει το προφίλ του κάθε μαθητή σχετικά με τις στάσεις του για την ωφέλεια των μαθηματικών

Στη 2η φάση πραγματοποιείται η εμπλοκή στις βιωματικές δραστηριότητες σε δύο ομάδες, σε ξεχωριστό χρόνο. Η κάθε ομάδα αποτελείτο από μαθητές της ίδιας τάξης. Η έρευνα διεξήχθη σε χώρο ο οποίος διέθετε πληθώρα εργαλείων και λόγω όγκου επέτρεπε την μετακίνηση των ξύλινων κατασκευών και των υλικών του εργαστηρίου που περιγράφηκαν παραπάνω.

Εικόνα 1. Το εργαστήριο ξυλουργικής

Αρχικά, έγινε περιγραφή των διαθέσιμων εργαλείων στους συμμετέχοντες, τα οποία σχετίζονται με υπολογισμούς διαστάσεων και γωνιών και έχει συνήθως στην κατοχή του ένας επαγγελματίας ξυλουργός, καθώς και κάποιες τεχνικές λεπτομέρειες που αφορούν την κατασκευή γωνιών.

Έπειτα, ο ερευνητής παρουσίασε τις προς ολοκλήρωση κατασκευές στους συμμετέχοντες και έδωσε διευκρινίσεις σχετικές με το ζητούμενο της κάθε κατασκευής. Παράλληλα, περιέγραψε τους περιορισμούς που πρέπει να λαμβάνει υπόψη του ένας επαγγελματίας ξυλουργός ώστε να είναι βιώσιμη η εργασία του. Οι περιορισμοί αυτοί περιλαμβάνουν την προσεκτική χάραξη των κοπών της ξυλείας, ώστε να μην υπάρχει απώλεια σε υλικό αλλά και καθυστέρηση στο χρόνο κατασκευής. Επιπρόσθετα, ενημέρωσε πως τα προς επεξεργασία τεμάχια της έρευνας αποτελούνται από ξυλεία υψηλού κόστους, χωρίς όμως να δώσει πληροφορίες για την τιμή του κάθε τεμαχίου.

Εικόνα 2. Εργαλεία του εργαστηρίου

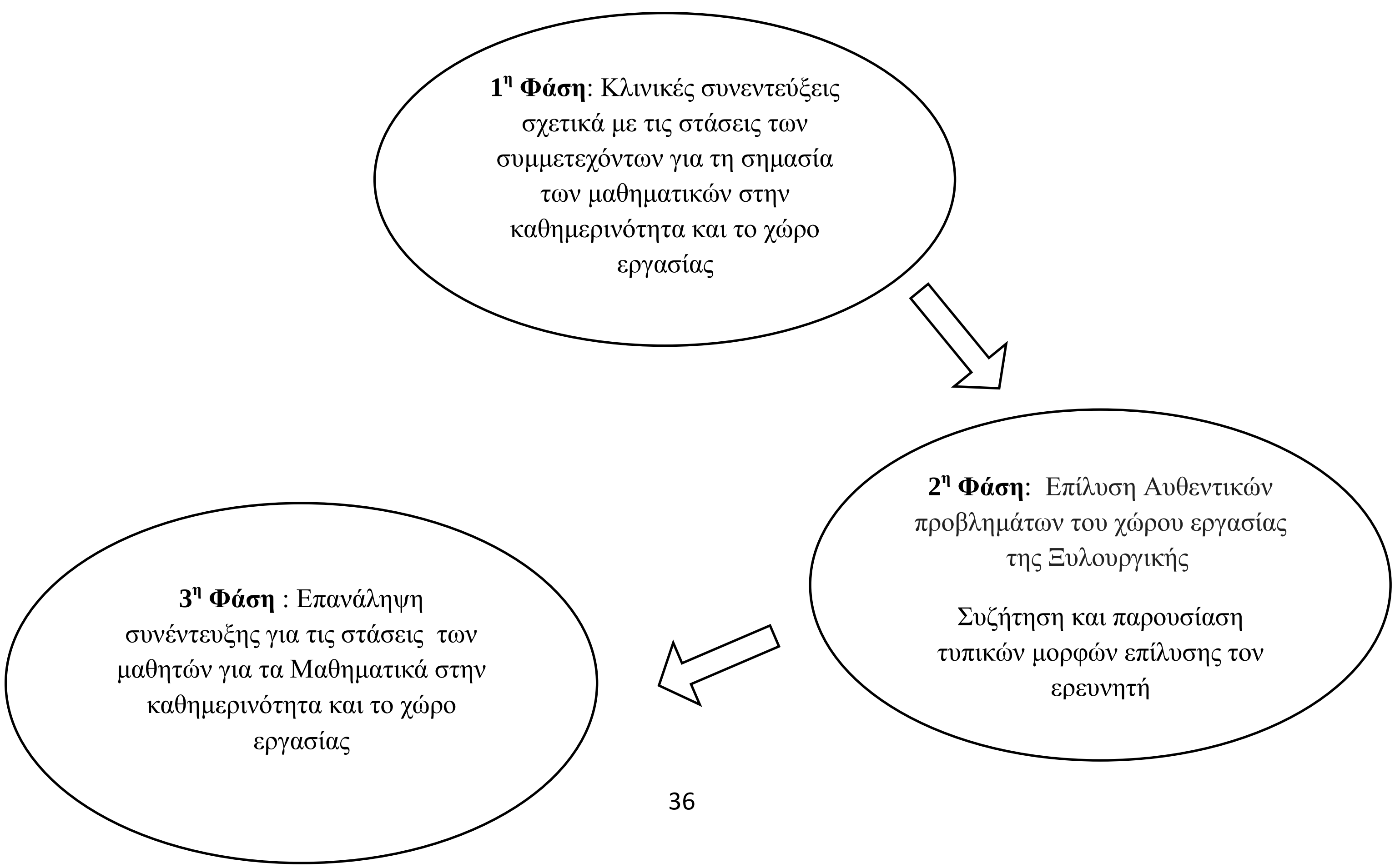
Τα καθήκοντα των μαθητών περιορίστηκαν σε υπολογισμούς διαστάσεων, γωνιών και χαράξεις κοπών. Οι κοπές πραγματοποιήθηκαν με ηλεκτρικά εργαλεία από τον ερευνητή σε απόσταση από τους μαθητές, για λόγους ασφαλείας.

Η εργασία των μαθητών καταγράφηκε μέσω βίντεο και γραπτών σημειώσεων από τον ερευνητή. Τα καταγραφόμενα διαστήματα διαρκούσαν από την έναρξη εργασιών του εκάστοτε μαθητή μέχρι και τη στιγμή που ο ερευνητής διέκοπτε την βιντεοσκόπηση για την εκτέλεση των απαιτούμενων ενεργειών (κοπές, βοηθητικές κατασκευές) που του υπεδείκνυαν οι συμμετέχοντες μαθητές.

Το τέλος της $2^{ης}$ φάσης περιελάμβανε συζήτηση και αναστοχασμό γύρω από τις απαντήσεις των μαθητών, η οποία πραγματοποιήθηκε με την κάθε ομάδα ξεχωριστά, στο τέλος της παρέμβασης σε φροντιστηριακό χώρο. Μαθητές και ερευνητής εξέτασαν εναλλακτικές μορφές επίλυσης, συμπεριλαμβανομένων και των τυπικών μορφών επίλυσης με τη χρήση των μαθηματικών εννοιών που οι μαθητές έχουν διδαχθεί στο σχολείο. Η συζήτηση αυτή ανάμεσα στον ερευνητή και τους συμμετέχοντες δεν βιντεοσκοπήθηκε, όμως αποτέλεσε σημαντικό στάδιο για τη μετάβαση στη $3^{η}$ φάση.

Η $3^{η}$ φάση πραγματοποιήθηκε δύο μέρες μετά την εμπλοκη των συμμετεχόντων στα προβλήματα ξυλουργικής και αποτελεί μια επανάληψη της $1^{ης}$ φάσης. Ο εκπαιδευτικός έθεσε ερωτήσεις σχετικές με τις στάσεις των μαθητών για τη σημασία των μαθηματικών (παρόμοιες με τις ερωτήσεις της $1^{ης}$ φάσης), αλλά και ερωτήσεις που εστιάζουν στην εμπειρία που αποκόμισαν συμμετέχοντας στην επίλυση των προβλημάτων της έρευνας και απευθύνονται σε κάθε μαθητή ξεχωριστά.

Οι απαντήσεις των συμμετεχόντων συγκρίθηκαν με τις προηγούμενες απαντήσεις τους, έτσι ώστε να διαπιστωθεί αν στάσεις τους για τα μαθηματικά διαφοροποιήθηκαν. Η περίοδος που μεσολάβησε ανάμεσα στην $1^{η}$ και $3^{η}$ φάση ήταν περίπου δύο μήνες.



3.6 Τα μαθηματικά έργα

Οι κατασκευές τις οποίες κλήθηκαν να ολοκληρώσουν οι συμμετέχοντες κατασκευάστηκαν από τον ερευνητή με στόχο η ολοκλήρωση τους να μπορεί πραγματοποιηθεί με πολλαπλές μεθόδους επίλυσης ώστε να ενισχύεται η διερεύνηση, όπως περιγράφεται στο θεωρητικό πλαίσιο. Η πρώτη κατασκευή (Μαθηματικό Έργο 1) αφορά την κατασκευή ενός οβάλ τραπεζιού και αποτελεί εξ' ολοκλήρου σύλληψη του ερευνητή. Η δεύτερη και η τρίτη κατασκευή (Μαθηματικό Έργο 2 και 3) είναι τροποποιημένα προβλήματα πραγματικών κατασκευών που κλήθηκαν να κατασκευάσουν δύο ξυλουργοί, στους οποίους ο ερευνητής παρείχε συμβουλές για την ολοκλήρωση τους σαν μαθηματικός. Η τρίτη δραστηριότητα μάλιστα περιλαμβάνει και τον υπολογισμό γωνιών φαλτσοκοπής κατά την κατασκευή μιας ξύλινης στέγης, που είναι συχνή πρόκληση που αντιμετωπίζουν οι ξυλουργοί κατά την κατασκευή γωνιών διαφορετικών των 90 μοιρών.

3.6.1 Μαθηματικό Έργο 1 (ΜΕ1): Κατασκευή Οβάλ Τραπεζιού

Η πρώτη δραστηριότητα αποτελείτο από ένα κυκλικό τραπέζι ακτίνας 60εκ. και ένα τετράγωνο τεμάχιο ξύλου πλευράς 1.35 μ. (Εικόνα 3). Οι μαθητές δε γνώριζαν τις διαστάσεις των ξύλινων τεμαχίων. Το κόστος των δύο αυτών τεμαχίων ήταν υψηλό στο πλαίσιο του προβλήματος, άρα έπρεπε να αποφευχθούν οι άσκοπες κοπές που ως αποτέλεσμα θα είχαν την απώλεια υλικού. Χρησιμοποιώντας τα και τα δύο, ζητήθηκε η κατασκευή ενός οβάλ τραπεζιού, όπως φαίνεται στο σχήμα, με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν (Εικόνα 4). Για να επιτευχθεί αυτό, οι μαθητές έπρεπε να τμήσουν το κυκλικό τραπέζι σε δύο ημικύκλια και στη συνέχεια να χαράξουν κατάλληλα το τετράγωνο τεμάχιο, έτσι ώστε η πλευρά του να ισούται με τη διάμετρο του κύκλου.

Για την ολοκλήρωση του πρώτου Μαθηματικού Έργου, οι μαθητές θα έπρεπε να είναι εξοικειωμένοι με τα βασικά στοιχεία του κύκλου (διάμετρος, ακτίνα, χορδή, ημικύκλιο), τις έννοιες της εγγεγραμμένης γωνίας (ειδικότερα της ορθής εγγεγραμμένης γωνίας), το μήκος του κύκλου, την καθετότητα ακτίνας-εφαπτομένης και την έννοια του εγγεγραμμένου κύκλου.

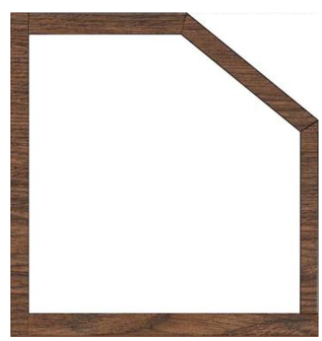
Εικόνα 3. Τεμάχια επεξεργασίας για την κατασκευή του ΜΕ1

Εικόνα 4. ΜΕ1

3.6.2 Μαθηματικό έργο 2 (ΜΕ2): Κατασκευή Πλαισίου Τέντας

Η δεύτερη δραστηριότητα αποτελείτο από τα υλικά που φαίνονται στην Εικόνα 5 συγκεκριμένα από δύο δοκούς με μήκη 2μ. και 2,5μ. αντίστοιχα, οι οποίες είναι κάθετες μεταξύ τους και συγκρατούνται με βίδες, και τρεις ελεύθερες δοκούς με μήκη 1μ.,7μ., 1,8μ. και 2μ. Το ζητούμενο ήταν να κοπούν οι τρεις ελεύθερες δοκοί σε ισομήκη τμήματα ώστε να προκύψει το σχήμα της Εικόνας 6.

Εικόνα 5. Υλικά κατασκευής του ΜΕ2



Εικόνα 6. Το ΜΕ2

Η περιγραφή της κατασκευής αρχικά έγινε προφορικά, όμως και οι δύο ομάδες μαθητών παρουσίασαν δυσκολίες στην κατανόηση του ζητουμένου. Έτσι, το σχήμα της Εικόνας 6 χαράχτηκε πρόχειρα με κιμωλία στο δάπεδο.

Η εύρεση του ζητούμενου μήκους x απαιτεί γνώσεις βασικών ταυτοτήτων, εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος, δυνατότητα επίλυσης εξισώσεων δευτέρου βαθμού, χρήση κλίμακας και επίλυση εξισώσεων πρώτου βαθμού.

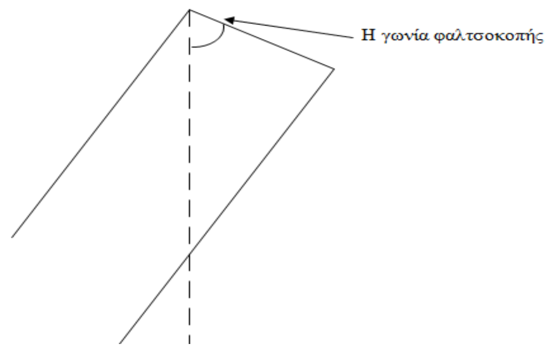
3.6.3 Μαθηματικό έργο 3 (ΜΕ3): Κατασκευή Ξύλινης Στέγης

Το τρίτο έργο αφορούσε στην κατασκευή ενός σκυλόσπιτου. Τα προσφερόμενα υλικά ήταν ένα ξύλινο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο διαστάσεων μήκους 80εκ., πλάτους 60εκ. και ύψους 70εκ. (Εικόνα 7) και ένα ξύλινο ορθογώνιο τεμάχιο διαστάσεων 125εκ. x 85 εκ.

Για την ολοκλήρωση της σύνθεσης αυτής, οι μαθητές έπρεπε να τμήσουν και να τοποθετήσουν τη στέγη με τρόπο τέτοιο που να σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο και το συνολικό ύψος του σπιτιού να μην υπερβαίνει τα 120εκ.

Εικόνα 7. Το ξύλινο σκυλόσπιτο.

Αρχικά ο ερευνητής υπέδειξε τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζονται οι γωνίες στις ξυλουργικές εργασίες. Έτσι, ανάλογα με τις τελικές διαστάσεις της στέγης οι μαθητές έπρεπε να υπολογίσουν την κατάλληλη γωνία φαλτσοκοπής (Εικόνα 9), ώστε να «γωνιάσουν» τα δυο ξύλινα τεμάχια που αποτελούν τη στέγη (Εικόνα 8).



Εικόνα 8. Η κορυφή της στέγης

Εικόνα 9. Η γωνία φαλτσοκοπής

Ο υπολογισμός της πλευράς της στέγης μπορεί να επιτευχθεί με ποικίλους τρόπους. Ενδεικτικά, πρέπει οι μαθητές να είναι σε θέση να γνωρίζουν τα δευτερεύοντα στοιχεία ενός τριγώνου (διάμεσος, διχοτόμος, ύψος), τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου, τον ορισμό και την ιδιότητα της μεσοκαθέτου, το Πυθαγόρειο Θεώρημα, καθώς και τριγωνομετρία (ημίτονο, συνημίτονο και εφαπτομένη οξείας γωνίας).

Η εύρεση της γωνίας φαλτσοκοπής προϋποθέτει γνώσεις τριγωνομετρίας, θεωρίας των γωνιών που προκύπτουν από παράλληλες ευθείες όταν τέμνονται από τρίτη ευθεία, των κατακορυφήν και παραπληρωματικών γωνιών και του θεωρήματος για το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου.

3.7 Μέθοδος Ανάλυσης των ερευνητικών δεδομένων

Μετά την ολοκλήρωση των τριών φάσεων της έρευνας, ξεκίνησε η διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων. Η ανάλυση αυτή βασίστηκε στην απομαγνητοφώνηση των βίντεο που λήφθηκαν κατά την εμπλοκή των μαθητών στην επίλυση των αυθεντικών προβλημάτων, στις σημειώσεις που αυτοί πραγματοποίησαν και στην απομαγνητοφώνηση των ατομικών συνεντεύξεων.

Με την προσεκτική μελέτη της βιντεοσκοπημένης εργασίας των μαθητών στις δύο ομάδες και των αντίστοιχων απομαγνητοφωνήσεων, ακολούθησε ο προσδιορισμός των “κρίσιμων επεισοδίων”. Ως κρίσιμα επεισόδια χαρακτηρίστηκαν οι στιγμές κατά τις οποίες οι μαθητές ανέπτυξαν δράσεις διερεύνησης, όπως αυτές περιγράφονται στο θεωρητικό πλαίσιο (βλέπε Παράγραφο 2.2.1 Δράσεις Διερεύνησης). Για την κατηγοριοποίηση των δράσεων που ανέπτυξαν οι μαθητές κατά τη διερευνητική διαδικασία χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της ανάλυσης περιεχομένου (context analysis).

Για την περεταίρω ανάλυση των δράσεων σε υποκατηγορίες χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της grounded (βασισμένη στα δεδομένα) theory. Αμφότερες μέθοδοι αποτελούν βασικές μορφές της ποιοτικής ανάλυσης δεδομένων (Cohen, Manion & Morrison, 2007).

Για την ανάλυση των απαντήσεων των συμμετεχόντων στις ατομικές συνεντεύξεις που πραγματοποιήθηκαν στην 1η και 3η φάση της έρευνας χρησιμοποιήθηκε η grounded (βασισμένη στα δεδομένα) theory. Συγκεκριμένα, τα δεδομένα αναλύθηκαν ως προς τις στάσεις τους απέναντι στη χρησιμότητα των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή των ανθρώπων και το χώρο εργασίας πριν και μετά την εμπλοκή τους στην επίλυση των προβλημάτων ξυλουργικής του εργαστηρίου.

Κεφάλαιο 4ο
Αποτελέσματα

4.1 Δράσεις Διερεύνησης των συμμετεχόντων κατά την επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε ένα εργαστήριο ξυλουργικής

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφονται οι δράσεις των μαθητών κατά τη διάρκεια της διερεύνησής τους στις δυο ομάδες. Οι μαθητές εργάστηκαν αλληλοβοηθούμενοι, αναθέτοντας ενίοτε ρόλους στους υπόλοιπους συμμετέχοντες, και έθεσαν ερωτήσεις τόσο στον ερευνητή, όσο και στα υπόλοιπα μέλη της ομάδας. Παράλληλα, διατύπωσαν μαθηματικούς συλλογισμούς πριν και κατά τη διαδικασία διερεύνησης των λύσεων. Η τελευταία πραγματοποιήθηκε με τρεις τρόπους:

α) το πρόβλημα μοντελοποιήθηκε και έγινε γραπτή προσπάθεια επίλυσής του,

β) η λύση του προβλήματος πραγματοποιήθηκε πάνω στην ξύλινη κατασκευή με χρήση γεωμετρικών οργάνων,

γ) η λύση του προβλήματος πραγματοποιήθηκε πάνω στην ξύλινη κατασκευή με υλικά του εργαστηρίου.

Οι συλλογισμοί και οι ιδέες του κάθε μαθητή αξιολογήθηκαν από τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας και σε αρκετές περιπτώσεις απορρίφθηκαν με κριτήρια τη μαθηματική ορθότητα του ισχυρισμού ή τους περιορισμούς του χώρου εργασίας (χρόνος και κόστος κατασκευής, ακρίβεια υπολογισμού).

4.1.1 Συνεργασία - Ανάθεση Εργασιών

Τόσο στην ομάδα της Γ΄ Γυμνασίου όσο και στην ομάδα της Α΄ Λυκείου παρατηρήθηκε η ανάθεση εργασιών, με το φαινόμενο να παρατηρείται συχνότερα στους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου. Μάλιστα σε δύο περιπτώσεις, ο ΜΓ$_2$ απευθύνθηκε σε δύο άλλους μαθητές θεωρώντας πως είναι οι κατάλληλοι για να ολοκληρώσουν την ιδέα του.

«ΜΓ$_2$: Θα το κάνεις εσύ που είσαι καλός με τα σχήματα;» (απευθύνεται στον ΜΓ$_1$)

«ΜΓ$_2$: Αυτό είναι για σένα ΜΓ$_3$, που τα ξέρεις αυτά από τη δουλειά.» (Απευθύνεται στον ΜΓ$_3$ θεωρώντας πως οι γνώσεις που έχει αποκομίσει σαν βοηθός σε εργαστήριο κουφωμάτων αλουμινίου μπορεί να φανούν χρήσιμες στην κατασκευή του πλαισίου τέντας).

Χαρακτηριστικά, παρατίθεται και η περίπτωση συνεργασίας των ΜΓ$_1$ και ΜΓ$_2$ στην προσπάθεια εύρεσης κέντρου κύκλου (Μαθηματικό Έργο 1), όπου ο ΜΓ$_1$ ξεκίνησε να αναφέρει οτιδήποτε γνώριζε για τον κύκλο. Μαζί με τον ΜΓ$_2$ αναζήτησαν αν κάποια από τις γνώσεις που έχουν αποκομίσει (εμβαδόν κυκλικού δίσκου, μήκος κύκλου) θα μπορούσε να αξιοποιηθεί στο συγκεκριμένο μαθηματικό έργο.

Σε μια άλλη περίπτωση, η ΜΓ$_4$ πήρε την πρωτοβουλία να μετρήσει μόνη της τις διαστάσεις του φύλλου της στέγης, ενώ οι υπόλοιποι συμμετέχοντες βρίσκονταν σε διαδικασία ανάπτυξης ενός συλλογισμού.

«ΜΓ$_4$: Εγώ μέτρησα το ξύλο της στέγης και είναι 1.25μ x 85εκ. Πόσο λέτε να το κάνουμε;»

4.1.2 Διατύπωση ερωτημάτων

Καταγράφηκαν ερωτήματα για αναζήτηση περαιτέρω πληροφοριών.

«ΜΓ$_1$ προς ΜΓ$_2$: Σκέψου, τι γνωρίζεις από κύκλο; Εμβαδόν δεν είναι. Τι άλλο ξέρουμε για τον κύκλο;»

Επίσης, σημειώθηκαν ερωτήσεις με τις οποίες οι μαθητές ζήτησαν αιτιολόγηση του ισχυρισμού κάποιου συμμαθητή τους:

«ΜΓ$_2$ προς ΜΓ$_3$: Πως σου ήρθε το 45;»

«ΜΛ$_6$ προς ΜΛ$_5$: Πως θα το κάνεις αυτό;»

Τόσο τα μέλη της ομάδας της Γ΄ Γυμνασίου όσο και της Α΄ Λυκείου έθεσαν ερωτήματα στα υπόλοιπα μέλη της ομάδας, τα οποία αποτέλεσαν το έναυσμα για την ανάπτυξη ενός συλλογισμού και στη συνέχεια την απόρριψη ή την αξιοποίησή του.

«ΜΓ$_2$: Να το κόψουμε στη μέση;»

«ΜΓ$_4$: Να πάρουμε συνημίτονο;»

«ΜΛ$_6$: Να δοκιμάσουμε να κάνουμε ένα σχήμα;»

4.1.3 Διατύπωση ισχυρισμών

Η εργασία των μαθητών της Γ Γυμνασίου στην προσπάθεια ολοκλήρωσης της κατασκευής του ξύλινου σπιτιού (Μαθηματικό Έργο 3) ανέδειξε πλήθος μαθηματικών ισχυρισμών, οι οποίοι σχετίζονται με τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου.

«ΜΓ$_1$:Το ύψος στο ισοσκελές και η διάμεσος είναι το ίδιο. Το ύψος δηλαδή είναι και διάμεσος. Άρα εμείς θα προσπαθήσουμε να κάνουμε την κορυφή να πέφτει πάνω από το σπάγκο. Κάπως έτσι το σκέφτομαι. «

Στην προσπάθεια εύρεσης του μέτρου της γωνίας φαλτσοκοπής, ο ΜΓ$_1$ αναφέρει:

«ΜΓ$_1$: Ωραία άκου. Έχουμε φτιάξει ένας ισοσκελές. Το ισοσκελές έχει δυο πλευρές ίσες, οι γωνίες στη βάση είναι ίσες, η διάμεσος είναι και ύψος και διχοτόμος άρα οι δυο οι γωνίτσες οι πάνω είναι ίσες. Κάτι παίζει με αυτό.»

Έναν μαθηματικό ισχυρισμό ο οποίος δεν περιλαμβάνεται σε κάποιο σχολικό εγχειρίδιο διατύπωσε ο ΜΛ$_5$ κατά την προσπάθεια εύρεσης κέντρου του ξύλινου τραπεζιού (Μαθηματικό Έργο 1).Σκέφτηκε πως αν εγγράψει ορθογώνιο μέσα στον κύκλο και αφαιρέσει τα ίσα κυκλικά τμήματα, αυτά δεν θα επηρεάσουν το κέντρο. Πρακτικά, μετατόπισε την εύρεση κέντρου κύκλου σε εύρεση κέντρου ορθογωνίου.

«ΜΛ$_5$: Αγνοούμε τα κομμάτια αυτά, διότι είναι ίσα. Το κέντρο θα πρέπει να είναι το κέντρο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Αυτά αφού είναι ίσα, δεν παίζουν κάποιο ρόλο.»

4 .1.4 Τρόποι διερεύνησης πιθανών λύσεων

4.1.5.α Μέσω Μοντελοποίησης του Προβλήματος

Η εργασία των μαθητών της Γ΄ Γυμνασίου στην προσπάθεια ολοκλήρωσης της κατασκευής του ξύλινου σπιτιού (Μαθηματικό Έργο 3) ανέδειξε πλήθος μαθηματικών ισχυρισμών, οι οποίοι σχετίζονται με τις ιδιότητες του ισοσκελούς τριγώνου.

ΜΓ$_1$:Το ύψος στο ισοσκελές και η διάμεσος είναι το ίδιο. Το ύψος δηλαδή είναι και διάμεσος. Άρα εμείς θα προσπαθήσουμε να κάνουμε την κορυφή να πέφτει πάνω από το σπάγκο. Κάπως έτσι το σκέφτομαι.

Στην προσπάθεια εύρεσης του μέτρου της γωνίας φαλτσοκοπής, ο ΜΓ$_1$ αναφέρει:

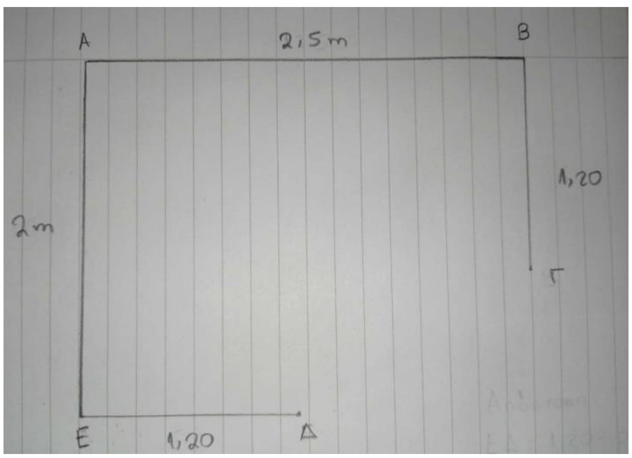
«ΜΓ$_1$: Ωραία άκου. Έχουμε φτιάξει ένας ισοσκελές. Το ισοσκελές έχει δυο πλευρές ίσες, οι γωνίες στη βάση είναι ίσες, η διάμεσος είναι και ύψος και διχοτόμος άρα οι δυο οι γωνίτσες οι πάνω είναι ίσες. Κάτι παίζει με αυτό.»

Έναν μαθηματικό ισχυρισμό ο οποίος δεν περιλαμβάνεται σε κάποιο σχολικό εγχειρίδιο διατύπωσε ο ΜΛ$_5$ κατά την προσπάθεια εύρεσης κέντρου του ξύλινου τραπεζιού (Μαθηματικό Έργο 1). Σκέφτηκε πως αν εγγράψει ορθογώνιο μέσα στον κύκλο και αφαιρέσει τα ίσα κυκλικά τμήματα, αυτά δεν θα επηρεάσουν το κέντρο. Πρακτικά, μετατόπισε την εύρεση κέντρου κύκλου σε εύρεση κέντρου ορθογωνίου.

«ΜΛ$_5$: Αγνοούμε τα κομμάτια αυτά, διότι είναι ίσα. Το κέντρο θα πρέπει να είναι το κέντρο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Αυτά αφού είναι ίσα, δεν παίζουν κάποιο ρόλο.»

Εικόνα 10. Σχεδίαση του ΜΕ2 από τους μαθητές της Α΄ Λυκείου

Παρακάτω απεικονίζεται το σχήμα που σχεδίασε η ομάδα της Γ΄ Γυμνασίου. Οι μαθητές απέδωσαν το σχήμα σε κλίμακα και προσπάθησαν να υπολογίσουν τα ζητούμενα μήκη με διαδοχικές προσεγγίσεις.



Εικόνα 11. Σχεδίαση του ΜΕ2 από τους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου

«ΜΓ$_1$: Βάζω τις πλευρές ΕΔ, ΒΓ στα 1.20 μέτρα. Μετράω την ΔΓ και βγαίνει 1.60 μέτρα. Άρα…πρέπει να μοιράσω το 1.60 στα άλλα δυο ώστε και να βγουν τα τρία ίσα. 20 και 20 δηλαδή.»

Μάλιστα, ο ίδιος μαθητής (ΜΓ1) προσπάθησε παράλληλα με τη χρήση του σχήματος σε κλίμακα να κατασκευάσει εξίσωση για τον υπολογισμό του μήκους των ελεύθερων δοκών. Όπως ανέφερε:

«Σκέφτομαι να μοιράσω κάπως το ΔΓ (μεσαία ελεύθερη δοκός) στα άλλα δυο, αλλά δε μου βγαίνει. Προσπαθώ να σκεφτώ κάτι σαν εξίσωση. Όμως με δυσκολεύει.»

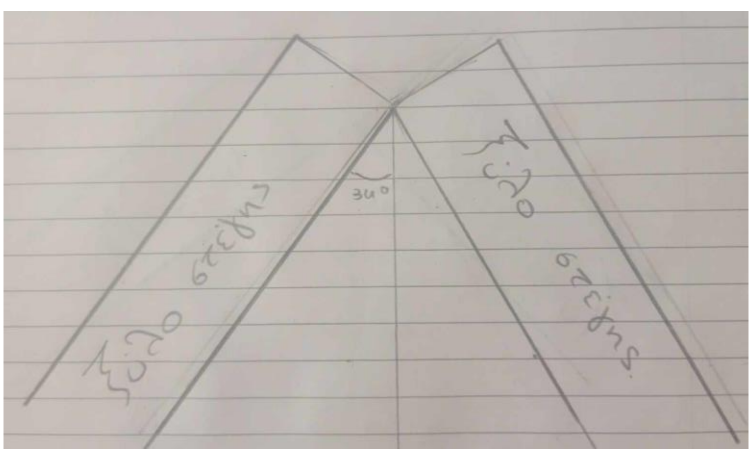
Με ανάλογο τρόπο εργάστηκε και η ομάδα της Α΄ Λυκείου για τον υπολογισμό του μήκους των ελεύθερων δοκών στο δεύτερο μαθηματικό έργο.

Επιπλέον, η ομάδα της Α΄ Λυκείου σχεδίασε σχήμα σε κλίμακα για τον υπολογισμό του μήκους της πλευράς της στέγης στο τρίτο μαθηματικό έργο.

«ΜΛ$_5$: Μόνο τη στέγη χρειάζεται να κάνεις. Φέρε εδώ. Αφού αυτή η πλευρά είναι 80, θα σχεδιάσουμε 8 εκατοστά στο χαρτί. 50 εκατοστά το ύψος, άρα 5 θα κάνω. Άρα η πλευρά του τριγώνου που πρέπει να κόψουμε βγαίνει κοντά 7.»

Εικόνα 12. Σχεδίαση της στέγης του ΜΕ3 στο χαρτί.

Για τον υπολογισμό των γωνιών φαλτσοκοπής στο φύλλο της στέγης του ξύλινου σπιτιού (Μαθηματικό Έργο 3) , η ΜΓ$_4$ πρότεινε τη χρήση τριγωνομετρικών αριθμών, αφού πρώτα απέδωσαν το σχήμα στο χαρτί.



Εικόνα 13. Σχεδίαση των πλευρών της στέγης στο χαρτί από τους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου.

4.1.4.β Με τη χρήση Γεωμετρικών Οργάνων

Και οι δύο ομάδες χρησιμοποίησαν τα γεωμετρικά όργανα που έχει στη διάθεσή του και ένας επαγγελματίας ξυλουργός. Χαρακτηριστική ήταν η επιλογή χρήσης της μετροταινίας και από τις δυο ομάδες για την εύρεση της διαμέτρου του ξύλινου τραπεζιού.

«ΜΓ$_1$: Πρώτα όμως πρέπει να βρούμε το κέντρο. Πως θα το βρούμε;

«ΜΓ$_2$: Απλά θα βρεις την πιο μεγάλη (Εννοεί χορδή). Φέρε τη μετροταινία. (Κάνει κάποιες μετρήσεις). Εγώ λέω ότι αυτή είναι η διάμετρος. Βγαίνει η πιο μεγάλη πλευρά.»

Με τη βοήθεια του μοιρογνωμονίου ξυλουργού, ο ΜΓ$_1$ κατασκεύασε ορθή γωνία εγγεγραμμένη στην περιφέρεια του κυκλικού τραπεζιού (Εικόνα 14) για να χαράξει στη συνέχεια τη διάμετρο.

«ΜΓ$_1$: Λοιπόν άκου τι θα κάνουμε. Φτιάξε μια ορθή γωνία εδώ. Πού είναι το τρίγωνο που έχει την ορθή; Πέρυσι τα κάναμε αυτά. Φέρε μου το πορτοκαλί τρίγωνο.

ΜΓ$_2$: Για δείξε.

ΜΓ$_1$: Φτιάχνεις μια ορθή με κέντρο πάνω στον κύκλο (Εννοεί στην περιφέρεια). Μετά προεκτείνεις τις πλευρές της. Στα σημεία που θα συναντήσει τον κύκλο… Αυτά αν τα ενώσεις, είναι διάμετρος. Και μετά κάνεις δια 2 και βρίσκεις την ακτίνα, άρα και το κέντρο.»

Εικόνα 14. Χάραξη εγγεγραμμένης γωνίας 90 μοιρών.

Ταυτόχρονη χρήση δυο γεωμετρικών οργάνων έκανε ο ΜΛ$_5$ στην προσπάθεια του να εντοπίσει το κέντρο του κυκλικού τραπεζιού. Αρχικά, χρησιμοποίησε τον αλουμινένιο χάρακα μήκους 1 μέτρου σαν εφαπτομένη κύκλου. Στη συνέχεια, έσυρε τη μετροταινία κάθετα με σταθερό μήκος 30 εκατοστών πάνω στο χάρακα έως ότου συνάντησε την περιφέρεια του κυκλικού τραπεζιού και κατασκεύασε τέσσερα σημεία (στην περιφέρεια του κύκλου). Τα σημεία αυτά τα ένωσε, χρησιμοποιώντας τον αλουμινένιο χάρακα και το μολύβι του μαραγκού, και επαλήθευσε ότι το σχήμα που κατασκεύασε είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, ελέγχοντας την καθετότητα και την ισότητα των απέναντι πλευρών.

«ΜΛ$_5$: Εννοώ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, έτσι; Ωραία, κοιτάξτε. Θέλω το χάρακα. Θα τον χρησιμοποιήσω σαν εφαπτομένη του κύκλου. Έπειτα, με τη μετροταινία κάθετη με το χάρακα, θα προσπαθήσω να φτιάξω ένα ορθογώνιο. Θα σέρνω τη μετροταινία κλειδωμένη στα 30 εκατοστά πάνω στο χάρακα, κάθετη, και όταν ακουμπήσει το ξύλο, εκεί θα φτιάξω ένα σημείο (Εικόνα 15). Και αν τα ενώσω, θα βγει παραλληλόγραμμο.»

Εικόνα 15. Κατασκευή εγγεγραμμένου παραλληλογράμμου σε κύκλο από τον ΜΛ$_5$.

4.1.4.γ Με τη χρήση υλικών του εργαστηρίου

Τόσο η ομάδα της Γ΄ Γυμνασίου όσο και της Α Λυκείου χρησιμοποίησαν τη βοηθητική ξυλεία, αλλά και κάποια άλλα υλικά του εργαστηρίου για να προχωρήσουν σε βοηθητικές κατασκευές που θα διευκόλυναν τον υπολογισμό του ζητούμενου μήκους. Η ομάδα της Γ΄ Γυμνασίου αξιοποιώντας ένα κομμάτι σπάγκο, ένωσε τα μέσα των δύο απέναντι πλευρών του ξύλινου τραπεζιού (Εικόνα 16). Έτσι οι μαθητές είχαν καλύτερη εποπτεία του μέσου και κατάφεραν να υπολογίσουν το μήκος της πλευράς της στέγης, «κεντράροντας» το φύλλο της στέγης με τέτοιο τρόπου που η κορυφή να βρίσκεται ακριβώς πάνω από το σπάγκο.

«ΜΓ$_1$: Αφού κάνει ισοσκελές τρίγωνο η στέγη... Θα το βάλουμε στη μέση της πλευράς των 60 εκατοστών για να ξέρουμε που είναι η μέση. Θα βάλουμε το ξύλο (το κομμάτι από το οποίο θα κατασκευαστεί η στέγη) και μετά και θα προσπαθήσουμε να δούμε πόσο πρέπει να το κόψουμε ώστε το ύψος (του τριγώνου της στέγης) να βγαίνει 50 εκατοστά.»

Εικόνα 16. Τοποθέτηση σπάγκου

Τη δυσκολία να σηκώσουν το φύλλο της στέγης και να το κεντράρουν πάνω από τον τοποθετημένο σπάγκο εξέφρασε ο ΜΓ$_2$, ο οποίος πρότεινε τη χρήση ενός βοηθητικού τεμαχίου (βοηθητικό πηχάκι Β) σαν μεσοκάθετο, έτσι ώστε να μπορεί να υπολογιστεί ευκολότερα το μήκος της πλευράς της στέγης (Εικόνα 17 και Εικόνα 18).

«Μ$_2$:Βασικά αυτό δε βολεύει παιδιά. Αντί για το σπάγκο, γιατί δε κόβουμε ένα ξύλο στα 50 εκατοστά, από αυτά τα άχρηστα, να το βιδώσουμε στη μέση; Να είμαστε στο 1.20.

Ε: Μπορείς να μας δείξεις;

Μ$_1$: Εγώ κατάλαβα τι λέει! (Παίρνει ένα από τα βοηθητικά πηχάκια Β και το τοποθετεί στο μέσο της πλευράς των 60cm του ξύλινου σπιτιού, σαν μεσοκάθετο με τη βοήθεια του ΜΓ2).»

Εικόνα 17. *Εικόνα 18.*

Με ανάλογο τρόπο εργάστηκε και η ομάδα μαθητών της Α΄ Λυκείου (Εικόνα 19 και Εικόνα 20).

«ΜΛ$_5$: Ωραία τσέκαρε τι θα κάνουμε. Φέρε ένα ξύλο από τα παλιά (βοηθητικό πηχάκι Β). Θα το βάλουμε εδώ στη μέση (όπως στην παρακάτω εικόνα)*, και σημάδεψε το στα 30 εκατοστά!*

ΜΛ6: Είμαι περίεργος να δω τι θα κάνεις!

ΜΛ$_7$: Και εγώ.

ΜΛ$_5$: Κοίτα τώρα θα πάρουμε ένα άλλο από τα παλιά ξύλα (βοηθητικό τεμάχιο Α) και θα το βάλουμε εδώ στη μέση, κάθετο. »

Εικόνα 19. *Εικόνα 20.*

Ο ίδιος μαθητής μάλιστα αξιοποίησε το ίδιο βοηθητικό πηχάκι μήκους το οποίο είχε σημαδέψει στα 50 εκατοστά για την μέτρηση τμήματος 50 εκατοστών στο φύλλο της στέγης, αντί να χρησιμοποιήσει κάποιο γεωμετρικό όργανο (Εικόνα 21).

Εικόνα 21. Χρήση βοηθητικού τεμαχίου αντί μετροταινίας για τον υπολογισμό μήκους

4.1.5 Κριτήρια απόρριψης ή αποδοχής προτεινόμενων λύσεων

4.1.5.α Με κριτήριο τη μαθηματική ορθότητα

Στην προσπάθεια εντοπισμού του κέντρου του στρογγυλού τραπεζίου (Μαθηματικό Έργο 1) η ΜΛ$_7$ πρότεινε τη χάραξη μιας διαμέτρου και στη συνέχεια την εύρεση του κέντρου ως το μέσο της διαμέτρου του κυκλικού δίσκου. Ο ΜΛ$_6$ τη διόρθωσε, εξηγώντας της πως καμία χορδή δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως διάμετρος, αν δεν είναι γνωστό ότι διέρχεται από το κέντρο του κύκλου:

«ΜΛ$_6$: Μα αυτό ψάχνουμε. Αν δε βρούμε το κέντρο, πως θα ξέρουμε ποια είναι η διάμετρος; Αυτά που μετράς δεν είναι διάμετροι. Δε γίνεται να βρούμε ποια είναι η διάμετρος, γιατί δε ξέρουμε αν οι γραμμές που μετράμε περνάνε από το κέντρο.»

Κατά τη διαδικασία διερεύνησης του δεύτερου μαθηματικού έργου (πλαίσιο τέντας), ο ΜΓ$_3$ πρότεινε την κοπή των ελεύθερων δοκών σε 45 μοίρες, έτσι ώστε να σχηματίζουν γωνία 90 μοιρών. Οι ΜΓ$_1$ και ΜΓ$_2$ αντιπαρατέθηκαν στον συλλογισμό του:

«ΜΓ$_1$: Τι 45 μοίρες; Κοίτα την κιμωλία. Είναι ξεκάθαρη αμβλεία αυτή η γωνία. Αν φτιάξεις ορθή, πως θα γίνει το σχήμα αυτό;

ΜΓ$_2$: Αν φτιάξεις και άλλη ορθή, δε θα βγει καν πεντάγωνο. Θα βγει εξάγωνο (του δείχνει με τα χέρια). Και δε θα έχει καμία σχέση με αυτό που μας ζητάει.»

4.1.5.β Με κριτήριο το χρόνο υλοποίησης

Την πρόταση του $ΜΓ_2$ για εύρεση της διαμέτρου του κυκλικού τραπεζιού μετά από πολλές και τυχαίες μετρήσεις απέρριψε ο $ΜΓ_1$ ισχυριζόμενος πως κάτι τέτοιο θα ήταν πολύ χρονοβόρο.

«$ΜΓ_2$: Εγώ λέω απλά να πάρουμε την πιο μεγάλη και τέλος. Μπορούμε να τις σημειώσουμε μια-μια. Να μετρήσουμε πολλές φορές. Και να διαλέξουμε την πιο μεγάλη.

$ΜΓ_4$: Συμφωνώ.

$ΜΓ_1$: Ναι, και να τελειώσουμε σε μια ώρα.»

Ο ίδιος μαθητής αντιτέθηκε στην ιδέα του τρόπου υπολογισμού του μήκους των ελεύθερων δοκών. Θεώρησε υπερβολικά χρονοβόρα και άσκοπη τη μετακίνηση των βοηθητικών τεμαχίων (βοηθητικά πηχάκια Α) έως ότου προκύψουν και τα τρία ισομήκη, ειδικά στην περίπτωση που το μέγεθος των δοκών θα ήταν μεγαλύτερο.

«$ΜΓ_1$: Εμένα αυτό μου φαίνεται χαζό τελείως. Και αν ήταν πιο μεγάλα; Ξέρεις πόση ώρα θα μας έπαιρνε όλο αυτό; Άστο.»

4.1.5.γ Με κριτήριο την ακρίβεια στη χάραξη της κοπής

Για την αποφυγή της δυσκολίας με το «κεντράρισμα» του βαριού φύλλου στέγης πάνω από τον σπάγκο και τη μέτρηση μήκους του έως την κορυφή της στέγης, ο $ΜΓ_2$ πρότεινε το εξής: Αντικατάσταση του σπάγκου με ένα βοηθητικό τεμάχιο, έτσι ώστε να σχηματίζει μεσοκάθετο. Ο $ΜΓ_1$ αποδέχτηκε την πρόταση του $ΜΓ_2$, παρότι η τοποθέτηση του σπάγκου ήταν αρχικά δική του ιδέα. *«$ΜΓ_1$: Αυτό είναι σίγουρα πολύ πιο εύκολο και πρακτικό, γιατί δε θα κουβαλήσουμε και τίποτα.*

$ΜΓ_2$: Είδες; Και είναι και πιο ακριβές. Πιο μαστορικό.»

Τη σχεδίαση μιας (μη παράλληλης) γραμμής προς την πλευρά του φύλλου της στέγης υπέδειξε ο $ΜΓ_1$ διορθώνοντας την πρακτική του $ΜΓ_2$. Ο δεύτερος χάραξε αυθαίρετα τη γραμμή κοπής παίρνοντας ένα τυχαίο σημείο στη μέση του τεμαχίου, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.

Εικόνα 22. Κατασκευή παράλληλης από τον ΜΓ$_2$

Ο ΜΓ$_1$ επεσήμανε τη λανθασμένη κατασκευή παράλληλης του ΜΓ$_2$, κάνοντας μάλιστα αναφορά και στην κατασκευή ορθογωνίων παραλληλογράμμων.

«ΜΓ$_2$: Και πως θα την κάνουμε ίσια (εννοεί παράλληλη) χωρίς αλφάδι;

ΜΓ$_1$: Τι αλφάδι μωρέ. Πως κατασκευάζεις παραλληλόγραμμα εσύ στο μάθημα; Με αλφάδι; Φέρε μου εδώ το ορθογώνιο τρίγωνο. Αυτό το πορτοκαλί.

Δεν ξέρουμε αν είναι ίσια η γραμμή. Την έκανες στην τύχη. Δε θα μετρήσεις στη μέση (του ξύλου) καταρχάς, θα μετρήσεις στην άκρη. Μετά θα βάλεις εδώ το ορθογώνιο και θα ενώσεις (κατασκευάζει μια ορθή γωνία). Θα κάνεις πρώτα μια γραμμή με αυτό. Μετά θα πάρεις το χάρακα και θα προεκτείνεις και τέλος.»

4.1.5.δ Με κριτήριο το οικονομικό κόστος

Για τον ΜΓ$_1$ το κόστος των υλικών και η μαθηματική ακρίβεια των κοπών αποτέλεσαν σημαντικές παραμέτρους για τον περιορισμό της απώλειας υλικού στο ελάχιστο. Συνεπώς, απορρίφθηκε η ιδέα του ΜΓ$_2$ για συνεχείς μετρήσεις χορδών του κυκλικού τραπεζιού (Μαθηματικό Έργο 1) και προτάθηκε να κινηθούν εναλλακτικά χωρίς προσεγγιστικές μεθόδους.

$ΜΓ_1$: Μια βγαίνει 115εκατοστά. Μια 116 εκατοστά. Μια 116 και κάτι. Λίγο το κουνάμε κάθε φορά και βρίσκουμε άλλο μήκος. Που ξέρεις ποια είναι η πιο μεγάλη; Είναι ακριβό μας είπε , δε θα τα κάνουμε στην τύχη. Μήπως θα κάνουμε εμβαδόν;

4.1.6Ανάπτυξη κυκλικών δράσεων διερεύνησης

Η πορεία της διερεύνησης θα μπορούσε να χαρακτηριστεί «κυκλική», αφού παρατηρήθηκε μοτίβο διατύπωσης ερωτημάτων και ισχυρισμών και έπειτα διερεύνησης της λύσης. Στη συνέχεια ο ισχυρισμός ή ο τρόπος διερεύνησης της λύσης απορρίπτονταν με κριτήριο τη μαθηματική ορθότητα, το χρόνο υλοποίησης του έργου, το οικονομικό κόστος και την ακρίβεια στην κατασκευή.

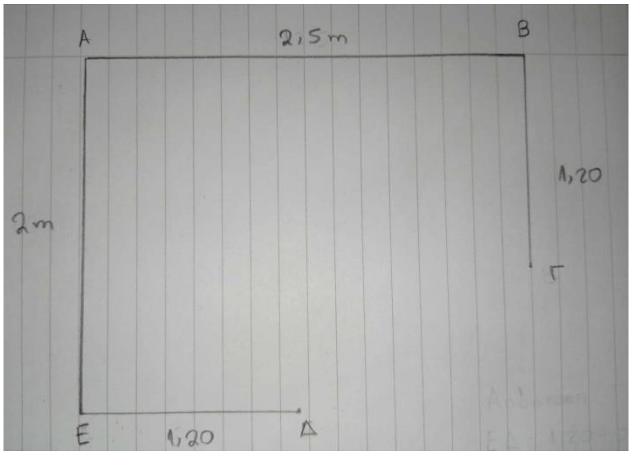
Χαρακτηριστικά, η εύρεση του μήκους των ελεύθερων δοκών από την ομάδα του Γυμνασίου ξεκινά με *διατύπωση ερωτήματος* και *συλλογισμού* από τον $ΜΓ_3$.

«$ΜΓ_3$: Να τα κόψουμε σε 45 μοίρες; … Για να κουμπώσουν. Να γίνει ορθή γωνία.»

Τα υπόλοιπα μέλη της ομάδας *απορρίπτουν* την πρόταση του, αφού η κατασκευή μιας ορθής γωνίας θα οδηγούσε στην δημιουργία εξαγώνου. Ο $ΜΓ_2$ *προτείνει την επίλυση* του προβλήματος μέσω της κατάλληλης μετακίνησης της βοηθητικής ξυλείας, έτσι ώστε να προκύψει το σχήμα της Εικόνας 6.

Ο $ΜΓ_1$ *απορρίπτει* το συγκεκριμένο τρόπο επίλυσης, αναφέροντας πως κάτι τέτοιο είναι υπερβολικά χρονοβόρο. Αντί αυτού, προτείνει διερεύνηση της λύσης μέσω μοντελοποίησης του προβλήματος (Εικόνα 11)

Ο $ΜΓ_2$ αναλαμβάνει τη σχεδίαση του ΜΕ2 στο χαρτί, χωρίς τη χρήση κλίμακας. Προτείνει την εύρεση των ζητούμενων μηκών ως εξής : Σχεδιάζει τα ισομήκη τμήματα ΒΓ και ΕΔ (έτσι ώστε να παριστάνουν τις δυο από τις τρεις ελεύθερες δοκούς). Κάθε φορά προσθέτει ένα ή δύο χιλιοστά στα τμήματα ΒΓ και ΕΔ μέχρι να προκύψουν ίσα με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ.



Εικόνα 23. Σχεδίαση του ΜΕ2 από τους μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου.

Ο $ΜΓ_1$ τον διορθώνει και πάλι, *απορρίπτοντας* εκ νέου τη λύση του.

«Εσύ ξέρεις τι έχεις κάνει; Ένα σχήμα στο περίπου. Πως περιμένεις κάνοντας ένα σχήμα στο περίπου να βγάλεις την απάντηση με ακρίβεια; Κάνε την μια πλευρά ας πούμε 20 και την άλλη 25. Και κάνε αυτό που λες»

Στη συνέχεια ο $ΜΓ_1$ προχωρά στην δημιουργία νέας απεικόνισης του ΜΕ2 στο χαρτί με χρήση κλίμακας. Επιχειρεί να υπολογίσει το μήκος των ελεύθερων δοκών με ταυτόχρονη χρήση του σχήματος υπό κλίμακα και εξίσωσης.

4.2 Στάσεις των συμμετεχόντων

Στο κεφάλαιο αυτό καταγράφονται οι αλλαγές στις στάσεις των συμμετεχόντων για τη σημασία των μαθηματικών στην ανθρώπινη καθημερινότητα πριν και μετά την εργασία τους πάνω στις ξύλινες κατασκευές, όπως εξετάζει το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα.

4.2.1 Στάσεις πριν την παρέμβαση στο εργαστήριο ξυλουργικής

Στις ατομικές συνεντεύξεις που πραγματοποιήθηκαν πριν την εμπλοκή των επτά συμμετεχόντων στα μαθηματικά έργα, περιλαμβάνονταν ερωτήσεις σχετικές με τη συμβολή των μαθηματικών στην καθημερινή ζωή. Οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να απαντήσουν στα ακόλουθα ερωτήματα.

Αρχικά ζητήθηκε να εκφράσουν τη γνώμη τους για τη σημασία των μαθηματικών στην ανθρώπινη καθημερινότητα καθώς και να αναφέρουν τις μαθηματικές γνώσεις που κρίνεται απαραίτητο να κατακτηθούν, ώστε να αξιοποιηθούν τόσο σε επίπεδο καθημερινότητας όσο και στα πλαίσια του εργασιακού περιβάλλοντος. Στη συνέχεια οι μαθητές ρωτήθηκαν σε ποιες περιπτώσεις έχουν χρησιμοποιήσει οι ίδιοι τις μαθηματικές γνώσεις που επεσήμαναν στις απαντήσεις τους. Η επόμενη ερώτηση αφορούσε τα μαθηματικά εργαλεία που θεωρούν πιθανόν να αποδειχτούν ωφέλιμα σε βάθος χρόνου. Η τελευταία ερώτηση στόχευε στην παρουσίαση των επαγγελμάτων που σχετίζονται άμεσα με τα μαθηματικά, καθώς και το είδος των μαθηματικών που ο εκάστοτε επαγγελματίας οφείλει να γνωρίζει.

4.2.1.α Στην καθημερινή ζωή

Στο σύνολό τους οι επτά συμμετέχοντες φαίνονται να αναγνωρίζουν τον καθοριστικό ρόλο των μαθηματικών πράξεων στην ανθρώπινη καθημερινότητα. Όλοι τους υπογράμμισαν τη σπουδαιότητα της γνώσης των βασικών πράξεων και της αριθμητικής στις καθημερινές συναλλαγές.

«Τα μαθηματικά χρειάζονται μέχρι το σημείο που υπολογίζεις αριθμούς, αριθμητική. Στην καθημερινή ζωή μας λέω πάντα.»

«Στη καθημερινή ζωή ενός ανθρώπου που δεν είναι χημικός μηχανικός ή μαθηματικός, δε χρειάζονται όλα αυτά που κάνουμε στο σχολείο. Χρειάζονται τα βασικά, πράξεις, προπαίδεια.»

Τέσσερις από τους επτά συμμετέχοντες αναφέρθηκαν σε εφαρμογές μέτρησης μηκών σε επίπεδο καθημερινότητας, με τους τρεις από αυτούς να επισημαίνουν πως η μοναδική φορά που χρειάστηκε στην πράξη να μετρήσουν διαστάσεις εκτός του πλαισίου του μαθήματος των Μαθηματικών αφορούσε μια κατασκευή στο μάθημα της Τεχνολογίας.

«$ΜΛ_6$: Τίποτα, απλά μετρούσα τις πλευρές να είναι όλες ίσες. Και τις έκοβα. Δεν ήταν κάτι. Ήταν για μια εργασία στην τεχνολογία.»

«ΜΛ$_5$: Είχα κατασκευάσει ένα αεροπλάνο στην Τεχνολογία και έπρεπε να μετράω τις διαστάσεις του, τα φτερά του, διάφορα τέτοια. Και να τα κόβω.»

«ΜΓ$_4$:Μπορεί να θέλω να κόψω ένα ξύλο και να πάω σε ένα ξυλουργό και να του πω "Θέλω να είναι 50 x 50" .Πρέπει να ξέρω να το μετρήσω ή τουλάχιστον στο περίπου .»

Τη σημασία της Άλγεβρας στην ανθρώπινη καθημερινότητα επισημαίνουν οι ΜΓ$_2$, ΜΓ$_3$ και ΜΓ$_4$, θεωρώντας πως μπορεί να την αξιοποιήσουν σε κάποιο καθημερινό πρόβλημα.

«ΜΓ$_2$:Κάποια μπορεί να μου χρησιμεύσουν. Ας πούμε οι εξισώσεις.»

«ΜΓ$_4$:Χρήσιμα είναι τα ανάλογα ποσά. Γιατί μπορεί κάποιος να χρειαστεί να φτιάξει μια κόλλα ας πούμε και να πρέπει να φτιάξει συγκεκριμένη ποσότητα, να μην χαλάσει όλο το κουτί.»

Ο ΜΓ$_2$, έχοντας εφαρμόσει τις γνώσεις που έχει αποκομίσει από το σχολείο για να ολοκληρώσει μια αφισοκόλληση στον τοίχο του δωματίου του, θεωρεί πως η Γεωμετρία αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο στην καθημερινότητα του ανθρώπου.

«ΜΓ$_2$:Και εμένα μια φορά μου χρησίμευσαν και τα εμβαδά. Χρησιμοποίησα τον τύπο του εμβαδού για να υπολογίσω το εμβαδόν του τοίχου στο δωμάτιο μου και το εμβαδόν μιας αφίσας για να δω πόσες τέτοιες αφίσες μπορώ να κολλήσω στον τοίχο για να γεμίσει.»

4.2.1.β Στο χώρο εργασίας

Όλοι οι συμμετέχοντες τόνισαν την αξία των Μαθηματικών στο χώρο εργασίας. Στο σύνολο τους συμφωνούν ότι η άρτια γνώση της αριθμητικής και των πράξεων είναι απαραίτητα για τις συναλλαγές, ενώ παράλληλα αναφέρθηκαν και στην σημασία που διαδραματίζει η γνώση μέτρησης μηκών και γωνιών (ΜΓ$_3$), ειδικά στα τεχνικά επαγγέλματα.

«ΜΓ$_4$: Δεν μπορείς για παράδειγμα να πας σε μια δουλειά και να μην ξέρεις να δίνεις ρέστα ή να υπολογίσεις κάτι.»

«ΜΓ$_3$:Πχ τώρα τελευταία που πηγαίνω με τον μπαμπά στα αλουμίνια και χρησιμοποιούμε μοίρες για να κόβουμε.»

«ΜΓ1:Α ναι, οι οικοδόμοι ας πούμε. Σίγουρα για να μετράνε σωστά, την απόσταση στους τοίχους, την κλίση για να τρέχουν τα νερά.»

«ΜΓ$_2$:Οι οικοδόμοι χρειάζονται μαθηματικά απλά, του δημοτικού, να μπορούν δηλαδή να μετράνε πλευρές . Θα έπρεπε ας πούμε να ξέρουν παράλληλες για να μην τους βγαίνουν στραβοί οι τοίχοι.»

Ο ΜΓ$_3$ μάλιστα αναφέρθηκε στη χρήση των γεωμετρικών οργάνων στο χώρο εργασίας του, συγκεκριμένα σε εργαστήριο κουφωμάτων αλουμινίου.

«Στα αλουμίνια πρέπει να υπολογίζω που θα κόψουμε, χρησιμοποιώ τη γεωμετρία να τα κόψουμε σωστά. Άλλα χρησιμοποιούμε πολύ απλά πράγματα, δηλαδή μετράμε, και έχουμε και εργαλεία για να το κάνουμε. Μέτρα, γωνιόμετρα ,αλφάδια.»

Την σημασία της Άλγεβρας επεσήμαναν οι ΜΓ$_2$,ΜΓ$_3$, ΜΓ$_4$ και ΜΛ$_7$. Η ΜΛ$_7$ αναφέρθηκε στη χρήση της Άλγεβρας, και συγκεκριμένα των συντεταγμένων στη ναυσιπλοΐα.

«ΜΛ$_7$:Οι ναυτικοί για παράδειγμα θα πρέπει να ξέρουν συντεταγμένες.»

Στη χρησιμότητα της Γεωμετρίας στα πλαίσια ενός χώρου εργασίας εστίασαν οι ΜΓ$_4$ και ΜΛ$_7$.

«ΜΓ$_4$:Ένας ξυλουργός θα χρειαζόταν για παράδειγμα να γνωρίζει θεωρία για τα τρίγωνα, εμβαδά. Για να μπορεί να υπολογίζει πως θα κόψει κάτι. Να ξέρει θεωρία για τα σχήματα γενικά, πυθαγόρειο θεώρημα.»

«ΜΛ$_7$: Είχαμε κάνει στο σχολείο ένα πρόβλημα με μια σκάλα και έναν οικοδόμο. Για αυτό θα πω ότι το Πυθαγόρειο μπορεί να χρειαστεί σε κάποιον οικοδόμο.»

Για τους ΜΓ$_1$,ΜΓ$_2$,ΜΓ$_3$,ΜΛ$_5$ και ΜΛ$_6$ οι μαθηματικές γνώσεις που προσφέρονται στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι απαραίτητες σε εργασιακό επίπεδο μόνο στους απόφοιτους θετικών επιστημών ή σπουδών οικονομίας και πληροφορικής. Αντιθέτως, θεωρούν πως στα τεχνικά και χειρωνακτικά επαγγέλματα (ηλεκτρολόγοι, ξυλουργοί, υδραυλικοί, οικοδόμοι), η χρήση των μαθηματικών περιορίζεται μόνο σε αριθμητικές πράξεις και μετρήσεις.

«Ε: Ποιά επαγγέλματα πιστεύεις ότι χρειάζονται μαθηματικά;

ΜΓ$_3$: Σίγουρα αυτοί που ασχολούνται με υπολογιστές, οι μηχανικοί, οι αρχιτέκτονες, οι μαθηματικοί. Αυτοί πρέπει να ξέρουν καλά μαθηματικά.

Ε: Αν κάποιος ασχολείται με ένα τεχνικό επάγγελμα, δεν είναι απαραίτητο να ξέρει μαθηματικά;

ΜΓ$_3$: Όχι, αυτοί πρέπει απλά να μάθουν την τέχνη. Και τα πολύ βασικά μαθηματικά, να ξέρουν να μετράνε σωστά. Γιατί αν σκεφτώ φίλους μας που είναι υδραυλικοί ή οικοδόμοι, δεν ήταν καθόλου καλοί μαθητές, αλλά είναι πολύ καλοί μάστορες.»

«Ε: Σε ποιους επαγγελματίες θα μπορούσαν να φανούν χρήσιμα τα μαθηματικά;

ΜΛ$_5$: Σε οικονομολόγους, καθηγητές, επιστήμονες, μηχανικούς. Γιατί αυτοί τα θέλουν και για τις σπουδές και για τις δουλειές τους μετά.

*Ε: Αν κάποιος δε σπουδάσει και είναι τεχνίτης, για παράδειγμα ξυλουργός, δεν χρειάζεται να ξέρει μαθηματικά;*ΜΛ$_5$: Όχι, γιατί να ξέρει μαθηματικά; Καταρχάς πολλοί από αυτούς δεν ξέρουν καν τα βασικά μαθηματικά, ούτε αριθμητική.»

4.2.1.γ Τρόπος σκέψης

Την αξία των Μαθηματικών σαν τρόπο σκέψης ανέδειξε ο ΜΓ$_1$. Για τον ίδιο, η μαθηματική σκέψη που καλλιεργείται κατά την ενασχόληση με τα Μαθηματικά είναι ιδιαίτερα σημαντική για τις ανθρώπινες δραστηριότητες. Στην ερώτηση για τη σημασία των μαθηματικών στην ανθρώπινη καθημερινότητα απάντησε πως:

«Χρειάζονται τα βασικά μαθηματικά, πράξεις, προπαίδεια. Αλλά η σκέψη και ο τρόπος που δουλεύει το μυαλό όταν ασχολείσαι με όλα αυτά (εννοεί που κάνουμε) είναι αυτό που μετράει περισσότερο.»

Ο ίδιος μαθητής, όταν ρωτήθηκε για το αν πιστεύει ότι θα αξιοποιήσει μελλοντικά τα Μαθηματικά που διδάσκεται στο σχολείο απάντησε ότι:

«Από εξισώσεις και όλα αυτά που κάνουμε, τα μαθηματικά σα μαθηματικά , σκέτα, όχι , μάλλον η σκέψη που σου δίνουν τα Μαθηματικά θα χρειαστεί, αυτό που είπα και πριν δηλαδή.»

4.2.2 Αρνητικές στάσεις για τη χρησιμότητα των μαθηματικών

«Τα μαθηματικά είναι σημαντικά μέχρι ενός ορισμένου σημείου»

Δύο από τους επτά συμμετέχοντες, όταν ζητήθηκε να εκφέρουν τη γνώμη τους για τη σημασία των μαθηματικών στην ανθρώπινη καθημερινότητα, αποφάνθηκαν ότι τα μαθηματικά είναι σημαντικά ή χρειάζονται «ως ένα σημείο». Όπως φαίνεται από τα παρακάτω αποσπάσματα των απομαγνητοφωνήσεων, το «σημείο» αυτό είναι η αριθμητική και οι πράξεις που εφαρμόζουμε, κυρίως στις συναλλαγές μας. Σύμφωνα με τον ΜΓ_1:

«Τα μαθηματικά είναι σημαντικά ως ένα βαθμό. Στη καθημερινή ζωή ενός ανθρώπου που δεν είναι χημικός μηχανικός ή μαθηματικός, δε χρειάζονται όλα αυτά που κάνουμε στο σχολείο.»

Ο ίδιος μαθητής συνέχισε διευκρινίζοντας:

«Σίγουρα στις συναλλαγές μου θα χρειαστώ τα βασικά μαθηματικά που κάνουμε στο Δημοτικό. Αλλά από εξισώσεις και όλα αυτά που κάνουμε στο σχολείο, όχι . Μάλλον η σκέψη, όπως είπα και πριν.»

Παρόμοια είναι και η απάντηση του ΜΛ_6:

«ΜΛ_6: Μέχρι ένα σημείο χρειάζονται. Μετά από ένα σημείο δε χρειάζονται καθόλου. Όλη αυτή η άλγεβρα, συναρτήσεις, ταυτότητες. Τα μαθηματικά χρειάζονται μέχρι το σημείο που υπολογίζεις αριθμούς, αριθμητική.

«Τα μαθηματικά θα μου χρειαστούν ως την εισαγωγή στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση»

Για τον ΜΓ$_2$, η εφαρμογή των Μαθηματικών στην καθημερινή ζωή ενδέχεται να περιοριστεί μετά την εισαγωγή στην Τριτοβάθμια Εκπαίδευση, αν δεν ακολουθήσουν κάποιο επάγγελμα το οποίο απαιτεί πρακτική εφαρμογή των Μαθηματικών. Όπως ανέφερε:

«Πιστεύω ότι εμένα τα μαθητικά θα μου χρειαστούν σίγουρα στις πανελλήνιες για να περάσω κάπου και μετά εξαρτάται από τη δουλειά που θα κάνω.»

«Τα μαθηματικά είναι πολύ δύσκολα»

Οι ΜΓ$_3$ και ΜΛ$_6$ τόνισαν τη δυσκολία των Μαθηματικών που διδάσκονται στο σχολείο σε σχέση με την αξιοποίηση τους στην καθημερινή ζωή. Ο ΜΓ$_3$, ο οποίος εργάζεται σαν βοηθός του πατέρα του σε βιοτεχνία κουφωμάτων, ανέφερε ότι συχνά χρησιμοποιούν γεωμετρικά όργανα, ώστε να πραγματοποιήσουν μετρήσεις διαστάσεων και γωνιών.

«Αυτά τα οποία κάνουμε στο σχολείο στη Γεωμετρία είναι πολύ δύσκολα για να τα χρησιμοποιούμε κάπου. Και δεν νομίζω να τα χρησιμοποιήσουμε και πουθενά»

Ο ΜΛ$_6$ εξέφρασε τη δυσαρέσκεια του για τον όγκο της διδαχθείσας ύλης που συγκεντρώθηκε την περίοδο πριν τις εξετάσεις και χαρακτήρισε «υπερβολικά», «δύσκολα και αχρείαστα» τα Μαθηματικά που διδάχθηκε στην Α’ Λυκείου. Στη συνέχεια, εξέφρασε την επιθυμία του να προστεθεί ως μέρος του μαθήματος η Ιστορία των Μαθηματικών, ώστε να παρουσιαστούν και να γίνουν κατανοητές οι ανθρώπινες ανάγκες που οδήγησαν εξαρχής στη μελέτη τους.

«ΜΛ$_6$:Δε μου αρέσει που πλησιάζουμε στις εξετάσεις και έχει μαζευτεί όλη αυτή η ύλη και πρέπει να τη θυμόμαστε, και εκτός αυτού κάποια που κάνουμε είναι υπερβολικά όπως ας πούμε αυτές οι ασκήσεις με τους τύπους του Vieta ή τις συναρτήσεις.

Ε: Με ποια έννοια είναι υπερβολικά;

ΜΛ$_6$: Δύσκολα και αχρείαστα. Κάποια πράγματα θα πρέπει να τα άφηναν οι καθηγητές, να μην τα δίδασκαν και να κάναμε τους παλιούς τρόπους.

Ε: Δηλαδή; Τι εννοείς λέγοντας ¨με τους παλιούς τρόπους¨;

$ΜΛ_6$: Να βλέπαμε πως ξεκίνησαν τα μαθηματικά, την ιστορία τους, γιατί φτιάχτηκαν όλα αυτά που μαθαίνουμε. Κάποια πράγματα να τα κάναμε πιο αναλυτικά, και κάποια πράγματα να μην τα κάναμε τόσο δύσκολα.»

«Τα μαθηματικά της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης είναι ασήμαντα»

Οι $ΜΓ_2$, και $ΜΛ_7$ χρησιμοποίησαν τους χαρακτηρισμούς «ασήμαντα» και «άχρηστα» για να περιγράψουν τη αξία των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην ανθρώπινη ζωή. Ο $ΜΓ_2$ θεωρεί απίθανο να εφαρμόσει στην ενήλικη ζωή του την πλειονότητα των μαθηματικών γνώσεων που έχει λάβει στο σχολείο. Χαρακτηριστικά ανέφερε πώς:

«$ΜΓ_2$: Πιστεύω ότι τα περισσότερα από τα μαθηματικά που κάνουμε τελείως ασήμαντα. Κάποια μπορεί να χρησιμεύσουν, ας πούμε οι εξισώσεις.» «Αν γίνω χημικός μηχανικός, θα μου χρειαστούν ίσως κάποια από αυτά που κάνουμε, αλλά τα περισσότερα είναι περιττά.

Ομοίως, η $ΜΛ_7$ αδυνατεί να εντοπίσει κάποια εφαρμογή των Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στην μετέπειτα πορεία της.

« $ΜΛ_7$: Α*υτά που μαθαίνουμε στο σχολείο, ειδικά στο Λύκειο, νιώθω ότι είναι λίγο άχρηστα. Τουλάχιστον εγώ δε νιώθω ότι θα μου χρειαστούν κάπου.»*

Για τον $ΜΓ_1$, τα μαθηματικά δεν έχουν άμεση ωφέλεια και πρακτική αξία για κάποιον, με εξαίρεση αυτούς που λόγω επαγγέλματος χρειάζονται τα μαθηματικά στο χώρο εργασίας τους, όπως για παράδειγμα οι καθηγητές, σε αντίθεση με το μάθημα της Φυσικής, από το οποίο μπορεί κανείς να αποκομίσει γενικές γνώσεις χρήσιμες για την καθημερινότητα του.

«Πχ στη φυσική μαθαίνουμε διάφορα πράγματα για το ρεύμα, που είναι χρήσιμα να τα ξέρει κανείς σα γενικές γνώσεις. Στα μαθηματικά αυτά που κάνουμε δεν πιστεύω ότι χρειάζονται σε κάποιον άμεσα. Εκτός και αν μιλάμε για κάποιον σαν σένα, που είσαι καθηγητής.»

4.2.3 Θετικές Στάσεις για τη χρησιμότητα των μαθηματικών

Ελάχιστοι από τους συμμετέχοντες διατύπωσαν θετικές απόψεις για τη χρησιμότητα των Μαθηματικών.

Συγκεκριμένα, για τους ΜΓ$_4$ και ΜΛ$_5$ τα μαθηματικά αποτελούν σημαντική πτυχή της ανθρώπινης καθημερινότητας. Εστιάζουν κυρίως στη χρήση της αριθμητικής για υπολογισμούς και συναλλαγές.

«ΜΓ$_4$: Είναι σημαντικά γιατί δεν μπορείς για παράδειγμα να πας σε μια δουλειά και να μην ξέρεις να δίνεις ρέστα ή να υπολογίσεις κάτι.»

«ΜΛ$_5$: Είναι το μόνο μάθημα που δεν μπορείς να πεις ότι δε θα χρειαστείς στη ζωή σου. Κάθε μέρα σου χρειάζεται, πχ για να αγοράσεις ή να δώσεις ρέστα, να μοιράσεις τα γλυκά με τα αδέρφια σου. Τέτοια πράγματα.»

4.2.4 Στάσεις μετά την παρέμβαση στο εργαστήριο της ξυλουργικής

Αφού ολοκληρώθηκε η εμπλοκή των συμμετεχόντων στην επίλυση των προβλημάτων του εργαστηρίου, πραγματοποιήθηκαν εκ νέου ατομικές συνεντεύξεις. Αυτές περιείχαν ένα σύνολο ερωτήσεων με σκοπό οι μαθητές να εκφράσουν τη γνώμη τους σχετικά με την αξία των μαθηματικών, ειδικότερα των μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στην ανθρώπινη καθημερινότητα και στον χώρο εργασίας.

4.2.4.α Χρήση στην καθημερινότητα

Οι ΜΓ$_2$ και ΜΓ$_3$ αντιλαμβάνονται πλέον πως τα μαθηματικά αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι των καθημερινών δραστηριοτήτων, με έμφαση να δίνεται κυρίως στις κατασκευές.

«ΜΓ2: Μετά από αυτή την εμπειρία και από τις λύσεις των προβλημάτων που είδαμε μαζί πιστεύω ότι μπορεί να χρειαστούν πιο συχνά από όσο νόμιζα, για πολλές κατασκευές στο σπίτι.»

Ο ΜΓ$_2$ μάλιστα αναθεωρεί πλήρως την προηγούμενη άποψή του, συμπληρώνοντας πως:

«Εκεί που έλεγα ότι μας είναι άχρηστα, κατάλαβα ότι μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε μέχρι και στην ξυλουργική.»

Ομοίως, όταν ζητήθηκε από τον $ΜΓ_3$ να εκφέρει την άποψή του πάνω στη σημασία των Μαθηματικών στην ανθρώπινη καθημερινότητα, απάντησε ότι τα Μαθηματικά ίσως φανούν χρήσιμα για την υλοποίηση μιας κατασκευής στην οικογενειακή του επιχείρηση.

«$ΜΓ_3$:Και για τη δουλειά σου αλλά και για την καθημερινότητα σου, γιατί πάντα μπορεί να χρειαστεί να φτιάξεις κάτι και να χρησιμοποιήσεις τα μαθηματικά.

Οι $ΜΓ_1$ και $ΜΛ_7$ θεωρούν ότι σε επίπεδο καθημερινότητας, τα μαθηματικά της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης δεν είναι απαραίτητα σε πολλούς ανθρώπους, εκτός και αν ασχολούνται με κατασκευαστικές δραστηριότητες στον ελεύθερό τους χρόνο.

«$ΜΓ_1$: Μπορεί στη δουλειά να σου λύνουν τα χέρια σου, αλλά στην καθημερινότητα πέραν της δουλειάς, για έναν μέσο άνθρωπο, που να του χρειαστούν; Εξαρτάται και από τα χόμπι του καθενός. Πιστεύω ότι είναι σημαντικά κυρίως στη δουλειά, ίσως περισσότερο από όσο νόμιζα. Αλλά μέχρι εκεί. Εκτός και αν ο άλλος έχει χόμπι να φτιάχνει πράγματα. Εκεί αλλάζει.»

4.2.4.β Χρήση στο χώρο εργασίας

Και οι επτά συμμετέχοντες αναγνώρισαν την αξία των μαθηματικών γνώσεων της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης στα τεχνικά επαγγέλματα μετά την εμπλοκή στις βιωματικές δραστηριότητες.

«$ΜΓ_1$: Αν όμως κάποιος είναι τεχνίτης, τότε το να ξέρει μαθηματικά είναι πολύ σημαντικό. Πρέπει να ξέρεις σίγουρα τα Μαθηματικά του Γυμνασίου γιατί σε βοηθούν να βρεις πολλά πράγματα.»

Στα παρακάτω αποσπάσματα αποδεικνύεται πως οι συμμετέχοντες αναθεωρούν ριζικά την αξία των μαθηματικών στα τεχνικά επαγγέλματα.

«$ΜΓ_2$:Σίγουρα σε περισσότερα επαγγέλματα από όσο νόμιζα, γιατί πίστευα ότι αυτοί που δεν είναι μηχανικοί, επιστήμονες ή οικονομολόγοι θέλουν πολύ απλά πράγματα, ας πούμε

να μετράνε, να ξέρουν να υπολογίζουν ρέστα και άλλα τέτοια, απλά πράγματα . Τελικά φάνηκε ότι δε θέλουν μόνο αυτά.»

«ΜΓ$_3$:Πίστευα ότι τα μαθηματικά χρειάζονται για συγκεκριμένα επαγγέλματα, πιο πολύ για επιστήμονες, αλλά τελικά νομίζω ότι είναι χρήσιμα σε όλους. Και για τη δουλειά σου αλλά και για την καθημερινότητα σου, γιατί πάντα μπορεί να χρειαστεί να φτιάξεις κάτι και να χρησιμοποιήσεις τα μαθηματικά.»

Ωστόσο, η ΜΛ$_7$ ακόμα και μετά την ολοκλήρωση της εμπλοκής στα μαθηματικά έργα θεωρεί ότι τα Μαθηματικά της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης δεν κατέχουν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στην καθημερινότητα ενός μέσου ανθρώπου και ότι μόνο η χρήση της αριθμητικής επαρκεί για τη διεκπεραίωση απλών καθημερινών υποχρεώσεων. Βέβαια, παραδέχτηκε την αναγκαιότητα της γνώσης θεωρημάτων Γεωμετρίας και ταυτοτήτων στο επάγγελμα του ξυλουργού.

«Δε θα γίνουν όλοι ξυλουργοί ή αρχιτέκτονες για να χρειάζονται ας πούμε θεωρήματα στη Γεωμετρία ή ταυτότητες.»

Στην αξία των μαθηματικών στην ελαχιστοποίηση των λαθών στο χώρο εργασίας αναφέρονται οι ΜΓ$_2$ και ΜΛ$_5$, με τον πρώτο να τονίζει την ανάγκη για αποφυγή λαθών όσον αφορά το χρόνο κατασκευής και τον δεύτερο όσον αφορά την αύξηση του κόστους εργασίας.

«ΜΓ$_2$:Αν όμως κάποιος είναι τεχνίτης, τότε το να ξέρει μαθηματικά είναι πολύ σημαντικό. Πρέπει να ξέρεις σίγουρα τα Μαθηματικά του Γυμνασίου γιατί σε βοηθούν να βρεις πολλά πράγματα. Όχι ότι δεν μπορείς να τα βρεις και αλλιώς, αλλά γλιτώνεις χρόνο και μπορεί να μην κάνεις λάθος τόσο εύκολα.»

«ΜΛ$_5$:Ίσως χαλάσει και περισσότερο χρήμα κάνοντας δοκιμές. Κάποιος που ξέρει μαθηματικά απλά θα είναι πιο γρήγορος και πιο ακριβής. Και δεν θα ξοδέψει τσάμπα υλικά μέχρι να βρει κάτι.»

Κεφάλαιο 5ο

Συμπεράσματα-Συζήτηση

5.1 Συμπεράσματα

Στην προκείμενη έρευνα μελετήθηκαν οι δράσεις διερεύνησης επτά μαθητών κατά την προσπάθειά τους να λύσουν μαθηματικά προβλήματα σε ένα εργαστήριο ξυλουργικής. Οι μαθητές συνεργάστηκαν σε όλες τις περιπτώσεις, μοίρασαν ρόλους λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιαίτερες κλίσεις και εμπειρίες του κάθε συμμετέχοντα και έθεσαν ερωτήματα προς τα υπόλοιπα μέλη των ομάδων τους. (Artigue & Blomhøj, 2013; Maass & Artigue, 2013). Επίσης διατύπωσαν συλλογισμούς και διερεύνησαν τις λύσεις των προβλημάτων του εργαστηρίου με πολλούς τρόπους (μέσω μοντελοποίησης του προβλήματος, με τη χρήση εργαλείων της ξυλουργικής και με τη χρήση υλικών του εργαστηρίου), ενώ πρότειναν και απέρριψαν λύσεις των υπόλοιπων συμμετεχόντων της ομάδας τους.

Η απόρριψη των προτεινόμενων λύσεων πραγματοποιήθηκε με γνώμονα τους περιορισμούς που έθεσε ο ερευνητής κατά την περιγραφή των μαθηματικών έργων. Οι περιορισμοί στόχευαν στη βιωσιμότητα της εργασίας, στην αποφυγή απώλειας υλικού (με συνέπεια οικονομική ζημία ή και καταστροφή του τεμαχίου) και στη μείωση του χρόνου υλοποίησης του κάθε έργου. Παρότι δε δόθηκαν σαφείς οδηγίες από τον ερευνητή σχετικά με την τιμή του κάθε τεμαχίου ή τον χρόνο υλοποίησης του εκάστοτε έργου, οι μαθητές έλαβαν σοβαρά υπόψη τους περιορισμούς, με αποτέλεσμα να απορρίπτουν ακόμα και μαθηματικά ορθούς τρόπους επίλυσης στην προσπάθεια τους να καταλήξουν σε αυτόν που θα τους εξασφάλιζε μεγαλύτερη ακρίβεια, ταχύτητα και χαμηλό κόστος κατασκευής.

Η ύπαρξη των περιορισμών του χώρου εργασίας της ξυλουργικής στη συγκεκριμένη έρευνα δημιουργεί ένα κυκλικό μοτίβο δράσεων διερεύνησης. Σημειώθηκε περίπτωση όπου οι προτεινόμενες λύσεις απορρίφθηκαν τρεις φορές έως ότου να βρεθεί ένας τρόπος επίλυσης που να ικανοποιεί τα κριτήρια της ταχύτητας και ακρίβειας στην κατασκευή και της αποφυγής απώλειας υλικού. Μάλιστα, κατά την αναζήτηση κάθε νέας λύσης, οι μαθητές προσπαθούσαν να αξιοποιήσουν όλο και περισσότερο τις μαθηματικές γνώσεις που έχουν αποκομίσει από το σχολείο. Γίνεται λοιπόν σαφές πως οι περιορισμοί του χώρου εργασίας μπορούν να ευνοήσουν τη διερευνητική διαδικασία , ενισχύοντας τις δεξιότητες διαπραγμάτευσης και κριτικής σκέψης των μαθητών (Doorman et al., 2016).

Σχετικά με τις στάσεις των συμμετεχόντων για τη χρησιμότητα των μαθηματικών στην ανθρώπινη καθημερινότητα και το χώρο εργασίας πριν την εμπλοκή τους στην επίλυση των προβλημάτων του εργαστηρίου, όλοι οι συμμετέχοντες αναγνωρίζουν τη σημασία που διαδραματίζουν τα μαθηματικά στην καθημερινή ζωή. Όμως η πλειοψηφία τους θεωρεί πως οι απαραίτητες για την ανθρώπινη καθημερινότητα μαθηματικές γνώσεις περιορίζονται στη διεξαγωγή βασικών πράξεων και στη μέτρηση μηκών. Μόνο τρεις συμμετέχοντες αναφέρθηκαν στην χρήση των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην ανθρώπινη καθημερινότητα. Μάλιστα, οι περισσότεροι φάνηκε να έχουν αρνητική στάση απέναντι στη σημασία των μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, αφού τα Μαθηματικά χαρακτηρίστηκαν ως *«ασήμαντα»*, *«πολύ δύσκολα»*, *«σημαντικά μέχρι ενός σημείου»* ή *«σημαντικά έως και την εισαγωγή στην τριτοβάθμια εκπαίδευση»* από πέντε από τους επτά συμμετέχοντες.

Όσον αφορά το χώρο εργασίας, μολονότι άπαντες οι συμμετέχοντες αναγνωρίζουν τη σπουδαιότητα των μαθηματικών, οι πέντε από τους επτά αποφάνθηκαν ότι η γνώση μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης δεν είναι απαραίτητη για κάποιον που ασκεί τεχνικό-χειρωνακτικό επάγγελμα. Αντίθετα, θεωρούν πως οι μαθηματικές γνώσεις που αποκομίζει κανείς κατά τη φοίτηση στο Γυμνάσιο και το Λύκειο είναι απαραίτητες για επαγγελματίες που έχουν αποφοιτήσει από την τριτοβάθμια εκπαίδευση. Όπως ανέφεραν χαρακτηριστικά, οι επαγγελματίες που ασκούν τεχνικά επαγγέλματα αρκούνται στο να γνωρίζουν να διεξάγουν βασικές πράξεις και μετρήσεις μηκών και γωνιών.

Μετά την εμπλοκή των συμμετεχόντων στην επίλυση των προβλημάτων της ξυλουργικής οι στάσεις των μαθητών απέναντι στη χρησιμότητα των μαθηματικών διαφοροποιήθηκαν. Και οι επτά συμμετέχοντες αναγνώρισαν και αποδέχτηκαν τη σημασία τους σε τεχνικά και χειρωνακτικά επαγγέλματα. Ακόμα και οι μαθητές που χαρακτήρισαν τα μαθηματικά *«ασήμαντα»* πριν την εμπλοκή τους στην επίλυση αυθεντικών προβλημάτων, αναγνώρισαν την ωφέλειά τους σε απλές καθημερινές δραστηριότητες, όπως κατασκευές στο σπίτι. Ακόμα, μέσω της επίλυσης προβλημάτων σε αυθεντικά πλαίσια και της διερευνητικής διαδικασίας στην οποία ενεπλάκησαν οι μαθητές, στη δεύτερη συνέντευξη φάνηκε να αναγνωρίζουν πως η άρτια γνώση και η ορθή εφαρμογή των Μαθηματικών στον εκάστοτε εργασιακό κλάδο ελαχιστοποιούν την πιθανότητα λάθους. Οι μαθητές φαίνεται να κατανοούν τη βαρύτητα ενός μαθηματικού λάθους που συμβαίνει σε επαγγελματικό επίπεδο. Όπως ανέφεραν χαρακτηριστικά, ένα λάθος δύναται να αποτελέσει αιτία καθυστερήσεων στον χρόνο ολοκλήρωσης ενός έργου ($ΜΓ_2$,$ΜΛ_5$) ή απρόβλεπτης αύξησης του κόστους παραγωγής ($ΜΛ_5$).

Όπως αναφέρεται και στο θεωρητικό πλαίσιο της παρούσας έρευνας, δεν αντιλαμβάνονται όλοι οι μαθητές τα οφέλη που μπορεί να αποκομίσουν από το μάθημα των μαθηματικών στο μέλλον (Onion, 2004). Μάλιστα, η αρνητική στάση απέναντι στα Μαθηματικά και η αμφισβήτηση της σημασίας τους στην καθημερινή ζωή παρατηρείται ακόμη και από μαθητές με υψηλές επιδόσεις στα μαθηματικά (Van Elst, 2013). Παρότι εκ πρώτης όψεως φαίνεται όλοι οι συμμετέχοντες να αντιλαμβάνονται τη σπουδαιότητα των μαθηματικών στη καθημερινότητα και το χώρο εργασίας, οι αντιλήψεις τους για τις μαθηματικές γνώσεις που είναι απαραίτητες περιορίζονται στη διεξαγωγή πράξεων και τη μέτρηση μηκών. Δεδομένου ότι η μειοψηφία των συμμετεχόντων αναγνωρίζει τα μαθηματικά της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης ως απαραίτητο εργαλείο στην καθημερινότητα και τους χώρους εργασίας, μπορούμε να πούμε οτι τα αποτελέσματα της παρούσας έρευνας ταυτίζονται με τα αποτελέσματα των παραπάνω ερευνών.

Αξίζει να σημειωθεί ότι μόνο ένας από τους επτά συμμετέχοντες είχε ασχοληθεί με επίλυση μαθηματικού προβλήματος και χρήση μαθηματικών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε εξωσχολικά πλαίσια ($ΜΓ_2$). Οι υπόλοιποι συμμετέχοντες δεν έχουν αξιοποιήσει τις γνώσεις που έχουν αποκομίσει από την διδασκαλία των μαθηματικών σε κάποια πραγματική κατάσταση, με αποτέλεσμα να μην είναι εύκολο να αντιληφθούν τη σπουδαιότητα του μαθήματος αυτού. Οι αρνητικές στάσεις που διατύπωσαν πριν την εμπλοκή τους στην επίλυση των προβλημάτων της ξυλουργικής ενδεχομένως πηγάζουν από το παραπάνω γεγονός.

Είναι σημαντικό να αναφερθεί οτι η επαναληπτική φάση των συνεντεύξεων ($3^η$ φάση της έρευνας) σχετικά με τις στάσεις των μαθητών πραγματοποιήθηκε λίγες μέρες μετά την εμπλοκή των μαθητών στην επίλυση των προβλημάτων της έρευνας. Είναι πιθανό ορισμένες μεταβολές στις στάσεις των συμμετεχόντων να είναι αποτέλεσμα ενθουσιασμού, δεδομένου οτι σχεδόν στο σύνολο τους οι συμμετέχοντες αξιοποίησαν για πρώτη φορά τις μαθηματικές τους γνώσεις σε μια ρεαλιστική κατάσταση.

5.2. Συζήτηση

Η επίλυση προβλήματος στο χώρο εργασίας της ξυλουργικής, παρότι ο τελευταίος προσφέρει πληθώρα μαθηματικών προβλημάτων που συνδυάζουν τόσο την Άλγεβρα όσο και τη Γεωμετρία, δεν αποτελεί εύκολη υπόθεση. Αυτό συμβαίνει διότι η χρήση των εργαλείων ενός ξυλουργού με σκοπό την επεξεργασία του ξύλου απαιτεί εξειδικευμένες γνώσεις και τήρηση κανόνων ασφαλείας που δεν είναι εύκολο να κατέχει ο κάθε εκπαιδευτικός. Από την άλλη, η επίλυση μαθηματικών προβλημάτων σε ένα αυθεντικό εργαστήριο ξυλουργικής με τη συνδρομή ενός επαγγελματία ξυλουργού ενδέχεται να περιόριζε την εφαρμογή των μαθηματικών γνώσεων των μαθητών κατά τη διαδικασία επίλυσης. Χρειάζεται προσεκτικός σχεδιασμός από τη μεριά του εκπαιδευτικού όσον αφορά την επιλογή των κατάλληλων εργαλείων της ξυλουργικής, καθώς η παροχή μεγάλου αριθμού εργαλείων δύναται να περιορίσει την εφαρμογή των μαθηματικών γνώσεων. Κατά τον Palm, (2006),. η ύπαρξη εργαλείων μέτρησης για παράδειγμα σε ένα πρόβλημα ξυλουργικής μπορεί όχι απλά να επηρεάσει αλλά να καθορίσει ολοκληρωτικά τη πορεία και την προσέγγιση του προβλήματος εκ μέρους των μαθητών.

Στην παρούσα έρευνα, ο ερευνητής αφαίρεσε σκόπιμα το αλφάδι από τον χάρακα, έτσι ώστε η κατασκευή παράλληλης ευθείας προς πλευρά ξύλινου τεμαχίου να πραγματοποιηθεί βασιζόμενη σε γεωμετρικές ιδιότητες, όπως για παράδειγμα του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Ακόμα, η χρήση δύο ηλεκτρικών εργαλείων -με μοναδική δυνατότητα την κοπή- αύξησε τις ανάγκες για ακρίβεια στη χάρακη και τον υπολογισμό γενικότερα. Έτσι οι προτεινόμενες λύσεις που βασίζονταν στην προσέγγιση, όπως για παράδειγμα η εύρεση της διαμέτρου του κυκλικού τραπεζιού ως η μεγαλύτερη χορδή του κύκλου με τη χρήση μετροταινίας, απορρίφθηκαν. Σε ένα πραγματικό εργαστήρι ξυλουργικής, όπου υπάρχουν και μηχανήματα λείανσης, κάτι τέτοιο δε θα ήταν απαραίτητο, αφού ακόμα και αν ο τεχνίτης έβρισκε την διάμετρο κατά προσέγγιση, θα μπορούσε να ολοκληρώσει την κατασκευή με τη χρήση των μηχανημάτων αυτών.

Όταν ρωτήθηκαν σχετικά με την εφαρμογή Μαθηματικών σε εξωσχολικά πλαίσια, με εξαίρεση τον $ΜΓ_2$, δύο από τους επτά συμμετέχοντες απάντησαν πως έχουν πραγματοποιήσει κατασκευή με τη βοήθεια Μαθηματικών στο μάθημα της Τεχνολογίας. Η κατασκευή αυτή ήταν ένα αεροπλάνο -και για τους δύο μαθητές- και για την ολοκλήρωση του, χρειάστηκε απλά να μετρούν μήκη και να κόβουν κατάλληλα. Μια τέτοια κατασκευή φυσικά δεν μπορεί να θεωρηθεί πως απαιτεί μαθηματικές γνώσεις.

Δεδομένου ότι η επίλυση προβλήματος στο χώρο εργασίας της ξυλουργικής δεν αποτελεί εύκολη υπόθεση για τον κάθε εκπαιδευτικό, θα μπορούσε να αξιοποιηθεί το μάθημα της Τεχνολογίας με τρόπο ώστε να στοχεύει στην κατασκευή συνθετότερων τεχνουργημάτων, όπως τα έργα σε ένα εργαστήριο ξυλουργικής, από υλικά όπως το μακετόχαρτο, τα οποία επεξεργάζονται ευκολότερα και φυσικά ασφαλέστερα για τον εκπαιδευτικό και τους μαθητές. Μέσω του μαθήματος της Τεχνολογίας θα μπορούσε να γίνει μια προσομοίωση του χώρου εργασίας της ξυλουργικής , καθώς και άλλων χώρων εργασίας και η ολοκλήρωση των τεχνουργημάτων να βασίζεται στην εφαρμογή μαθηματικών γνώσεων, ενώ παράλληλα ο εκπαιδευτικός θα φρόντιζε για την παροχή (η την κατασκευή) των κατάλληλων εργαλείων μέτρησης και επεξεργασίας του υλικού (τα οποία με τη σειρά τους θα μπορούσαν να αναπαριστούν ένα πραγματικό ηλεκτρικό εργαλείο ξυλουργού) αλλά και για την τήρηση των περιορισμών του χώρου εργασίας.

Βιβλιογραφία

Akkerman, S. F., & Bakker, A. (2011). Boundary Crossing and Boundary Objects. *Review of Educational Research, 81*(2), 132–169 3.

Akkerman, S. F., & Bakker, A. (2011). Learning at the boundary: An introduction. *International Journal of Educational Research*, 50(1), 1–5.

Allsopp, D. H., Kyger, M. M., & Lovin, L. A., (2007), Teaching Mathematics Meaningfully, Solutions for Reaching Struggling Learners. *DH Allsopp, MM Kyger,* LAH *Lovin*. Brookes Publishing Company

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in Mathematics. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *45*(6), 797-810.

Attard, C., Berger, N., & Mackenzie, E. (2021). The Positive Influence of Inquiry-Based Learning Teacher Professional Learning and Industry Partnerships on Student Engagement with STEM. *Frontiers in Education*, *6*, 693221.

Bosch, M., & Winsløw, C. (2015). Linking problem solving and learning contents: The challenge of self-sustained study and research processes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 35(2), 357-401.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D., & Agard, P. C. (1992). Learning to Teach Hard Mathematics: Do Novice Teachers and Their Instructors Give up Too EasilyJournal for Research in Mathematics Education, 23(3), 194- 222.

Cai, J.(2000). Problem-Based Mathematics Instruction: Promises and Challenges, Paper presented at the ICME-9 Congress in Makuhari, Japan, in Topic Group 11, Problem Solving in Mathematics

Cobb, P.: 1994, 'Where is the mind? Constructivist and sociocultural perspectives on mathematical development', *Educational Researcher 23*, 13-20

Cohen, L. & Manion, L. & Morrison, K. (2007). Research methods in education (Sixth edition). USA & CANADA: Routledge

Darling-Hammond, L.: 1992, Reforming the School Reform Agenda: Developing Capacity for School Transformation, Eric ED. 347656.

Doorman, M., Jonker, V., & Wijers, M. (2016). Mathematics and Science in Life: Inquiry Learning and the World of Work. University of Education Freiburg.

Farooq, M. S., & Shah, S. Z. U. (2008).Students' Attitude towards Mathematics. Pakistan Economic and Social Review, 46(1), 75-83.

Forman, S. L., and Steen, L. A. (1995). Mathematics for Work and Life. In 1. M. Carl (Ed.), Prospects for School Mathematics: Seventy Five Years of Progress (pp. 219-241). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Freudenthal H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel Publishing, Dordrecht

Gijsbers, D. (2019). Changing students' beliefs about the relevance of mathematics in an advanced secondary mathematics class. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*:1, 87-102

Grubb, W. N., & Lazerson, M. (2004). The Education Gospel: The Economic Power of Schooling .Cambridge, MA: Harvard University Press.

Herrington, J., & Kervin, L. (2007). Authentic learning supported by technology: Ten suggestions and cases of integration in classrooms. *Educational Media International, 44*(3), 219-236

Hersant, M., & Choquet, C. (2019). Is an Inquiry-Based Approach Possible at the Elementary School? In P. Liljedahl & M. Santos-Trigo (Eds.), *Mathematical Problem Solving. Current Themes, Trends, and Research* (pp. page numbers). Springer.

Hoek, D., Eden, P. and Terwel, J.: 1999, 'The effects of integrated social and cognitive strategy instruction on the mathematics achievement in secondary education', Learning and Instruction 9, 427-448.

Julie, C. (2002).. Making relevance relevant in mathematics teacher education Στο: I. Vakalils, D. Hughes Hallett, D. Quinney & C. Kourouniotis. *Πρακτικά 2ου Διεθνούς Συνεδρίου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*. Νέα Υόρκη: Wiley Publications

Kapetanas, E. & Zachariades, T. (2007). Student's beliefs and attitudes concerning Mathematics and their effect on mathematical ability. *Conference of European Research in Mathematics Education* (pp. 259-265). Cyprus

Kramarski, B., and Mevarech, Z.R.: in press, 'Enhancing mathematical reasoning in the classroom; Effects of cooperative learming and metacognitive training', American Educational Research Journal

Larina, G. (2016). *Analysis of real-world math problems: Theoretical model and classroom applications*. *Voprosy obrazovaniya*, (20), 112–125.Palm T. (2006) Word

Maass, K., & Artigue, M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: A synthesis. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 45(6), 779-795.

Mehta, J. (2013). How paradigms create politics: The transformation of American educational policy, 1980-2001. *American Educational Research Journal, 50*(2), 285-324

Miller, R. (n.d.). *Εκπαίδευση και οικονομική ανάπτυξη: από τον 19ο στον 21ο αιώνα*. Έγγραφο για λογαριασμό της Cisco Systems. Ανακτήθηκε από www.cisco.com/web/strategy/docs/education/eeg_what_research_says.pdf.

Musto, G. (2008). Showing you're working: A project using former pupils' experiences to engage current mathematics students. *Teaching Mathematics and its Applications* 24 (7), P.210–217

Onion, A. (2004). What use is maths to me? A report on the outcomes from student focus groups. Teaching Mathematics and its Applications, 23(4), 189–194.

Outhred, L. N. Mitchelmore, M. C. (2000). Young Children's Intuitive Understanding of Rectangular Area Measurement. *Journal for Research in Mathematics Education, 31 (2),* 144-161Prawat, R.S. 1998, 'Current self-regulation views of learning and motivation viewed through a Deweyan lens: The problems with dualism', *American Educational Research Journal 35*(2), 199-224

Palm, T., (2016). Problems as Simulations of Real-World Situations: A Pro - posed Framework. For the Learning of Mathematics, vol. 26, no 1, pp. 42–47.

Reinke, Luke T. & Casto, Amanda R., (2020). Motivators or Conceptual Foundation? Investigating the Development of Teachers' Conceptions of Contextual Problems, Mathematics Education Research Group of Australasia.

Reusser, K., & Stebler, R. (1997). Every word problem has a solution: The suspension of reality and sense-making in the culture of school mathematics. *Learning and Instruction*, *7,* 309-328

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of students' mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(4), 338-355.

Sealey, P., & Noyes, A. (2010). On the *relevance* of the mathematics curriculum to young people. *The Curriculum Journal, 21*(3), 239-253.

Tan, H. Y.-J., Neo, M., & Selvaretnam, B. (2015). Enhancing problem-solving skills in an authentic blended learning environment: A Malaysian context. *International Journal of Information and Education Technology, 5*(11), 841-846

Tyumeneva, Y. (2014). *Transfer of learning in problem solving: Theory and practice*. *Mathematics at School*, (10), 3–9

Van Elst, R. (2013). *De motivatie voor de keuze voor en de beleving van wiskunde D* (Διδακτορική διατριβή). Holland: Eindhoven University of Technology

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1999). Children's conceptions about the role of real-world knowledge in mathematical modeling of school word problems. In W. Schnotz, S. Vosniadou, & M. Carretero (Eds.), *New perspectives on conceptual change (*pp 175-189). Oxford: Elsevier.

Wiggins G. (1993) Assessment: Authenticity, Context and Validity. Phi Delta Kap - pan, vol. 75, no 3, pp. 200–214

Williams, J., & Wake, G. (2007). Black Boxes in Workplace Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 64*(3), 317–343.

Yoshida, H., Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Realistic considerations in solving problematic word problems: Do Japanese and Belgian children have the same difficulties? *Learning and Instruction, 7,* 329-338.

Zevenbergen, R. (2000) "Cracking the code" of Mathematics Classrooms. School success as a function of linguistic, social and cultural background. In: Boaler, J. (Ed.), *Multiple perspectives on Mathematics teaching and learning.* USA: Ablex Publishing

Σκουμπουρδή, Χ., & Βαϊτσίδη, Γ. (2019). Η διερευνητική προσέγγιση στη μαθηματική εκπαίδευση: Συνδέσεις, διαφοροποιήσεις, καινοτομίες. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, 12, 8–22. https://doi.org/10.12681/enedim.21142

Τουμάσης, Μ. (2002). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Εκδόσεις Gutenberg

Τριανταφύλλου Χ. (2010). Τα μαθηματικά στο χώρο εργασίας και η σύνδεσή τους με την τυπική εκπαίδευση. Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Πατρών.