ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Διαισθητικές αντιλήψεις μαθητών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για την έννοια του απείρου

Ματθαίος Αντωνόπουλος

Αθήνα, 2024

NATIONAL AND KAPODISTRIAN UNIVERSITY OF ATHENS

SCHOOL OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

PhD THESIS

Intuitive perceptions of the infinite in primary and secondary education students

Matthaios Antonopoulos

Athens, 2024

ΕΠΤΑΜΕΛΗΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Θεοδόσιος Ζαχαριάδης, Ομότιμος Καθηγητής, Ε.Κ.Π.Α. (επιβλέπων)

Δέσποινα Πόταρη, Καθηγήτρια, ΕΚΠΑ (μέλος τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής)

Γεώργιος Ψυχάρης, Αναπληρωτής Καθηγητής, ΕΚΠΑ (μέλος τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής)

Χαράλαμπος Σακονίδης, Καθηγητής, Δ.Π.Θ.

Χρυσαυγή Τριανταφύλλου, Επίκουρη Καθηγήτρια, ΕΚΠΑ

Αγγελική Μάλη, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Πανεπιστήμιο Κρήτης

Λεωνίδας Κυριακίδης, Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Κύπρου

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η έννοια του άπειρου υπεισέρχεται σε πολλές επιστήμες όπως τα Μαθηματικά, η Φυσική, η Φιλοσοφία κ.ά. και αποτελεί αντικείμενο συστηματικής μελέτης μέσα στους χρόνους. Ο πραγματικός κόσμος, είναι πεπερασμένος, με αποτέλεσμα να μην υπάρχουν αφορμές για συζητήσεις σχετικά με το άπειρο. Μάλιστα, πολλές φορές δημιουργούνται αντιφάσεις από τη σύγκρουση μεταξύ της έννοιας του απείρου και των νοητικών σχημάτων που έχουν διαμορφωθεί στη σκέψη μας μέσω της εμπειρίας μας σε έναν πεπερασμένο κόσμο.

Παρά τη συχνή αναφορά στα σχολικά βιβλία, σπανίως μελετάται εκτενώς καθώς συχνά αποφεύγεται κατά τη διδασκαλία. Ως εκ τούτου, η σωστή διαισθητική προσέγγιση της έννοιας, θα μπορούσε να βοηθήσει όχι μόνο στην καλύτερη κατανόησή της, αλλά και στην επίτευξη των μαθησιακών στόχων που έχουν τεθεί στη διδασκαλία των μαθηματικών στα σχολεία.

Στο πλαίσιο της παρούσας διατριβής, εξετάζονται οι διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση σχετικά με την έννοια του απείρου. Συγκεκριμένα γίνεται προσπάθεια να εντοπιστούν οι κυρίαρχες αντιλήψεις που διαμορφώνουν οι μαθητές για την έννοια του απείρου, να διερευνηθούν οι παράγοντες που τις διαμορφώνουν και να εντοπιστούν οι διαφοροποιήσεις που προκύπτουν στα διάφορα στάδια της σχολικής εκπαίδευσης.

Η μελέτη είναι συνδυασμός ποσοτικής και ποιοτικής έρευνας. Τα ποσοτικά δεδομένα προέρχονται από τις γραπτές απαντήσεις 377 μαθητών σε ένα ερωτηματολόγιο που τους δόθηκε και συγκεκριμένα 124 μαθητών της ΣΤ΄ Δημοτικού, 154 της Γ΄ Γυμνασίου και 99 μαθητών της Γ΄ Λυκείου. Επιπλέον έγιναν 39 συνεντεύξεις, συγκεκριμένα σε 17 μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού, σε 16 μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και σε 6 μαθητές τη Γ΄ Λυκείου. Η ανάλυση των δεδομένων έγινε με συνδυασμό ποσοτικών και ποιοτικών μεθόδων. Αρχικά κατηγοριοποιήθηκαν και αναλύθηκαν τα ποσοτικά δεδομένα από τα οποία προέκυψαν οι βασικές αντιλήψεις για το άπειρο στις τρεις εκπαιδευτικές βαθμίδες που μελετήσαμε. Έπειτα, μέσα από την ανάλυση των συνεντεύξεων διερευνήθηκε η προέλευση αυτών.

Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι αντιλήψεις αυτές κατηγοριοποιούνται σε τέσσερις βασικές κατηγορίες. Οι δύο πρώτες συνδέονται με το δυνητικό και ενεργό άπειρο. Αυτές είναι η «διαδικαστική αντίληψη» στην οποία το άπειρο αντιμετωπίζεται ως μία διαδικασία χωρίς τέλος και η «πραγματική αντίληψη», στην οποία το άπειρο θεωρείται ως κάτι ολοκληρωμένο, π.χ. το σύνολο όλων των αριθμών. Η τρίτη αντίληψη είναι η «πεπερασμένη αντίληψη», σύμφωνα με την οποία οι μαθητές θεωρούν το άπειρο ως κάτι μεγάλο, αλλά πεπερασμένο. Η τέταρτη αντίληψη θεωρεί το άπειρο ως κάτι «απροσδιόριστο».

Επιπλέον, από τη μελέτη προέκυψε ότι η προέλευση των αντιλήψεων για το άπειρο είναι πολυσύνθετη, επηρεασμένη από την εκπαίδευση, τις καθημερινές εμπειρίες και το κοινωνικό και πολιτιστικό περιβάλλον. Η χρήση της λέξης «άπειρο» στην καθημερινή γλώσσα συχνά διαφέρει από τη μαθηματική έννοια, δημιουργώντας δυσκολίες στην κατανόησή της.

Με βάση την ανάλυση των αντιλήψεων των μαθητών σε θέματα σχετικά με το άπειρο στις τρεις τάξεις που μελετήθηκαν, διαπιστώθηκε η απουσία στατιστικά σημαντικών διαφορών σε αυτές. Η εν λόγω παρατήρηση υποδηλώνει ότι η ανάπτυξη της σχολικής μαθηματικής γνώσης δεν φαίνεται να επηρεάζει ουσιαστικά τις αντιλήψεις για το άπειρο.

Η μελέτη καταλήγει στο συμπέρασμα ότι η διδασκαλία του απείρου απαιτεί προσοχή και ευελιξία, λαμβάνοντας υπόψη τις ποικίλες αντιλήψεις των μαθητών. Η αξιοποίηση διαφορετικών μαθησιακών στρατηγικών, η εμπλοκή με θέματα που αφορούν το άπειρο, και η επίγνωση από τους εκπαιδευτικούς των βασικών αντιλήψεων και των συχνών μαθηματικών σφαλμάτων που εμφανίζουν οι μαθητές, μπορεί να συμβάλλει στην δημιουργία σωστών διαισθητικών αντιλήψεων για το άπειρο στην σχολική μαθηματική εκπαίδευση.

ABSTRACT

The concept of infinity permeates various scientific fields, including Mathematics, Physics, and Philosophy, and has been a subject of systematic study for centuries. The real world as we know it is finite and therefore there is no reason to discuss the infinity. The concept of infinity is contradictory, as it confronts our cognitive schemas that have been adapted to a finite world.

Despite the frequent reference of the concept of infinity in the mathematical textbooks, it is rarely studied extensively as it is often avoided or obscured while teaching. As a result, a right intuitive approach to the concept could help not only in a better understanding but also in achieving the learning objectives set for the teaching of mathematics at school.

This thesis examines the intuitive perceptions of elementary and secondary school students regarding the concept of infinity. Specifically, it attempts to identify the prevailing perceptions that students form about the concept of infinity, to explore the factors that shape them and to identify the differentiations that arise at different stages of school education.

The present study is combining quantitative and qualitative research. The quantitative data were collected from the written responses of 377 students (124 6th graders, 154 9th graders, 99 12th graders) to a questionnaire. In addition, 39 individual interviews were conducted (17 6th graders, 16 9th graders, 6 12th graders). Data analysis was conducted using both quantitative and qualitative methods. Initially, the quantitative data were categorized and analyzed, a procedure which highlighted the basic perceptions of infinity in the three educational levels studied. Afterwards, through the analysis of the interviews, their origin was investigated.

The results revealed that the perceptions about infinity can be categorized into four main categories. The first two are connected to the potential and active infinity. These are the procedural perception, in which infinity is viewed as an endless procedure and the actual perception, in which infinity is considered to be something completed such as the set of all numbers. The third perception is the finite one, according to which, students consider infinity to be something very large but finite. The fourth perception considers infinity to be something indefinite.

Furthermore, from the study emerged that the origin of perceptions of infinity is complex and highly influenced by education, everyday experiences, and the socio-cultural environment. The use of the word "infinity" in everyday language differs from its mathematical concept, a fact that creates difficulties in understanding it.

Based on the analysis of students' perceptions and performances on infinity-related topics in the three grades studied, no statistically significant differences were found in the above perceptions. This observation suggests that the development of school mathematical knowledge does not seem to significantly affect perceptions about infinity.

The study concludes that teaching the concept of infinity requires attention and flexibility and the diverse perceptions of students must be carefully considered. Utilizing different learning strategies, engaging with infinity-related topics and educators' awareness of the basic perceptions and common misconceptions that students exhibit, can contribute to the creation of correct intuitions about infinity in school mathematics education.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω την βαθύτατη ευγνωμοσύνη μου σε όσους συνέβαλαν στην ολοκλήρωση της διδακτορικής μου διατριβής.

Στον ομότιμο καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών και επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Θεοδόσιο Ζαχαριάδη για τη καθοδήγηση που μου πρόσφερε, το σεβασμό, τη σημασία στη λεπτομέρεια που έδειξε και την υποστήριξη σε όλη την πορεία της διατριβής και ειδικά στις δύσκολες στιγμές.

Στην καθηγήτρια του Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Δέσποινα Πόταρη για τις πολύτιμες συμβουλές και τις διεισδυτικές της παρατηρήσεις σε κρίσιμα σημεία της διατριβής μου.

Στον αναπληρωτή καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών κ. Γεώργιο Ψυχάρη για την αμέριστη υποστήριξη, τα εύστοχα σχόλιά του και το πάντα ανθρώπινο πρόσωπο που μου έδειξε σε δύσκολες στιγμές.

Εκφράζω την ευγνωμοσύνη μου στον καθηγητή του Πανεπιστημίου Κύπρου, κ. Λεωνίδα Κυριακίδη, για τη σημαντική βοήθειά του στο κομμάτι της ποσοτικής έρευνας. Οι γνώσεις και η εμπειρία του αποτέλεσαν πολύτιμο οδηγό κατά τη διάρκεια της ανάλυσης των δεδομένων.

Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον καθηγητή του Δημοκρίτειου Πανεπιστημίου Θράκης κ. Χαράλαμπο Σακονίδη ο οποίος μέσα από συγκεκριμένα προτεινόμενα άρθρα εμπλούτισε σημαντικά το θεωρητικό μέρος της εργασίας.

Εκφράζω την ευγνωμοσύνη μου σε όλους όσοι αφιέρωσαν χρόνο και ενέργεια για να συμμετάσχουν στην έρευνά μου. Η σοβαρότητα και η προθυμία τους αποτέλεσαν ακρογωνιαίο λίθο για την ολοκλήρωση της διατριβής μου. Ιδιαίτερα ευχαριστώ τους καθηγητές που με βοήθησαν στη διεξαγωγή της έρευνας στα σχολεία τους, καθώς και τον Πέτρο Πετρόπουλο και τη Βάρβαρα Μπαλωτή για την πολύτιμη βοήθειά τους στην εξασφάλιση πρόσβασης σε σχολεία της επαρχίας.

Στους καθηγητές μου στο ΠΜΣ της Διδακτικής και Μεθοδολογίας των Μαθηματικών, Ανδρέα Μούτσιο-Ρέντζο, Ξένια Βαμβακούση και τον αείμνηστο Νίκο Κλαουδάτο, χρωστώ βαθιά ευγνωμοσύνη για τις πολύτιμες γνώσεις και την καθοδήγηση που μου πρόσφεραν σε κάθε μάθημα. Η διδασκαλία τους άφησε ανεξίτηλο στίγμα στον τρόπο σκέψης μου και προσέγγισης της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Ευχαριστώ θερμά τα άτομα του σεμιναρίου υποψηφίων διδακτόρων Χρυσούλα Χούτου, Διονυσία Μπακογιάννη, Σωτήρη Ζωιτσάκο, Γεωργία Πετροπούλου, Γεώργιο Καφετζόπουλο, Κωνσταντίνο Στουραΐτη και Αμαλία-Χριστίνα Μπαμπίλη για κάθε εποικοδομητική συζήτηση που είχαμε. Οι συναντήσεις μας αποτέλεσαν σημαντική πηγή στήριξης, καθώς μοιραστήκαμε τις αγωνίες, τις επιτυχίες και τις προκλήσεις της διδακτορικής μας διατριβής. Επίσης, ευχαριστώ τον υποψήφιο διδάκτορα Ιωάννη Βλάχο για τη συνεργασία που είχαμε.

Στους συμφοιτητές μου Ειρήνη Κούβελα, Σταματίνα Βουκελάτου, Διονυσία Πιτσιλή-Χατζή και Αθανασία Βασίλα, οφείλω την άψογη συνεργασία στα πλαίσια του ΠΜΣ. Η αλληλεγγύη, οι εποικοδομητικές συζητήσεις και η κοινή αγάπη για την επιστήμη δημιούργησαν ένα ιδανικό περιβάλλον μάθησης και ανάπτυξης.

Η ευγνωμοσύνη μου απευθύνεται επίσης στη δασκάλα Έφη Κοντογιωργάκη και στις καθηγήτριες Μυρσίνη Σφαιρίδου και Κάλλια Παυλοπούλου, οι οποίες πίστεψαν σε εμένα και με ενέπνευσαν καθοριστικά στην πορεία των σπουδών μου.

Στους Ανδριώτη Λευτέρη, Γιόκαρη Ιωάννη, Δάλλα Μάρκο, Ζωσιμά Ζωσιμά, Καρελιώτη Γεώργιο, Σπυρόπουλο Δημήτρη και Ξύδα Αντώνιο που με τιμούν με τη φιλία τους όλα αυτά τα χρόνια. Ευχαριστώ την Τσαγγαρίδου Άντρη για τη συνεχή υποστήριξη καθώς και τον αείμνηστο Ξανθόπουλο Αντώνη που με βοήθησε στα πρώτα επαγγελματικά μου βήματα.

Στους παππούδες μου Γεώργιο Αντωνόπουλο και Θεόδωρο Κρητικό, στις γιαγιάδες μου Άννα Κρητικού και Ελεονώρα Αντωνοπούλου καθώς και στη θεία μου Βάσω Αντωνοπούλου και στο θείο μου Λάζαρο Αντωνόπουλο που με δίδαξαν σημαντικά πράγματα.

Στην αδερφή μου, Ελεονώρα Αντωνοπούλου, που στέκεται δίπλα μου κάθε στιγμή και μου δίνει δύναμη. Στους γονείς μου, Βασίλη Αντωνόπουλο και Μαρία Αντωνοπούλου, οφείλω τα πάντα. Η διαρκής εκτίμησή τους για την παιδεία και ο αγώνας που δίνουν αποτέλεσε το εφαλτήριο για την επίτευξη των στόχων μου.

Στον γιο μου, Βασίλη Αντωνόπουλο, για κάθε χαμόγελο που μου χαρίζει, το οποίο λειτουργεί ως πηγή ατελείωτης χαράς και δύναμης για εμένα.

Τέλος, στη σύζυγό μου, Μαρία Πετροπούλου για την αγάπη, την κατανόηση και την υποστήριξή της σε κάθε μας βήμα. Σ' εκείνη αφιερώνω αυτή τη διατριβή.

Σας ευχαριστώ όλους!

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αναγκαιότητα της έρευνας

Στο χώρο της μαθηματικής εκπαίδευσης έχουν πραγματοποιηθεί αρκετές μελέτες που αφορούν την έννοια του απείρου. Οι περισσότερες από αυτές εστιάζουν σε συγκεκριμένες ηλικιακές ομάδες, ενώ ελάχιστες από αυτές έχουν ολιστική προσέγγιση στην πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Πολυάριθμες μελέτες (Fischbein et al.1981, Tirosh 1999, Monaghan 2001 κ.ά.) έχουν δείξει την τάση των μαθητών να στηρίζονται σε μεγάλο βαθμό στη διαίσθησή τους κατά την ερμηνεία μαθηματικών εννοιών, έναντι της χρήσης αυστηρών ορισμών και θεωρημάτων. Στο πλαίσιο της πρωτοβάθμιας και της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, η διδασκαλία ορισμένων μαθηματικών εννοιών, όπως για παράδειγμα του απείρου, δεν πραγματοποιείται με βάση τους αυστηρούς μαθηματικούς ορισμούς, λόγω του υψηλού επιπέδου δυσκολίας. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, οι μαθητές να υιοθετούν ένα πλαίσιο όπου η διαισθητική προσέγγιση κατέχει κεντρικό ρόλο.

Σκοπός και ερευνητικοί στόχοι

Στη συγκεκριμένη εργασία γίνεται προσπάθεια να μελετηθούν οι αντιλήψεις των μαθητών πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης για την έννοια του απείρου. Για τον σκοπό αυτό, διαμορφώθηκε ένα ερωτηματολόγιο, με ερωτήσεις εστιασμένες στις πιο συχνές μαθηματικά εσφαλμένες αντιλήψεις που συναντώνται στους μαθητές σχετικά με την έννοια του απείρου. Το ερωτηματολόγιο δόθηκε σε 377 μαθητές και συγκεκριμένα 124 της ΣΤ΄ Δημοτικού, 154 της Γ΄ Γυμνασίου και 99 της Γ΄ Λυκείου. Επίσης πραγματοποιήθηκαν 39 ημιδομημένες συνεντεύξεις σε μαθητές οι οποίοι επιλέχθηκαν, ο αριθμός των οποίων ανά τάξη ήταν 17 της ΣΤ΄ Δημοτικού, 16 της Γ΄ Γυμνασίου και 6 της Γ΄ Λυκείου. Ο στόχος ήταν η άντληση λεπτομερέστερων πληροφοριών για τις αντιλήψεις και τη σκέψη τους γύρω από την προς μελέτη έννοια. Οι στόχοι της έρευνας είναι:

α) Η διερεύνηση των αντιλήψεων που διαμορφώνουν οι μαθητές για την έννοια του απείρου κατά τη διάρκεια της σχολικής τους εκπαίδευσης, καθώς και η προέλευση αυτών.

β) Ο εντοπισμός πιθανών διαφοροποιήσεων που προκύπτουν στα διάφορα στάδια της σχολικής εκπαίδευσης και η ύπαρξη ή μη αναπτυξιακής πορείας στην αντίληψη της έννοιας κατά τη διάρκεια των σχολικών σπουδών.

Τα ευρήματα της έρευνας, δύναται να αξιοποιηθούν για την ανάπτυξη αποτελεσματικών διδακτικών πρακτικών, με στόχο την αντιμετώπιση των συχνότερων εσφαλμένων αντιλήψεων που συναντώνται στους μαθητές.

Δομή της εργασίας

Η παρούσα διατριβή διαρθρώνεται σε έξι κεφάλαια, τα οποία δομούνται με τρόπο ώστε να γίνεται σφαιρική παρουσίαση και ανάλυση του θέματος.

Εισαγωγή

Αρχικά, τοποθετούμε την έρευνα στο ευρύτερο επιστημονικό πεδίο, θέτοντας το πλαίσιο και ορισμένους βασικούς προβληματισμούς. Στόχος μας είναι να αναδείξουμε την αναγκαιότητα της έρευνας, να διατυπώσουμε τον σκοπό και τους ερευνητικούς στόχους της μελέτης. Κλείνοντας το κεφάλαιο, προσφέρουμε μια συνοπτική επισκόπηση της δομής της διατριβής.

Επισκόπηση της βιβλιογραφίας

Στη συνέχεια, γίνεται μια σύντομη ιστορική αναδρομή και εστιάζουμε στην αναλυτική παρουσίαση της σχετικής βιβλιογραφίας, χτίζοντας το θεωρητικό υπόβαθρο στο οποίο στηρίζεται η έρευνα.

Το άπειρο στα σχολικά βιβλία

Το συγκεκριμένο κεφάλαιο αναφέρεται στην παρουσίαση του απείρου στα σχολικά βιβλία.

Μεθοδολογία

Περνώντας στην μεθοδολογία, περιγράφουμε λεπτομερώς τη διαδικασία συλλογής δεδομένων, καθώς και τη μεθοδολογία της ανάλυσης αυτών. Διατυπώνουμε τα ερευνητικά ερωτήματα και περιγράφουμε αναλυτικά το εργαλείο συλλογής των δεδομένων.

Αποτελέσματα

Στο πέμπτο κεφάλαιο, παρουσιάζονται και αναλύονται τα αποτελέσματα της έρευνας.

Συζήτηση και Συμπεράσματα

Κλείνοντας, στο έκτο κεφάλαιο ερμηνεύουμε τα αποτελέσματα, εξάγοντας συμπεράσματα και διατυπώνοντας προτάσεις για μελλοντική έρευνα και εφαρμογή.

Παράρτημα

Η διατριβή συνοδεύεται από παράρτημα στο οποίο παρουσιάζονται πίνακες οι οποίοι προέκυψαν από το στατιστικό πρόγραμμα SPSS και αξιοποιήθηκαν στην ποσοτική ανάλυση της έρευνας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ: ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑΣ

2.1 Εισαγωγή

Παρότι το άπειρο αποτελεί αντικείμενο συστηματικής μελέτης στην ιστορία των Μαθηματικών, η πεπερασμένη φύση του πραγματικού κόσμου στερεί από την καθημερινότητα αφορμές για συζητήσεις περί αυτού. Επειδή οι μαθητές κατανοούν καλύτερα τα φαινόμενα όταν βασίζονται στις προηγούμενες εμπειρίες τους, αυτό έχει ως συνέπεια το άπειρο να είναι μια έννοια της οποίας η κατανόηση παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες (Monaghan, 2001, Jirotková & Littler, 2004). Σύμφωνα με τους Dubinsky et al. (2005), σε όλη την ιστορία έχουμε πολλές αντιρρήσεις για την ικανότητα των ανθρώπων να σκεφτούν τα βήματα μιας άπειρης διαδικασίας ή το πραγματικό άπειρο. Είναι γεγονός ότι κανένας άνθρωπος δε μπορεί πραγματικά να απαριθμήσει μια άπειρη συλλογή βημάτων. Επιπλέον, τα νοητικά μας σχήματα είναι προσαρμοσμένα σε πεπερασμένα αντικείμενα με αποτέλεσμα να υπάρχουν διαισθητικές δυσκολίες για την έννοια του απείρου. (Fischbein et al., 1979). Λαμβάνοντας υπόψη τα προαναφερθέντα, το ερευνητικό ενδιαφέρον στρέφεται στις αντιλήψεις που διαμορφώνουν οι μαθητές για το άπειρο.

2.2 Ιστορική αναδρομή

Η έννοια του απείρου αποτέλεσε αντικείμενο μελέτης πληθώρας επιστημών, όπως των μαθηματικών, της φιλοσοφίας και της φυσικής. Στη συγκεκριμένη ενότητα εστιάζουμε στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας του απείρου, με βάση τη μαθηματική της χρήση. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι κατά την αρχική φάση της εξέλιξης αυτής της έννοιας η προσέγγιση ήταν κυρίως φιλοσοφική.

Η ιστορική αναδρομή μπορεί να διακριθεί σε τέσσερα κύρια στάδια, την αρχαία ελληνική περίοδο, την κλασσική και ελληνιστική περίοδο, την μεσαιωνική περίοδο και τη νεότερη και σύγχρονη περίοδο.

Ο Αναξίμανδρος ο Μιλήσιος, φιλόσοφος του 6ου αιώνα π.Χ., αναδεικνύεται ως ο πρώτος εκφραστής της έννοιας του απείρου στη φιλοσοφία. Υποστήριζε πως η αρχή του κόσμου είναι το άπειρο, το οποίο είναι αιώνιο και ανεξάντλητο. Σύμφωνα με την αντίληψή του, το άπειρο, ταυτίζεται και με την πολυπλοκότητα, την αταξία και την έλλειψη σαφών ορίων. Ο Αριστοτέλης, μάλιστα, έγραψε χαρακτηριστικά: «…το να είναι κάτι άπειρο είναι μειονέκτημα, δεν είναι πλεονέκτημα, το όριο απουσιάζει…» (Rucker, 2004).

Κατά τον 5ο αιώνα π.Χ., ο Πυθαγόρειος Αρχύτας από την Τάραντα παρέχει ένα επιχείρημα υπέρ της ιδέας του χωρικού απείρου στο σύμπαν, βασιζόμενο στην αντίφαση που προκύπτει από τη θέσπιση ενός ορίου σε αυτό. Αν ο κόσμος είναι περιορισμένος, τότε η δυνατότητα επέκτασης του χεριού ή ενός ραβδιού πέρα από τα όριά του οδηγεί σε αντιφάσεις, καθώς αυτό θα αποτελούσε μέρος του κόσμου που δεν υπόκειται σε περιορισμό. Συνεπώς, σύμφωνα με την άποψη του Αρχύτα ο κόσμος αναδεικνύεται ως απείρου εκτάσεως, (Huffman, 2005).

Ο Παρμενίδης ήταν αρχαίος Έλληνας φιλόσοφος, ο οποίος έζησε περίπου μεταξύ του 515 π.Χ. και του 450 π.Χ. Ήταν μέλος της Ελεατικής σχολής και απέρριπτε την έννοια της κίνησης και της μεταβολής. Σύμφωνα με τον Παρμενίδη (Barrow 2007), το σύμπαν είναι ενιαίο και αποτελείται από μια μοναδική ουσία, το «Εν», η οποία είναι άχρονη και αμετάβλητη. Υποστήριξε ότι η κίνηση στην πραγματικότητα δεν υφίσταται, καθώς προϋποθέτει την ύπαρξη διαφορετικών καταστάσεων: μία προτού συντελεστεί και μία αφού ολοκληρωθεί η κίνηση. Κατά τον Παρμενίδη, η κίνηση που αντιλαμβανόμαστε είναι μια ψευδαίσθηση, ενώ το σύμπαν είναι ουσιαστικά μια ενιαία και αμετάβλητη πραγματικότητα. Ο Ζήνων (περίπου 490 π.Χ-430 π.Χ) υποστηρίζοντας την Παρμενίδια θέση ότι η κίνηση είναι αδύνατη, διατύπωσε τέσσερα παράδοξα. Τα παράδοξα, ξεκινούν με μια φαινομενικά αδιαμφισβήτητη πρόταση, από την οποία προκύπτει ένα συμπέρασμα που αντιτίθεται στην κοινή αντίληψη της πραγματικότητας. Παρακάτω παρουσιάζουμε δύο από αυτά τα παράδοξα, τα οποία σχετίζονται με την έννοια του απείρου (Barrow 2007).

Ο Αχιλλέας και η Χελώνα

Το παράδοξο του Αχιλλέα και της χελώνας, ίσως ένα από τα πιο γνωστά φιλοσοφικά αδιέξοδα, θέτει υπό αμφισβήτηση την έννοια της κίνησης ως άπειρη διαδικασία. Σύμφωνα με το παράδοξο, ο Αχιλλέας ξεκινά από το σημείο 0, ενώ η χελώνα, που τρέχει με τη μισή ταχύτητα, ξεκινά με προβάδισμα ενός χιλιομέτρου. Αυτό που αναμένουμε είναι ότι ο Αχιλλέας, λόγω της μεγαλύτερης ταχύτητάς του, θα προσπεράσει τη χελώνα. Ωστόσο, όταν ο Αχιλλέας φτάσει στο 1 km, η χελώνα θα έχει ήδη προχωρήσει στο σημείο 1 + ½ km. Όταν ο Αχιλλέας φτάσει στο σημείο 1 + ½ km, η χελώνα θα βρίσκεται στο σημείο 1 + ½ + ¼ km, και αυτό συνεχίζεται επ' άπειρον. Μετά από n βήματα, ο Αχιλλέας θα έχει διανύσει $2 – 1/2^{(n-1)}$ km από την αφετηρία, ενώ η χελώνα θα βρίσκεται ακόμα πιο μπροστά, καθώς θα έχει διανύσει $2 – 1/2^{(n+1)}$ km, διατηρώντας το προβάδισμα. Έτσι, σύμφωνα με το παράδοξο, όσο γρήγορος και αν είναι ο Αχιλλέας, δεν θα προσπεράσει ποτέ τη χελώνα (Barrow 2007).

Ο Bertrand Russell (1937) προσφέρει μια ερμηνεία του παραδόξου του Αχιλλέα και της χελώνας, βασιζόμενη στη θεωρία συνόλων. Το κύριο επιχείρημα του Russell εστιάζει στην ένα προς ένα αντιστοίχιση μεταξύ των θέσεων του Αχιλλέα και της χελώνας σε κάθε στιγμή της κίνησής τους. Κατά τον Russell, σε κάθε στιγμή της κούρσας, ο Αχιλλέας και η χελώνα βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία. Δεδομένου ότι κανένας από τους δύο δεν μπορεί να βρεθεί στο ίδιο σημείο δύο φορές κατά τη διάρκεια του αγώνα, ο αριθμός των σημείων που διανύει ο Αχιλλέας είναι ίσος με τον αριθμό των σημείων που διανύει η χελώνα. Ωστόσο, σύμφωνα με το παράδοξο, ο Αχιλλέας οφείλει να φτάσει και να προσπεράσει την χελώνα. Αν αυτό συνέβαινε, τότε ο αριθμός των σημείων που διανύει ο Αχιλλέας θα έπρεπε να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των σημείων που διανύει η χελώνα, καθώς ο Αχιλλέας διανύει μεγαλύτερη απόσταση. Αυτή η φαινομενική αντίφαση αποτελεί την ουσία του παραδόξου. Ο Russell, όμως, επισημαίνει ότι τα δύο σύνολα σημείων, τα οποία αντιπροσωπεύουν τις διανυθείσες αποστάσεις από τον Αχιλλέα και την χελώνα, είναι άπειρα. Σύμφωνα με τον Cantor, το μέρος των άπειρων συνόλων μπορεί να είναι ισοδύναμο με το όλον. Εφαρμόζοντας αυτή την έννοια, ο Russell υποστηρίζει ότι η αντίφαση του παραδόξου εξαφανίζεται. Παρόλο που ο αριθμός των σημείων που διανύει ο Αχιλλέας είναι ίσος με τον αριθμό των σημείων που διανύει η χελώνα, η ισοδυναμία αυτή δεν αναιρεί το γεγονός ότι ο Αχιλλέας διανύει μεγαλύτερη απόσταση.

Η Διχοτομία

Στο παράδοξο της διχοτομίας, ο Ζήνωνας ο Ελεάτης θέτει ένα ερώτημα που αμφισβητεί την έννοια της κίνησης. Σύμφωνα με το παράδοξο, η κίνηση είναι αδύνατη. Για να διανύσει κάποιος την απόσταση μεταξύ δύο σημείων, πρέπει πρώτα να καλύψει το μισό της συνολικής απόστασης, στη συνέχεια το μισό της απόστασης που απομένει, και ούτω καθεξής. Για παράδειγμα, αν τα δύο σημεία απέχουν 1 km, ο δρομέας θα πρέπει πρώτα να διανύσει 1/2 km, έπειτα 3/4 km, και στη συνέχεια 7/8 km, και ούτω καθεξής. Μετά από n βήματα, η συνολική απόσταση που θα έχει διανύσει ο δρομέας θα είναι $n\text{-}1/2^n$ km. Όσο και αν αυξηθεί ο αριθμός των βημάτων, η διανυόμενη απόσταση θα παραμένει πάντα μικρότερη από την αρχική, επομένως ο δρομέας δεν θα φτάσει ποτέ στον προορισμό του. Ο συλλογισμός αυτός ισχύει για κάθε μορφή κίνησης, καθώς απαιτείται άπειρος αριθμός βημάτων για να διανυθεί οποιαδήποτε απόσταση. Ο Ζήνων, απορρίπτοντας την έννοια του απείρου, απέρριψε και την κίνηση ως πραγματική διαδικασία (Barrow 2007).

Ο Αναξαγόρας ο Κλαζομένιος (500-428 π.Χ.) υιοθετούσε μια ιδιαίτερη φιλοσοφική θέση σχετικά με τη φύση των διαφόρων διαστάσεων και μεγεθών στο σύμπαν. Σύμφωνα με τον Αναξαγόρα, στα μικρά πράγματα δεν υπάρχει κάτι ελάχιστο, ενώ στα μεγάλα δεν υπάρχει κάτι μέγιστο. Θεωρούσε ότι «από τα μικρά πράγματα δεν υπάρχει το ελάχιστο, αλλά πάντα υπάρχει κάτι μικρότερο» και «από το μεγάλα πράγματα δεν υπάρχει το μέγιστο, αλλά πάντα υπάρχει κάτι μεγαλύτερο». Η ανάλυση ενός αντικειμένου σε άπειρα μέρη δεν είναι το ίδιο με την ανάλυση ενός αντικειμένου σε έναν πολύ μεγάλο αριθμό πολύ μικρών μερών. Για τον Αναξαγόρα μια άπειρη διαδικασία διαίρεσης ή ανάλυσης δεν έχει τέλος καθώς δεν μπορεί να ολοκληρωθεί. Δεν υπάρχουν τελικά προϊόντα, καθώς όσο προχωρά η διαίρεση ή η ανάλυση, πάντα μπορεί να συνεχιστεί περαιτέρω. Σε κάθε στάδιο έχουμε έναν καθορισμένο, πεπερασμένο αριθμό μερών ή τμημάτων, το καθένα με καθορισμένο, θετικό μέγεθος, και τα μέρη ή τα τμήματα, όλα μαζί ανασυνθέτουν το αρχικό αντικείμενο. Φαίνεται, λοιπόν, ότι ο Αναξαγόρας ήταν ο πρώτος που αναγνώρισε μία από τις πιο σημαντικές ιδιότητες του απείρου και την ενσωμάτωσε στις βάσεις του συστήματός του. Ο Αναξαγόρας δεν αναιρεί την επιχειρηματολογία του Ζήνωνα, αντιθέτως βρίσκει έναν τρόπο να την παρακάμψει. Το δίλημμα του Ζήνωνα, ότι τα τελικά προϊόντα έχουν είτε μηδενικό μέγεθος είτε κάποιο θετικό μέγεθος, είναι λανθασμένο, καθώς δεν υπάρχουν τελικά προϊόντα. Αυτή η ιδέα περί απείρου και συνεχούς διαίρεσης αποτελεί ένα ενδιαφέρον φιλοσοφικό ζήτημα που αντικατοπτρίζει τη σκέψη του σχετικά με την ανεξάντλητη φύση της πραγματικότητας (McKirahan, 2010).

Ο Αριστοτέλης, πολυσχιδής αρχαίος Έλληνας φιλόσοφος και επιστήμονας, γεννήθηκε το 384 π.Χ. και απεβίωσε το 322 π.Χ. Διαδραμάτισε καθοριστικό ρόλο στην ιστορία της έννοιας του απείρου. Υποστήριξε ότι ο κόσμος είναι πεπερασμένος, παρά την ύπαρξη διαδικασιών που μπορούν να επαναληφθούν επ' αόριστον, ονομάζοντας αυτήν την έννοια «δυνητικό άπειρο». Σύμφωνα με τον Αριστοτέλη, η εξοικείωσή μας με την έννοια του απείρου πηγάζει από δύο βασικές διαδικασίες, την αθροιστική και τη διαιρετική. Η πρώτη περιλαμβάνει την πρόσθεση η οποία μπορεί να οδηγήσει στη θεώρηση πεπερασμένων αντικειμένων οποιουδήποτε μεγέθους, όχι όμως και σε άπειρα αντικείμενα. Ο Αριστοτέλης θεωρούσε ότι δεν υπάρχουν άπειρα αντικείμενα. Η δεύτερη διαδικασία περιλαμβάνει τον διαχωρισμό ενός πεπερασμένου μεγέθους σε ολοένα και μικρότερα τμήματα. Η διαιρετική διαδικασία πίστευε ότι δεν έχει όριο, με αποτέλεσμα να οδηγεί σε δυνητικά άπειρες διαιρέσεις. Επομένως θεωρούσε ότι έχει νόημα μόνο η δυνητική σπουδή του απείρου (Αναπολιτάνος, 2005). Πίστευε ότι ένα άπειρο (μη εξαντλούμενο) σύμπαν ήταν εφικτό, χωρίς ποτέ να έχουμε ένα άπειρο αντικείμενο. Αυτό το άπειρο σύμπαν θεωρούταν δυνητικό (δυνάμει άπειρο), δηλαδή άπειρο ως δυνατότητα, όχι ως πραγματικότητα. Για τον Αριστοτέλη, το σύμπαν είχε πεπερασμένες διαστάσεις, με σχήμα τεράστιας σφαίρας. Σχετικά με το ερώτημα «Τι βρίσκεται έξω από τη σφαίρα αυτή;», ο Αριστοτέλης υποστήριξε ότι η έννοια του ορίου δεν ισχύει για το σύμπαν, καθώς δεν υπάρχει τίποτα έξω από αυτό για να το οριοθετήσει. Με άλλα λόγια, το σύμπαν δεν περιορίζεται από κάτι εξωτερικό, αλλά από την ίδια του την ύπαρξη (Rucker, 2004). Για τον Αριστοτέλη υπάρχει μόνο το εν δυνάμει άπειρο και όχι το ενεργεία άπειρο. Ο δυνητικός ορισμός του απείρου κέρδισε ισχυρή αναγνώριση μέχρι τα μέσα του 19ου αιώνα (Barrow, 2007). Μάλιστα, εξαιτίας της απόρριψης της ιδέας του πραγματικού απείρου, δε το χρησιμοποιούσε ως ουσιαστικό αλλά μόνο ως επίρρημα (για να εκφράσει κάποια δράση π.χ. την πρόσθεση) ή επίθετο (για να περιγράψει π.χ. το σύμπαν) (Luis et al., 1991).

Απέρριψε την έννοια του άπειρου ως αρχέγονης ουσίας, όπως είχαμε συναντήσει στον Αναξίμανδρο, και ασχολήθηκε κυρίως με τη μαθηματική φύση της έννοιας του απείρου, όπου το άπειρο ισχύει για μεγέθη (συνεχή ή διακριτά) και είναι ποσοτικοποιημένο (χρόνος, αριθμοί κ.ά). Δε δέχεται το απείρως μεγάλο, επειδή ο κόσμος είναι πεπερασμένος και το απείρως μικρό, επειδή η διαίρεση της ύλης μπορεί να είναι μόνο δυνητικά άπειρη και επομένως είναι πεπερασμένη σε κάθε στάδιο, χωρίς να φτάνει ποτέ σε μια απειροελάχιστη ποσότητα, η οποία να είναι μικρότερη από οποιαδήποτε πεπερασμένη ποσότητα. Τέλος θεωρεί το άπειρο με πρόσθεση, ως ένα είδος αντίστροφης πράξης του απείρου με διαίρεση (Coope, 2012, Cooper,, 2016, Ugaglia, 2018).

Στα αρχαία ελληνικά μαθηματικά, η αποφυγή του πραγματικού απείρου κατά την παρουσίαση μαθηματικών αποτελεσμάτων ήταν κοινή πρακτική. Παρόλα αυτά, αναλύοντας κανείς τις στρατηγικές και τις διαισθητικές μεθόδους που ακολούθησαν δε θα δει κάτι τέτοιο. Ο Αρχιμήδης (287-212 π.Χ.), ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς όλων των εποχών, ξεχωρίζει για την ικανότητά του να επιλύει μαθηματικά προβλήματα με καινοτόμες μεθόδους, αποφεύγοντας παράλληλα την έννοια του απείρου, η οποία δεν είχε εδραιωθεί πλήρως στην εποχή του. Έννοιες όπως το άπειρο ή το όριο, απουσιάζουν στα έργα του, όμως οι λύσεις που επινόησε, οι στρατηγικές του και η προσέγγισή του στις άπειρες διαδικασίες αποτέλεσαν θεμελιώδη βήματα προς την κατανόηση και ανάπτυξη εννοιών που διατηρούνται μέχρι και σήμερα (Γιαννακούλιας, 2007). Μία τυχαία ανακάλυψη το 1906, έφερε στο φως την ικανότητά του να αξιοποιεί μεθόδους που σχετίζονται με το άπειρο ως εργαλεία για την απόδειξη γεωμετρικών θεωρημάτων (Jullien, 2015).

Όπως είδαμε ήταν χαρακτηριστικό της ελληνικής σκέψης να απορρίπτει την ιδέα ότι μπορεί να υπάρχουν διαφορετικά μεγέθη του απείρου. Ο Ibn Qurrah (9ος αιώνας μ.Χ.) υποστήριξε, ότι μπορεί να υπάρχουν διαφορετικά μεγέθη του απείρου. Θεωρούσε, ότι αν η τομή δύο υποσυνόλων είναι το κενό και η ένωσή τους είναι ολόκληρο το σύνολο των ακεραίων, τότε καθένα από αυτά τα δύο υποσύνολα είναι το μισό του συνόλου των ακέραιων αριθμών. Κατά συνέπεια, ένα άπειρο μπορεί να είναι το μισό ενός άλλου άπειρου. Το σφάλμα του συνίσταται στην εφαρμογή, σε άπειρα σύνολα, αριθμητικών πράξεων που εφαρμόζονται σε ακέραιους αριθμούς, π.χ. ερμηνεύει την ένωση συνόλων ως μια πρόσθεση, η οποία διαθέτει τις ίδιες ιδιότητες με την πρόσθεση φυσικών αριθμών. Παρ' όλα αυτά οι σκέψεις του είναι από τις πρώτες προσπάθειες που έγιναν ώστε το άπειρο να ανταποκρίνεται στη μαθηματική του έννοια (Rashed, 2009).

Ο Γαλιλαίος (1564-1642) στο έργο του «Two New Sciences» το 1638 (Galilei, 1974), παρουσιάζει ένα παράδοξο του απείρου. Από τη μία πλευρά, υπάρχει η διαίσθηση ότι τα τετράγωνα των θετικών ακεραίων είναι λιγότερα από όλους τους ακεραίους, αφού οι πρώτοι αριθμοί περιέχονται στους δεύτερους. Από την άλλη, υπάρχει η διαίσθηση ότι το πλήθος των θετικών ακεραίων και των τετραγώνων τους είναι το ίδιο, αφού υπάρχει μια ένα προς ένα αντιστοίχιση μεταξύ των φυσικών αριθμών και των τετραγώνων τους. Για να αποφύγει αυτή την αντίφαση στο βιβλίο του αναφέρει: «Δεν βλέπω άλλη λύση παρά να παραδεχθούμε ότι υπάρχουν άπειροι αριθμοί, άπειρα τετράγωνα και άπειρες ρίζες. Δεν μπορείς να πεις ότι υπάρχουν λιγότερα τετράγωνα από τους αριθμούς ή περισσότεροι αριθμοί από τα τετράγωνά τους. Σε τελική ανάλυση, οι ιδιότητες της ισότητας και της μεγαλύτερης ή μικρότερης ποσότητας ισχύουν μόνο για πεπερασμένες ποσότητες και όχι όταν ασχολούμαστε με το άπειρο.». Φαίνεται ότι γνώριζε την έννοια της 1-1 αντιστοίχισης και συνειδητοποίησε ότι μια τέτοια αντιστοίχιση μπορεί να καθιερωθεί μεταξύ όλων των φυσικών αριθμών και των τετραγώνων τους, και επομένως τα σύνολα αυτά μπορούν να θεωρηθούν ότι έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Ωστόσο, κατέληξε στο λανθασμένο συμπέρασμα ότι όλα τα άπειρα σύνολα είναι ίδια. Ο Γαλιλαίος δεν μπορούσε να φανταστεί ότι το σύνολο των σημείων ενός διαστήματος δεν μπορεί να απαριθμηθεί, καθώς υπέθεσε ότι ένα διάστημα αποτελείται από άπειρες ποσότητες ατόμων που μπορούν να απαριθμηθούν (Vilenkin, 1995).

Ο Leibniz (1646-1716) θεωρούσε το άπειρο αποδεκτό τόσο ως δυνητικό (ως άπειρη διαιρετότητα εκτεταμένων αντικειμένων) όσο και ως πραγματικό. Η πίστη του στο πραγματικό άπειρο εδράζεται στην πεποίθησή του ότι κάθε φαινομενικά εκτεταμένο αντικείμενο αποτελείται από άπειρες μονάδες, καθιστώντας το όχι απλά διαιρετό, αλλά άπειρα διαιρεμένο. Αυτό, δεν σημαίνει ότι ήταν έτοιμος να υιοθετήσει την ύπαρξη άπειρων αριθμών ή ευθειών με άπειρο μήκος παρόλα αυτά, διατυπώνει την άποψη ότι ο χρόνος μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον. Αυτό υποδηλώνει την αποδοχή του δυνητικού απείρου, δηλαδή της δυνατότητας σχεδίασης μιας ευθείας επ' άπειρον. (Αναπολιτάνος, 2005)

Ο Bolzano (1781-1848) παρέμενε πιστός στην άποψή του ότι όταν ένα σύνολο αποτελεί υποσύνολο ενός άλλου, τότε το πλήθος των στοιχείων του είναι μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων του δεύτερου. Κατά συνέπεια, προσπαθούσε να αναπτύξει μια θεωρία για το άπειρο που θα ήταν συνεπής με αυτήν την ιδέα. Δεν κατάφερε κάτι τέτοιο, όμως στα κείμενά του αναφέρει ότι ένα άπειρο σύνολο έχει την ιδιότητα ότι δε μπορεί να τεθεί σε ένα προς ένα αντιστοίχιση με ένα γνήσιο υποσύνολο του (Bolzano, 1950). Επιπλέον, παρά το ότι δεν αποδεχόταν την ύπαρξη απείρως μεγάλων και άπειρα μικρών ποσοτήτων, αναφέρθηκε την πιθανότητα ύπαρξης ενός ενεργεία απείρου (Στεργίου, 2009). Η πρώτη προσπάθεια «μαθηματικοποίησης» του πραγματικού απείρου έγινε από τον ίδιο τον Bolzano το 1851, με την εργασία του με τίτλο «Τα παράδοξα του απείρου». Σε αυτή την εργασία, εκφράζει την άποψη ότι το άπειρο μπορεί να εισαχθεί στα μαθηματικά ως αντικείμενο μελέτης (Δρόσος, 1999).

Ο Cauchy (1789-1857), όρισε το άπειρο ως «μια μεταβλητή ποσότητα της οποίας οι διαδοχικές τιμές μπορούν να γίνουν μεγαλύτερες από κάθε αριθμό, οσοδήποτε μεγάλο». Με άλλα λόγια, το άπειρο, σύμφωνα με τον Cauchy, είναι μια ποσότητα που μπορεί να αυξηθεί πέρα από οποιοδήποτε προκαθορισμένο όριο (Clegg, 2003). Ο Boyer (1949), σχολιάζοντας τον ορισμό του Cauchy, εστιάζει στην έννοια της μεταβλητότητας. Θεωρεί ότι ο Cauchy, με αυτόν τον ορισμό, υιοθετεί μόνο το δυνητικό άπειρο του Αριστοτέλη, το οποίο αντιπροσωπεύει μια δυνατότητα για ατελείωτη αύξηση, χωρίς να υπάρχει η ύπαρξη ενός πραγματικά άπειρου μεγέθους. Σε αντίθεση με τον Cauchy, ο Bolzano, σκεπτόμενος με όρους συσσώρευσης, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει η πιθανότητα ενός πραγματικού απείρου.

Ο Weierstrass (1815-1897) επιδίωξε να θεμελιώσει αυστηρά τον Απειροστικό Λογισμό, απομακρύνοντας την έννοια του ενεργεία απείρου και επαναφέροντας το δυνάμει άπειρο. Απέρριψε τα απειροστικά μεγέθη και το άπειρο συνολικά, και εργάστηκε με όρους σχέσεων μεταξύ μικρών, αλλά πεπερασμένων ποσοτήτων, οι οποίες δυνητικά μπορούν να γίνουν αυθαίρετα μικρές. Αυτή η προσέγγιση τυποποιήθηκε με την μαθηματική έννοια του ορίου. Για παράδειγμα, η ακολουθία των πολυγώνων με συνεχώς αυξανόμενο αριθμό πλευρών έχει ως όριο τον κύκλο, επειδή μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα πολύγωνο που είναι όσο αυθαίρετα κοντά θέλουμε στον κύκλο, επιλέγοντας έναν αρκετά μεγάλο αριθμό πλευρών. Έτσι, αν και τα πολύγωνα δεν γίνονται ποτέ πραγματικά κύκλος, μπορούμε να βρούμε ένα πολύγωνο όσο κοντά στον κύκλο επιθυμούμε. Εφόσον δεν υπάρχει επίκληση σε απειροστά μεγέθη ή στο άπειρο, αυτή η λογική παρέχει μια βάση για τις μεθόδους του απειροστικού λογισμού. Η συγκεκριμένη θεμελίωση του απειροστικού λογισμού, συνεπώς, αντιπροσωπεύει μια στροφή προς την αντίληψη του δυνητικού απείρου και έναν αποκλεισμό του πραγματικού απείρου από τον απειροστικό λογισμό (McFarlane, 1999).

Ο Hilbert (1862-1943), στο βιβλίο του «Για το άπειρο», θεωρεί ότι ο δρόμος για το άπειρο περνά μέσα από το πεπερασμένο («περατοκρατική» άποψη), καθώς εκφράζει την άποψη ότι το άπειρο δεν αποτελεί επιτρεπτή βάση για τη λογική σκέψη, διότι δεν συνάδει με τη φύση της. Θεωρούσε ότι οι αντικειμενικές παρατηρήσεις της φυσικής αναιρούν την έννοια της ατελείωτης διαίρεσης του απείρου. Επιπλέον παρατήρησε ότι συναντάμε το άπειρο μέσω των άπειρων ακολουθιών που ορίζουν τους πραγματικούς αριθμούς και στους πραγματικούς αριθμούς ως μία ολότητα. Συνεπής με την «περατοκρατική» του άποψη, ο Hilbert, όμοια με τον Weierstrass, επιθυμούσε να αποβάλει τα άπειρα σύνολα από τα Μαθηματικά. Για αυτόν, το άπειρο δεν υπήρχε στην φύση και η εγκυρότητα των μαθηματικών πράξεων έπρεπε να στηρίζεται στο πεπερασμένο. Για το σκοπό αυτό αναφέρει ότι η πραγματικότητα του απείρου πρέπει να επιβεβαιώνεται από την πεπερασμένη εμπειρία μας, κατά συνέπεια, θεωρεί ότι για να είναι έγκυρες οι πράξεις με το άπειρο πρέπει να βασίζονται και αυτές στο πεπερασμένο (Hilbert, 1998).

Η προσπάθεια των μαθηματικών να περιγράψουν με ακρίβεια την ευθεία γραμμή και το συνεχές, οδήγησε στην αναπόφευκτη υιοθέτηση της έννοιας του πραγματικού απείρου. Η μελέτη του πραγματικού απείρου σηματοδότησε μια τεράστια αλλαγή στον τρόπο σκέψης, οδηγώντας σε μια βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών. Για παράδειγμα, αποδείχθηκε ότι μια γραμμή μπορεί να έχει το ίδιο πλήθος σημείων με μια άλλη γραμμή μισού μήκους ή ότι ένα σύνολο μπορεί να θεωρηθεί ισοπληθικό με ένα υποσύνολό του.

Ο Cantor (1845-1918), ήταν αυτός που έθεσε τα θεμέλια για την αποδοχή του πραγματικού απείρου καθώς πήγε πέρα από τις διαισθητικές εξηγήσεις του πραγματικού άπειρου και έδωσε έναν μαθηματικό ορισμό γι' αυτό. Ήταν αυτός ο οποίος αξιοποίησε την 1-1 αντιστοίχιση και επί. Σύμφωνα με την μέθοδο της σύγκρισης των άπειρων συνόλων που εφάρμοσε, δύο σύνολα θεωρούνται ισοδύναμα όταν μεταξύ τους υπάρχει αντιστοιχία 1-1 και επί. Σε μία επιστολή του προς τον Dedekind, απέδειξε ότι το σύνολο των σημείων ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ισοδύναμο με το σύνολο των σημείων μιας ευθείας, αλλά επίσης και με το σύνολο των σημείων του τρισδιάστατου χώρου (Kline, 1980). Επιπλέον απέδειξε ότι υπάρχουν περισσότερα από ένα είδη απείρου καθώς αντί για ένα μοναδικό άπειρο το οποίο στηρίζεται στη διαισθητική κατανόηση του ατελείωτου, υπάρχει ένας άπειρος κόσμος απείρων (Jahnke, 2001). Το 1891, ο Georg Cantor έθεσε τα θεμέλια της σύγχρονης θεωρίας συνόλων με μια επαναστατική απόδειξη. Απέδειξε ότι υπάρχουν άπειρα σύνολα που δεν μπορούν να τεθούν σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το σύνολο των φυσικών αριθμών. Η απόδειξη, έγινε γνωστή ως «διαγώνιο επιχείρημα». Η απόδειξη του Cantor έδειξε ότι το σύνολο των πραγματικών αριθμών δεν είναι αριθμήσιμο (Mankiewicz, 2000). Τέλος, υπέθεσε ότι ανάμεσα στις δύο πληθικότητες, των φυσικών αριθμών και του συνεχούς (των πραγματικών αριθμών), δεν υπάρχει κάποιο τρίτο είδος απείρου. Η συγκεκριμένη πρόταση είναι η γνωστή ως «η υπόθεση του συνεχούς» (Jahnke, 2001).

Στον πίνακα 2.1 που ακολουθεί βλέπουμε τις βασικότερες αντιλήψεις που προέκυψαν για το άπειρο στην ιστορία των Μαθηματικών, μέσα από την ιστορική αναδρομή.

Πίνακας 2.1: Οι βασικότερες αντιλήψεις για το άπειρο στην ιστορία των μαθηματικών

	Αντίληψη
Παρμενίδης	Το άπειρο δεν υπάρχει.
Αριστοτέλης	Δυνητικό άπειρο, ως επαναλαμβανόμενη διαδικασία χωρίς τέλος.
Ibn Qurrah	Ύπαρξη διαφορετικών μεγεθών του απείρου.
Γαλιλαίος	Το μέρος μικρότερο από το όλον. Όλα τα άπειρα είναι ίδια (η πεποίθηση πως υπάρχει μόνο ένα είδος απείρου άρα όλα τα άπειρα σύνολα είναι ίσα).
Cauchy	Το άπειρο ως μια μεταβλητή ποσότητα, οι τιμές της οποίας μπορούν να γίνουν μεγαλύτερες από οποιονδήποτε αριθμό.
Weierstrass	Δυνητικό άπειρο.
Hilbert	«Φινιτισμός», το άπειρο δεν αποτελεί επιτρεπτή βάση για τη λογική σκέψη, διότι δεν συνάδει με τη φύση της.
Cantor	Περισσότερα από ένα είδη απείρου.

Στη συνέχεια, θα δούμε ότι υπάρχουν ορισμένοι παραλληλισμοί ανάμεσα στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας του απείρου και στην κατανόηση του απείρου από τους μαθητές. Σε αμφότερες τις περιπτώσεις, η ανάπτυξη της αντίληψης για το δυνητικό άπειρο προηγείται χρονικά της αντίληψης για το πραγματικό άπειρο. Τα προβλήματα που προκύπτουν ανάμεσα στο πραγματικό και στο δυνητικό άπειρο εξακολουθούν να είναι επίκαιρα στις μέρες μας, τόσο για τους μαθητές όσο και για τους εκπαιδευτικούς.

2.3 Το άπειρο στο ερευνητικό πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών

2.3.1 Η διαισθητική αντίληψη της έννοιας του απείρου

Μελετώντας το τι είναι διαίσθηση θα δούμε ότι δεν υπάρχει ένας ενιαίος, καθολικά αποδεκτός ορισμός της, καθώς αυτός ποικίλλει ανάλογα με τον επιστημονικό κλάδο και την οπτική γωνία. Στο βιβλίο «Coming to Our Senses» (1996), ο Devitt ορίζει τη διαίσθηση ως μια άμεση, εμπειρική μορφή γνώσης που προέρχεται από το σώμα, το μυαλό και την ψυχή μας. Σύμφωνα με αυτή την άποψη οι διαισθητικές κρίσεις είναι εμπειρικές απαντήσεις, σχετικά άμεσες και βασίζονται ελάχιστα ή καθόλου σε κάποιο συνειδητό συλλογισμό. Αν αντιστοιχίσουμε την παραπάνω προσέγγιση στα Μαθηματικά θα μπορούσαμε να πούμε πως η διαίσθηση σε αυτά είναι μια άμεση, μη-συνειδητή αντίληψη των μαθηματικών εννοιών. Είναι αυτή που μας δίνει πρόσβαση σε γνώση η οποία δεν είναι άμεσα διαθέσιμη στη συνειδητή σκέψη («σιωπηρή γνώση») και μας δίνει μια αρχική αίσθηση σωστού ή λάθους σε σχέση με τα μαθηματικά αντικείμενα.

Ο Fischbein (1987) μελέτησε την έννοια της διαίσθησης σε σχέση με τα μαθηματικά. Σύμφωνα με τον Fischbein, η διαισθητική γνώση αποτελεί μια άμεση, αυτονόητη γνώση που οδηγεί σε γενικεύσεις οι οποίες υπερβαίνουν τα δεδομένα. Επίσης, ο Fischbein διέκρινε τις πρωτογενείς και τις δευτερογενείς διαισθήσεις. Οι πρωτογενείς διαισθήσεις προέρχονται από τις προσωπικές εμπειρίες του ατόμου, ενώ οι δευτερογενείς διαισθήσεις προκύπτουν από προσαρμογές γνωστικών πεποιθήσεων που αποκτήθηκαν μέσω της συστηματικής διδασκαλίας. Οι δευτερογενείς διαισθήσεις συναντώνται όταν οι τυπικές γνώσεις γίνονται άμεσες, προφανείς και το άτομο τις εμπιστεύεται. Για παράδειγμα αν για έναν μαθηματικό η ισοδυναμία μεταξύ ενός άπειρου συνόλου και ενός κατάλληλου υποσυνόλου αυτού γίνει πεποίθηση, τότε έχει αναπτύξει μια δευτερογενή διαίσθηση. Παρότι οι πρωτογενείς αντιλήψεις μπορούν να αναδιαμορφωθούν με τη διδασκαλία, ενδέχεται να εμφανιστούν ξανά σε παρόμοια πλαίσια εργασίας.

Ο Kant το 1781 στο έργο του «Critique of Pure Reason», ασχολείται με το θέμα της ανθρώπινης διαίσθησης για το άπειρο. Καταλήγει ότι η διαίσθηση του ανθρώπου δεν μπορεί να κατανοήσει πλήρως το άπειρο, επειδή μπορεί να το αντιμετωπίσει μόνο μέσα από τα πλαίσια της ανθρώπινης εμπειρίας. Συγκεκριμένα, διατυπώνει την έννοια του «άπειρου ως ιδέας» (infinity as an idea) και τονίζει την αδυναμία του ανθρώπου να αντιληφθεί πλήρως το άπειρο. Δηλαδή αναγνωρίζει ότι η ανθρώπινη διαίσθηση μπορεί να σκέφτεται το άπειρο ως μια ιδέα, αλλά δεν μπορεί να το κατανοήσει πλήρως (Kant 1998).

Σύμφωνα με τον Fischbein (1979), η διαισθητική αντίληψη διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη μαθησιακή διαδικασία, ενώ κάθε μαθητής καλείται να αναπτύξει την ικανότητα ελέγχου των αρχικών διαισθητικών του αντιλήψεων. Η μετάβαση από τη διαισθητική αντίληψη στην τυπική μαθηματική γνώση είναι μια δύσκολη διαδικασία. Ωστόσο, η υιοθέτηση διαφορετικών προσεγγίσεων, όπως η μαθηματική προσέγγιση μέσω της διαίσθησης και η ενσωμάτωση καταστάσεων από την πραγματική ζωή, δύναται να συμβάλουν στην κατάκτηση της τυπικής μαθηματικής γνώσης.

Η έρευνα στη μαθηματική εκπαίδευση έχει δείξει ότι οι πρωτογενείς διαισθήσεις, οι οποίες έχουν τις ρίζες τους στην καθημερινή ζωή και τις προηγούμενες εμπειρίες μας, συχνά αποτελούν εμπόδιο για τους μαθητές όταν αντιμετωπίζουν κάποιο καινούριο μαθηματικό αντικείμενο (Tsamir, 1999). O Fischbein (1994) επισημαίνει ότι το πραγματικό άπειρο αποτελεί μια λογική κατασκευή, η οποία δεν γίνεται πάντα αποδεκτή διαισθητικά. Επιπλέον, σε κάποιες περιπτώσεις, η διαίσθηση των μαθητών μπορεί να είναι ορθή, αλλά να στερούνται την κατάλληλη μαθηματική γνώση για την τεκμηρίωση της (Kolar & Čadež 2012). Ένα ακόμα ενδιαφέρον σημείο είναι αυτό που ο Fischbein (1979) αποκαλεί «πολύ ασθενή» φύση της διαίσθησης του απείρου, καθώς οι απαντήσεις των μαθητών επηρεάζονται συχνά ακόμα και από την αναπαράσταση π.χ. των άπειρων συνόλων.

Η διαισθητική αντίληψη δύναται να οδηγήσει τον μαθητή προς τη σωστή κατεύθυνση, αλλά και να τον παραπλανήσει. Επομένως, αναδεικνύεται η σπουδαιότητα της επίγνωσης από τους μαθητές των διαισθήσεών τους, καθώς και της κατανόησης εκείνων των διαισθήσεων που επηρεάζουν τη μαθηματική σκέψη και αντίληψή τους (Fischbein, 1979). Για να επιτευχθεί κάτι τέτοιο καθοριστικός είναι ο ρόλος των εκπαιδευτικών, μάλιστα η Tsasmir (1999) υπογραμμίζει την ανάγκη οι μαθητές να επιδεικνύουν προσοχή όσον αφορά τη διαχείριση της τυπικής και της διαισθητικής γνώσης, καθώς η απουσία κατάλληλου συνδυασμού μπορεί να οδηγήσει σε συγκρούσεις. Στο ίδιο πνεύμα, οι Mamolo και Zazkis (2008) τονίζουν την επιτακτική ανάγκη υιοθέτησης μίας διδακτικής προσέγγισης που θα ενισχύει την ικανότητα των μαθητών να διαχωρίζουν τις διαισθητικές θεωρήσεις από τις τυπικές μαθηματικές.

2.3.2 Έρευνες σχετικές με την αντίληψη για το άπειρο

Προκύπτει το ερώτημα, ποια η σχέση μεταξύ διαίσθησης και αντίληψης; Για τη διαίσθηση μπορούμε να υιοθετήσουμε τη γνωστική προσέγγιση του Fischbein που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Η αντίληψη είναι μια διαδικασία μέσω της οποίας τα άτομα οργανώνουν και ερμηνεύουν τις αισθητηριακές εντυπώσεις τους προκειμένου να δώσουν νόημα στο περιβάλλον τους. Ωστόσο, αυτό που αντιλαμβανόμαστε μπορεί να είναι ουσιαστικά διαφορετικό από την αντικειμενική πραγματικότητα. Ως έννοια είναι εξαιρετικά σημαντική καθώς η συμπεριφορά των ανθρώπων είναι με βάση την αντίληψή τους για το τι είναι πραγματικότητα και όχι την ίδια την πραγματικότητα (Robbins & Judge, 2007).

Σύμφωνα με τους Singer και Voica (2008) τόσο η αντίληψη όσο και η διαίσθηση στοχεύουν στη δημιουργία αναπαραστάσεων του κόσμου γύρω μας. Οι αναπαραστάσεις μέσω των αντιλήψεων, που δημιουργούνται με βάση τις πληροφορίες που λαμβάνουμε από τις αισθήσεις μας (όραση, ακοή, αφή κ.λπ.), δεν είναι απόλυτα ακριβείς αναπαραστάσεις της πραγματικότητας. Αντίθετα, μας δίνουν πιθανές εξηγήσεις για το τι συμβαίνει γύρω μας καθώς μπορούν να διαψευστούν (ή και όχι) από μελλοντικές εμπειρίες. Όταν αποκτούμε νέες εμπειρίες, οι αντιληπτικές μας αναπαραστάσεις μπορεί να χρειαστεί να τροποποιηθούν. Η διαίσθηση λειτουργεί βάσει των πεποιθήσεών μας. Αυτό σημαίνει ότι μπορεί να μας δώσει μια αίσθηση σιγουριάς για μια μαθηματική έννοια, ακόμα και αν δεν έχουμε κάποια πλήρη λογική απόδειξη. Αυτή η σιγουριά βασίζεται σε προϋπάρχουσες πεποιθήσεις και ενδεχομένως σε προηγούμενες εμπειρίες. Ενώ η αντίληψη βασίζεται σε συγκεκριμένες αισθητηριακές εμπειρίες, η διαίσθηση μπορεί να λειτουργεί πιο γενικά, χρησιμοποιώντας τις πεποιθήσεις μας.

Η πρωταρχική αντίληψη είναι μια ενεργή και αυθόρμητη διαδικασία με την οποία οι άνθρωποι οργανώνουν και ερμηνεύουν τις αισθητηριακές πληροφορίες τους, ανεξάρτητα από οποιαδήποτε οδηγία (Singer & Voica, 2008). Οι πρωταρχικές αντιλήψεις μαζί με τις προηγούμενες εμπειρίες μας επηρεάζουν τις διαισθητικές αντιλήψεις μας οι οποίες είναι κάθε φορά μια ασυνείδητη διαδικασία. Με τον όρο διαισθητική αντίληψη θα αναφερόμαστε στην ικανότητα τον μαθητών να κατανοούν ή να αντιλαμβάνονται κάτι χωρίς να έχουν σαφέστατα επιχειρήματα ή να μπορούν να εξηγήσουν πλήρως τη διαδικασία που οδήγησε στη συγκεκριμένη κατανόησή τους. Δηλαδή, υποδηλώνει μια ερμηνεία τους για μια έννοια σε πρωταρχικό επίπεδο. Αυτό συμβαίνει στην έννοια του απείρου καθώς οι μαθητές παρά τις συχνές αναφορές σε αυτό δεν το έχουν διδαχθεί συστηματικά. Κάθε αντίληψη είναι ένα είδος «εσωτερικής γνώσης» που προκύπτει από την εμπειρία ή την όποια εκπαίδευση έχει προηγηθεί. Η διαισθητική αντίληψη διαδραματίζει σημαντικό ρόλο καθώς παρά τις εγγενείς δυσκολίες της έννοιας του απείρου, ο Monaghan (2001) συμπέρανε ότι η αρχική αποδοχή της γίνεται μέσω της διαισθητικής αντίληψης.

2.3.2.1 Η αντίληψη του άπειρου ως πολύ μεγάλο πεπερασμένο ή ως αριθμό

Σε έρευνα στην οποία συμμετείχαν μαθητές του δημοτικού σχολείου, ο Falk (1994) διαπίστωσε ότι ενώ τα παιδιά ηλικίας 8 ετών και άνω κατανοούσαν το ατελείωτο των φυσικών αριθμών, δεν ήταν σε θέση να κατανοήσουν τη διαφορά μεγέθους μεταξύ του μεγάλου πεπερασμένου συνόλου και των φυσικών αριθμών. Μάλιστα πολλά παιδιά άνω των 8 ετών, μερικά ακόμη και ηλικίας 12 ή 13 ετών, σε πρόβλημα που τους δόθηκε τοποθέτησαν τους φυσικούς αριθμούς δίπλα σε κόκκους άμμου γιατί δεν πίστευαν ότι η ποσότητα των φυσικών αριθμών υπερβαίνει κατά πολύ τον αριθμό των κόκκων άμμου.

Ένα από τα πιο συνηθισμένα λάθη είναι η αντίληψη του απείρου ως κάτι παρόμοιο με τους μεγάλους πεπερασμένους αριθμούς (Pehkonen et al., 2006). Σε μελέτη της Sierpinska σε 17χρονους μαθητές (1987) φάνηκε ότι ορισμένοι μαθητές πιστεύουν ότι το άπειρο είναι ένας μεγάλος πεπερασμένος αριθμός. Μια άλλη μελέτη ανέφερε ότι το 31% από 190 μαθητές, όταν ρωτήθηκαν αν το άπειρο είναι ένας τεράστιος αριθμός, απάντησαν θετικά, ενώ και σε συνεντεύξεις τους έκαναν συχνά δηλώσεις όπως «το σκεφτόμαστε ως έναν αριθμό για να απλοποιήσουμε τα πράγματα»(Monaghan, 2001). Οι Tirosh και Tsamir (2006) στην εργασία τους «Conceptual Change in Mathematics Learning» επισημαίνουν την ίδια κοινή παρανόηση μεταξύ των μαθητών σχετικά με το άπειρο και τους αριθμούς. Παρατηρούμε λοιπόν αρκετοί μαθητές να αντιλαμβάνονται το άπειρο ως έναν μεγάλο πεπερασμένο αριθμό ή ως έναν αριθμό καθαυτό. Η πίστη μιας μαθήτριας από την οποία πήραν συνέντευξη ότι το άπειρο μπορεί να αναπαρασταθεί από τον αριθμό 100000000000000 είναι ένα παράδειγμα αυτής της παρανόησης. Επιπλέον, η ίδια ενώ έδειξε να κατανοεί ότι το «δύο φορές άπειρο» και το «άπειρο συν άπειρο συν άπειρο συν άπειρο συν άπειρο» έχουν το ίδιο άπειρο αποτέλεσμα, η απλή προσθήκη ενός επιπλέον ψηφίου κλόνισε την πεποίθησή της ότι κανένας αριθμός δεν είναι μεγαλύτερος από αυτό. Αυτό είχε ως αποτέλεσμα να θεωρήσει το άπειρο συν ένα μεγαλύτερο από το άπειρο.

Ανάλογα αποτελέσματα συναντάμε και σε έρευνες στις οποίες συμμετείχαν φοιτητές. Έρευνα των Tall και Schwarzenberger το 1978 σε πρωτοετείς φοιτητές έδειξε ότι ορισμένοι από αυτούς σκέφτονται το άπειρο ως τον τελευταίο αριθμό. Οι απαντήσεις τους έδειξαν ότι κάποιες από τις ιδέες τους είναι ότι το άπειρο είναι μια έννοια που επινοήθηκε για να δώσει ένα τελικό σημείο στους πραγματικούς αριθμούς πέρα από το οποίο δεν υπάρχουν άλλοι πραγματικοί αριθμοί ή ότι το άπειρο είναι ο μεγαλύτερος δυνατός αριθμός που υπάρχει. Επιπλέον ορισμένοι φοιτητές θεωρούσαν ότι το άπειρο είναι ένα σύμβολο το οποίο εκφράζει κάτι που δε μπορούμε να φτάσουμε. Σε μελέτη των Mamolo και Zazkis (2008) σε φοιτητές στους οποίους δόθηκε ένα μαθηματικό παράδοξο, φάνηκε κάποιοι να αντιμετωπίζουν μια γνωστική σύγκρουση ανάμεσα σε δύο αντίθετες αντιλήψεις αυτήν του ανεξάντλητου και αυτήν του απείρου ως μεγάλο άγνωστο αριθμό.

2.3.2.2 Η διαδικαστική αντίληψη για το άπειρο

Οι Fischbein et al. (1981) κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι το άπειρο θεωρείται κυρίως δυνητικό, δηλαδή ως μια ανεξάντλητη διαδικασία. Σύμφωνα με τον ίδιο (Fischbein 2001) όταν ασχολούμαστε με το δυνητικό άπειρο έχουμε να κάνουμε με μια δυναμική μορφή του απείρου κατά την οποία οι διαδικασίες συνεχίζονται ατελείωτα. Για παράδειγμα, δε μπορούμε να συλλάβουμε το σύνολο των φυσικών αριθμών αλλά μπορούμε να συλλάβουμε ως ιδέα ότι μετά από κάθε φυσικό αριθμό υπάρχει ένας επόμενος φυσικός αριθμός. Σε μελέτη της η Tirosh (1999), σε άτομα διαφορετικών ηλικιών από το Δημοτικό έως το Πανεπιστήμιο, παρατήρησε ότι οι απαντήσεις που είχαν να κάνουν με το άπειρο ως διαδικασία ήταν οι ίδιες σε όλους και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι το καλύτερο μαθηματικό υπόβαθρο δε διαφοροποιούσε τα πράγματα.

Οι Singer και Voica (2008) πραγματοποίησαν έρευνα σε τρεις ομάδες μαθητών και φοιτητών: α) μαθητές Δημοτικού (τάξεις 1-4, δηλαδή 6-7 έως 10-11 ετών), β) μαθητές Γυμνασίου-Λυκείου (τάξεις 5-12, δηλαδή 11-12 έως 18-19 ετών), και γ) προπτυχιακοί φοιτητές - μελλοντικοί εκπαιδευτικοί στο τρίτο ή τέταρτο έτος των σπουδών τους. Συνολικά, 262 άτομα, από τους οποίους 143 κορίτσια και 119 αγόρια, απάντησαν σε ερωτηματολόγια. Η συλλογή των δεδομένων έγινε με τέσσερις τρόπους: α) με ερωτηματολόγια, β) με συνεντεύξεις, γ) με ομάδες εστίασης (focus-groups), και δ) με μια ερώτηση που απομονώθηκε από ένα τεστ με πολλές ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής. Το συγκεκριμένο άρθρο δίνει έμφαση κυρίως στις συνεντεύξεις, με σκοπό τη μελέτη των αυθόρμητων αντιλήψεων για το άπειρο.

Σύμφωνα με τους Singer και Voica (2008) η έννοια του απείρου δεν περιλαμβάνεται στα σχολικά προγράμματα και αυτό αποτελεί μια καλή ευκαιρία για να εξεταστούν οι τρόποι σκέψης των παιδιών και τα όρια της κατανόησής τους. Μέσω της ερώτησης «Περιγράψτε την έννοια του άπειρου με τα δικά σας λόγια.», οι ερευνητές επιδίωξαν να κατανοήσουν τον τρόπο με τον οποίο τα παιδιά αντιλαμβάνονται το άπειρο. Προέκυψαν τρεις βασικές κατηγορίες πρωτογενών αντιλήψεων για το άπειρο. Η διαδικαστική, η τοπολογική και η πνευματική.

Η διαδικαστική αντίληψη η οποία επικρατεί στις περισσότερες περιπτώσεις και εκδηλώνεται όταν το παιδί περιγράφει την έννοια με βήμα-προς-βήμα περιγραφή. Η συγκεκριμένη αντίληψη χωρίζεται στις παρακάτω υποκατηγορίες:

Χρονική Διάσταση: Αναφέρεται στον χρόνο και την ατέλειωτη συνέχεια (π.χ., Το άπειρο είναι ατελείωτο. Πολλές ώρες, αμέτρητες.).

Χωρικο-Ρυθμική Διάσταση: Σχετίζεται με τη χωρική και ρυθμική ατέλεια του απείρου (π.χ., Το άπειρο είναι όταν κάτι δεν τελειώνει και συνεχίζει να πηγαίνει).

Μέτρηση: Συνδέεται με την ιδέα της μέτρησης και του χρονικού προσδιορισμού (π.χ., το πεπερασμένο είναι σαν τον αριθμό των μολυβιών σε ένα δωμάτιο, αλλά το άπειρο είναι σαν να μετράς όλους τους αριθμούς στον κόσμο).

Μεταβολή: Συνδέεται με την ιδέα της αλλαγής και της αμετάβλητης ποσότητας (π.χ., Ο αριθμός των θρανίων σε μια αίθουσα θεωρείται πεπερασμένος, γιατί είναι μια ποσότητα που δεν αλλάζει με τον ίδιο τρόπο όπως ένας άπειρος αριθμός).

Αυτές οι υπο-κατηγορίες δείχνουν ότι η διαδικαστική αντίληψη είναι πρωτογενούς φύσεως. Οι κατηγορίες του χρονικού και του χωρικο-ρυθμικού επιπέδου έχουν είσοδο στο αισθητηριακό επίπεδο, υποδηλώνοντας ότι υπάρχει μια πρωτογενής αντίληψη του απείρου, στην οποία διαμεσολαβούν οι αισθήσεις. Η χωροχρονική αντίληψη του απείρου εμφανίζεται διότι οι επαναληπτικές διαδικασίες αναπτύσσονται στον χρόνο και γίνονται αντιληπτές μέσω της κίνησης, δηλαδή μέσω της αλλαγής της θέσης στο χώρο.

Αυτές οι κατηγορίες δεν είναι αποκλειστικές στο μυαλό των παιδιών: αφενός, το ίδιο παιδί συνήθως χρησιμοποιεί ταυτόχρονα ή διαδοχικά περισσότερους από έναν τύπους αναπαραστάσεων, αφετέρου μια μεταφορά ερμηνεύεται ανεξάρτητα από τη μία ή την άλλη οπτική γωνία. Για παράδειγμα, στο σχόλιο μιας μαθήτριας της Xena (8η τάξη): «Το άπειρο είναι ο όρος που χρησιμοποιούμε για κάτι που δεν σταματάει, συνεχίζει να ανεβαίνει.», τόσο ο χρονικός όσο και ο χώρο-ρυθμικός χαρακτήρας του απείρου επισημαίνονται διαδοχικά.

Επιπλέον οι ερευνητές βρήκαν ότι οι μαθητές παρουσιάζουν στις απαντήσεις τους μια τοπολογική αντίληψη. Μία τοπολογική αντίληψη εμφανίζεται όταν ο μαθητής χρησιμοποιεί ιδιότητες και μετασχηματισμούς που είναι αμετάβλητα κατά την αλλαγή του σχήματος. Η τοπολογική αντίληψη είναι συνεχούς φύσεως. Προϋποθέτει την χρήση της πυκνότητας/συσσώρευσης των στοιχείων ενός συνόλου για να περιγράψει την πραγματικότητα. Η τοπολογική αντίληψη συνδέεται με τη θεώρησή του απείρου ως μια ενιαία μεγάλη οντότητα που είναι μεγαλύτερη από οτιδήποτε άλλο. Κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις είναι:

Cristina Maria (8η τάξη): Κάτι τεράστιο... Μεγάλο... μεγάλο... εεε... πολύ μεγάλο.

Mihai (9η τάξη): Ατελείωτο... Πολύ μεγάλο...

Denise (12η τάξη): Το άπειρο το συνδέω με το όριο... τον ορίζοντα... το απέραντο...

Σε αυτά τα σχόλια των μαθητών, είναι ορατό πώς η διαδικαστική αντίληψη υπερτονίζεται (επισημαίνεται) από μια τοπολογική. Και οι δύο τύποι αντιλήψεων ενσωματώνονται και συνδέονται.

Μία άλλη αντίληψη είναι η πνευματική στην οποία παρατηρείται έμφαση στα συναισθήματα, και την πνευματικότητα.

Οι τρεις τύποι πρωταρχικών αντιλήψεων που περιγράφονται παραπάνω εμφανίζονται σε διαφορετικές ηλικίες και αλληλοεπιδρούν στις απαντήσεις των παιδιών. Οι ερευνητές εντόπισαν αυτούς τους τύπους αντιλήψεων στις αυθόρμητες μεταφορές των παιδιών και δεν βρήκαν κανένα παιδί ανίκανο να εκφράσει τις δικές του ιδέες για το άπειρο.

2.3.2.3 Η αντίληψη του πραγματικού απείρου

Η έννοια του απείρου παρουσιάζει έναν μεικτό χαρακτήρα, καθώς συνδυάζει διαδικασίες με τελικό αποτέλεσμα με διαδικασίες που δεν έχουν τέλος. Όταν αναφερόμαστε στο πραγματικό άπειρο μια διαδικασία που δεν έχει τέλος εκφράζεται με μια τελική συνισταμένη κατάσταση. Ο Fischbein (2001) προσδιόρισε το πραγματικό άπειρο ως αυτό που είναι δύσκολο έως και αδύνατο να συλλάβουμε, είναι το άπειρο του αριθμού των σημείων ενός ευθύγραμμου τμήματος, το άπειρο των πραγματικών αριθμών κ.ά. Σύμφωνα με ερευνητικά δεδομένα (Hannula et al., 2006), οι μαθητές παρουσιάζουν μεγαλύτερη εξοικείωση με την έννοια του απείρως μεγάλου σε σύγκριση με την έννοια του απείρως πολλά. Είναι πιο εύκολο για τους μαθητές να αντιληφθούν ότι η μέτρηση αποτελεί μια άπειρη διαδικασία, με τους αριθμούς να αυξάνονται δίχως όρια, από το ότι υπάρχουν π.χ. άπειροι πραγματικοί αριθμοί σε ένα διάστημα. (Hannula et al., 2006).

Ο Tall (2001) υποστηρίζει ότι οι εκπαιδευτικές πρακτικές συχνά ενισχύουν τις δευτερογενείς διαισθήσεις των μαθητών σχετικά με το άπειρο, εστιάζοντας περισσότερο στο δυνητικό άπειρο. Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα, πρέπει να δώσουμε μεγαλύτερη έμφαση στο πραγματικό άπειρο από τις πρώτες τάξεις της εκπαίδευσης. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές θα μπορούν να αναπτύξουν μια πιο ολοκληρωμένη κατανόηση της έννοιας του απείρου (Habaci & Çetin, 2023).

Η Βασική Μεταφορά Απείρου-ΒΜΑ (Lakoff & Núñez, 2000), μαζί με άλλους γνωσιολογικούς μηχανισμούς, παρέχει μια λογική εξήγηση για τη φύση του πραγματικού άπειρου κάτω από τους περιορισμούς των ανθρώπινων νοητικών δομών, της ανθρώπινης γλώσσας και των ιδιαιτεροτήτων του ανθρώπινου σώματος και μυαλού. Σύμφωνα με αυτή, η μετάβαση από το δυνητικό στο πραγματικό άπειρο αντιστοιχεί στη μετάβαση από μια διαδικασία χωρίς τέλος σε ένα άπειρο μαθηματικό αντικείμενο. Ο ανθρώπινος νους ενοποιεί μια διαδικασία χωρίς τέλος, μέσω της μεταφοράς, σε μια διεργασία η οποία έχει τέλος.

Με τη βοήθεια της συγκεκριμένης εννοιολογικής μεταφοράς μπορούμε να μιλάμε για την τελική κατάσταση επαναληπτικών διαδικασιών που συνεχίζονται και συνεχίζονται. Για παράδειγμα η αντίληψη ότι ο επόμενος κάθε φυσικού αριθμού είναι ένας φυσικός αριθμός αφορά μια αόριστη επαναληπτική διαδικασία. Μόλις συνειδητοποιήσουμε ότι η διαδικασία δε σταματά, δεν αναμένουμε κάποιο τέλος σε αυτή, έτσι προκαλούμε μια μεταφορά σε ένα τελικό αποτέλεσμα που είναι η έννοια του πραγματικού άπειρου που χρησιμοποιούμε στα μαθηματικά. Παρ' όλα αυτά η συγκεκριμένη θεωρία έχει δεχθεί κάποιες αρνητικές κριτικές καθώς δεν είναι συμβατή με ορισμένες μαθηματικές ιδέες (Voorhees, 2004).

Οι Tsamir και Dreyfus (2002) αναγνωρίζουν ότι το πραγματικό άπειρο έχει σημαντική συνεισφορά στα θεμέλια των Μαθηματικών και στη θεωρητική βάση διαφόρων μαθηματικών συστημάτων. Μέσα στους χρόνους συνεχώς απορρίπτεται τόσο από μαθηματικούς όσο και από φιλοσόφους, μάλιστα υπήρξε αρκετά αμφιλεγόμενη έννοια ακόμα και τον προηγούμενο αιώνα παρά το πλήρες πλαίσιο που παρέχει για εκείνο η θεωρία συνόλων του Cantor. Συνεπώς η έννοια του απείρου ως δυνητικό είναι εύκολη ενώ αυτή του πραγματικού είναι δύσκολη καθώς είναι κόντρα στη διαίσθησή μας. Σύμφωνα με τους (Kolar & Čadež 2012), για να κατανοήσουν οι μαθητές ότι το σύνολο των αριθμών στο διάστημα [α, β] περιέχει άπειρα στοιχεία, δηλαδή για να έρθουν σε επαφή με την πτυχή του πραγματικού απείρου, οφείλουν πρώτα να αντιληφθούν τη διαδικασία δημιουργίας νέων αριθμών εντός αυτού του διαστήματος. Με άλλα λόγια, η συνειδητοποίηση του δυνητικού απείρου αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση. Εδώ, γίνεται εμφανής η στενή σύνδεση μεταξύ των δύο εννοιών του απείρου καθώς η κατανόηση του δυνητικού απείρου θέτει τα θεμέλια για την ανάπτυξη της έννοιας του πραγματικού απείρου. Είναι αδύνατον να φανταστούμε μαθητές να αντιλαμβάνονται την έννοια των άπειρων αριθμών σε ένα κλειστό σύνολο, χωρίς προηγουμένως να έχουν κατασκευάσει έναν αλγόριθμο για τη δημιουργία νέων αριθμών εντός του διαστήματος.

2.3.3 Σταθερότητα των αντιλήψεων στο πέρασμα των χρόνων

Οι Fischbein, Tirosh και Hess (1979) μελέτησαν τον τρόπο με τον οποίο η ηλικία των μαθητών επηρεάζει την κατανόηση της έννοιας του απείρου στα μαθηματικά, καθώς και την αποτελεσματικότητα της διαισθητικής αντίληψης αυτής της έννοιας. Οι συγγραφείς σημειώνουν ότι οι μαθητές ηλικίας 11 ετών και πάνω αποκτούν σταθερή διαίσθηση για την έννοια του απείρου η οποία δεν αναπτύσσεται από την εκπαιδευτική διαδικασία. Σε ηλικίες μεγαλύτερες από αυτή το ποσοστό των «περατοκρατών» και «μη περατοκρατών» είναι σταθερό σε όλες τις ηλικίες, με μια μικρή τάση κυριαρχίας των «μη περατοκρατών» απαντήσεων στις υψηλότερες τάξεις. Οι συγγραφείς αναφέρουν ότι μέχρι εκείνη την ηλικία οι διαισθητικές ερμηνείες σχετικά με την έννοια του απείρου βρίσκονται ακόμη σε διαδικασία σχηματισμού, μάλιστα υποθέτουν ότι η ανάπτυξη της διαίσθησης συμβαίνει παράλληλα με την γενικότερη ανάπτυξη των μαθητών σύμφωνα με τη θεωρία του Piaget. Οι Jirotková και Littler (2004) συμφωνούν ότι οι αντιλήψεις σε ηλικίες κάτω των 12 και ανάλογα με το πλαίσιο είναι εύκολα μεταβαλλόμενες.

Οι Singer και Voica (2008) στην έρευνά τους έδειξαν ότι η πρωταρχική αντίληψη του απείρου είναι αρκετά ισχυρή στις ηλικίες των 6-8 ετών, ώστε οι μαθητές να μπορούν να κατασκευάσουν επιχειρήματα υπέρ της απειρίας του συνόλου των φυσικών αριθμών. Επιπλέον οι μαθητές της 5ης και 6ης τάξης είναι σε θέση να αιτιολογήσουν ότι διάφορα σύνολα ρητών αριθμών είναι άπειρα, βασιζόμενοι σε αναδρομικές διαδικασίες. Επίσης φαίνεται ότι στην ηλικία των 10-11 ετών, όταν οι μαθητές αρχίζουν να μαθαίνουν τους δεκαδικούς αριθμούς, μπορούν να κατασκευάσουν αναλογίες για το σύνολο των ρητών αριθμών (Q) με τον τρόπο που λειτουργεί το άπειρο στο σύνολο των φυσικών αριθμών (N), χωρίς να έχουν καμία επίσημη εκπαίδευση σχετικά με αυτό. Παρ' όλα αυτά άλλες μελέτες όπως των Hannula et al. (2006) έδειξαν ότι δεν υπάρχει ιδιαίτερη βελτίωση στους μαθητές καθώς στην πέμπτη τάξη (11-12 ετών) οι περισσότεροι εμφάνισαν σημαντικές δυσκολίες οι οποίες παρέμειναν στην έβδομη τάξη (13-14 ετών).

Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι η αυθόρμητη και διαισθητική αντίληψη του απείρου δεν επηρεάζεται από τη διδασκαλία (Fischbein, 1979).

2.3.4 Η προέλευση των αντιλήψεων για το άπειρο

Η προέλευση των αντιλήψεων αποτελεί ένα πολυσύνθετο ερώτημα με πλήθος ερμηνειών. Ορισμένες θεωρίες εστιάζουν στην έμφυτη προδιάθεση του ανθρώπου, υποστηρίζοντας την ύπαρξη νοητικών δομών που τον προδιαθέτουν για την ανάπτυξη αντιλήψεων. Οι δομές αυτές εξελίσσονται σταδιακά, καθώς το παιδί ωριμάζει νοητικά και αλληλοεπιδρά με το περιβάλλον του. Η αλληλεπίδραση αυτή τροφοδοτεί την ανάπτυξη πιο πολύπλοκων αντιλήψεων και την δημιουργία νέων νοητικών κατασκευών για τον κόσμο (Piaget, 1970).

Πέρα από την έμφυτη προδιάθεση, η κοινωνική αλληλεπίδραση και η εκπαίδευση διαδραματίζουν καίριο ρόλο στη διαμόρφωση πεποιθήσεων και νοητικών σχημάτων. Σύμφωνα με τη θεωρία του Vygotsky (1978) οι αντιλήψεις δεν αναπτύσσονται απομονωμένα στο παιδί, αλλά εξελίσσονται μέσα από την αλληλεπίδραση με τους άλλους και την ενσωμάτωση της πολιτισμικής πληροφορίας και γνώσης. Τα παιδιά υιοθετούν νέες αντιλήψεις μέσω της συνεργασίας, της ενσωμάτωσης κοινωνικών πρακτικών και της υιοθέτησης πολιτισμικών προτύπων.

Η μαθηματική εκπαίδευση παρουσιάζει δύο αντιφατικά αποτελέσματα. Σε ορισμένες περιπτώσεις η επιρροή της είναι ιδιαίτερα θετική, για παράδειγμα όσον αφορά την άπειρη διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος ενώ σε άλλες η επιρροή της είτε απουσιάζει είτε είναι αρνητική για παράδειγμα κατά τη σύγκριση του πλήθους δύο άπειρων συνόλων. Τα συγκεκριμένα αποτελέσματα αποτελούν έκπληξη. Αυτό συμβαίνει καθώς τα συνήθη λογικά μας σχήματα είναι φυσικά προσαρμοσμένα σε πεπερασμένες πραγματικότητες. Η διαισθητική γνώση εκφράζει διανοητικά σχήματα όπως ο κανόνας ότι «το όλον είναι μεγαλύτερο από το μέρος», το οποίο είναι λογικά σύμφωνο με τις διαισθητικές εκτιμήσεις. Οι διαισθητικές απαντήσεις επηρεάζονται από έναν μη επαρκή κανόνα, και συνεπώς τα περισσότερα παιδιά, δίνουν λανθασμένες μαθηματικές απαντήσεις (Fischbein et al., 1979).

Η έννοια του απείρου, παρά την κεντρική θέση της στα μαθηματικά, δεν διδάσκεται συστηματικά στο ελληνικό σχολείο. Ως αποτέλεσμα, οι μαθητές έρχονται σε επαφή με αυτήν με έμμεσο τρόπο, συναντώντας την αποσπασματικά σε διάφορες τάξεις και μαθήματα. Για παράδειγμα, στο Δημοτικό γίνεται λόγος για την απειρία των αριθμών, ενώ στο Γυμνάσιο γίνεται αναφορά στο άπειρο πλήθος των λύσεων μιας εξίσωσης που είναι ταυτότητα. Στο Λύκειο, η έννοια του απείρου συνδέεται κυρίως με τα όρια, τόσο ως αποτέλεσμα όσο και ως μεταβλητή που τείνει στο άπειρο. Η εκτενέστερη ανάλυση της παρουσίας της έννοιας του απείρου στα σχολικά βιβλία γίνεται σε επόμενη ενότητα.

Ο πολιτισμός διαμορφώνει κοσμοθεωρίες και νοηματοδοτήσεις για το άπειρο. Θρησκευτικές ερμηνείες, μυθολογικές αφηγήσεις και φιλοσοφικά ρεύματα επηρεάζουν τον τρόπο με τον οποίο οι άνθρωποι νοηματοδοτούν και αντιλαμβάνονται μια έννοια (Carey, 2009). Όπως είδαμε σε προηγούμενη παράγραφο σε έρευνα των Singer και Voica (2008) μια από τις αντιλήψεις της έννοιας του απείρου είναι η πνευματική. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι μια μαθήτρια η Octavian η οποία αναφέρει: «Το άπειρο είναι κάτι που έχει ένα μυστικό που δεν μπορούμε να καταλάβουμε. Ο νους μας είναι δεμένος και δεν μπορούμε να πούμε πολλά πράγματα. Δεν είναι σε θέση να καταλάβει (ο νους) τίποτα σχετικά με το άπειρο. Αυτή είναι μια λέξη που είναι ατελείς σε αριθμούς, αγάπη, κλπ. Αλλά δεν είναι όλα ατελή. Δεν μπορούμε να αποκτήσουμε αυτό το μυστικό εκτός από τη βοήθεια του Θεού. Αυτός μπορεί να μας βοηθήσει να βρούμε το κλειδί για να καταλάβουμε το άπειρο. Δεν μπορούμε να αποκτήσουμε αυτό το θαυμαστό μυστήριο κατανόησης με τη βοήθεια των ανθρώπων. Ούτε καν οι μεγαλύτεροι επιστήμονες δεν μπορούν να κατανοήσουν αυτό το μυστήριο. Μόνο ο Θεός μπορεί να το αποκαλύψει. Μόνο όταν πάμε στον παράδεισο που μπορούμε να κατανοήσουμε πλήρως το άπειρο».

Είναι αναπόφευκτο οι μαθητές να φέρνουν στην τάξη των μαθηματικών τις καθημερινές τους εμπειρίες. Αυτές οι εμπειρίες μπορούν να αποτελέσουν πολύτιμο εργαλείο για την κατανόηση νέων μαθηματικών εννοιών. Ωστόσο, οι εκπαιδευτικοί θα πρέπει να είναι προσεκτικοί και να επισημαίνουν τις σχετικές ομοιότητες και διαφορές μεταξύ των καθημερινών εμπειριών και των μαθηματικών εννοιών, προκειμένου να αποφευχθούν παρανοήσεις (Dogan, 2007). Οι αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο επηρεάζονται από την καθημερινή ζωή (Singer & Voica, 2008).

Τέλος, σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση των αντιλήψεων διαδραματίζει και ο τρόπος που δίνεται ένα μαθηματικό πρόβλημα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το παράδοξο του ξενοδοχείου του Hilbert (αναλυτική περιγραφή σε επόμενη ενότητα). Το παράδοξο, βασισμένο σε καθημερινές έννοιες όπως «δωμάτια» και «άνθρωποι», μπορεί να μπερδέψει τους μαθητές, καθώς η πεπερασμένη φύση αυτών των δύο έρχεται σε αντίθεση με την άπειρη διάσταση που εισάγεται στο παράδοξο.

2.3.4.1 Η χρήση της γλώσσας και η έννοια του απείρου

Λέξεις με συγκεκριμένη σημασία στα μαθηματικά μπορεί να έχουν διαφορετική σημασία στην καθημερινή ζωή. Οι μαθητές συνήθως χρησιμοποιούν κάποιους μαθηματικούς όρους στην καθημερινή ζωή προτού διδαχθούν το νόημά τους στα μαθηματικά. Στο ελληνικό αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών, η έννοια του απείρου, αν και χρησιμοποιείται, ειδικά στις ανώτερες βαθμίδες, δεν εισάγεται ποτέ επίσημα.

Ένα ιδίωμα (register) είναι ένα σύνολο νοημάτων που είναι κατάλληλο για μια συγκεκριμένη λειτουργία της γλώσσας μαζί με τις λέξεις και τις δομές που εκφράζουν αυτά τα νοήματα (Halliday, 1978). Σε αυτό περιλαμβάνονται οι λέξεις, οι φράσεις και οι γλωσσικές δομές που χρησιμοποιούνται συχνά σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο. Για παράδειγμα το μαθηματικό ιδίωμα περιλαμβάνει όρους και φράσεις που χρησιμοποιούνται στη μαθηματική επιστήμη. Το καθημερινό ιδίωμα αναφέρεται στη γλώσσα που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή μας ζωή.

Λέξεις με συγκεκριμένα νοήματα στο «ιδίωμα των μαθηματικών» μπορεί να έχουν διαφορετικά νοήματα στο «ιδίωμα της καθημερινής ζωής». Το μαθηματικό ιδίωμα του σχολείου είναι ένα μείγμα καθημερινής γλώσσας και επίσημης μαθηματικής γλώσσας που διαφέρει και από τα δύο. Οι καθηγητές μαθηματικών πρέπει να λειτουργούν ως πολύγλωσσοι που προσπαθούν να γεφυρώσουν το χάσμα μεταξύ αυτών των τριών ιδιωμάτων και συνειδητά να μεταδώσουν τη γλωσσική τους εμπειρία στους μαθητές τους (Gough, 2007). Επιπλέον, δεν πρέπει να υποθέσουν ότι η γλώσσα που απαιτείται για την πρόσβαση στη μαθηματική μάθηση έχει αναπτυχθεί σωστά σε άλλες τάξεις του προγράμματος σπουδών (Adoniou & Qing, 2014).

Υπάρχουν διαφορετικές και μερικές φορές αντικρουόμενες απόψεις σχετικά με τη σύνδεση του ιδιώματος της καθημερινής γλώσσας με το επίσημο ιδίωμα των μαθηματικών, καθώς και τις μεθόδους διευκόλυνσης αυτής της σύνδεσης. Η Prediger (2019,2022), για παράδειγμα, το βλέπει ως μια μονόδρομη εξέλιξη από τις άτυπες καθημερινές εκφράσεις στην ακαδημαϊκή μαθηματική γλώσσα του σχολείου και τελικά στην τυπική μαθηματική γλώσσα. Αντίθετα, ο Barwell (2012) υποστηρίζει ότι αυτή είναι μια «εργαλειώδης» άποψη του ρόλου της γλώσσας στη μάθηση και την ανάπτυξη, στην οποία ο μαθηματικός λόγος γίνεται κυρίως κατανοητός ως εργαλείο για τη μαθηματική σκέψη και προτείνει μια πιο διαφοροποιημένη προοπτική που αφορά τη σχέση μεταξύ της καθημερινής γλώσσας και της μαθηματικής γλώσσας ως δυναμική αλληλεπίδραση, όπου το ένα ιδίωμα ενισχύει το άλλο. Υπάρχουν ορισμένες λέξεις που έχουν θεμελιωδώς διαφορετικές σημασίες σε κάθε πλαίσιο και δεν μπορούν πάντα να συνδεθούν. Η καθημερινή χρήση τέτοιων λέξεων μπορεί να δημιουργήσει εσφαλμένες αντιλήψεις και να εμποδίσει την κατανόηση των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές.

Ένας τρόπος για να επωφεληθούμε από την αλληλεπίδραση μεταξύ της καθημερινής γλώσσας και της μαθηματικής γλώσσας είναι με την προώθηση προσεγγίσεων στη διδασκαλία των μαθηματικών που ανταποκρίνονται στη χρήση της γλώσσας από τους μαθητές. Παρά την ευρέως αποδεκτή ανάγκη για τη διδασκαλία Μαθηματικών που ανταποκρίνεται στη γλώσσα, μόνο ένας μικρός αριθμός καθηγητών είναι επαρκώς προετοιμασμένος για αυτό το έργο (Prediger, 2019). Επιπλέον δεν έχει ακόμη προκύψει μια σαφής κατανόηση των απαραίτητων συστατικών της διδασκαλίας των μαθηματικών ώστε να ανταποκρίνονται στη γλώσσα (Prediger, 2019). Είναι σημαντικό να συμπεριληφθεί η έκθεση σε ετυμολογίες ή προέλευση λέξεων, επειδή βοηθούν στη γεφύρωση μεταξύ της καθημερινής γλώσσας και της μαθηματικής γλώσσας (Cirillo et al., 2010, Thompson & Rubenstein, 2000). Το λεξιλόγιο είναι πολύ σημαντικό για την κατανόηση συγκεκριμένων εννοιών. Καθώς προχωράμε στις σχολικές τάξεις, το λεξιλόγιο των μαθηματικών γίνεται ολοένα και πιο ιδιότυπο στην περιοχή μάθησης και καθώς οι έννοιες γίνονται πιο αφηρημένες, το λεξιλόγιο γίνεται όλο και πιο ιδιότυπο. Οι λέξεις χρησιμοποιούνται με ακρίβεια στα μαθηματικά κείμενα. Μερικές φορές αυτές οι λέξεις είναι συγκεκριμένες για τον κλάδο και δεν συναντώνται σε κανέναν άλλο τομέα μάθησης, αλλά συχνά είναι λέξεις που μπορεί να χρησιμοποιούνται διαφορετικά στην καθημερινή ομιλία (Cirillo et al., 2010).

Στα ελληνικά, η λέξη άπειρο σημαίνει «χωρίς τέλος». Αυτή η λέξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην καθημερινή ζωή μόνο μεταφορικά. Για παράδειγμα, ένας μαθητής μπορεί να παραπονεθεί ότι ο δάσκαλος του ανέθεσε άπειρες ασκήσεις. Σύμφωνα με τον Μπαμπινιώτη (2012), η λέξη άπειρο χρησιμοποιήθηκε ως φιλοσοφικός όρος στην πρώιμη κοσμολογία, προσδιορίζοντας την ύλη ως την προέλευση του κόσμου και ως μη υποκείμενη σε χωροχρονικές διαστάσεις. Είναι αυτό που δεν έχει τέλος, που διαρκεί για πάντα, που δεν οριοθετείτε από χωρικά και χρονικά όρια, που είναι τόσο μεγάλο ή τόσα πολλά που δεν μπορεί να μετρηθεί. Στο σχολικό ιδίωμα των μαθηματικών, η λέξη άπειρο χρησιμοποιείται σε διάφορα πλαίσια και με διάφορους τρόπους (ως διαδικασία, ως αντικείμενο κ.λπ.) χωρίς ποτέ να ορίζεται, επομένως οι μαθητές είναι ακόμη πιο πιθανό να επηρεαστούν από την καθημερινή, μεταφορική χρήση του όρου.

Έχει σημασία τι γλώσσα χρησιμοποιούμε όταν μιλάμε στα παιδιά. Οι μαθηματικοί έχουν εκπαιδευτεί να βλέπουν ορισμένες μαθηματικές διαδικασίες με ένα εξιδανικευμένο τρόπο. Οι περισσότεροι καθηγητές μαθηματικών και οι εκπαιδευτικοί των μαθηματικών δεν έχουν κανένα πρόβλημα να μιλήσουν π.χ. για μια σειρά που «συνεχίζεται για πάντα». Αυτό συμβαίνει επειδή ο μαθηματικός κόσμος είναι ένας μη χρονικός κόσμος όπου μπορούν να γίνουν άπειρες αθροίσεις χωρίς καμία αναφορά στο χρόνο. Ο πραγματικός κόσμος όμως δεν είναι έτσι. Για παράδειγμα στην ερώτηση «Μπορείτε να προσθέσετε 0,1 + 0,01 + 0,001 +… αν οι αριθμοί συνεχίζονται για πάντα και να βρείτε ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα;» έξω από τον κόσμο των καθαρών μαθηματικών η απάντηση είναι «όχι» γιατί δεν μπορούμε να συνεχίσουμε να προσθέτουμε για πάντα (Monaghan, 2001).

2.3.4.2 Η μεταφορική χρήση της λέξης άπειρο στην καθημερινή ζωή

Η γλώσσα δεν είναι αποκλειστικά ένα εργαλείο επικοινωνίας, καθώς μέσω αυτής αντιλαμβανόμαστε τον κόσμο γύρω μας, βγάζουμε συμπεράσματα και ελέγχουμε τις κινήσεις του σώματός μας. Όλες αυτές οι δράσεις γίνονται χρησιμοποιώντας τη γλώσσα, ασυνείδητα και αυτόματα. Επιπλέον, αποτελεί ένα μοντέλο ερμηνείας για τον κόσμο στον οποίο ζούμε, και γι' αυτό πρέπει να είναι όσο το δυνατόν πιο συνεκτική και συστηματική. Ωστόσο, στην πραγματικότητα, ανακαλύπτουμε συνεχώς νέα πράγματα και φαινόμενα, για τα οποία συνήθως δεν έχουμε την κατάλληλη λέξη. Είναι, λοιπόν, απαραίτητο να χρησιμοποιούμε τις παλαιότερες γνώσεις μας στην γλώσσα σε νέες καταστάσεις. Χωρίς τον μηχανισμό των μεταφορικών εννοιών, δεν θα μπορούσαμε να σημειώσουμε καμία πρόοδο. Αυτό σημαίνει ότι οι μεταφορές είναι θεμελιώδεις για την ανθρώπινη νόηση (Ueno, 2005). Η δύναμη των μεταφορών προέρχεται από το γεγονός ότι οικείες λέξεις, ακόμη και αν μεταφερθούν σε ένα νέο πλαίσιο, μπορούν να χρησιμοποιούνται σύμφωνα με κάποιους από τους παλαιούς κανόνες. Για παράδειγμα, αποκτούμε μια αρχική διαίσθηση όταν συναντάμε έναν οικείο όρο σε έναν άγνωστο επιστημονικό τομέα όπως «αγγελιοφόρος», σε εκφράσεις όπως «DNA αγγελιοφόρος» (Sfard, 2015). Η σημασία τους αποτυπώνεται στη φράση «Αν μια εικόνα αξίζει 1000 λέξεις, μια μεταφορά αξίζει 1000 εικόνες» η οποία αναδεικνύει τη δύναμή τους στην επεξήγηση των εννοιών (Shuell, 1993).

Η κάθε μεταφορά είναι μια γλωσσική κατασκευή που συνήθως ο εντοπισμός της είναι εύκολος. Για παράδειγμα, η χρήση των λέξεων «όπως» ή «σαν» είναι ένας αξιόπιστος δείκτης της παρουσίας τους. Αρκεί να εξετάσουμε εκφράσεις όπως «ήταν θαρραλέα σαν λιοντάρι» ή «η διδασκαλία είναι σαν να μεγαλώνεις έναν κήπο». Ωστόσο, η μεταφορά μπορεί να εμφανίζεται σε ένα κείμενο ακόμα και χωρίς κάποιο ειδικό γλωσσικό σημάδι. Όταν λέει κάποιος ότι βρήκε ένα βιβλίο «μη εύπεπτο», δεν εννοεί ότι προσπαθεί να χωνέψει το βιβλίο. Το κοινό χαρακτηριστικό αυτών των μεταφορικών εκφράσεων είναι ότι μια λέξη από έναν θεματικό τομέα έχει ενσωματωθεί σε έναν άλλο, δημιουργώντας ένα νέο δίκτυο γλωσσικών σχέσεων. Για παράδειγμα, έχουμε μεταφέρει όρους από τον τομέα της κηπουρικής στον τομέα της εκπαίδευσης, και όρους από τον τομέα του φαγητού και της πέψης στον τομέα των βιβλίων και της ανάγνωσης Ακόμη και η πρώτη εμφάνιση κάποιας μεταφοράς σε ένα νέο πλαίσιο μας κάνει να νιώθουμε σαν να γνωρίζουμε ήδη πολλά για τα φαινόμενα που περιγράφει. (Sfard, 2015).

Οι μεταφορές διασχίζουν τα όρια που χωρίζουν το διαισθητικό με το τυπικό. Μεταφέροντας έννοιες από ένα πεδίο σε ένα άλλο, γίνεται εννοιολογική ώσμωση μεταξύ της καθημερινής και της επιστημονικής γλώσσας, επιτρέποντας στις πρωτογενείς διαισθήσεις να διαμορφώσουν επιστημονικές ιδέες και στις επίσημες έννοιες να ανατροφοδοτήσουν τη διαισθητική κατανόηση (Sfard, 2015). Η αιτιολόγηση μέσω μεταφορών είναι πάντα παρούσα τόσο στις μαθηματικές δραστηριότητες όσο και στις καθημερινές δραστηριότητες. Χρησιμοποιούμε μεταφορές τόσο στη δημιουργία όσο και στη μάθηση νέων μαθηματικών εννοιών. Οι μεταφορές στα Μαθηματικά είναι μια πολύπλοκη διαδικασία. (Ueno, 2005). Τα Μαθηματικά περιέχουν αφηρημένες έννοιες, οι εκπαιδευτικοί συνειδητά ή ασυνείδητα χρειάζεται να τις εξηγήσουν χρησιμοποιώντας μεταφορές και αναλογίες. Οι αναλογίες και οι μεταφορές που συνδέονται με την καθημερινή ζωή, βοηθούν στην επεξήγηση αφηρημένων εννοιών με τρόπο κατανοητό, χρησιμοποιώντας γνωστές εκφράσεις

(Saban, 2004). Παρ' όλα αυτά σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να μας οδηγήσουν σε λάθη (Ueno, 2005). Παρόλο που οι μεταφορές είναι παντού, σπάνια τις αναγνωρίζουμε. Συχνά, τις θεωρούμε ως δεδομένες και, χωρίς να γνωρίζουμε την προέλευσή τους, τις αποδεχόμαστε ως αδιαμφισβήτητες αλήθειες της ζωής. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μην τις βλέπουμε με κριτικό τρόπο (Sfard, 2015).

Σε μελέτη των Habaci και Çetin (2023) εξετάστηκαν οι αντιλήψεις των μαθητών της Γ΄ Λυκείου σχετικά με την έννοια του απείρου μέσω της χρήσης μεταφορών. Οι συγκεκριμένοι μαθητές είχαν συναντήσει την έννοια του απείρου σε θέματα όπως το όριο, η παράγωγος και η ακολουθία, και συνεπώς είχαν γνώση του μαθηματικού απείρου. Στους μαθητές μοιράστηκαν φύλλα με την πρόταση «Το άπειρο είναι σαν…, γιατί…», για να εκφράσουν τις μεταφορές τους σχετικά με την έννοια του απείρου. Συνολικά έφτιαξαν 75 μεταφορές, από τις οποίες διαπιστώθηκε ότι οι μαθητές συσχέτισαν ελάχιστα το άπειρο με τα Μαθηματικά. Από τα δεδομένα προκύπτει ότι οι μεταφορές που ανέπτυξαν οι μαθητές συνδέονται κυρίως με την καθημερινή ζωή και περιγράφουν καταστάσεις που δεν έχουν τέλος. Οι μαθητές εξηγούν το άπειρο με έννοιες που σχετίζονται με το πεπερασμένο περιβάλλον τους και βασίζονται στις εξωσχολικές τους εμπειρίες. Η έννοια του μαθηματικού απείρου δεν είναι πλήρως εδραιωμένη στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου και οι αντιλήψεις τους είναι παρόμοιες με εκείνες των μαθητών άλλων ηλικιακών ομάδων. Όλες οι μεταφορές που πραγματοποίησαν οι μαθητές περιλάμβαναν μόνο το δυνητικό άπειρο. Το άπειρο θεωρήθηκε ως μια έννοια που είναι ατελείωτη, απεριόριστη, ατέρμονη και συνεχής. Δεδομένου ότι η έννοια του δυνητικού απείρου δεν έρχεται σε σύγκρουση με τις διαισθητικές αντιλήψεις μπορεί να γίνει κατανοητή σε σχέση με το πραγματικό άπειρο.

Οι αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια του άπειρου επηρεάζονται κυρίως από την καθημερινή ζωή. Ωστόσο, η αντίληψη του άπειρου όταν συνδέεται με την καθημερινή ζωή δημιουργεί προβλήματα, διότι η έννοια ορισμένων μαθηματικών εννοιών και η έννοια τους στην καθημερινή ζωή, διαφέρουν μεταξύ τους. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις ιδέες που προκύπτουν από τις προσωπικές τους εμπειρίες αντιστοιχίζοντάς την έννοια σε μια λανθασμένη εικόνα. Ακόμη και αν η έννοια δεν αντιμετωπίζεται ως ξεχωριστό αντικείμενο στα σχολικά μαθηματικά, θα πρέπει να εξηγείται λεπτομερώς στον κάθε μαθητή σύμφωνα με την ηλικία του (Habaci & Çetin, 2023).

2.3.4.3 Χρήσεις της λέξης άπειρο στην ελληνική πραγματικότητα

Στην ελληνική πραγματικότητα θα μπορούσαμε να τοποθετήσουμε τις χρήσεις της λέξης άπειρο σε τρεις κατηγορίες, τη χαλαρή χρήση του απείρου η οποία δεν έχει σχέση με τη μαθηματική έννοια, την πιο αυστηρή η οποία δεν είναι μαθηματική χρήση όμως αξιοποιεί ιδιότητες από τη μαθηματική χρήση του απείρου π.χ. κάτι ατελείωτο και τέλος την αυστηρή μαθηματική χρήση. Ακολουθεί ένας πίνακας με αυτές τις τρεις κατηγορίες με κάποια χαρακτηριστικά παραδείγματα για κάθε μία από αυτές.

Πίνακας 2.2: Χρήσεις της λέξης άπειρο

Χρήσεις της λέξης άπειρο	
Χαλαρή χρήση του απείρου	Αδυναμία μέτρησης ή υπολογισμού Κάτι απροσδιόριστα ή εξαιρετικά μεγάλο
Πιο αυστηρή αλλά μη μαθηματική έννοια	Κάτι χωρίς τέλος ή όριο Απεριόριστο Αμέτρητα μεγάλο σε έκταση η διάρκεια
Αυστηρή μαθηματική έννοια	Άπειρο στη θεωρία συνόλων Άπειρο στον απειροστικό λογισμό

2.3.5 Η επίδραση του είδους και της αναπαράστασης της κάθε ερώτησης

Σε έρευνα των Fiscbein et. al (1979) η οποία περιλάμβανε μαθητές από την Ε΄ Δημοτικού έως την Γ΄ Γυμνασίου οι συμμετέχοντες κλήθηκαν να συγκρίνουν το σύνολο των σημείων δύο ευθύγραμμων τμημάτων διαφορετικού μήκους και να συγκρίνουν το σύνολο των σημείων ενός ευθύγραμμου τμήματος με το σύνολο των σημείων ενός τετραγώνου ή ενός κύβου. Επίσης, τους ζητήθηκε να εξετάσουν αν οι συνεχείς διαιρέσεις ενός ευθύγραμμου τμήματος θα φτάσουν σε ένα τέλος ή όχι και να συγκρίνουν το σύνολο των φυσικών αριθμών με το σύνολο των θετικών άρτιων αριθμών. Ένα από τα ερωτήματα του ερωτηματολογίου αφορούσε την αντιστοιχία μεταξύ των σημείων ενός τετραγώνου και ενός κύβου. Οι μαθητές ανάλογα με τις απαντήσεις τους διακρίθηκαν σε «περατοκράτες» (finitists) και «μη περατοκράτες» (non-finitists). Τα ποσοστά των απαντήσεων διαφέρουν ανάλογα με το είδος της κάθε ερώτησης, για παράδειγμα κατά τη σύγκριση του πλήθους των στοιχείων του συνόλου των φυσικών αριθμών με το πλήθος των στοιχείων τον άρτιων αριθμών, μικρότερο ποσοστό των μαθητών απάντησε μη περατοκρατικά σε σχέση με ερωτήσεις που π.χ. αφορούσαν τη διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος σε περισσότερα μέρη. Οι σημαντικές διαφορές στη διαίσθηση ανάλογα με το είδος και την αναπαράσταση της κάθε ερώτησης δείχνουν την αστάθεια των διαισθητικών αντιλήψεων.

Σημαντικός είναι ο ρόλος των αναπαραστάσεων ενός συνόλου με άπειρους αριθμούς. Για παράδειγμα οι απαντήσεις των μαθητών είναι ασυνεπείς σε διαφορετικές αναπαραστάσεις άπειρων συνόλων (οριζόντια ή το ένα κάτω από το άλλο) (Tall & Tirosh, 2001). Οι Tirosh και Tsamir (1996) διεξήγαγαν μελέτη για να διερευνήσουν την επίδραση των διαφορετικών αναπαραστάσεων στη σύγκριση δύο άπειρων συνόλων, του συνόλου των φυσικών αριθμών και του συνόλου των τετραγώνων των φυσικών αριθμών. Διαπίστωσαν ότι ο τρόπος με τον οποίο απεικονίζονται τα σύνολα επηρεάζει σημαντικά τις απαντήσεις των μαθητών. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η αριθμητική αναπαράσταση (όπου τα τετράγωνα των αριθμών γράφτηκαν ακριβώς κάτω από τους αντίστοιχους φυσικούς αριθμούς) και η γεωμετρική αναπαράσταση (όπου η ακολουθία των πλευρών με μήκη ίσα με φυσικούς αριθμούς συγκρίθηκε με τα εμβαδά των αντίστοιχων τετραγώνων) ενθάρρυναν την ένας προς έναν αντιστοιχία σε μεγαλύτερο βαθμό σε σύγκριση με την οριζόντια αναπαράσταση (όπου τα δύο σύνολα τοποθετήθηκαν οριζόντια, το ένα δίπλα στο άλλο). Σε παρόμοια συμπεράσματα κατέληξαν και σε μετέπειτα μελέτη τους, καθώς φάνηκε οι ιδέες των μαθητών να επηρεάζονται εξίσου από τον τρόπο αναπαράστασης των άπειρων συνόλων, για παράδειγμα στην περίπτωση που το ένα είναι δίπλα στο άλλο είτε το ένα βρίσκεται κάτω απ' το άλλο (Tsamir & Tirosh, 1999). Κάποιες αναπαραστάσεις δημιουργούν την τάση της 1-1 αντιστοίχισης ενώ κάποιες άλλες αυτή του ότι το μέρος είναι μικρότερο από το όλον. Σε έρευνα των Tsamir και Dreyfus (2002), οι μαθητές τείνουν να ανταποκρίνονται σε οπτικές ενδείξεις που τονίζουν την 1-1 αντιστοίχιση. Για παράδειγμα, οι μαθητές συνδέουν το σύνολο {1, 2, 3 ...} πιο εύκολα με το σύνολο {12, 22, 32 ...} παρά με το σύνολο {1, 4, 9 ...}.

Το γεωμετρικό πλαίσιο (ευθεία γραμμή, τετράγωνο) μπορεί να αποτελέσει εμπόδιο στην εννοιολογική κατανόηση του απείρου, ακόμα και μετά από διδασκαλία με θέμα τα άπειρα σύνολα (Luis et al., 1991). Στο πλαίσιο της Γεωμετρίας, φαίνεται να εντείνεται η εσφαλμένη αντίληψη ότι όλα τα άπειρα σύνολα είναι ίδια (Singer & Voica, 2008). Παρ' όλα αυτά, σε άλλες πτυχές της κατανόησης του απείρου, η γεωμετρική αναπαράσταση μπορεί να βοηθήσει. Για παράδειγμα, όσον αφορά την κατανόηση των αρρήτων αριθμών, οι μαθητές μπορούν να εστιάσουν σε αυτούς ως αντικείμενα και όχι ως διαδικασία παραγωγής άπειρων δεκαδικών ψηφίων (Zazkis & Sirotic, 2005). Οι Fischbein et al. (1981), έδωσαν το άθροισμα 1+1/2+1/4+1/8+… αλλά σε γεωμετρικό πλαίσιο ως μια σειρά ευθύγραμμων τμημάτων τα οποία ήταν σε φθίνουσα σειρά ως προς το μήκος τους. Οι μαθητές απάντησαν ότι το άθροισμα είναι άπειρο είτε επειδή η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί ατελείωτα είτε επειδή μια γραμμή μπορεί να επεκταθεί απεριόριστα.

2.3.6 Οι εσφαλμένες αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με τη σύγκριση της πληθικότητας άπειρων συνόλων

Ο αριθμός των ερευνών που εξετάζει διεξοδικά τις στρατηγικές σύγκρισης άπειρων συνόλων είναι περιορισμένος. Υπάρχουν δύο άδηλες αντιλήψεις, η πρώτη είναι ότι το μεγαλύτερο έχει πάντα περισσότερα στο πλήθος σημεία από κάτι μικρότερο και η δεύτερη ότι το άπειρο είναι ισοδύναμο με το ανεξάντλητο άρα όλα τα άπειρα είναι ίδια. Τα παραπάνω δείχνουν ότι υπάρχει μια διαισθητική αντίφαση στην έννοια του απείρου (Fischbein, 2001).

Παρ' όλα αυτά δύο σύνολα μπορεί να είναι ίσα ενώ το ένα είναι μέρος του άλλου. Τη συγκεκριμένη πρόταση ο Bolzano την είχε χαρακτηρίσει ως παράδοξο. Ένα κλασσικό παράδειγμα είναι η σύγκριση των φυσικών αριθμών {1, 2, 3,…} με το σύνολο των άρτιων αριθμών {2, 4, 6,…}. Από τη μία το σύνολο των άρτιων αριθμών φαίνεται να είναι μικρότερο από αυτό των φυσικών αριθμών καθώς οι πρώτοι αριθμοί είναι υποσύνολο των δεύτερων, όμως τα δύο σύνολα μπορούν να συνδυαστούν με 1-1 αντιστοίχιση και επί άρα είναι ισοπληθικά (Mamolo & Zazkis, 2008). Η αντίληψη ότι το μέρος δε μπορεί να είναι ίσο με το όλον μπορεί να δημιουργήσει προβλήματα κατά τη σύγκριση δύο άπειρων συνόλων.

Οι Tsamir και Tirosh (2006), σε έρευνά τους ζήτησαν από τους μαθητές να συγκρίνουν σύνολα τα οποία αποτελούνταν από άπειρους αριθμούς για παράδειγμα άρτιους αριθμούς με περιττούς αριθμούς ή φυσικούς αριθμούς με άρτιους αριθμούς. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι μαθητές συνήθως δεν χαρακτηρίζουν τα σύνολα ως ίσοπληθικά μεταξύ τους και μάλιστα χρησιμοποιούν στην πλειοψηφία τους διαισθητικά κριτήρια για τη σύγκριση των συνόλων. Οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν στρατηγικές σύγκρισης που αφορούν τη σύγκριση πεπερασμένων συνόλων και μόνο λιγότερο από το 1% χρησιμοποιούν την 1-1 αντιστοιχία, μάλιστα ορισμένοι από αυτούς που χαρακτήρισαν τα σύνολα ως ίσα ανέφεραν επιπλέον ότι όλα τα άπειρα σύνολα είναι πάντοτε ίσα μεταξύ τους. Ανάλογα αποτελέσματα, χρήσης κριτηρίων σύγκρισης πεπερασμένων συνόλων, παρατήρησαν και οι Singer και Voica (2003) οι οποίοι ζήτησαν από τους μαθητές να συγκρίνουν άπειρα σύνολα και εκείνοι κατά τη σύγκριση των φυσικών αριθμών με τους περιττούς απάντησαν ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι διπλάσιοι άρα και περισσότεροι ενώ κάποιοι άλλοι αιτιολόγησαν την απάντησή τους λέγοντας πως αν μετρήσουμε έως το 10 τότε υπάρχουν περισσότεροι φυσικοί αριθμοί απ' ότι περιττοί. Παρ' όλα αυτά ορισμένα παιδιά αξιοποίησαν την 1-1 αντιστοίχιση και προσπάθησαν να αξιοποιήσουν κάποιο κανόνα για να συγκρίνουν τα στοιχεία του πρώτου και του δεύτερου συνόλου. Οι ερευνητές στο τέλος σημειώνουν ότι παρόλο πού στο μυαλό ενός δεκάχρονου παιδιού η διαίσθηση του απείρου έχει ήδη διαμορφωθεί οι συζητήσεις μπορούν να θέσουν αυτή τη διαίσθηση υπό αμφισβήτηση. Σε άλλη έρευνα των ίδιων ερευνητών το 2008, σε μαθητές 10-11 ετών, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές είναι δυνατό να σημειώνουν την 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στους φυσικούς αριθμούς και στους ρητούς αριθμούς (Singer & Voica, 2008).

Μια συχνή πεποίθηση των μαθητών είναι ότι όλα τα άπειρα σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος. Οι Fischbein et al. (1981) σε έρευνα που διεξήχθη σε μαθητές Γυμνασίου ζήτησαν να συγκριθούν οι φυσικοί αριθμοί με το πλήθος των σημείων μια ευθείας. Μια συνηθισμένη απάντηση ήταν αυτή που θεωρούσε ότι είναι άπειρα και τα δύο σύνολα άρα έχουν το ίδιο πλήθος.

Είναι γνωστό ότι ενώ η εφαρμογή διαφορετικών μεθόδων σύγκρισης στην περίπτωση των πεπερασμένων συνόλων είναι αποδεκτή, στην περίπτωση της σύγκρισης άπειρων συνόλων οδηγεί σε αντιφάσεις. Για παράδειγμα με την 1-1 αντιστοίχιση καταλήγουμε στο σωστό συμπέρασμα ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι ισοπληθικοί με τους άρτιους, όμως το κριτήριο σύμφωνα με το οποίο το μέρος δε μπορεί να είναι ίσο με το όλον στην περίπτωση των άπειρων συνόλων οδηγεί σε λάθος συμπεράσματα. Παρόλα αυτά, παρατηρήθηκε ότι οι μαθητές τείνουν να χρησιμοποιούν ενστικτωδώς μια ευρεία γκάμα μεθόδων για τη σύγκριση άπειρων συνόλων. Έπειτα από τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν μπορούν κατηγοριοποιηθούν σε: α)μέρος- όλον (δηλαδή ένα σύνολο το οποίο είναι υποσύνολο ενός άλλου συνόλου πάντα θα έχει λιγότερα στοιχεία από αυτό), β) όλα τα άπειρα είναι ίσα καθώς δεν έχουν τέλος, γ)1-1 αντιστοιχία, δ) οι αποστάσεις μεταξύ των στοιχείων των δύο συνόλων (για παράδειγμα οι άρτιοι αριθμοί έχουν μικρότερες αποστάσεις μεταξύ τους από τα αντίστοιχα τετράγωνα τους) και ε) δε γίνεται να συγκρίνουμε άπειρα σύνολα (Tsamir, 1999, Tsamir & Tirosh 1999, Tall & Tirosh, 2001, Tsamir & Dreyfus, 2002).

Τα κριτήρια σύγκρισης δύο απείρων συνόλων που είδαμε προηγουμένως, πολλές φορές οδηγούν σε αντιφατικές απαντήσεις καθώς μπορεί να δούμε τον ίδιο μαθητή σε ένα ερώτημα να αναφέρεται σε ισοπληθικά σύνολα και στο επόμενο να αναφέρει ότι το ένα σύνολο έχει περισσότερα στοιχεία από το άλλο εφόσον έχει περισσότερους αριθμούς (Tsamir & Tirosh, 2006). Αντίστοιχα αποτελέσματα συναντάμε σε άλλη έρευνα στην οποία άλλοτε οι μαθητές θεωρούν όλα τα άπειρα σύνολα ισοπληθικά, ενώ σε άλλες περιπτώσεις επιλέγουν την 1-1 αντιστοίχιση ή άλλους τρόπους σύγκρισης, ανάλογα με τη μορφή κάθε ερωτήματος. Η Tirosh (1991) διεξήγαγε μελέτη σε μαθητές της 10ης τάξης, με στόχο την εξέταση της επίδρασης της διδασκαλίας Θεωρίας Συνόλων στην κατανόηση του απείρου. Χρησιμοποιώντας ερωτηματολόγια, η Tirosh αξιολόγησε τις γνώσεις των μαθητών πριν και μετά τη διδασκαλία. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι η πλειοψηφία των μαθητών συνειδητοποίησε την ανεπάρκεια των διαισθητικών κριτηρίων που χρησιμοποιούσε έως τότε για τη σύγκριση άπειρων μεγεθών, στο πλαίσιο της Θεωρίας Συνόλων. Αυτό σημαίνει ότι οι μαθητές ήρθαν σε γνωστική σύγκρουση, καθώς κλήθηκαν να επανεξετάσουν τις διαισθητικές τους αντιλήψεις και να υιοθετήσουν επιστημονικές μεθόδους για τη σύγκριση άπειρων συνόλων. Η Tsamir (2001) διεξήγαγε μελέτη σε μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (16-18 ετών), εστιάζοντας στη σύγκριση του συνόλου των φυσικών αριθμών με το σύνολο των φυσικών αριθμών που είναι μεγαλύτεροι από το δύο. Η διδασκαλία που υλοποιήθηκε δημιούργησε μια γνωστική σύγκρουση στους μαθητές, καθώς η δραστηριότητα τους οδήγησε στην κατανόηση ότι η χρήση δύο διαφορετικών μεθόδων για τη σύγκριση άπειρων συνόλων, στο πλαίσιο της ίδιας δραστηριότητας, οδηγεί σε αντιφατικές απαντήσεις. Ως αποτέλεσμα, οι μαθητές συνειδητοποίησαν την ανάγκη για ένα μοναδικό κριτήριο σύγκρισης σε τέτοιες περιπτώσεις. Σύμφωνα με τους Tsamir και Dreyfus (2002) ένας μαθητής στον οποίο πήραν συνέντευξη αποφασίζει ότι πρέπει να αντιμετωπίσει την αντίφασή του με κάποιο τρόπο μόνο αφού πρώτα μάθει περισσότερα για τα άπειρα σύνολα, κάνει δηλαδή μια γνωστική μετατόπιση από μόνος του. Παρ' όλα αυτά οι μαθητές πολλές φορές δε συνειδητοποιούν αυτές τις αντιφάσεις. Μελέτη των Narli και Baser (2008) έδειξε πώς μία διδακτική παρέμβαση η οποία συνυπολογίζει τις διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών μπορεί να οδηγήσει στη συνειδητοποίηση τους ότι χρησιμοποιούν αντιφατικές στρατηγικές και στο ότι ο σωστός τρόπος αιτιολόγησης θα έπρεπε να είναι κοινός για όλα τα ερωτήματα.

Οι δυσκολίες κατά τη σύγκριση των άπειρων συνόλων δεν παρουσιάζεται αποκλειστικά μόνο στους μαθητές. Σε μελέτη των Kolar και Čadež (2012), φοιτητές πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης, χωρίς προηγούμενη διδασκαλία Θεωρίας Συνόλων, κλήθηκαν να συγκρίνουν το σύνολο των φυσικών αριθμών με το σύνολο των ζυγών αριθμών. Στόχος της μελέτης ήταν να διερευνηθεί εάν οι μαθητές διέθεταν βασικές γνώσεις για τις μεθόδους σύγκρισης άπειρων συνόλων. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι διαφορετικές μέθοδοι αναπαράστασης του προβλήματος δεν οδήγησαν τους συμμετέχοντες στην κατανόηση ότι τα δύο σύνολα έχουν την ίδια πληθικότητα. Κάποιοι απάντησαν με βάση τη διαίσθηση, ωστόσο φαινόταν να στερούνται τις απαραίτητες μαθηματικές γνώσεις για να διατυπώσουν μια πειστική επιχειρηματολογία. Οι αιτιολογίες τους βασίστηκαν κυρίως στο γεγονός ότι και τα δύο σύνολα είναι άπειρα, ενώ κανένας δεν χρησιμοποίησε τη μέθοδο της ένα προς ένα αντιστοιχίας. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι τα αποτελέσματα αυτής της μελέτης προήλθαν χωρίς κάποιος να δημιουργήσει κάποια γνωστική σύγκρουση στους φοιτητές όπως έγινε σε άλλες έρευνες, καθώς προήλθαν αποκλειστικά από τις απαντήσεις τους. Οι Kolar και Čadež καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι οι διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών δύναται να είναι εξαιρετικά ισχυρές και δύσκολα αντικαταστάσιμες από τις τυπικές μαθηματικές διαδικασίες.

2.3.7 Άπειρο και μαθηματικά παράδοξα, η περίπτωση του ξενοδοχείου του Hilbert

Υπάρχουν αρκετά παράδοξα σχετικά με το άπειρο τα οποία προκαλούν σύγκρουση ανάμεσα στη διαίσθησή μας και τα τυπικά μαθηματικά. Σε πολλά από αυτά τα παράδοξα βλέπουμε την αλληλεπίδραση μεταξύ του δυνητικού και του πραγματικού απείρου. Οι Dubinsky et al. (2005) έχουν υποστηρίξει ότι τα παράδοξα προσφέρουν έναν γόνιμο έδαφος για τη διερεύνηση των αντιλήψεων για το άπειρο. Ένα από τα πιο γνωστά παράδοξα (το οποίο αξιοποιήθηκε και στη συγκεκριμένη μελέτη) είναι αυτό που έχει γίνει γνωστό ως το ξενοδοχείο του Hilbert.

Είναι μια ιστορία που αποδίδεται στον D. Hilbert παρόλο που δεν αναφέρεται σε κανένα από τα συγγράμματα του. Έγινε ευρύτερα γνωστή από τον G. Gamow (1961) στο βιβλίο του One Two Three…Infinity: facts and speculations in science (Barrow, 2007).

Μία σύντομη απόδοση της ιστορίας είναι η ακόλουθη: Φανταστείτε ότι είστε ο διευθυντής του ξενοδοχείου που έχει άπειρα δωμάτια αριθμημένα 1,2,3,… και όλα είναι κατειλημμένα. Αν σε κάθε δωμάτιο επιτρέπεται να μένει μόνο ένα άτομο, πώς μπορείτε να φιλοξενήσετε μόνο του σε ένα δωμάτιο έναν νέο πολύ σημαντικό επισκέπτη; Η βασική ιδέα είναι να αδειάσει ένα δωμάτιο ώστε να μπορέσει να μείνει ο νέος επισκέπτης. Υπάρχουν αρκετές λύσεις όμως μία από τις πιο συχνές είναι αυτή στην οποία ο πρώτος επισκέπτης θα μπορούσε να πάει στο δεύτερο δωμάτιο ο δεύτερος επισκέπτης στο τρίτο δωμάτιο κ.ο.κ. με αποτέλεσμα ο καινούριος επισκέπτης να μείνει στο κενό δωμάτιο. Η συγκεκριμένη λύση θυμίζει την αντιστοιχία μεταξύ φυσικών και άρτιων αριθμών και μπορεί να επεκταθεί και με παραλλαγές του προβλήματος στις οποίες έρχονται περισσότεροι επισκέπτες (Mamolo & Zazkis, 2008).

Οι Mamolo και Zazkis (2008), πραγματοποίησαν έρευνα στην οποία αξιοποίησαν το άπειρο ξενοδοχείο του Hilbert και συμμετείχαν 36 φοιτητές από τους οποίους οι 16 ήταν εν ενεργεία καθηγητές μαθηματικών (και παρακολουθούσαν ένα μεταπτυχιακό πρόγραμμα σπουδών) και 20 προπτυχιακοί φοιτητές των κοινωνικών επιστημών, των οποίων το μαθηματικό υπόβαθρο ήταν αυτό του λυκείου. Ένα από τα ευρήματα ήταν ότι ενώ οι μαθητές στο συγκεκριμένο πρόβλημα δε δέχονται την απειρία των ενοίκων, δεν έφερναν αντίρρηση στο άπειρο πλήθος των δωματίων του ξενοδοχείου. Αυτό οφείλεται εν μέρει στη δυνατότητα των μαθητών να μπορούν να συλλάβουν την ιδέα ενός ξενοδοχείου που εκτείνεται απεριόριστα χωρίς να προβληματίζονται για τους περιορισμούς που θα υπήρχαν σε ένα πραγματικό χώρο. Επιπλέον η ιδέα του γεμάτου ξενοδοχείου ήταν προβληματική για πολλούς μαθητές καθώς δε δέχονταν ότι τα δωμάτια εφόσον είναι άπειρα μπορούν να γεμίσουν με ένοικους. Οι συμμετέχοντες στην έρευνα δέχονταν ότι είναι εντελώς γεμάτα ή θεωρούσαν ότι το άπειρο είναι ένας αυξανόμενος αριθμός άρα πάντα θα υπάρχει ένα διαθέσιμο δωμάτιο. Βλέπουμε δηλαδή να αντιμετωπίζουν το άπειρο ως μια διαδικασία χωρίς τέλος, σαν κάτι το οποίο δε μπορεί να επιτευχθεί. Όλες αυτές οι αντιλήψεις αντιστοιχούν στο δυνητικό άπειρο ενώ η ιδέα του γεμάτου ξενοδοχείου αντιστοιχεί στην ιδέα του πραγματικού απείρου. Η δυσκολία των μαθητών να δεχθούν το ξενοδοχείο ως εντελώς γεμάτο δείχνει τη δυσκολία που έχουν οι φοιτητές στο να δεχθούν το πραγματικό άπειρο.

Ορισμένοι φοιτητές περιέγραψαν μια «αλυσιδωτή αντίδραση» κατά την οποία κάθε επισκέπτης μετακινεί τον επόμενο κάθε φορά, κάτι που ταιριάζει περισσότερο με τη διαδικαστική αντίληψη του απείρου ενώ παράλληλα μπορεί να ερμηνευθεί ως μια προσπάθεια μείωσης του επίπεδου αφαίρεσης καθώς αντί να εφαρμόσουν τη μετακίνηση στο σύνολο των επισκεπτών το έκαναν ανά επισκέπτη. Καθώς οι φοιτητές προσπαθούσαν να κατανοήσουν τη λύση στο παράδοξο φάνηκε να έχουν μια γνωστική σύγκρουση ανάμεσα σε δύο αντιλήψεις, αυτή του ανεξάντλητου και αυτή του απείρου ως μεγάλο άγνωστο αριθμό. Μάλιστα κάποιοι αναρωτήθηκαν τι θα γίνει με τον τελευταίο επισκέπτη ενώ παράλληλα αναγνώριζαν ότι δε μπορεί να υπάρξει τελευταίος επισκέπτης καθώς το άπειρο είναι κάτι που δεν τελειώνει ποτέ. Παρ’ όλα αυτά κάποιοι φοιτητές αναγνωρίσαν τη διαφορά μεταξύ της διαισθητικής και της τυπικής κατανόησής τους για το άπειρο κάτι το οποίο αποτελεί ένα σημαντικό πρώτο βήμα προς την ενθυλάκωση του απείρου ως αντικείμενο. (Mamolo & Zazkis, 2008).

Σε μελέτη των Τσαπουράκη και Καφούση (2017), η οποία υλοποιήθηκε με Έλληνες μαθητές διαπιστώθηκε ότι η πλειοψηφία των συμμετεχόντων υιοθέτησε ως αρχική προσέγγιση μια εμπειρικά βασισμένη μέθοδο. Οι μαθητές προτίμησαν το σενάριο όσοι έρθουν να μείνουν σε ήδη κατειλημμένα δωμάτια ή να αξιοποιήσουν επιπλέον χώρους, όπως σαλόνια και διαδρόμους, για να στεγαστούν οι πρόσθετοι πελάτες. Με αυτόν τον τρόπο, προσπάθησαν να περιορίσουν το πρόβλημα σε ένα πλαίσιο με το οποίο ήταν εξοικειωμένοι, λαμβάνοντας υπόψη παράγοντες όπως να μείνουν μαζί μέλη της ίδιας οικογένειας ή φίλοι.

Επιπλέον, έξι στους δέκα μαθητές ακολούθησαν μια αρνητική προσέγγιση, αντιλαμβανόμενοι ότι η έλλειψη διαθέσιμων δωματίων καθιστούσε αδύνατη την τοποθέτηση επιπλέον πελατών. Επιπλέον αδυνατούσαν να παρουσιάσουν μια ακριβή μαθηματική λύση για την αντιμετώπιση της κατάστασης, οδηγώντας τους στο συμπέρασμα ότι το πρόβλημα ήταν άλυτο.

Σύμφωνα με την Μπαμπίλη (2010), το παράδοξο του άπειρου ξενοδοχείου, είναι κατάλληλο για να διερευνηθεί η διαίσθηση των μαθητών για το άπειρο καθώς έχει δύο ακόμη πλεονεκτήματα σε σχέση με άλλα παράδοξα. Αρχικά, τοποθετείται σε φανταστικό πλαίσιο, επομένως δεν υπάρχουν συγκρούσεις με την πραγματικότητα, αν και υπάρχουν με τη διαίσθηση και δεύτερον δεν υπεισέρχεται η παράμετρος του χρόνου που δυσκολεύει κυρίως ψυχολογικά.

2.3.8 Ορισμός Έννοιας και Εικόνα Έννοιας

Η σημασία των ορισμών στα μαθηματικά είναι αδιαμφισβήτητη. Ενώ στην καθημερινή ζωή οι ορισμοί χρησιμοποιούνται σπάνια, στα μαθηματικά αποτελούν θεμέλιο της επιστήμης, καθοδηγώντας τη σκέψη και τη διαδικασία κατανόησης. Οι ορισμοί δεν λειτουργούν απλώς ως εργαλεία, αλλά συμβάλλουν σημαντικά στη διαμόρφωση της εικόνας μιας έννοιας. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι τα μαθηματικά βασίζονται σε αξιώματα και ορισμούς για τη διατύπωση προτάσεων και θεωρημάτων.

Σύμφωνα με τους Tall και Vinner (1981), ο ορισμός έννοιας (concept definition) είναι ένας ακριβής λεκτικός ορισμός που περιγράφει μια έννοια. Η εικόνα έννοιας (concept image), που αρχικά εισήχθη από τους Vinner και Herschowitz (1980), περιγράφει μια γνωστική δομή που σχετίζεται με την έννοια, περιλαμβάνοντας όλες τις διαδικασίες και τις ιδιότητες που συνδέονται με αυτήν. Η εικόνα έννοιας διαμορφώνεται μέσω εμπειριών και μεταβάλλεται καθώς το άτομο αποκτά νέες γνώσεις.

Όταν ακούμε ή βλέπουμε το όνομα μιας έννοιας, αυτό προκαλεί ένα ερέθισμα στη μνήμη μας, συνήθως όχι τον τυπικό ορισμό της έννοιας, αλλά μια «εικόνα έννοιας» ή «πλαίσιο έννοιας». Αυτή η εικόνα μπορεί να είναι είτε μια οπτική αναπαράσταση, αν η έννοια έχει τέτοιες αναπαραστάσεις, είτε μια συλλογή εντυπώσεων και εμπειριών. Η κατανόηση μιας έννοιας απαιτεί τον σχηματισμό μιας σωστής εικόνας της, καθώς η αποστήθιση του τυπικού ορισμού της δεν εγγυάται την κατανόησή της (Vinner, 1991).

Αν φανταστούμε τη γνωστική μας δομή να αποτελείται από δύο «κελιά» - το ένα για τον τυπικό ορισμό και το άλλο για την εικόνα της έννοιας, τότε το κελί της εικόνας θεωρείται κενό εάν δεν αποδίδεται νόημα στην έννοια. Αυτό συμβαίνει συχνά όταν η απομνημόνευση του ορισμού γίνεται μηχανικά, χωρίς την κατανόησή του. Όταν ένας μαθητής καλείται να απαντήσει σε μια ερώτηση, αναμένεται να ενεργοποιήσει ένα ή και τα δύο κελιά.

Είναι σημαντικό ότι για την επίλυση ενός προβλήματος, οι νοητικές διαδικασίες περιλαμβάνουν τον ορισμό της έννοιας. Ωστόσο, στην πράξη, οι μαθητές συχνά βασίζονται στη διαισθητική τους σκέψη, παρακάμπτοντας τον τυπικό ορισμό. Αυτό συμβαίνει επειδή ο τρόπος σκέψης της καθημερινής ζωής υπερισχύει, οδηγώντας τους μαθητές να δίνουν διαισθητικές απαντήσεις. Παρά το γεγονός ότι το κελί του ορισμού μπορεί να μην είναι κενό, δεν ενεργοποιείται πάντα κατά την επίλυση προβλημάτων. Σε πολλές περιπτώσεις, η αναφορά μόνο στην εικόνα έννοιας οδηγεί σε επιτυχή αποτελέσματα (Vinner, 1991). Είναι κρίσιμο να ενθαρρύνουμε τους μαθητές να ασχολούνται με ασκήσεις που καλύπτουν πολλές πτυχές μιας έννοιας. Σύμφωνα με τον Vinner (1991), όταν η εικόνα έννοιας οδηγεί σε σωστή λύση, οι μαθητές τείνουν να υιοθετούν αυτήν τη στρατηγική, καθώς είναι πιο απλή και φυσική.

Η βιβλιογραφική ανασκόπηση αναδεικνύει τις πολυάριθμες γνωστικές απαιτήσεις που σχετίζονται με την έννοια του απείρου, καθώς αυτή συνδέεται συχνά με άλλες έννοιες, όπως το σύνολο, το πλήθος σημείων και τα όρια. Παρά τη σημασία της στα σχολικά βιβλία παρατηρείται η πλήρης απουσία κάποιου ορισμού (όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα). Επιπλέον, η έννοια του απείρου παρουσιάζεται κυρίως μέσω έμμεσων αναφορών και χωρίς σαφή σύνδεση με τις διάφορες θεματικές ενότητες όπου εμφανίζεται, γεγονός που την καθιστά αποσπασματική.

Λόγω της έλλειψης ορισμού, οι μαθητές είναι αναμενόμενο να καταφεύγουν στην εικόνα της έννοιας του απείρου, αντί να βασίζονται σε έναν τυπικό ορισμό. Επομένως, η κατανόηση της έννοιας του απείρου διαμορφώνεται κυρίως μέσω προσωπικών εμπειριών και έμμεσων αναφορών στα σχολικά εγχειρίδια. Αυτή η εικόνα έννοιας αποτελεί τη βάση για την κατανόησή των μαθητών, οδηγώντας τους σε άτυπους και «προσωπικούς ορισμούς».

2.3.9 Η θεωρία APOS και η εφαρμογή της στην έννοια του απείρου

Η συγκεκριμένη θεωρία έχει απασχολήσει αρκετούς ερευνητές της μαθηματικής εκπαίδευσης (Cottrill et. al., 1996, Dubinsky et. al., 2005, Dubisnky et. al., 2008, Radu & Weber, 2011). Οι Dubinsky et al. (2005) πρότειναν μια ανάλυση APOS για το άπειρο. Η θεωρία APOS μπορεί να μας βοηθήσει να κατανοήσουμε τη διαφορά μεταξύ του δυνητικού και του πραγματικού απείρου. Το δυνητικό άπειρο είναι η σύλληψη του άπειρου ως διαδικασία. Αυτή η διαδικασία ξεκινά με τους φυσικούς αριθμούς και είναι η σύλληψη μιας δράσης. Στη συνέχεια απαιτείται η επανάληψη των βημάτων επ' άπειρον κάτι το οποίο είναι η εσωτερίκευση αυτής της δράσης σε μια διαδικασία. Το πραγματικό άπειρο είναι το νοητικό αντικείμενο που λαμβάνουμε μέσω της ενθυλάκωσης αυτής της διαδικασίας. Οι μαθηματικές καταστάσεις απαιτούν από κάποιον να απο-ενθυλακώσει ένα αντικείμενο πίσω στη διαδικασία που οδήγησε σε αυτό. Έτσι θα λέγαμε ότι, μέσω της ενθυλάκωσης, το άπειρο γίνεται γνωστικά εφικτό. Από την άλλη το ανέφικτο είναι μια περίπτωση του απείρου, με τη μορφή μιας διαδικασίας, που δεν έχει ενθυλακωθεί. Αυτό μπορεί να συμβεί επειδή η διαδικασία δεν φαίνεται ακόμη ως ολότητα, είτε γιατί δεν μπορεί να θεωρηθεί ως ολότητα, είτε γιατί δεν έχει γίνει η ενθυλάκωση. Η ανάλυσή APOS μας δείχνει ότι μόλις το άτομο μπορέσει να δει όλα τα βήματα μιας άπειρης διαδικασίας ως μια ενιαία πράξη που έχει πραγματοποιηθεί, μπορεί να συλλάβει το άπειρο ως ολοκληρωμένο σύνολο. Μόλις πραγματοποιηθεί αυτή η ολότητα, το δυνητικό άπειρο μετατρέπεται σε πραγματικό άπειρο, και αποκτά μαθηματική οντότητα στην οποία μπορούν να εφαρμοστούν ενέργειες. Το δυνητικό και το πραγματικό άπειρο αντιπροσωπεύουν δύο διαφορετικές γνωστικές αντιλήψεις που σχετίζονται με τον νοητικό μηχανισμό της ενθυλάκωσης. Αυτές οι αντιλήψεις και η σχέση τους γίνονται μέρος από το σχήμα απείρου του ατόμου (Dubinsky et al., 2005).

Από γνωστική άποψη, δεν είναι παράλογο να αποδεχθούμε την πιθανότητα κάποιος να μην έχει την ικανότητα να βλέπει κάτι ως ολότητα, καθώς ο γνωστικός μηχανισμός της ενθυλάκωσης μπορεί να μην είναι πάντα διαθέσιμος. Βλέπουμε ότι το πραγματικό άπειρο αναφέρεται σε κάτι ανέφικτο, από την άλλη, χρησιμοποιώντας την ανάλυση APOS στο σύνολο των φυσικών αριθμών είναι γνωστικά επιτεύξιμο μέσω της ενθυλάκωσης. Το σύνολο των φυσικών αριθμών μπορεί να συλληφθεί ως οντότητα στην οποία μπορούν να εφαρμοστούν ενέργειες (Dubinsky et al., 2005).

Από τα παραπάνω μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι μαθητές που δίνουν απαντήσεις χρησιμοποιώντας το δυνητικό άπειρο έχουν φτάσει στη φάση της εσωτερίκευσης (διαδικασία), ενώ οι μαθητές που βασίζονται στο πραγματικό άπειρο βρίσκονται στη φάση της ενθυλάκωσης (αντικείμενο).

2.3.10 Οι μεγάλοι πεπερασμένοι αριθμοί και το άπειρο

Όπως είδαμε, έχουμε πολλές αντιρρήσεις σε όλη την ιστορία για την ικανότητα των ανθρώπων να σκεφτούν τα βήματα μιας άπειρης διαδικασίας ή το πραγματικό άπειρο. Είναι γεγονός ότι κανένας άνθρωπος δε μπορεί πραγματικά να απαριθμήσει μια άπειρη συλλογή βημάτων. Τα άπειρα σύνολα, ωστόσο, δεν είναι τα μόνα που τα ανθρώπινα όντα δεν μπορούν να απαριθμήσουν. Για παράδειγμα, κανένα άτομο δεν μπορεί πραγματικά να καταγράψει, ένα σύνολο με $10^{10^{10}}$ στοιχεία, ούτε ένα άτομο μπορεί να μετρήσει τους κόκκους της άμμου σε μια έρημο. Αν πάρουμε την «εμπειριστική» άποψη ότι η διαδικασία υπάρχει στο σύνολό της μόνο εάν μπορεί κανείς να την αναλογιστεί διανοητικά και να ολοκληρώσει κάθε της βήμα, τότε πρέπει να αρνηθούμε την ύπαρξη τέτοιων πεπερασμένων αριθμών (Dubinsky et al., 2005).

Παρ' όλα αυτά είναι πολύ δύσκολο για οποιονδήποτε, να αρνηθεί την ύπαρξη των μεγάλων πεπερασμένων αριθμών. Θα μπορούσε κανείς να υποστηρίξει την ύπαρξή τους λέγοντας ότι ένα άτομο μπορεί να φανταστεί ότι μετράει όλους τους κόκκους άμμου μέσα στην έρημο. Ωστόσο, εάν μια διαδικασία λέμε ότι υπάρχει επειδή μπορεί να τη φανταστεί κανείς, τότε πρέπει να δεχτεί κανείς και την ύπαρξη των φυσικών αριθμών. Επομένως, φαίνεται ότι η ανυπαρξία μιας άπειρης συλλογής δεν μπορεί να στηριχθεί ούτε στην αδυναμία απαρίθμησης όλων των στοιχείων του, γιατί θα έπρεπε να αρνηθεί κανείς την ύπαρξη των μεγάλων πεπερασμένων αριθμών. Πρέπει λοιπόν να στραφούμε σε ένα άλλο κριτήριο διάκρισης, ανάμεσα στο πεπερασμένο και το άπειρο. Στην απαρίθμηση $10^{10^{10}}$ έχουμε ένα τελικό αντικείμενο που υποδεικνύει την ολοκλήρωση της διαδικασίας. Αυτό δεν ισχύει με τους φυσικούς αριθμούς. Η ανάλυσή APOS μας λέει ότι για να συλλάβουμε μια άπειρη διαδικασία ως πλήρη, που είναι απαραίτητο για την ενθυλάκωση και την εφαρμογή των ενεργειών, θα έπρεπε να συνειδητοποιήσουμε ότι η απαρίθμηση ολόκληρου του συνόλου μπορεί να περιγράφει ως επαναλαμβανόμενη εφαρμογή μιας ενιαίας ενέργειας. Υπάρχει επίσης μια επιπλέον διαφορά καθώς στην περίπτωση της απαρίθμησης του $10^{10^{10}}$ το άτομο μπορεί να σκέφτεται τον τελευταίο αριθμό της μέτρησης ως έκφραση του πλήθους, όμως αυτό δεν μπορεί να συμβεί με ένα άπειρο σύνολο, επειδή δεν υπάρχει τελευταίος αριθμός.

Σε μια ανάλυση APOS, η σύλληψη μιας διαδικασίας ως ολοκληρωμένης και ως ολότητα προϋποθέτει την ενθυλάκωση της διαδικασίας σε ένα γνωστικό αντικείμενο. Στην περίπτωση μιας άπειρης διαδικασίας το αντικείμενο που προκύπτει από την ενθυλάκωση υπερβαίνει τη διαδικασία, με την έννοια ότι δεν συνδέεται ούτε παράγεται από κανένα βήμα της διαδικασίας. Ένα τέτοιο αντικείμενο ονομάζεται το υπερβατικό αντικείμενο της διαδικασίας. Οι λεπτές διαφορές μεταξύ του «τελευταίου αντικειμένου» και του «υπερβατικού αντικειμένου» μπορεί να εξηγήσουν γιατί φαίνεται να είναι ευκολότερο για ένα άτομο να σκεφτεί ή να αποδεχτεί την ύπαρξη ενός μεγάλου πεπερασμένου και γιατί η ικανότητά του να βλέπει ή να αποδέχεται την ύπαρξη ενός πραγματικά άπειρου συνόλου είναι προφανώς πιο σπάνια. Έτσι οι Dubinsky et al. (2005) υπέδειξαν την πιθανή ύπαρξη τριών περιπτώσεων: το μικρό πεπερασμένο, αυτό που μπορεί να ολοκληρωθεί γνωστικά, το μεγάλο πεπερασμένο, αυτό που δεν μπορεί να ολοκληρωθεί με φυσικό τρόπο, αλλά του οποίου η γνωστική ολοκλήρωση είναι παρόμοια με το μικρό πεπερασμένο και το άπειρο, αυτό που είναι ανολοκλήρωτο και γνωστικά ολοκληρωμένο μόνο όταν γίνονται νοητικές κατασκευές που δεν απαιτούνται στην περίπτωση του πεπερασμένου.

2.3.11 Σύνθεση της θεωρίας

Όπως είδαμε ο πραγματικός κόσμος είναι πεπερασμένος, με αποτέλεσμα να μην υπάρχουν πραγματικές ευκαιρίες για συζητήσεις σχετικά με το άπειρο (Fischbein, 1979). Αρχικά ο άνθρωπος έρχεται σε επαφή με το «πολύ μεγάλο» και το «πολύ μικρό» όσον αφορά το μέγεθος και το «πάρα πολλά» και το «πολύ λίγα» όσον αφορά το πλήθος. Κατά τη μετάβαση από το πάρα πολλά στο απείρως πολλά και από το πολύ μεγάλο στο απείρως μεγάλο έχουμε μετάβαση από κάτι πεπερασμένο σε κάτι άπειρο μέσω μιας «ατέρμονης διαδικασίας». Στην προσπάθεια αυτή έχουμε αρκετά εμπόδια, ένα από αυτά είναι ότι ο κόσμος και η εμπειρία μας είναι πεπερασμένες. Ένα άλλο εμπόδιο είναι η χρήση της γλώσσας, για παράδειγμα πολλές φορές χρησιμοποιούμε τη λέξη άπειρο για να εκφράσουμε το «πάρα πολλοί ή πολλά» π.χ. λέμε έχω άπειρο διάβασμα και εννοούμε πολύ διάβασμα, στη συναυλία πήγαν άπειροι άνθρωποι και εννοούμε πολλοί άνθρωποι. Παρ’ όλα αυτά υπάρχουν και πράγματα που διευκολύνουν αυτή τη μετάβαση, όπως για παράδειγμα η αίσθηση του «χρόνου». Ο χρόνος μας δίνει την αίσθηση του συνεχούς και του ατελείωτου. Επιπλέον παράγοντες που βοηθούν τη μετάβαση στη «διαδικασία» μπορεί να είναι πράγματα που έχουν γίνει ρουτίνα μέσα στην καθημερινότητά μας γιατί δίνουν την αίσθηση της επαναληψιμότητας. Ο τρόπος με τον οποίο ερχόμαστε σε επαφή με την έννοια της μέτρησης βασίζεται στην έννοια της «ατέρμονης διαδικασίας», π.χ. για κάθε αριθμό πάντα υπάρχει ένας επόμενος. Με αυτό τον τρόπο ερχόμαστε σε επαφή με το ατελείωτο και χτίζεται η αντίληψη για το δυνητικό άπειρο. Το τελευταίο που καλούμαστε να κάνουμε είναι να θεωρήσουμε μια άπειρη διαδικασία ως τελειωμένη. Με αυτό τον τρόπο έχουμε την εικόνα μια άπειρης ποσότητας η οποία όμως έχει ολοκληρωθεί ως διαδικασία. Πλέον έχουμε περάσει στο στάδιο του πραγματικού απείρου. Απαντήσεις των μαθητών όπως «μια ευθεία έχει άπειρα σημεία» αφορούν το πραγματικό άπειρο αλλά πρέπει να μελετηθεί προσεκτικά αν όντως έχουν σχηματίσει εικόνα για το πραγματικό άπειρο ή απαντούν έτσι σκεπτόμενοι ότι απλώς έχει πάρα πολλά σημεία. Θα μπορούσε η ίδια πρόταση να μη σημαίνει άπειρα σημεία αλλά πάρα πολλά και πεπερασμένα στο πλήθος, με τη μεταφορική χρήση της λέξης.

Μέσω της διερεύνησης της σχετικής βιβλιογραφίας, προκύπτει η ύπαρξη τριών βασικών αντιλήψεων σχετικά με την έννοια του απείρου. Η πρώτη από αυτές τις αντιλήψεις είναι εκείνη ως ένα σύνολο που είναι πεπερασμένο αλλά παρουσιάζει πολύ μεγάλο πλήθος. Τη συναντάμε συχνά σε μαθητές οι οποίοι χαρακτηρίζουν ως άπειρο ένα σύνολο που λόγω του τεράστιου πλήθους τους δεν είναι σε θέση να το μετρήσουν.

Ένα μέρος των απαντήσεων που ανήκουν σε αυτήν την αντίληψη αφορά μαθητές που αντιλαμβάνονται το άπειρο ως ένα μεγάλο αριθμό. Στο πλαίσιο της συγκεκριμένης εργασίας, αυτή η αντίληψη θα αναφέρεται ως «πεπερασμένη αντίληψη». Η δεύτερη αντίληψη αφορά τις απαντήσεις που αναφέρονται στο «άπειρο» ως μια διαδικασία χωρίς τέλος, δηλαδή σε αυτό που γνωρίζουμε ως δυνητικό άπειρο. Για αυτήν την αντίληψη, θα χρησιμοποιούμε τον όρο «διαδικαστική αντίληψη». Η τρίτη και τελευταία αντίληψη είναι εκείνη που αφορά το πραγματικό άπειρο, σύμφωνα με την οποία οι μαθητές αντιλαμβάνονται την απειρία του συνόλου όλων των αριθμών ή το πλήθος των σημείων σε μια ευθεία ως «άπειρο». Για αυτήν την αντίληψη, θα χρησιμοποιούμε τον όρο «πραγματική αντίληψη». Η «διαδικαστική» και η «πραγματική» αντίληψη είναι συμβατές με τη θεωρία APOS. Το δυνητικό άπειρο νοείται ως μια διαδικασία που ξεκινά από τους φυσικούς αριθμούς και ερμηνεύεται ως μια επαναλαμβανόμενη δράση χωρίς τέλος. Η εσωτερίκευση αυτής της δράσης οδηγεί στην ενθυλάκωση της διαδικασίας, δημιουργώντας το νοητικό αντικείμενο που ονομάζουμε πραγματικό άπειρο. Εκτός αυτών των τριών βασικών αντιλήψεων δεν απουσιάζουν εκείνες που αντιμετωπίζουν το άπειρο ως κάτι απροσδιόριστο, δηλαδή κάτι το οποίο είτε μας είναι άγνωστο είτε δεν ορίζεται.

2.3.12 Η αναγκαιότητα της έρευνας

Το άπειρο αποτελεί μια έννοια θεμελιώδους σημασίας στα Μαθηματικά, με ευρεία εφαρμογή σε τομείς όπως η ανάλυση, η γεωμετρία, η θεωρία συνόλων και η τοπολογία. Η κατανόηση βασικών μαθηματικών εννοιών, όπως τα όρια, οι σειρές και τα σύνολα, βασίζεται σε μεγάλο βαθμό στο άπειρο. Χωρίς την εμβάθυνση σε αυτή την έννοια, οι μαθητές και οι φοιτητές συχνά αδυνατούν να κατανοήσουν πλήρως θεμελιώδη μαθηματικά θέματα. Επομένως, η ανάγκη για έρευνα σχετικά με το άπειρο στη μαθηματική εκπαίδευση είναι εμφανής, δεδομένης της σημασίας του για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης.

Η έννοια του απείρου παρουσιάζει μοναδικές προκλήσεις στη διδασκαλία, καθώς οι μαθητές συχνά την παρερμηνεύουν, υιοθετώντας λανθασμένες αντιλήψεις. Παράλληλα, το άπειρο αποτελεί εξαιρετική ευκαιρία για την προώθηση της κριτικής σκέψης, επειδή καλεί τους μαθητές να εξετάσουν έννοιες που ξεπερνούν τα όρια της καθημερινής τους εμπειρίας. Επιπλέον, το άπειρο έχει διεπιστημονικό χαρακτήρα καθώς συνδέεται στενά με επιστήμες όπως η Φυσική (για παράδειγμα, μέσα από το σύμπαν και τη διαστολή του χώρου και του χρόνο) αλλά και με τη Φιλοσοφία, καθώς εγείρει θεμελιώδη ερωτήματα που συνδέονται με τη φύση της πραγματικότητας. Έτσι, η κατανόηση του απείρου δεν ενισχύει μόνο τη μαθηματική σκέψη, αλλά συμβάλλει και στην ανάπτυξη της γενικής παιδείας, φέρνοντας τους μαθητές σε επαφή με διεπιστημονικές προσεγγίσεις.

Παρότι έχουν διεξαχθεί αρκετές έρευνες που εστιάζουν στο άπειρο, οι περισσότερες από αυτές περιορίζονται σε συγκεκριμένες ηλικιακές ομάδες και σπάνια ακολουθούν μια ολιστική προσέγγιση που να περιλαμβάνει τόσο την πρωτοβάθμια όσο και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Επιπλέον, συνήθως επικεντρώνονται στον εντοπισμό των λανθασμένων αντιλήψεων για την έννοια του απείρου, χωρίς να διερευνούν την προέλευση αυτών των αντιλήψεων.

Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, η έννοια του απείρου συχνά αναφέρεται στα σχολικά βιβλία, αλλά σπανίως αναπτύσσεται εκτενώς και, στις περισσότερες περιπτώσεις, αποφεύγεται κατά τη διδασκαλία. Στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση, η διδασκαλία εννοιών όπως το άπειρο δεν βασίζεται σε αυστηρούς μαθηματικούς ορισμούς, κυρίως λόγω του υψηλού βαθμού δυσκολίας που ενέχει η κατανόησή τους. Αντίθετα, υιοθετείται ένα διαισθητικό πλαίσιο προσέγγισης, στο οποίο η διαίσθηση διαδραματίζει κεντρικό ρόλο. Ωστόσο, μια σωστά οργανωμένη διαισθητική προσέγγιση θα μπορούσε να ενισχύσει την κατανόηση της έννοιας και να συμβάλει στην επίτευξη των μαθησιακών στόχων.

Η έρευνα στον τομέα της μαθηματικής εκπαίδευσης μπορεί να εντοπίσει κοινές διαισθητικές αντιλήψεις που υιοθετούν οι μαθητές σχετικά με το άπειρο, καθώς και την προέλευση αυτών, και να αναπτύξει στρατηγικές για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία της έννοιας. Επιπλέον, ενδεχομένως θα μπορούσε να οδηγήσει στην αναμόρφωση των αναλυτικών προγραμμάτων, ενσωματώνοντας τη διδασκαλία του απείρου από τις πρώτες τάξεις της εκπαίδευσης. Η σωστά οργανωμένη διδασκαλία της έννοιας του απείρου μπορεί να λειτουργήσει ως γέφυρα για την κατανόηση πιο προχωρημένων μαθηματικών θεμάτων, προωθώντας την επίτευξη σύνθετων μαθησιακών στόχων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙΙ: ΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΒΙΒΛΙΑ ΚΑΙ ΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

3.1 Ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων

Η επίδραση των σχολικών εγχειριδίων στην εκπαιδευτική διαδικασία είναι κρίσιμη καθώς σε ένα βαθμό καθορίζουν τις αποφάσεις των εκπαιδευτικών όσον αφορά την επιλογή του περιεχομένου και των στρατηγικών διδασκαλίας, επιφέροντας ανάλογα με το περιεχόμενό τους σημαντικές αλλαγές στην ποιότητα και το ύφος της διδασκαλίας. Με τον τρόπο αυτό, συμβάλλουν στη διαμόρφωση και εξέλιξη της εκπαιδευτικής διαδικασίας, καθιστώντας τα ένα απαραίτητο εργαλείο για την πρόοδο των μαθητών. Μάλιστα σύμφωνα με τους Robitaille και Travers (1992), η εξάρτηση από τα σχολικά εγχειρίδια φαίνεται να είναι περισσότερο κρίσιμη στη διδασκαλία των Μαθηματικών σε σχέση με οποιοδήποτε άλλο διδακτικό αντικείμενο. Οι Valverde et al. (2002) κατατάσσουν τα σχολικά εγχειρίδια ως ένα ξεχωριστό πρόγραμμα σπουδών, το οποίο είναι δυνητικά εφαρμοσμένο (potentially implemented), δημιουργώντας έναν ισχυρό σύνδεσμο μεταξύ του προβλεπόμενου και του εφαρμοσμένου προγράμματος σπουδών. Συνεπώς, θεωρείται ότι τα εγχειρίδια διαμορφώνουν σε μεγάλο βαθμό τις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών. (Wijaya et al., 2015).

Οι Singer και Voica (2008) συνοψίζοντας τα ευρήματά τους, υποστηρίζουν ότι η έννοια του απείρου είναι σημαντική και ενσωματωμένη στη διαμόρφωση των αριθμών, και επομένως, οι πτυχές που σχετίζονται με αυτό θα έπρεπε να αποτελούν μέρος της εκπαίδευσης πολύ νωρίς κατά την εκμάθηση των εννοιών. Στην παρούσα ενότητα εστιάζουμε στην παρουσίαση και ανάλυση των αποσπασμάτων των σχολικών βιβλίων του Δημοτικού, Γυμνασίου και Λυκείου στα οποία γίνεται αναφορά στο άπειρο. Η έννοια του απείρου, παρόλο που αναφέρεται στα σχολικά βιβλία όλων των βαθμίδων τόσο στη διδασκαλία νέων εννοιών όσο και στη θεωρία και τις ασκήσεις που παρουσιάζονται σε αυτά, δεν ορίζεται πουθενά. Η απλή αναφορά στο άπειρο στα σχολικά βιβλία μπορεί να οδηγήσει συχνά τους μαθητές σε λάθος αντιλήψεις, παρανοήσεις και αντιφάσεις. Εντός αυτού του πλαισίου οι διδακτικές παρεμβάσεις των δασκάλων και των καθηγητών με έμφαση στη δημιουργία των σωστών διαισθητικών αντιλήψεων για την έννοια είναι σημαντική.

Ακολουθούν συγκεκριμένα αποσπάσματα από τα σχολικά εγχειρίδια, τα οποία αφορούν το άπειρο ως πλήθος.

ΣΤ' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Στο βιβλίο της ΣΤ΄ Δημοτικού στο κεφάλαιο 16 γίνεται αναφορά στο άπειρο, με την παρουσίαση των άπειρων πολλαπλασίων του συνόλου των φυσικών αριθμών κάτι το οποίο αφορά την έννοια του πραγματικού απείρου.

Οι προηγούμενες δραστηριότητες μας βοηθούν να συμπεράνουμε:

Πολλαπλάσια φυσικού αριθμού, Ε.Κ.Π. δύο ή περισσότερων αριθμών

Πολλαπλάσιο ενός φυσικού αριθμού λέγεται ο αριθμός που προκύπτει, όταν τον πολλαπλασιάσουμε με έναν άλλο φυσικό αριθμό.

Κάθε φυσικός αριθμός έχει άπειρα πολλαπλάσια.

Κοινά πολλαπλάσια δύο ή περισσότερων φυσικών αριθμών λέγονται οι αριθμοί που είναι πολλαπλάσια όλων αυτών των φυσικών αριθμών.

Παραδείγματα

Πολλαπλάσια του 4 είναι οι αριθμοί:
0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, ...,
Πολλαπλάσια του 6 είναι οι αριθμοί:
0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ...,
Κοινά πολλαπλάσια του 4 και του 6 (εκτός από το 0) είναι οι αριθμοί 12, 24, 36, ...

Εικόνα 3.1: Άπειρα πολλαπλάσια φυσικών αριθμών

Σε ερώτηση της ίδιας ενότητας γίνεται αναφορά στο ότι ένα κλάσμα έχει άπειρα ισοδύναμα με αυτό κλάσματα.

Ερωτήσεις για αυτοέλεγχο και συζήτηση

Στο κεφάλαιο αυτό συναντήσαμε τους όρους **ισοδύναμα κλάσματα** και **ανάγωγα κλάσματα.** Εξήγησε τη σημασία τους με ένα παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Σημειώστε αν είναι σωστές ή λάθος και συζητήστε τις παρακάτω εκφράσεις:

	Σωστό	Λάθος
Στη μέθοδο «χιαστί» πολλαπλασιάζω τους αριθμητές των κλασμάτων μεταξύ τους.	☐	☐
Ένα κλάσμα έχει άπειρα ισοδύναμα με αυτό κλάσματα.	☐	☐
Η διαίρεση των όρων του κλάσματος με το Μ.Κ.Δ. τους, οδηγεί σε ανάγωγο κλάσμα.	☐	☐

50

Εικόνα 3.2: Άπειρα ισοδύναμα κλάσματα

Α' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Στο βιβλίο της πρώτης Γυμνασίου, σε εφαρμογή της ενότητας Α1.5 οι συγγραφείς παραθέτουν την γνώση των αρχαίων ελλήνων, σύμφωνα με την οποία επειδή δεν υπάρχει μεγαλύτερος πρώτος αριθμός, καθώς το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι άπειρο.

Οι αρχαίοι Έλληνες γνώριζαν ότι **δεν** υπάρχει μέγιστος πρώτος αριθμός, δηλαδή ότι οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι στο πλήθος. Γνώριζαν ακόμη ότι δεν υπάρχει ένας απλός κανόνας που να δίνει τους διαδοχικούς πρώτους αριθμούς. Με την απλή μέθοδο του Ερατοσθένη, γνωστή ως "Κόσκινο του Ερατοσθένη", που χρησιμοποιείται μέχρι και σήμερα, βρίσκουμε όλους τους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι από δοσμένο αριθμό.

Εικόνα 3.3: Άπειροι πρώτοι αριθμοί

Στο ίδιο βιβλίο στην ενότητα Α7.7 γίνεται αναφορά σε έναν αριθμό με άπειρα δεκαδικά ψηφία, ο οποίος έχει περιοδικό δεκαδικό ανάπτυγμα. Μάλιστα τονίζεται ότι η διαδικασία δεν έχει κάποιο τέλος κάτι το οποίο είναι πιο κοντά στην αντίληψη του δυνητικού απείρου.

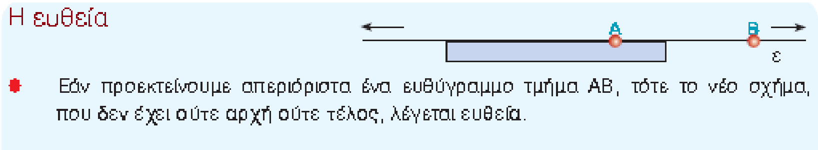
Σκεφτόμαστε

Βλέπουμε ότι η διαίρεση 101 : 44 δεν είναι τέλεια. Δίνει ακέραιο πηλίκο 2 και υπόλοιπο 13.
Αν συνεχίσουμε τη διαίρεση θα βρούμε τον δεκαδικό αριθμό 2,295454... με άπειρα δεκαδικά ψηφία, τέτοια ώστε, μετά το δεύτερο δεκαδικό (το 9) να επαναλαμβάνονται συνεχώς τα ίδια δύο ψηφία (5 και 4), δηλαδή 545454...

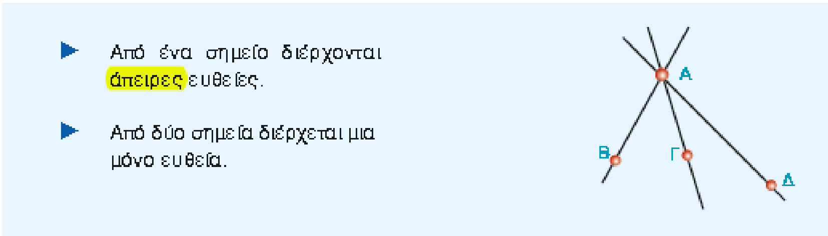
101,00000...	44
130	2,295454...
420	
240	
200	
240	
......	

Εικόνα 3.4: Άπειρα δεκαδικά ψηφία

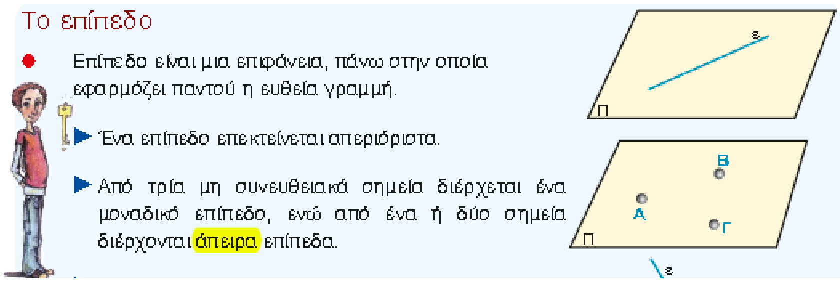
Στην ενότητα Β1.1 η οποία αφορά τη Γεωμετρία γίνεται αναφορά στην απεριόριστη προέκταση ενός ευθύγραμμου τμήματος με αποτέλεσμα αυτό να μην έχει ούτε αρχή ούτε τέλος. Επιπλέον αναφέρεται ότι από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες και από ένα ή δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα. Στο συγκεκριμένο απόσπασμα χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή καθώς κάθε μαθητής έχει κατασκευαστικούς περιορισμούς με αποτέλεσμα ορισμένοι από αυτούς εύλογα να σκεφτούν αν θα μπορούσαν να σχεδιάσουν πάνω από ένα μεγάλο αριθμό ευθειών.



Εικόνα 3.5: Άπειρη προέκταση ευθείας

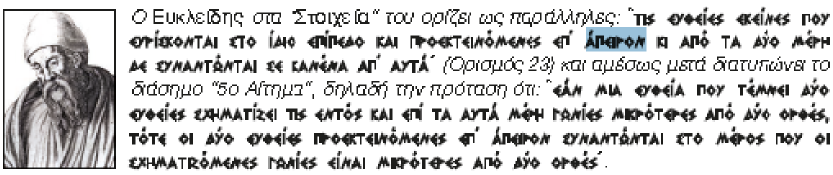


Εικόνα 3.6: Από ένα σημείο διέρχονται άπειρες ευθείες



Εικόνα 3.7: Από ένα ή δύο σημεία διέρχονται άπειρα επίπεδα

Τέλος σε ιστορική αναδρομή που αφορά τα Στοιχεία του Ευκλείδη γίνεται αναφορά στην επ' άπειρον προέκταση δύο παράλληλων ευθειών.

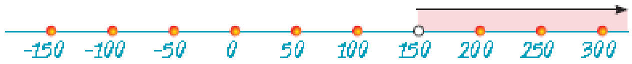


Εικόνα 3.8: Επ' άπειρον προέκταση ευθειών

Β’ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Στη Β Γυμνασίου στην ενότητα Α1.5 έχουμε αναφορά στην απειρία των λύσεων μιας ανίσωσης και στην αναπαράστασή τους στην ευθεία των αριθμών (πραγματικό άπειρο).

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι, από την ανίσωση που βρήκαμε ($x > 150$) δεν μπορούμε να συμπεράνουμε πόσο ακριβώς ζυγίζει κάθε πράσινος κύβος, συμπεραίνουμε όμως ότι το βάρος του είναι οπωσδήποτε μεγαλύτερο από 150 γραμμάρια. Μπορεί να είναι 150,1 γραμμάρια, μπορεί να είναι 200 γραμμάρια ή μπορεί να είναι 1.000 κιλά! Δηλαδή, όταν λύνουμε μία ανίσωση, συνήθως δε βρίσκουμε μία μόνο λύση, αλλά άπειρες! Γι' αυτό παριστάνουμε αυτές τις λύσεις στην ευθεία των αριθμών, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 3.9: Άπειρες λύσεις ανίσωσης

Σε άλλο σημείο του ίδιου βιβλίου στην ενότητα Β3.3 γίνεται αναφορά στα άπειρα ψηφία του π.

Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός π είναι ένας άρρητος αριθμός, δηλαδή δεκαδικός με άπειρα ψηφία, τα οποία δεν προκύπτουν με συγκεκριμένη διαδικασία. Τα πρώτα 40 δεκαδικά ψηφία του π είναι:

π = 3,14159 26535 89793 23846 2643383279 50288 41971 ...

Εικόνα 3.10: Άπειρα ψηφία του π

Γ’ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Στη Γ΄ Γυμνασίου στην ενότητα 3.1 συναντάμε το άπειρο ως το πλήθος των λύσεων μιας γραμμικής εξίσωσης. Στην ενότητα 3.2 δίνεται ένα αόριστο σύστημα το οποίο έχει άπειρες λύσεις.

Γενικά

Λύση μιας εξίσωσης $\alpha x + \beta y = \gamma$ ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

Η εξίσωση όμως $2x + y = 6$ δεν έχει λύση μόνο το ζεύγος $(1, 4)$, αλλά έχει άπειρες λύσεις. Πράγματι, για οποιαδήποτε τιμή του x μπορούμε να προσδιορίσουμε την αντίστοιχη τιμή του y, ώστε το ζεύγος (x, y) να είναι λύση της και έτσι να σχηματίσουμε έναν πίνακα τιμών.

Για $x = -1$ έχουμε $2 \cdot (-1) + y = 6$, οπότε $y = 8$.
Για $x = 0$ έχουμε $2 \cdot 0 + y = 6$, οπότε $y = 6$.
Για $x = 2$ έχουμε $2 \cdot 2 + y = 6$, οπότε $y = 2$.
Για $x = 3$ έχουμε $2 \cdot 3 + y = 6$, οπότε $y = 0$ κ.τ.λ.

x	−1	0	2	3
y	8	6	2	0

Άρα τα ζεύγη $(-1, 8), (0, 6), (2, 2), (3, 0), \ldots$ είναι λύσεις της εξίσωσης $2x + y = 6$.

Εικόνα 3.11: Άπειρες λύσεις γραμμικής εξίσωσης

Αόριστο σύστημα

Για να επιλύσουμε το σύστημα

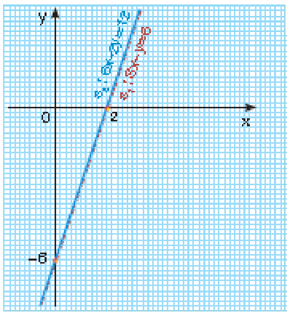
$$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ 6x - 2y = 12 \end{cases}$$

σχεδιάζουμε τις ευθείες

$\varepsilon_1 : 3x - y = 6$ και

$\varepsilon_2 : 6x - 2y = 12$,

οι οποίες, όπως παρατηρούμε στο διπλανό σχήμα, συμπίπτουν (ταυτίζονται). Άρα έχουν όλα τα σημεία τους κοινά και επομένως το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το σύστημα είναι αόριστο.



Εικόνα 3.12: Άπειρες λύσεις συστήματος

Τέλος στο κεφάλαιο 5.1 γίνεται αναφορά στην απειρία των στοιχείων ενός συνόλου και στον τρόπο που γίνεται η αναγραφή των στοιχείων αυτού του συνόλου.

Παράσταση συνόλου

Κάθε σύνολο συμβολίζεται μ' ένα κεφαλαίο γράμμα της αλφαβήτου (Α, Β, Γ, ...) και παριστάνεται με τους εξής τρόπους:

α) Με αναγραφή των στοιχείων του

Γράφουμε μία μόνο φορά καθένα από τα στοιχεία του και με οποιαδήποτε σειρά τα τοποθετούμε ανάμεσα σε δύο άγκιστρα. Π.χ. το σύνολο των γραμμάτων της λέξης ελευθερία είναι $Α = \{ε, λ, υ, θ, ρ, ι, α\}$, το σύνολο των ψηφίων του αριθμού 2004 είναι $Β = \{2, 0, 4\}$, κ.τ.λ.

Μερικές φορές χρησιμοποιούμε παρόμοιο συμβολισμό για να παραστήσουμε και ένα σύνολο που έχει πολλά ή άπειρα στοιχεία. Στην περίπτωση αυτή γράφουμε μερικά στοιχεία του και για τα υπόλοιπα, που θα πρέπει να εννοούνται με σαφήνεια,

Εικόνα 3.13: Άπειρα στοιχεία συνόλου

ΑΛΓΕΒΡΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Στην Άλγεβρα της Α' Λυκείου στο εισαγωγικό κεφάλαιο βλέπουμε την αναπαράσταση ενός συνόλου με άπειρα στοιχεία, ενώ στην ενότητα 2.2 που αφορά τη διάταξη των πραγματικών αριθμών συναντάμε για πρώτη φορά το σύμβολο του απείρου. Παρατηρούμε ότι το άπειρο εδώ δε χρησιμοποιείται με την έννοια του πλήθους αλλά ως συμβολισμός στα διαστήματα. Συγκεκριμένα δίνεται ένας πίνακας στον οποίο συνοψίζονται οι μορφές διαστημάτων πραγματικών αριθμών και οι διάφορες αναπαραστάσεις τους (διάστημα, ανισότητα, συμβολισμός). Στην πρώτη στήλη στις τέσσερις τελευταίες γραμμές συναντάμε, μέσω της αναπαράστασης μιας συνεχιζόμενης γραμμής με βέλος, την έννοια του απείρου μέσω της έκφρασής του ως κάτι ατελείωτο. Σε κανένα σημείο δε δίνονται αναλυτικές πληροφορίες για το τι εκφράζει το σύμβολο πέρα από το σχόλιο ότι δεν αναπαριστά κάποιο πραγματικό αριθμό. Στη συγκεκριμένη τάξη θα μπορούσε να έχει γίνει εκτενέστερη αναφορά στα σύνολα που έχουν άπειρο πλήθος στοιχείων και γενικότερα στην έννοια της πληθικότητας. Το σύμβολο του απείρου, χωρίς να έχει γίνει κάποια προηγούμενη αναφορά στην έννοια, θα μπορούσε να οδηγήσει στην ταύτιση από τους μαθητές του αναπαριστούμενου με τον αναπαραστάτη με αποτέλεσμα να θεωρήσουν ότι το άπειρο είναι μόνο ένα σύμβολο ή ένας «αριθμός» που απλώς δεν ανήκει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Παράσταση συνόλου

Για να παραστήσουμε ένα σύνολο χρησιμοποιούμε συνήθως έναν από τους παρακάτω τρόπους

α) Όταν δίνονται όλα τα στοιχεία του και είναι λίγα σε πλήθος, τότε γράφουμε τα στοιχεία αυτά μεταξύ δύο αγκίστρων, χωρίζοντάς τα με το κόμμα. Έτσι π.χ., αν το σύνολο Α έχει ως στοιχεία τους αριθμούς 2, 4 και 6, γράφουμε:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε έναν παρόμοιο συμβολισμό και για σύνολα που έχουν πολλά ή άπειρα στοιχεία, γράφοντας μερικά μόνο από αυτά και αποσιωπώντας τα υπόλοιπα, αρκεί να είναι σαφές ποια είναι αυτά που παραλείπονται. Έτσι για παράδειγμα το σύνολο Β των ακεραίων από το 1 μέχρι το 100 συμβολίζεται ως εξής

$$B = \{1, 2, 3, \dots, 100\},$$

ενώ το σύνολο των κλασμάτων της μορφής $\frac{1}{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος, συμβολίζεται ως εξής:

$$\Gamma = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$$

Εικόνα 3.14: Άπειρα στοιχεία συνόλου

58 2. ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι μορφές διαστημάτων πραγματικών αριθμών και οι διάφορες αναπαραστάσεις τους:

ΔΙΑΣΤΗΜΑ	ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ	ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ
x′ α β x	$\alpha \le x \le \beta$	$[\alpha, \beta]$
x′ α β x	$\alpha \le x < \beta$	$[\alpha, \beta)$
x′ α β x	$\alpha < x \le \beta$	$(\alpha, \beta]$
x′ α β x	$\alpha < x < \beta$	(α, β)
x′ α x	$x \ge \alpha$	$[\alpha, +\infty)$
x′ α x	$x > \alpha$	$(\alpha, +\infty)$
x′ α x	$x \le \alpha$	$(-\infty, \alpha]$
x′ α x	$x < \alpha$	$(-\infty, \alpha)$

Τέλος, υπό μορφή διαστήματος,

✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $\alpha \le x$ συμβολίζεται με $[\alpha, +\infty)$, ενώ

✓ Το σύνολο των αριθμών x για τους οποίους ισχύει $x \le \alpha$ συμβολίζεται με $(-\infty, \alpha]$.

Με ανάλογο τρόπο ορίζονται και τα διαστήματα $(\alpha, +\infty)$ και $(-\infty, \alpha)$. Τα σύμβολα $+\infty$ και $-\infty$, που διαβάζονται **«συν άπειρο»** και **«πλην άπειρο»** αντιστοίχως, δεν παριστάνουν πραγματικούς αριθμούς.

Εικόνα 3.15: Συμβολισμός του απείρου σε διαστήματα

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

Στη Γεωμετρία της Α' λυκείου (εισαγωγή της ενότητας 2 και ενότητα 2.4) γίνεται αναφορά στην απειρία των σημείων μιας ευθείας (πραγματικό άπειρο) και στην απεριόριστη προέκταση μιας ευθείας και προς τος δύο κατευθύνσεις (δυνητικό άπειρο). Έχουμε εισαγωγή των πρωταρχικών εννοιών με διαισθητική προσέγγιση και απλή αναφορά στην απειρία των σημείων μιας ευθείας. Οι αναφορές που γίνονται είναι ανάλογες με αυτές των σχολικών βιβλίων του Γυμνασίου.

Οι πρωταρχικές γεωμετρικές έννοιες

Όπως αναφέραμε ήδη στην Εισαγωγή, η μελέτη της Γεωμετρίας ξεκινά από έννοιες οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την εμπειρία μας, όπως οι έννοιες **σημείο, ευθεία** και ***επίπεδο*** τις οποίες δεχόμαστε ως πρωταρχικές χωρίς περαιτέρω διευκρινίσεις. Οι έννοιες αυτές υπόκεινται στις παρακάτω παραδοχές

Σχήμα 1

- Από δύο σημεία διέρχεται μοναδική ευθεία.
- Για κάθε ευθεία υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο του επιπέδου που δεν ανήκει σε αυτή.
- Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα και προς τις δύο κατευθύνσεις, χωρίς διακοπές και κενά.

2.4 Η ημιευθεία

Σχήμα 5

Κάθε ευθεία έχει άπειρα σημεία και εκτείνεται απεριόριστα χωρίς διακοπές και κενά. Εστω μία ευθεία x'x και σημείο της A (σχ.4). Τότε το σημείο χωρίζει την ευθεία σε δύο μέρη τα οποία συμβολίζουμε Ax και Ax' και τα ονομάζουμε ***ημιευθείες*** με ***αρχή*** το σημείο A.

Η θεωρία των παραλλήλων

Το αίτημα του Ευκλείδη. Στο Βιβλίο I των «Στοιχείων» του ο Ευκλείδης ορίζει ως παράλληλες «τις ευθείες εκείνες που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και προεκτεινόμενες επ' άπειρον και από τα δύο μέρη δε συναντώνται σε κανένα απ' αυτά» (Ορισμός 23). Αμέσως μετά διατυπώνει πέντε αιτήματα, τα τέσσερα πρώτα από τα οποία εκφράζουν τις βα-

μάζει, να αποδείξουν το Ευκλείδειο αίτημα.

Με την απόδειξη του Ευκλείδειου αιτήματος ασχολήθηκε ο Διόδωρος (1ος αι. π.Χ.). Στα Αραβικά διατηρήθηκαν και οι προσπάθειες κάποιου Αγάνη και του Σιμπλίκιου που στηρίζονται στον ορισμό του Ποσειδωνίου και, επομένως, στο αξίωμα (Ε6).

Η θεωρία των παραλλήλων στα Αραβικά μαθηματικά. Η πρώτη γνωστή προσπάθεια απόδειξης του Ευκλείδειου αιτήματος στα Αραβικά

την ευθεία α και το σημείο A υπάρχει όχι περισσότερες από μία ευθεία που διέρχεται από το σημείο A και δεν τέμνει την ευθεία α (Αξίωμα παραλληλίας).

Το αίτημα του Ευκλείδη ή κάποιο ισοδύναμό του καθορίζει τη φύση ολόκληρης της γεωμετρίας και αποτελεί βάση για τα περισσότερα θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας.

Η θεωρία των παραλλήλων στην αρχαιότητα και το Βυζάντιο. Είναι πιθανό πριν τη διατύπωση του πέμπτου αιτήματος των «Στοιχείων» του Ευκλείδη να υπήρξαν προσπάθειες να αποδειχθεί. Όμως οι διαθέσιμες μαρτυρίες είναι πενιχρότα-

Στη διάρκεια του 13ου αι. συνεχίζονται οι αναζητήσεις απόδειξης του Ευκλείδειου αιτήματος. Ο αλ-Χαναφί, ακολουθώντας παλαιότερες τάσεις που εκδηλώνονται στο έργο του αλ-Κιντί, του αλ-Μπιρουνί (973-περ. 1050) και του Ομάρ Χαγιάμ, συνδέουν το πρόβλημα του Ευκλείδειου αιτήματος με την έννοια της επ' άπειρον διαιρετότητας των γεωμετρικών μεγεθών. Ιδιαίτερα διαδεδομένη ήταν η θεωρία των παραλλήλων του αλ-Αμπχαρί (ή αλ-Αμπαχρί, πέθανε το 1263). Συγγενής προς αυτήν ήταν η θεωρία

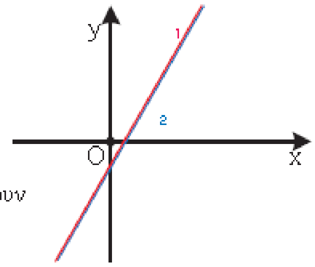
Εικόνα 3.16: Άπειρα σημεία ευθείας και απεριόριστη προέκταση ευθειών

ΑΛΓΕΒΡΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Στην Άλγεβρα της Β' λυκείου (ενότητα 1.1) έχουμε αναφορά στο άπειρο πλήθος των λύσεων δύο ευθειών οι οποίες αντιστοιχούν σε ένα αόριστο γραμμικό σύστημα.

✓Το σύστημα $\begin{cases} y+1=2x \\ 4x+2y=2 \end{cases}$ γράφεται

$\begin{cases} y=2x-1 \\ y=2x-1 \end{cases}$, οπότε έχει άπειρο πλήθος λύσεων, αφού οι δύο ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος συμπίπτουν.



Προφανώς κάθε λύση του συστήματος είναι της μορφής $(k, 2k-1),\ k \in \mathbb{R}$.

1.1 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 15

Γενικά, από την επίλυση ενός γραμμικού συστήματος 2 x 2 αναμένουμε μια μόνο από τις περιπτώσεις:

✓Το σύστημα να έχει μοναδική λύση

✓Το σύστημα να είναι αδύνατο

✓Το σύστημα να έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

✓Το σύστημα $\begin{cases} 2x-3y=40 \\ 4x-6y=80 \end{cases}$ έχει

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}=2(-6)-4(-3)=-12+12=0$$

και επομένως το σύστημα αναμένεται ή να είναι αδύνατο ή να έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Αν διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της δεύτερης εξίσωσης με το 2, τότε το σύστημα γράφεται

$$\begin{cases} 2x-3y=40 \\ 2x-3y=40 \end{cases},$$

δηλαδή έχει μόνο μία εξίσωση τη $2x-3y=40$. Αυτό σημαίνει ότι οι λύσεις του συστήματος είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$2x-3y=40 \Leftrightarrow y=\frac{2x-40}{3}$$

Άρα το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων τα ζεύγη της μορφής

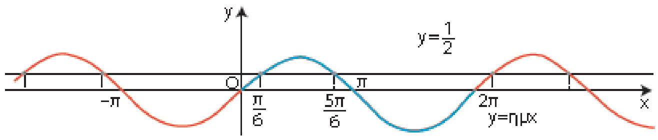
$$\left(k, \frac{2k-40}{3}\right), \quad k \in \mathbb{R}$$

Εικόνα 3.17: Άπειρο πλήθος λύσεων συστήματος

Στην επόμενη ενότητα (3.5), το παρατιθέμενο σχήμα παρέχει μια οπτική απεικόνιση των λύσεων μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης.

Η εξίσωση ημx=α

Έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $ημx=\frac{1}{2}$. Είναι φανερό ότι ζητάμε να βρούμε τις τετμημένες των σημείων τομής της καμπύλης $y=ημx$ και της ευθείας $y=\frac{1}{2}$.

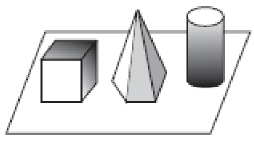


Ζητάμε δηλαδή εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία η συνάρτηση $f(x)=ημx$ παίρνει την τιμή $\frac{1}{2}$. Επειδή η συνάρτηση αυτή είναι περιοδική με περίοδο $2π$, για να βρούμε τα ζητούμενα x, που είναι άπειρα σε πλήθος (βλ. σχήμα), αρκεί να βρούμε όσα από αυτά υπάρχουν σε ένα διάστημα πλάτους $2π$ και σε καθένα να προσθέσουμε το $κ \cdot 2π$, όπου κ ακέραιος.

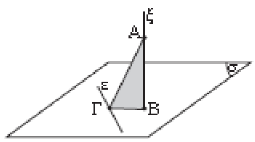
Εικόνα 3.18: Άπειρες λύσεις τριγωνομετρικής εξίσωσης

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Στη Γεωμετρία της Β' λυκείου στην εισαγωγή της ενότητας 12 αναφέρεται ότι ο γεωμετρικός χώρος επεκτείνεται απεριόριστα προς κάθε κατεύθυνση και το επίπεδο έχει απεριόριστη επιφάνεια, ενώ από μια ευθεία στο χώρο διέρχονται άπειρα επίπεδα. Η έννοια του απείρου και σε αυτό το σημείο προσεγγίζεται από τους συγγραφείς με διαισθητικό τρόπο μέσα από κάποιες εικόνες.



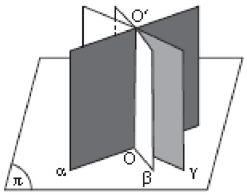
Σχήμα 1



Σχήμα 2

12.1 Εισαγωγή

Ο γεωμετρικός χώρος έχει τρεις διαστάσεις, μήκος, πλάτος και ύψος και εκτείνεται απεριόριστα σε κάθε κατεύθυνση, ενώ το επίπεδο, που μελετήσαμε έως τώρα, έχει δύο διαστάσεις. Ο χώρος περιλαμβάνει θεμελιώδη γεωμετρικά στοιχεία –σημεία, ευθείες, επίπεδα– αλλά και πιο πολύπλοκα σχήματα, τα οποία σχηματίζονται από αυτά ή τμήματα αυτών και λέγονται στερεά σχήματα για να αντιδιαστέλλονται από τα επίπεδα σχήματα (σχ. 1). Ένα στερεό γεωμετρικό σχήμα μπορεί να είναι πεπερασμένο ή απεριόριστο, να καταλαμβάνει όγκο ή όχι (σχ.2) και να σχηματίζεται από τμήματα ευθειών και επιπέδων ή να είναι ακόμα πιο περίπλοκο. Στα επόμενα κεφάλαια θα μελετήσουμε σχήματα του χώρου και τις ιδιότητές τους. Το σύνολο αυτών των ιδιοτήτων λέγεται ***Γεωμετρία του Χώρου*** ή ***Στερεομετρία***. Τα σχήματα του χώρου παριστάνονται στο χαρτί για να υποβοηθείται η φαντασία μας. Έτσι, το επίπεδο, ως απεριόριστη επιφάνεια, ενώ δεν μπορεί να χωρέσει στην επιφάνεια του χαρτιού, παριστάνεται με ένα παραλληλόγραμμο, δηλαδή με ένα πεπερασμένο τμήμα του και το ονομάζουμε με ένα από τα τελευταία μικρά γράμματα του αλφαβήτου, π.χ. π, σ, τ, κτλ. (με δείκτες ή τόνους ενδεχομένως), που σημειώνεται σε μία από τις γωνίες του παραλληλογράμμου.



Σχήμα 3

Επειδή το επίπεδο είναι υποσύνολο του χώρου, στα αξιώματα του χώρου περιλαμβάνονται τα αξιώματα της γεωμετρίας του επιπέδου και επομένως, οι προτάσεις που ισχύουν στο επίπεδο ισχύουν σε κάθε επίπεδο του χώρου. Πολλές ιδιότητες του χώρου προκύπτουν, αν θεωρήσουμε το χώρο ως επέκταση του επιπέδου κατά μία διάσταση. Για παράδειγμα, η πρόταση: «στο επίπεδο υπάρχουν άπειρες ευθείες που διέρχονται από ένα σημείο» επεκτείνεται στην πρόταση: «στο χώρο υπάρχουν άπειρα επίπεδα που διέρχονται από μία ευθεία». Αυτό γίνεται άμεσα φανερό αν θεωρήσουμε σε ένα επίπεδο (σχ. 3) ευθείες που διέρχονται από το ίδιο σημείο και μετακινηθεί το επίπεδο «παράλληλα στον εαυτό του». Τότε, οι ευθείες γράφουν επίπεδα διερχόμενα από την ευθεία που γράφει το κοινό σημείο των ευθειών κατά τη μετακίνηση.

Εικόνα 3.19: Άπειρα επίπεδα τα οποία διέρχονται από μία ευθεία

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β’ ΛΥΚΕΙΟΥ

Στα Μαθηματικά προσανατολισμού της Β Λυκείου στην ενότητα 4.1 συναντάμε το άπειρο στην μαθηματική επαγωγή (ενότητα όμως που δεν εντάσσεται στη διδακτέα ύλη).

Διατυπώνοντας μια ιδιότητα που ισχύει σε όλες τις γραμμές του τριγώνου, ο Pascal έγραψε τα εξής:

"Αν η πρόταση αυτή έχει έναν άπειρο αριθμό περιπτώσεων, θα δώσω μια πολύ σύντομη απόδειξη υποθέτοντας δύο λήμματα.
Το πρώτο, που είναι προφανές, είναι ότι αυτή η ιδιότητα ισχύει στη 2η γραμμή.
Το δεύτερο είναι ότι αν αυτή η ιδιότητα ισχύει σε μια τυχαία γραμμή, τότε θα ισχύει απαραίτητα και στην επόμενη γραμμή.

Εικόνα 3.20: Διατύπωση μιας ιδιότητας από τον Pascal

Στην ίδια ενότητα στην παράγραφο της μαθηματικής επαγωγής δίνεται το άθροισμα 1+3+5+…+(2ν-1) για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό ν για το οποίο γίνεται αναφορά ότι δε θα μπορούσαμε να το υπολογίσουμε για κάθε ακέραιο λόγω της απειρίας αυτών. Έπειτα από αυτό οι συγγραφείς προχωράνε στη διατύπωση της μαθηματικης επαγωγής.

Αρχή Μαθηματικής Επαγωγής

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε το άθροισμα

$$1+3+5+7+\ldots+(2\nu-1)$$

για οποιοδήποτε θετικό ακέραιο ν.

Υπολογίζουμε το άθροισμα αυτό για μερικές τιμές του ν και έχουμε:

Για $\nu=1$,	$1=1$	$(=1^2)$
Για $\nu=2$,	$1+3=4$	$(=2^2)$
Για $\nu=3$,	$1+3+5=9$	$(=3^2)$
Για $\nu=4$,	$1+3+5+7=16$	$(=4^2)$

Τα μέχρι τώρα αποτελέσματα μας οδηγούν στην εικασία ότι:

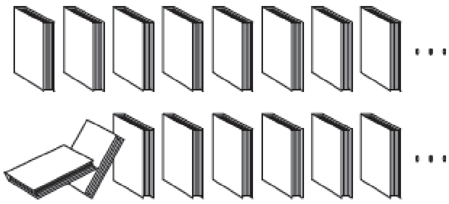
$$1+3+5+7+\ldots+(2\nu-1)=\nu^2. \qquad (1)$$

Επειδή το πλήθος των θετικών ακεραίων είναι άπειρο, συνεχίζοντας με τον παραπάνω τρόπο, είναι αδύνατο να αποδείξουμε ότι η (1) ισχύει για όλους τους θετικούς ακεραίους.

Εικόνα 3.21: Μαθηματική επαγωγή και άπειρο

Επιπλέον παραθέτουν μια εικόνα διαδοχικών βιβλίων τα οποία ακολουθούνται από τελείες στο τέλος δείχνοντας με αυτό τον τρόπο την απειρία του πλήθους τους. Το κάθε ένα από αυτά ανατρέπει το επόμενό του σε μία προσπάθεια αναπαράστασης της μαθηματικής επαγωγής ώστε να γίνει περισσότερο κατανοητή.

Μια αναπαράσταση του γεγονότος αυτού είναι η εξής:
Υποθέτουμε ότι έχουμε τοποθετήσει σε μια σειρά ένα πλήθος βιβλίων.



Αν ρίξουμε προς τα πίσω το πρώτο βιβλίο και αν τα βιβλία είναι έτσι τοποθετημένα ώστε κάθε φορά που πέφτει κάποιο βιβλίο να ρίχνει και το επόμενό του, τότε θα ανατραπούν όλα τα βιβλία.

Εικόνα 3.22: Αναπαράσταση της μαθηματικής επαγωγής

Στην ενότητα 4.5 του συγκεκριμένου βιβλίου γίνεται αναφορά στην απειρία των πρώτων αριθμών (η συγκεκριμένη ενότητα είναι εκτός της διδακτέας ύλης).

Στον παρακάτω πίνακα έχουν προσδιοριστεί οι πρώτοι μεταξύ 1 και 100. Έχουν διαγραφεί τα πολλαπλάσια των πρώτων 2, 3, 5 και 7, αφού ο επόμενος πρώτος είναι ο αριθμός 11 και ισχύει $11 > \sqrt{100}$.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Στο σημείο αυτό πιθανόν να αναρωτηθεί κάποιος: Τελειώνουν κάπου οι πρώτοι; Υπάρχει δηλαδή μέγιστος πρώτος ή οι πρώτοι συνεχίζονται "επ' άπειρον";

ΘΕΩΡΗΜΑ 7 (του Ευκλείδη)

Υπάρχουν *άπειροι* θετικοί πρώτοι αριθμοί.

Εικόνα 3.23: Απειρία πρώτων αριθμών

Στα περισσότερα σχολικά βιβλία των Μαθηματικών η έννοια του απείρου, ενώ υπεισέρχεται σε ορισμένα θέματα, δε φαίνεται να γίνεται συστηματικό αντικείμενο μελέτης. Η βιβλιογραφική ανασκόπηση αναδεικνύει την ύπαρξη αρκετών γνωστικών απαιτήσεων για την έννοια του απείρου αφού συχνά αυτή σχετίζεται με άλλες έννοιες (π.χ. πλήθος σημείων, όρια κ.ά.), την ίδια στιγμή που απ' όλα τα σχολικά εγχειρίδια απουσιάζει οποιοσδήποτε ορισμός ή κάποια άμεση αναφορά σε αυτή. Ταυτόχρονα, αποκαλύπτει τη μη προβολή της με σαφή τρόπο στα σχολικά βιβλία, καθώς συναντάται κυρίως μέσω έμμεσων αναφορών. Επιπλέον απουσιάζει η σύνδεσή της μεταξύ των διάφορων θεματικών ενοτήτων στις οποίες τη συναντάμε καθώς παρουσιάζεται αποσπασματικά. Η ελλιπής παρουσίασή της έχει ως αποτέλεσμα ο κάθε ένας να καταφεύγει στη δημιουργία ενός «προσωπικού ορισμού».

Η συμπλήρωση της ύλης με περισσότερες ασκήσεις και παραδείγματα που θα ενσωματώνουν την έννοια θα βοηθούσε τους μαθητές στην καλύτερη κατανόησή της. Παράλληλα είναι σημαντικό να αυξηθεί το πλήθος αναπαραστάσεων που θα καλλιεργούν όλα τα είδη διαίσθησης ώστε οι μαθητές να διαμορφώσουν τη σωστή αντίληψη τόσο για το δυνητικό όσο και το πραγματικό άπειρο. Επιπλέον πρέπει να γίνουν κατανοητές στους μαθητές οι διαφορετικές χρήσεις της έννοιας π.χ. ως πλήθος αριθμών ή σημείων, ως αποτέλεσμα ορίου κ.ά. Στην κατεύθυνση αυτή θα βοηθούσε η παράθεση μιας ιστορικής αναδρομής για το άπειρο που θα παρουσίαζε όλες τις δυσκολίες στο πέρασμα των χρόνων κατά την εξέλιξη της έννοιας.

3.2 Οι αντιλήψεις του απείρου στα σχολικά βιβλία

Η έννοια του απείρου παρουσιάζεται με ποικίλους τρόπους στα σχολικά βιβλία, προσφέροντας διαφορετικές προσεγγίσεις που επηρεάζουν την κατανόηση των μαθητών. Όπως είδαμε ανάλογα με τον τρόπο παρουσίασης, οι μαθητές μπορεί να αναπτύξουν τρεις βασικές αντιλήψεις για το άπειρο: την πεπερασμένη αντίληψη, όπου το άπειρο ταυτίζεται με «πολύ μεγάλο αριθμό», τη διαδικαστική αντίληψη, που εστιάζει στη συνεχή και ατελή διαδικασία, και την πραγματική αντίληψη του απείρου, η οποία αναφέρεται στο πραγματικό άπειρο. Παρακάτω αναλύονται οι διαφορετικές αυτές αντιλήψεις μέσα από παραδείγματα στα σχολικά εγχειρίδια των Μαθηματικών, από το Δημοτικό μέχρι το Λύκειο.

Πεπερασμένη Αντίληψη

Στη ΣΤ' Δημοτικού, στην εικόνα 3.2, οι μαθητές καλούνται να αναφέρουν αν ένα κλάσμα έχει άπειρα ισοδύναμα κλάσματα, χωρίς όμως προηγουμένως να έχει γίνει αναφορά στην έννοια του απείρου. Αυτό μπορεί να ενισχύσει την πεπερασμένη αντίληψη του απείρου, καθώς οι μαθητές μπορεί να ταυτίσουν το άπειρο με το μεγάλο πλήθος ισοδύναμων κλασμάτων.

Στην Γ' Γυμνασίου, η εικόνα 3.11 παρουσιάζει μια γραμμική εξίσωση η οποία έχει άπειρες λύσεις, ενώ δίνονται κάποια ελάχιστα παραδείγματα λύσεων. Κάτι τέτοιο υπάρχει ο κίνδυνος να οδηγήσει τους μαθητές στην εσφαλμένη αντίληψη ότι το άπειρο ταυτίζεται απλώς με τις «πολλές» λύσεις, κάτι που ενισχύει την πεπερασμένη αντίληψη του απείρου.

Στην Α' Λυκείου στην εικόνα 3.15 στο βιβλίο της Άλγεβρας, παρουσιάζεται για πρώτη φορά το σύμβολο του απείρου στην αναπαράσταση ορισμένων συνόλων αριθμών, χωρίς όμως κάποια προηγούμενη αναφορά στο άπειρο. Υπάρχει ο κίνδυνος οι μαθητές να θεωρήσουν το άπειρο ως αριθμό με αποτέλεσμα να σχηματίσουν πεπερασμένη αντίληψη του απείρου.

Στη Β' Λυκείου, στην εικόνα 3.17, γίνεται αναφορά στο άπειρο πλήθος λύσεων δύο ευθειών, αλλά η χρήση της παραμέτρου κ μπορεί να ενισχύσει την πεπερασμένη αντίληψη. Οι μαθητές ενδέχεται να μην αντιληφθούν την πραγματική έννοια του άπειρου πλήθους αριθμών που αναπαριστά το κ. Επιπλέον στην εικόνα 3.18, η περιοδική συνάρτηση ημ(x) τέμνει την ευθεία y = 1/2 άπειρες φορές. Οι σχεδιαστικοί περιορισμοί μπορεί να οδηγήσουν σε σύγχυση, με αποτέλεσμα οι μαθητές να σχηματίσουν την εντύπωση ότι υπάρχουν μόνο πεπερασμένα σημεία τομής.

Διαδικαστική Αντίληψη

Στη ΣΤ' Δημοτικού, στην εικόνα 3.1, οι μαθητές βλέπουν μια ακολουθία των πολλαπλασίων του 4 (0, 4, 8, 12, 16, ...), όπου οι τελείες στο τέλος δείχνουν μια διαδικασία που συνεχίζεται χωρίς κάποιο τέλος, κάτι το οποίο ενισχύει τη διαδικαστική αντίληψη του απείρου.

Στην Α' Γυμνασίου, στην εικόνα 3.4, η διαίρεση η οποία έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία (όπως ο αριθμός 2,295454...) ενισχύει τη διαδικαστική αντίληψη, καθώς η διαδικασία της διαίρεσης δεν ολοκληρώνεται ποτέ. Παρόμοια, στην εικόνα 3.5, ένα ευθύγραμμο τμήμα που επεκτείνεται απεριόριστα και προς δύο κατευθύνσεις με τη χρήση βελών προς τις δύο κατευθύνσεις υποδηλώνει μια συνεχή διαδικασία, ενισχύοντας και πάλι τη διαδικαστική αντίληψη του απείρου.

Στη Β' Γυμνασίου, στην εικόνα 3.9, η οπτικοποίηση των άπειρων λύσεων μιας ανίσωσης στην αριθμογραμμή, μέσω ενός βέλους δείχνει την ατελή διαδικασία. Επίσης, στην εικόνα 3.10, γίνεται αναφορά στα άπειρα ψηφία του αριθμού π, όπου κάποια από αυτά δίνονται και ακολουθούνται από τελείες. Και τα δύο ενισχύουν τη διαδικαστική αντίληψη.

Πραγματική Αντίληψη

Στην Α' Γυμνασίου, η εικόνα 3.3 αναφέρεται στο άπειρο πλήθος των πρώτων αριθμών, γεγονός που ενισχύει την πραγματική αντίληψη του απείρου. Επιπλέον, στην εικόνα 3.5, αν γίνει αναφορά από τον καθηγητή στα άπειρα σημεία μιας ευθείας, τότε αυτό ενδεχομένως να ενισχύσει ακόμη περισσότερο την πραγματική αντίληψη του απείρου.

Στην Γ' Γυμνασίου, η εικόνα 3.12 παρουσιάζει ένα αόριστο σύστημα με άπειρες λύσεις, συνοδευόμενο από κάποιες ευθείες που ταυτίζονται. Αυτό ενισχύει την πραγματική αντίληψη του απείρου, καθώς δείχνει ότι το πλήθος των λύσεων είναι άπειρο.

Στην Α’ Λυκείου, στο βιβλίο της Γεωμετρίας, γίνεται αναφορά στα άπειρα σημεία μιας ευθείας και στην απεριόριστη προέκτασή της προς δύο κατευθύνσεις. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ενισχύεται τόσο η πραγματική αντίληψη (άπειρο πλήθος σημείων) όσο και η διαδικαστική αντίληψη (προέκταση της ευθείας).

Στη Β’ Λυκείου, η προσεκτική αναφορά στην παράμετρο κ στην εικόνα 3.17, θα μπορούσε να ενισχύσει την πραγματική αντίληψη του απείρου, καθώς αναπαριστά άπειρο πλήθος λύσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

4.1 Εισαγωγή

Η έννοια του απείρου είναι μια από αυτές οι οποίες δεν παρουσιάζεται κατά τη διδασκαλία κάποιος ορισμό της. Παρ' όλα αυτά χρησιμοποιείται εκτενώς, χωρίς όμως να ορίζεται με ακρίβεια. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία διαφορετικών αντιλήψεων από τους μαθητές ανάλογα με την εικόνα που έχει ο καθένας για την έννοια. Αυτές οι διαισθητικές αντιλήψεις προέρχονται είτε από την χρήση της λέξης εκτός μαθηματικού πλαισίου είτε από τη μαθηματική χρήση της που εφαρμόζει κάθε καθηγητής.

Η συγκεκριμένη μελέτη συνδυάζει ποσοτική και ποιοτική έρευνα με σκοπό να αναδείξει τις κυρίαρχες αντιλήψεις για το άπειρο, στην πρωτοβάθμια και τη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, να συγκρίνει αυτές τις αντιλήψεις ανάμεσα σε κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα και να διερευνήσει την προέλευσή τους.

4.2 Τα ερευνητικά ερωτήματα

Τα ερευνητικά ερωτήματα που διαμορφώθηκαν είναι τα ακόλουθα:

1. Ποιες αντιλήψεις διαμορφώνουν οι μαθητές για την έννοια του απείρου κατά τη διάρκεια της σχολικής τους εκπαίδευσης και ποια η προέλευσή τους;
2. Ποιες διαφοροποιήσεις προκύπτουν στα διάφορα στάδια της σχολικής εκπαίδευσης;
3. Υπάρχει αναπτυξιακή πορεία στην αντίληψη της έννοιας κατά τη διάρκεια των σχολικών σπουδών και, αν υπάρχει, ποια είναι τα κύρια χαρακτηριστικά της;

4.3 Πιλοτική έρευνα

Σε ό,τι αφορά τη συλλογή δεδομένων, πραγματοποιήθηκαν αρχικά δύο πιλοτικές έρευνες για τον σχεδιασμό των εργαλείων συλλογής δεδομένων. Στην πρώτη πιλοτική έρευνα, συμμετείχαν 23 μαθητές της έκτης Δημοτικού, 20 της τρίτης Γυμνασίου και 19 της τρίτης Λυκείου. Οι μαθητές συμπλήρωσαν ένα αρχικό ερωτηματολόγιο.

Στη δεύτερη φάση της πιλοτικής έρευνας αφού έγιναν κάποιες τροποποιήσεις στα αρχικά ερωτηματολόγια υλοποιήθηκαν 15 διαδικτυακές συνεντεύξεις, και συγκεκριμένα από 5 σε κάθε αντίστοιχη τάξη που είχαν δοθεί τα ερωτηματολόγια. Οι συνεντεύξεις έγιναν αφού πρώτα οι μαθητές είχαν συμπληρώσει ένα καινούριο ερωτηματολόγιο που είχε διαμορφωθεί μετά την πρώτη φάση της πιλοτικής έρευνας. Όλες οι συνεντεύξεις μαγνητοφωνήθηκαν και έπειτα αναλύθηκαν με σκοπό την διαμόρφωση των ερωτηματολογίων.

4.4 Το ερευνητικό εργαλείο

Το τελικό ερωτηματολόγιο που διαμορφώθηκε και δόθηκε ήταν κοινό σε όλους τους μαθητές και σχεδιάστηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να απαντηθεί ανεξάρτητα από την τάξη στην οποία άνηκε το κάθε παιδί. Η συμπλήρωση του ερωτηματολογίου πραγματοποιήθηκε ανώνυμα, με τη χρήση ψευδώνυμου από κάθε μαθητή, προκειμένου να διασφαλιστεί η ευκολία ενδεχόμενων μελλοντικών συνεντεύξεων.

Για τη συμπλήρωση του ερωτηματολογίου παραχωρήθηκε μια διδακτική ώρα διάρκειας 45 λεπτών σε κάθε ομάδα μαθητών. Το ερωτηματολόγιο διαμορφώθηκε μετά από τον επανασχεδιασμό του, με βάση τα συμπεράσματα των δύο πιλοτικών ερευνών. Οι ερωτήσεις 1,2,3 και 8 εξετάζουν τις πρωταρχικές αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την έννοια του απείρου (εικόνα έννοιας, «προσωπικός» ορισμός), ενώ οι ερωτήσεις 5,6 και 9 εστιάζουν στη σύγκριση των άπειρων συνόλων. Τέλος οι ερωτήσεις 4 και 7 αφορούν τους αριθμούς και συγκεκριμένα την απειρία τους και την πυκνότητά τους. Οι ερωτήσεις που δόθηκαν ήταν:

1)Α) Να γράψετε τρεις προτάσεις με τη λέξη άπειρο.

Β) Μπορείτε να γράψετε τις προτάσεις με το ίδιο νόημα με αυτές που γράψατε στο α) χωρίς όμως να χρησιμοποιήσετε τη λέξη άπειρο;

Οι μαθητές καλούνται να δώσουν τρεις προτάσεις με τη λέξη άπειρο, όχι απαραίτητα με μαθηματικό περιεχόμενο. Έπειτα ζητείται να αντικαταστήσουν το άπειρο με λέξεις οι οποίες είναι το ίδιο νοηματικά. Η συγκεκριμένη ερώτηση μας δίνει την εικόνα για την έννοια που έχουν οι μαθητές. Στόχος ήταν να προκύψουν οι αυθόρμητες διαισθητικές αντιλήψεις τους (Fischbein, 1987).

2)Τι νομίζετε στα Μαθηματικά ότι είναι το άπειρο;

Σε κανένα στάδιο της σχολικής εκπαίδευσης δε δίνεται στους μαθητές κάποιος ορισμός για το άπειρο, αυτό έχει ως αποτέλεσμα ο κάθε ένας να προσπαθεί να σχηματίσει μόνος του έναν ορισμό. Στη συγκεκριμένη ερώτηση αναμένουμε ακόμα και άτυπες απαντήσεις. Με τον όρο άτυπες χαρακτηρίζουμε απαντήσεις στις οποίες η γλώσσα που χρησιμοποιείται δεν ακολουθεί αυστηρά τους κανόνες της τυπικής γλώσσας των μαθηματικών και μπορεί να περιλαμβάνει λέξεις, φράσεις, σύμβολα, διαγράμματα, εικόνες και παραδείγματα χωρίς να υποστηρίζεται από την απαραίτητη μαθηματική θεωρία (Cornu, 1991). Με τη συγκεκριμένη ερώτηση λοιπόν βλέπουμε τον «προσωπικό ορισμό» του κάθε μαθητή.

3)Να ζωγραφίσετε κάτι το οποίο είναι άπειρο.

Οι μαθητές καλούνταν να ζωγραφίσουν κάτι που θεωρούν ότι είναι άπειρο. Στην πραγματικότητα είναι ανέφικτο να ζωγραφιστεί κάτι άπειρο, όμως το συγκεκριμένο ερώτημα, ειδικά μέσα από τις συνεντεύξεις, σε κάποιες περιπτώσεις βοήθησε στην ανάδειξη της εικόνας που έχουν οι μαθητές για την έννοια του απείρου.

4)Υπάρχει αριθμός που είναι μεγαλύτερος από όλους τους άλλους; Αν ναι μπορείτε να τον ορίσετε; Αν όχι γιατί δεν υπάρχει;

Στο συγκεκριμένο ερώτημα μελετάμε την αντίληψη των μαθητών για την απειρία των αριθμών. Σε τέτοιου τύπου ερωτήματα οι μαθητές απαντούν κάνοντας χρήση του δυνητικού απείρου (Kolar & Čadež, 2012). Παράλληλα τέτοιου τύπου ερωτήσεις είναι κατάλληλες για τη μελέτη των αντιλήψεων για το άπειρο ως αριθμό. (Tall & Schwarzenberger, 1978, Sierpinska, 1987, Monaghan, 2001).

5)Δίνονται οι παρακάτω σειρές αριθμών :

Σειρά Α: 1,2,3,4,5,6,7,.....

Σειρά Β: 1,4,9,16,25,36,49,.....

Οι δύο σειρές έχουν το ίδιο πλήθος αριθμών ή κάποια σειρά έχει μεγαλύτερο πλήθος αριθμών από κάποια άλλη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Στόχος της συγκεκριμένης ερώτησης είναι η μελέτη των τρόπων με τους οποίους οι μαθητές συγκρίνουν δύο άπειρα στο πλήθος σύνολα. Έγινε προσπάθεια η ερώτηση να δοθεί σε αρκετά απλό πλαίσιο ώστε να είναι σε θέση να απαντηθεί ακόμη και από μαθητές του Δημοτικού.

6) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα ξενοδοχείο με άπειρα δωμάτια. Στο κάθε δωμάτιο μπορεί να μείνει μόνο ένα άτομο. Όλα τα δωμάτια είναι γεμάτα και δε μπορούν να κτισθούν καινούρια δωμάτια. Έστω ότι έρχεται να μείνει ένα καινούριο άτομο, υπάρχει τρόπος να φιλοξενηθεί στα δωμάτια που υπάρχουν χωρίς να μείνει μαζί με κάποιο άλλο;

α) Ναι, και ο τρόπος θα ήταν, ...

β) Όχι, διότι…..

Μια λύση αυτού του προβλήματος είναι αυτή σύμφωνα με την οποία ο πρώτος επισκέπτης θα μπορούσε να πάει στο δωμάτιο 2 ο δεύτερος επισκέπτης στο δωμάτιο 3 κ.ο.κ. με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί κάποια κενή θέση. Το ξενοδοχείο του Hilbert χρησιμεύει ως ένα εργαλείο για τη μελέτη των γνωστικών συγκρούσεων και των αντιλήψεων που ενδέχεται να δημιουργούν εμπόδια στην κατανόηση του πραγματικού απείρου. Παράδοξα όπως αυτό χρησίμευσαν και ως καλά παιδαγωγικά εργαλεία για την ενθάρρυνση συζητήσεων μεταξύ της διαισθητικής και της τυπικής κατανόησης του απείρου. Στην περίπτωση του ξενοδοχείου του Hilbert το ίδιο το ξενοδοχείο αντιστοιχεί στο πραγματικό άπειρο καθώς αποτελεί μια ολοκληρωμένη άπειρη οντότητα (Mamolo & Zazkis, 2008).

7)Σε ένα παιχνίδι για να κερδίσει κανείς πρέπει να απαντήσει στην ερώτηση: Από τους αριθμούς που είναι μικρότεροι από το 10 υπάρχει κάποιος που να είναι πιο κοντινός σε αυτόν; Θα λέγατε κάποιον αριθμό ώστε να κερδίσετε;

Το συγκεκριμένο ερώτημα μελετά τις ιδέες των μαθητών για την ιδιότητα της πυκνότητας των πραγματικών αριθμών. Επίσης μπορεί να αναδείξει τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται και τεκμηριώνουν την ισοδυναμία διαφορετικών αναπαραστάσεων όπως το 10 και το 9,999… Τέλος μέσα από τη συγκεκριμένη ερώτηση μπορεί κανείς να μελετήσει πως αντιλαμβάνονται το «απείρως κοντά». (Kolar & Čadež, 2012).

8) Στις παρακάτω προτάσεις σημειώστε Ναι η Όχι ανάλογα με το αν χρησιμοποιείται σωστά η λέξη άπειρο.

Στα κεφάλια των ανθρώπων υπάρχουν άπειρες τρίχες.

Στην Ελλάδα υπάρχουν άπειρες καστανές γυναίκες.

Μέσα από αυτή την ερώτηση, η οποία είναι κλειστού τύπου βλέπουμε την αντίληψη για το άπειρο. Οι μαθητές συχνά δεν είναι σε θέση να αναγνωρίσουν τη διαφορά ανάμεσα στο άπειρο των φυσικών αριθμών και στο μεγάλο πεπερασμένο Falk (1994). Η συγκεκριμένη ερώτηση αφορά πεπερασμένα πλήθη τα οποία όμως είναι μεγάλα, με αυτό τον τρόπο θέλαμε να ελέγξουμε αν υπάρχει η συγκεκριμένη σύγχυση στους μαθητές των ελληνικών σχολείων.

9) Δίνονται οι παρακάτω σειρές αριθμών:

Σειρά Α: 1,2,3,4,5,6,7,.....

Σειρά Β: 2,4,6,8,10,12,14,.....

Διαβάστε προσεκτικά τις απαντήσεις που έδωσαν κάποιοι μαθητές και γράψτε αν συμφωνείτε ή διαφωνείτε μαζί τους αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μαρία: Στη δεύτερη σειρά οι αριθμοί είναι περισσότεροι γιατί είναι μεγαλύτεροι οι αριθμοί.

Κώστας: Μπορούμε να ζευγαρώσουμε τους αριθμούς μεταξύ τους άρα οι δύο σειρές είναι ίδιες στο πλήθος.

Σοφία: Η πρώτη σειρά έχει πιο πολλούς αριθμούς από τη δεύτερη γιατί στη δεύτερη λείπουν ορισμένοι αριθμοί που είναι στην πρώτη.

Μιχάλης: Οι δύο σειρές έχουν το ίδιο πλήθος αριθμών καθώς οι αριθμοί που έχουν είναι άπειροι.

Η συγκεκριμένη ερώτηση συσχετίζεται με τη ερώτηση 5 και αφορά τη σύγκριση των άπειρων συνόλων. Σωστή είναι η υποθετική απάντηση του Κώστα. Οι υπόλοιπες υποθετικές απαντήσεις αφορούν κάποιες από τις συχνότερες μαθηματικά εσφαλμένες αντιλήψεις των μαθητών κατά τη σύγκριση των άπειρων συνόλων σύμφωνα με τη σχετική βιβλιογραφία (Tsamir, 1999, Tsamir & Tirosh, 1999, Tall & Tirosh, 2001, Tsamir & Dreyfus, 2002). Η συγκεκριμένη ερώτηση σε συνδυασμό με την ερώτηση 5 δημιουργεί ένα πλαίσιο μέσα στο οποίο μπορούμε να δούμε τους τρόπους σύγκρισης των άπειρων συνόλων καθώς και τη συλλογιστική των μαθητών. Ζητείται από τον κάθε μαθητή να αναφερθεί στο αν συμφωνεί η διαφωνεί με κάποιες υποθετικές απαντήσεις ενώ επιπλέον δίνεται η ευκαιρία να διερευνήσουμε όχι μόνο αν ο μαθητής είναι σε θέση να ξεχωρίσει τη σωστή από τις λάθος απαντήσεις, αλλά παράλληλα αν μπορεί να επιχειρηματολογήσει για κάθε απάντησή του. Επιπλέον η συγκεκριμένη ερώτηση συνδυαστικά με την ερώτηση 5 μπορεί να αναδείξει πιθανές αντιφάσεις ανάμεσα στα κριτήρια σύγκρισης των άπειρων συνόλων που χρησιμοποιούν οι μαθητές.

4.5 Συλλογή δεδομένων - Τα στάδια της έρευνας

Η κυρίως έρευνα διακρίθηκε σε πέντε στάδια.

Κατά το πρώτο στάδιο της έρευνας:

- Δόθηκαν τα τελικά ερωτηματολόγια σε 124 μαθητές της έκτης Δημοτικού, 154 μαθητές της τρίτης Γυμνασίου και 99 μαθητές της τρίτης Λυκείου (σε τμήματα γενικής παιδείας). Τα ερωτηματολόγια διανεμήθηκαν σε σχολεία της Αττικής και της επαρχίας, καλύπτοντας περιοχές με διαφορετικό κοινωνικό και οικονομικό υπόβαθρο.
- Έγινε αρχική αξιολόγηση των ερωτηματολογίων και όπου κρίθηκε ότι υπάρχουν σοβαρές ελλείψεις στις απαντήσεις τα ερωτηματολόγια αφαιρέθηκαν.
- Ακολούθησε η ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων των μαθητών. Στις ερωτήσεις ανοικτού τύπου και σε όσες ζητούσαν αιτιολόγηση έγινε κατηγοριοποίηση των απαντήσεων των μαθητών η οποία προέκυψε μέσα από την ομαδοποίηση των απαντήσεών που είχαν δώσει.
- Έγινε προσπάθεια μετά την κατηγοριοποίηση των απαντήσεων των μαθητών να εξαχθούν τα πρώτα στατιστικά αποτελέσματα με σκοπό να φανεί αν προκύπτουν διαφοροποιήσεις στις απαντήσεις των μαθητών στα διάφορα στάδια της σχολικής εκπαίδευσης.

Στο δεύτερο στάδιο της έρευνας:

- Πραγματοποιήθηκαν συνεντεύξεις σε 39 μαθητές και συγκεκριμένα σε 17 μαθητές της έκτης Δημοτικού, 16 μαθητές της τρίτης Γυμνασίου και 6 της τρίτης Λυκείου. Η επιλογή των μαθητών έγινε μεταξύ εκείνων που συμμετείχαν στο πρώτο στάδιο της έρευνας, λαμβάνοντας υπόψη το ενδιαφέρον που παρουσίαζαν στις γραπτές τους απαντήσεις. Οι μαθητές εντοπίστηκαν με τη βοήθεια του ψευδώνυμου που είχαν συμπληρώσει.
- Όλοι οι μαθητές κλήθηκαν να αιτιολογήσουν τις αρχικές τους απαντήσεις στα ερωτηματολόγια. Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, προέκυψαν επιπλέον ερωτήσεις που διαφέραν από το περιεχόμενο του ερωτηματολογίου και εστίασαν κυρίως στην προέλευση των αντιλήψεών τους.
- Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε η απομαγνητοφώνηση των συνεντεύξεων.

Στο τρίτο στάδιο της έρευνας:

- Αναλύθηκαν οι απαντήσεις των μαθητών στις συνεντεύξεις και στα ερωτηματολόγια. Κατέστη σαφές ότι υπάρχουν ορισμένες βασικές αντιλήψεις σχετικά με την έννοια του απείρου.

- Έπειτα αναλύθηκαν τα ερωτηματολόγια των μαθητών ξανά, με στόχο την καταγραφή των αντιλήψεων του κάθε μαθητή σχετικά με την έννοια του απείρου.

Στο τέταρτο στάδιο της έρευνας:

- Επιχειρήθηκε η κωδικοποίηση των κατηγοριών που δημιουργήθηκαν, με σκοπό την εξαγωγή αποτελεσμάτων μέσω του στατιστικού προγράμματος ανάλυσης SPSS.
- Συγκεκριμένα, πραγματοποιήθηκε η κωδικοποίηση όλων των απαντήσεων ανά ερώτημα, ενώ παράλληλα έγινε προσπάθεια σε ορισμένες από τις ερωτήσεις (1,2) κάθε απάντηση να ενταχθεί σε μια κατηγορία που αντιστοιχεί σε κάποια συγκεκριμένη αντίληψη για την έννοια του απείρου, ενώ σε κάποιες άλλες (5,9) κάθε απάντηση να ενταχθεί σε κάποιο συγκεκριμένο κριτήριο σύγκρισης των άπειρων συνόλων.
- Ακολούθησε η στατιστική ανάλυση με τη χρήση του προγράμματος ανάλυσης SPSS.

Στο πέμπτο στάδιο της έρευνας:

- Διερευνήθηκε, μέσα από τις συνεντεύξεις, η πηγή προέλευσης των αντιλήψεων των μαθητών για την έννοια του απείρου.
- Έγινε προσπάθεια μιας ευρύτερης κατηγοριοποίησης των πηγών προέλευσης των αντιλήψεων.
- Μελετήθηκαν, με χρήση των συνεντεύξεων, τα κριτήρια σύγκρισης των άπειρων συνόλων που προέκυψαν στο προηγούμενο στάδιο της έρευνας καθώς και η μεταβλητότητα των απαντήσεων των μαθητών όταν συγκρίνουν δυο άπειρα σύνολα.

Για την ανάλυση των συνεντεύξεων χρησιμοποιήθηκαν τεχνικές της θεματικής ανάλυσης. Στη μελέτη έγινε προσπάθεια να εντοπιστούν και να αναπτυχθούν κατηγορίες αντιλήψεων για το άπειρο καθώς και κατηγορίες πηγών προέλευσης αυτών των αντιλήψεων από τα δεδομένα, χωρίς την αποκλειστική χρήση κάποιας προκαθορισμένης θεωρίας ή υπόθεσης. Για τη δημιουργία κατηγοριών αντιλήψεων πραγματοποιήθηκε λεπτομερής ανάγνωση των απαντήσεων των ερωτηματολογίων, προκειμένου να προκύψει μια πρώτη ταξινόμηση των απαντήσεων και να αναδειχθούν ευρύτερες κατηγορίες. Κάθε κατηγορία απαντήσεων υποβλήθηκε σε κωδικοποίηση, επιτρέποντας την απόκτηση ποσοτικών δεδομένων για τις αντιλήψεις. Από την ποσοτική ανάλυση των γραπτών απαντήσεων στα ερωτηματολόγια αναδύθηκαν κάποιες βασικές κατηγορίες αντιλήψεων για το άπειρο καθώς και κάποιες κατηγορίες κριτηρίων σύγκρισης των άπειρων συνόλων. Επιπλέον μέσα από την ποιοτική ανάλυση των συνεντεύξεων προέκυψαν συγκεκριμένες κατηγορίες που αφορούσαν την προέλευση των αντιλήψεων για το άπειρο.

Σε κάθε στάδιο της έρευνας έχουμε ένα συνδυασμό ποσοτικής και ποιοτικής ανάλυσης ώστε να ενισχυθεί η αξιοπιστία των αποτελεσμάτων και να περιγράφουν επιτυχώς τα χαρακτηριστικά της κάθε κατηγορίας αντίληψης για την έννοια του απείρου καθώς και της προέλευσης αυτών.

4.6 Μεθοδολογία της ανάλυσης των δεδομένων

4.6.1 Μεθοδολογία της ποσοτικής ανάλυσης των γραπτών απαντήσεων στα ερωτηματολόγια

Για την ανάλυση των ποσοτικών δεδομένων αξιοποιήθηκε το πρόγραμμα SPSS. Για το σκοπό αυτό κάθε απάντηση χαρακτηρίστηκε ανάλογα με την ερώτηση με συγκεκριμένο κωδικό π.χ. 0 ή 1. Ακολουθούν για κάθε ερώτηση οι κωδικοί που χρησιμοποιήθηκαν, τι αντιπροσωπεύει κάθε κωδικός και κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις για κάθε κωδικό.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1)Α) Να γράψετε τρεις προτάσεις με τη λέξη άπειρο.

Β) Μπορείτε να γράψετε τις προτάσεις με το ίδιο νόημα με αυτές που γράψατε στο α) χωρίς όμως να χρησιμοποιήσετε τη λέξη άπειρο;

0:ΔΕΝ ΕΔΩΣΕ ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Πεπερασμένα με μεγάλο πλήθος

Γνωστή φράση από ταινία (Στο άπειρο και ακόμη παραπέρα… από την ταινία Toy Story)

Πάρα πολύ/πολλά /Εκατομμύρια/εκατοντάδες/τρισεκατομμύρια

1:ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Απειρία αριθμών /Ατελείωτο /Αμέτρητο / Απαντήσεις σχετικές με την αστρονομία

2)Τι νομίζετε στα Μαθηματικά ότι είναι το άπειρο;

0: ΔΕΝ ΕΔΩΣΕ ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Κάτι απροσδιόριστο.

Ένας αριθμός με άπειρα ψηφία.

Ο μεγαλύτερος των αριθμών.

Το σύμβολο του απείρου.

1: ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Το σύνολο όλων των αριθμών.

Η ευθεία γραμμή.

3)Να ζωγραφίσετε κάτι το οποίο είναι άπειρο.

0: ΔΕΝ ΕΔΩΣΕ ΑΠΑΝΤΗΣΗ- ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Σύμβολο του απείρου.

Πεπερασμένα με μεγάλο πλήθος.

1: ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αστέρια, πλανήτες, σύμπαν

1,2,3,…

Ευθεία

4)Υπάρχει αριθμός που είναι μεγαλύτερος από όλους τους άλλους; Αν ναι μπορείτε να τον ορίσετε; Αν όχι γιατί δεν υπάρχει;

0: ΔΕΝ ΕΔΩΣΕ ΑΠΑΝΤΗΣΗ- ΥΠΑΡΧΕΙ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ (ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ)

Ο μεγαλύτερος αριθμός είναι το άπειρο.

Υπάρχει και δε μπορεί να υπολογιστεί/ δεν μπορούμε να τον ορίσουμε/ δεν τον γνωρίζουμε.

Κάποιος μεγάλος αριθμός.

1: ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΚΑΙ ΑΠΟΥΣΙΑ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗΣ

2:ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΚΑΙ ΜΗ ΕΠΑΡΚΗΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Δε μπορούμε να βρούμε μεγαλύτερο αριθμό.

Μετρούνται συνεχώς/ασταμάτητα/συνεχίζονται για πάντα/ αμέτρητοι.

3:ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ ΚΑΙ ΣΩΣΤΗ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Είναι ατελείωτοι/άπειροι άρα πάντα θα υπάρχει κάποιος μεγαλύτερος από τον προηγούμενο.

Πάντα προσθέτεις(ν+1), υπάρχει ένας μεγαλύτερος/επόμενος αριθμός.

5)Δίνονται οι παρακάτω σειρές αριθμών :

Σειρά Α: 1,2,3,4,5,6,7,.....

Σειρά Β: 1,4,9,16,25,36,49,.....

Οι δύο σειρές έχουν το ίδιο πλήθος αριθμών ή κάποια σειρά έχει μεγαλύτερο πλήθος αριθμών από κάποια άλλη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

0:ΛΑΘΟΣ-ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕ

1:ΣΩΣΤΟ

(ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ)

0:ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΑΙΤΟΛΟΓΗΣΗ

Στη μία λείπουν αριθμοί.

Η μία έχει μεγαλύτερους αριθμούς.

Η μία έχει πιο πολλά ψηφία.

Δε μπορούν να συγκριθούν εφόσον είναι άπειρα.

1:ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΛΑΘΟΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Είναι ίδιο το πλήθος καθώς αποτελούνται από 7 αριθμούς .

Ίδιο αφού είναι άπειροι.

2:ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ- ΣΩΣΤΗ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Με αντιστοίχιση 1-1/με αναφορά σε σχέση τετραγώνων.

6) Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα ξενοδοχείο με άπειρα δωμάτια. Στο κάθε δωμάτιο μπορεί να μείνει μόνο ένα άτομο. Όλα τα δωμάτια είναι γεμάτα και δε μπορούν να κτισθούν καινούρια δωμάτια. Έστω ότι έρχεται να μείνει ένα καινούριο άτομο, υπάρχει τρόπος να φιλοξενηθεί στα δωμάτια που υπάρχουν χωρίς να μείνει μαζί με κάποιο άλλο;

α) Ναι, και ο τρόπος θα ήταν, ...

β) Όχι, διότι…..

0:ΟΧΙ-ΑΠΟΥΣΙΑ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ

1:ΝΑΙ

(ΓΙΑ ΤΟ ΝΑΙ)

0:ΑΠΟΥΣΙΑ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗΣ-ΛΑΘΟΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Απαντήσεις μέσα από την καθημερινή εμπειρία τους.

Να μείνει καθώς το άπειρο δεν ορίζεται.

1:ΣΩΣΤΗ ΜΕ ΜΗ ΕΠΑΡΚΗ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Ναι θα μπορούσε να φιλοξενηθεί, καθώς όλα τα δωμάτια είναι άπειρα, δηλαδή ατελείωτα.

2:ΣΩΣΤΗ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Ναι όλοι θα μετακινούνταν σε ένα άλλο δωμάτιο χ+1 άρα το καινούριο θα είναι κενό οπότε θα χωράει κάποιο άτομο.

7) Σε ένα παιχνίδι για να κερδίσει κανείς πρέπει να απαντήσει στην ερώτηση: Από τους αριθμούς που είναι μικρότεροι από το 10 υπάρχει κάποιος που να είναι πιο κοντινός σε αυτόν; Θα λέγατε κάποιον αριθμό ώστε να κερδίσετε;

0:ΝΑΙ
1:ΟΧΙ

8) Στις παρακάτω προτάσεις σημειώστε Ναι η Όχι ανάλογα με το αν χρησιμοποιείται σωστά η λέξη άπειρο.

Στα κεφάλια των ανθρώπων υπάρχουν άπειρες τρίχες.

Στην Ελλάδα υπάρχουν άπειρες καστανές γυναίκες.

ΕΡ.8Α

Ο: ΝΑΙ

1: ΟΧΙ

ΕΡ.8Β

Ο: ΝΑΙ

1: ΟΧΙ

9) Δίνονται οι παρακάτω σειρές αριθμών :

Σειρά Α: 1,2,3,4,5,6,7,.....

Σειρά Β: 2,4,6,8,10,12,14,.....

Διαβάστε προσεκτικά τις απαντήσεις που έδωσαν κάποιοι μαθητές και γράψτε αν συμφωνείτε ή διαφωνείτε μαζί τους αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Μαρία: Στη δεύτερη σειρά οι αριθμοί είναι περισσότεροι γιατί είναι μεγαλύτεροι οι αριθμοί.

0:ΛΑΘΟΣ-ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕ

1:ΣΩΣΤΟ

(ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ)

0:ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΛΑΘΟΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Είναι μεγαλύτερα στη δεύτερη ή έχει περισσότερα ψηφία.

Χρήση αθροίσματος.

1:ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΛΑΘΟΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Διαφωνώ υπάρχουν επτά νούμερα.

Διαφωνώ εφόσον είναι άπειροι.

Λείπουν αριθμοί.

2:ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ- ΣΩΣΤΗ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Με αντιστοίχιση 1-1/με αναφορά σε σχέση τετραγώνων.

Δεν έχει σημασία ότι οι αριθμοί είναι μεγαλύτεροι.

Κώστας: Μπορούμε να ζευγαρώσουμε τους αριθμούς μεταξύ τους άρα οι δύο σειρές είναι ίδιες στο πλήθος.

0:ΛΑΘΟΣ (ΔΗΛΑΔΗ ΔΙΑΦΩΝΗΣΕ ΜΕ ΤΟΝ ΚΩΣΤΑ)

1:ΣΩΣΤΟ (ΔΗΛΑΔΗ ΣΥΜΦΩΝΗΣΕ ΜΕ ΤΟΝ ΚΩΣΤΑ)

(ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΕΙΣ)

0:ΑΠΟΥΣΙΑ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗΣ - ΛΑΘΟΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Είναι μεγαλύτερα στη δεύτερη ή έχει περισσότερα ψηφία.

Χρήση αθροίσματος.

1:ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΛΑΘΟΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Επειδή είναι άπειροι/ατελείωτοι.

Είναι επτά και στις δύο σειρές.

2:ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ- ΣΩΣΤΗ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Συμφωνώ άμα τους συνδέσουμε/ζευγαρώσουμε μεταξύ τους.

Η δεύτερη είναι σα να έχει πολλαπλασιαστεί με το δύο.

Σοφία: Η πρώτη σειρά έχει πιο πολλούς αριθμούς από τη δεύτερη γιατί στη δεύτερη λείπουν ορισμένοι αριθμοί που είναι στην πρώτη.

0:ΛΑΘΟΣ-ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕ

1:ΣΩΣΤΟ

(ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ)

0:ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΛΑΘΟΣ ΑΙΤΟΛΟΓΗΣΗ

Είναι μεγαλύτερα στη δεύτερη ή έχει περισσότερα ψηφία.

Χρήση αθροίσματος.

1:ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΛΑΘΟΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Διαφωνώ υπάρχουν επτά νούμερα.

Διαφωνώ εφόσον είναι άπειροι.

Λείπουν αριθμοί.

Δε ξέρουμε τι ακολουθεί/ δε ξέρουμε τους αριθμούς/δε μπορούμε να ορίσουμε τους αριθμούς που είναι στη σειρά/δε ξέρουμε ποιοι λείπουν.

2:ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ- ΣΩΣΤΗ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Με αντιστοίχιση 1-1/με αναφορά σε σχέση τετραγώνων.

Δεν έχει σημασία ότι οι αριθμοί είναι μεγαλύτεροι.

Έχουν το ίδιο πλήθος/ ίδιο πλήθος δεν έχουν σημασία οι τιμές ή αν λείπουν.

Δεν έχει σημασία αν λείπουν αριθμοί αλλά πόσοι είναι.

Μιχάλης: Οι δύο σειρές έχουν το ίδιο πλήθος αριθμών καθώς οι αριθμοί που έχουν είναι άπειροι.

0:ΛΑΘΟΣ-ΔΕΝ ΑΠΑΝΤΗΣΕ

1:ΣΩΣΤΟ

(ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ)

0:ΛΑΘΟΣ ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΛΑΘΟΣ ΑΙΤΟΛΟΓΗΣΗ

Είναι επτά αριθμοί και στις δύο σειρές.

1:ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ-ΛΑΘΟΣ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Στη δεύτερη λείπουν αριθμοί.

Δεν ορίζεται το άπειρο για να ξέρουμε.

Δε ξέρουμε που σταματούν.

Είναι μεγαλύτεροι αριθμοί στη δεύτερη σειρά.

2:ΣΩΣΤΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗ- ΣΩΣΤΗ ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΗ

Η δεύτερη είναι σα να έχει πολλαπλασιαστεί με το δύο.

1-1 αντιστοίχιση

Μέσα από τη μελέτη της σχετικής βιβλιογραφίας αλλά και από την ομαδοποίηση των απαντήσεων που λάβαμε στα ερωτηματολόγια και συγκεκριμένα σε αυτές των ερωτήσεων 1 και 2 φαίνεται να υπάρχουν τρεις βασικές αντιλήψεις για την έννοια του απείρου. Η πρώτη αντίληψη είναι αυτή κατά την οποία οι μαθητές χαρακτηρίζουν ως άπειρο κάτι το οποίο είναι πολύ μεγάλο στο πλήθος αλλά πεπερασμένο. Συναντάμε αυτή την αντίληψη σε μαθητές οι οποίοι χαρακτηρίζουν ως άπειρο κάτι που έχει μεγάλο πλήθος και δεν είναι σε θέση να το μετρήσουν. Ένα μέρος των απαντήσεων που ανήκουν στη συγκεκριμένη αντίληψη αφορά τις απαντήσεις μαθητών οι οποίοι θεωρούν το άπειρο ως ένα μεγάλο αριθμό. Μέσα στο κείμενο θα αναφερόμαστε σε αυτή την αντίληψη ως «πεπερασμένη αντίληψη». Η δεύτερη αντίληψη αφορά απαντήσεις οι οποίες αναφέρονται στο άπειρο ως διαδικασία χωρίς τέλος, δηλαδή σε αυτό που γνωρίζουμε ως δυνητικό άπειρο. Για τη συγκεκριμένη αντίληψη θα αναφερόμαστε με τον όρο «διαδικαστική αντίληψη». Η τρίτη αντίληψη είναι αυτή η οποία αναφέρεται στο πραγματικό άπειρο σύμφωνα με την οποία οι μαθητές αντιλαμβάνονται ως άπειρο το σύνολο όλων των αριθμών ή το πλήθος των σημείων μια ευθείας. Για τη συγκεκριμένη αντίληψη θα αναφερόμαστε με τον όρο «πραγματική αντίληψη». Τέλος υπήρχαν κάποιες ελάχιστες απαντήσεις στις οποίες οι μαθητές αντιλαμβάνονται το άπειρο ως κάτι που δεν ορίζεται και είναι απροσδιόριστο.

Για κάθε αντίληψη δώσαμε κάποιες συγκεκριμένες τιμές. Η τιμή 0 αφορούσε την πεπερασμένη αντίληψη για την έννοια του απείρου, η μεταβλητή 1 τη διαδικαστική αντίληψη, η τιμή 2 την αντίληψη του πραγματικού απείρου. Η τιμή 3 αφορούσε απαντήσεις στις οποίες οι μαθητές θεωρούν το άπειρο ως κάτι απροσδιόριστο. Η τιμή 4 τοποθετήθηκε στις περιπτώσεις τις οποίες δεν προκύπτει κάποια συγκεκριμένη αντίληψη για την έννοια μέσα από τις απαντήσεις των μαθητών και μπορούν να θεωρηθούν ως μη χρήσιμες (missing) καθώς μέσα από αυτές δεν προκύπτει κάποια συγκεκριμένη αντίληψη.

Κωδικοί αντιλήψεων που χρησιμοποιήθηκαν στην ποσοτική ανάλυση των δεδομένων

0: πεπερασμένη αντίληψη

1: διαδικαστική αντίληψη

2: πραγματική αντίληψη

3: απροσδιόριστο

4: δεν προκύπτει κάποια αντίληψη

Στις ερωτήσεις 5 και 9 μελετήσαμε τα κριτήρια σύγκρισης που χρησιμοποιούν οι μαθητές κατά τη σύγκριση των άπειρων συνόλων. Τα κριτήρια προέκυψαν έπειτα από τη μελέτη των απαντήσεων των μαθητών.

Κωδικοί κριτηρίων σύγκρισης των άπειρων συνόλων που χρησιμοποιήθηκαν στην ποσοτική ανάλυση των δεδομένων

0: Μη κατανόηση συμβολισμού

1: Μεγαλύτεροι αριθμοί άρα περισσότεροι

2: Το μέρος μικρότερο από το όλον

3: Δε μπορούν να συγκριθούν

4: Όλα τα άπειρα είναι ίδια

5: 1-1 αντιστοίχιση

4.6.2 Στατιστική επεξεργασία των ποσοτικών δεδομένων (SPSS)

Για την περαιτέρω ανάλυση των δεδομένων αξιοποιήθηκαν επιπλέον εφαρμογές του SPSS. Συγκεκριμένα για τη συσχέτιση μεταξύ των αντιλήψεων που προέκυψαν στην ερώτηση 1 και 2, αξιοποιήθηκε ο συντελεστής συσχέτισης Kendall's tau_b ο οποίος αποτελεί ένα στατιστικό δείκτη που μας δείχνει τη συσχέτιση μεταξύ δύο μεταβλητών. Η τιμή του Kendall's tau_b κυμαίνεται από -1 έως 1. Το 1 υποδεικνύει πλήρη θετική συσχέτιση, όταν μια αύξηση στη μία μεταβλητή συνδέεται με αύξηση στη δεύτερη και αντίστροφα. Το -1 υποδεικνύει πλήρη αρνητική συσχέτιση, όταν μια αύξηση στη μία μεταβλητή συνδέεται με μείωση στη δεύτερη και αντίστροφα. Το 0 υποδεικνύει απουσία συσχέτισης.

Επιπλέον για τα ίδια ερωτήματα αξιοποιήθηκε το μη παραμετρικό τεστ Kruskal-Wallis, με τη βοήθεια του οποίου ελέγχθηκε αν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των αντιλήψεων που προκύπτουν σε κάθε ερώτηση. Το συγκεκριμένο τεστ αντί να χρησιμοποιεί τις πραγματικές τιμές των παρατηρήσεων, χρησιμοποιεί την ταξινόμηση (ranking) των τιμών για κάθε ομάδα. Η κύρια υπόθεση του Kruskal-Wallis είναι ότι οι διακυμάνσεις στις ομάδες είναι ίδιες. Το Mean Rank (μέσος όρος κατάταξης) είναι ένα αποτέλεσμα που σχετίζεται με το Kruskal-Wallis H Test και χρησιμοποιείται για να εκτιμήσουμε τη θέση κάθε ομάδας στο σύνολο των παρατηρήσεων. Αυτή η μέτρηση βασίζεται στην ταξινόμηση (ranking) των παρατηρήσεων για όλες τις ομάδες. Για κάθε παρατήρηση σε όλες τις ομάδες, υπολογίζεται η κατάταξη (rank), κάτι που είναι χρήσιμο για να κατανοήσουμε πώς κάθε ομάδα κατατάσσεται σε σχέση με τις άλλες. Η τιμή Asymp. Sig που προκύπτει από το τεστ είναι το p-value. Μια τιμή p που είναι χαμηλή (κάτω από 0,05) υποδεικνύει ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των ομάδων.

Τέλος, στην τελευταία ενότητα έγινε ανάλυση διακύμανσης ANOVA σε όλα τα ερωτήματα. Οι μαθητές χωρίστηκαν σε τρεις κατηγορίες (1Δ, 2Γ, 3Λ) οι οποίες αντιπροσώπευαν τους μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού, της Γ΄ Γυμνασίου και της Γ΄ Λυκείου αντίστοιχα, με σκοπό να εξετάσουμε αν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ τους. Για το σκοπό αυτό υπήρξαν συγκεκριμένες υποθέσεις.

Μηδενική υπόθεση (H0): Δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μέσων τιμών στις ομάδες.

Εναλλακτική υπόθεση (H1): Υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των μέσων τιμών στις ομάδες.

Εάν η τιμή p-value ήταν μικρότερη από το επίπεδο σημαντικότητας (0,05), απορρίψαμε τη μηδενική υπόθεση και συμπεράναμε ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των ομάδων.

4.6.3 Μεθοδολογία της ποιοτικής ανάλυσης των συνεντεύξεων

Η διαδικασία ανάλυσης των δεδομένων από τις συνεντεύξεις ξεκίνησε με την προσεκτική ανάγνωση όλων των απομαγνητοφωνημένων συνεντεύξεων. Στη συνέχεια, τα δεδομένα αναλύθηκαν λεπτομερώς, λέξη προς λέξη, με σκοπό τον εντοπισμό των αντιλήψεων, ενώ υπογραμμίστηκαν λέξεις και φράσεις που αποκάλυπταν την προέλευσή τους. Έπειτα τα δεδομένα χωρίστηκαν σε μικρότερα τμήματα, και σε κάθε ένα αποδόθηκε ένας κωδικός που αντιπροσώπευε την προέλευση των αντιλήψεων. Οι κωδικοί που προέκυψαν ομαδοποιήθηκαν σε ευρύτερες κατηγορίες. Π.χ. οι κωδικοί «Μαθηματική διδασκαλία» και «Διδασκαλία άλλων μαθημάτων» ομαδοποιήθηκαν στην κατηγορία «Σχολική Εκπαίδευση». Οι κατηγορίες αυτές ερμηνεύτηκαν στο πλαίσιο της έρευνας και συσχετίστηκαν με την βιβλιογραφία.

Επίσης από την ανάλυση των συνεντεύξεων προέκυψαν στοιχεία σχετικά με τον τρόπο σκέψης των μαθητών που οδηγεί στα κριτήρια σύγκρισης που εντοπίστηκαν στην ποσοτική έρευνα, κάποιες σπάνιες αντιλήψεις για την έννοια του απείρου, ασυνήθιστα κριτήρια σύγκρισης των άπειρων συνόλων ή απαντήσεις που δείχνουν τη μεταβλητότητα των απαντήσεων των μαθητών όταν συγκρίνουν άπειρα σύνολα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ V: ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

5.1 Αποτελέσματα από την ποσοτική ανάλυση των δεδομένων

5.1.1 Οι αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια του απείρου

Στην πρώτη ερώτηση ζητείται από τους μαθητές να γράψουν τρεις προτάσεις με τη λέξη άπειρο και έπειτα να γράψουν ξανά τις προτάσεις με το ίδιο νόημα χωρίς όμως να χρησιμοποιήσουν τη λέξη άπειρο. Με το συγκεκριμένο ερώτημα διερευνάται πως αντιλαμβάνονται τον όρο άπειρο οι μαθητές όταν τον χρησιμοποιούν. Στον πίνακα 5.1, όπου παρουσιάζονται οι αντιλήψεις των μαθητών στις τρεις υποερωτήσεις της ερώτησης 1, παρατηρούμε ότι η πεπερασμένη αντίληψη παρουσιάζει μικρή αύξηση από ερώτηση σε ερώτηση ενώ αντίθετα η διαδικαστική και η πραγματική αντίληψη παρουσιάζουν μικρή μείωση. Τα ποσοστά που αντιστοιχούν σε κάθε αντίληψη προέκυψαν από το σύνολο των μαθητών που απάντησαν στα ερωτηματολόγια. Στη συγκεκριμένη ερώτηση η αντίληψη με το μεγαλύτερο ποσοστό είναι η πεπερασμένη, δηλαδή αυτή ως κάτι πολύ μεγάλου αλλά πεπερασμένου στο πλήθος ή εκείνη ως αριθμού. Κάποιες χαρακτηριστικές απαντήσεις των μαθητών της Στ΄ Δημοτικού είναι «οι μαθητές στο σχολείο είναι άπειροι», «το νερό στον πλανήτη είναι άπειρο» κ.ά. Παρατηρούμε οι μαθητές να κάνουν χρήση της λέξης άπειρο είτε για να εκφράσουν το πολύ μεγάλο πλήθος είτε όταν δεν είναι σε θέση να μετρήσουν κάποια ποσότητα. Αντίστοιχη χρήση της λέξης άπειρο συναντάμε και σε μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και της Γ΄ Λυκείου. Για παράδειγμα ένας μαθητής της Γ΄ Γυμνασίου έγραψε «υπάρχουν άπειροι λόγοι που δεν έγραψα καλά στο διαγώνισμα» και ένας μαθητής της Γ΄ Λυκείου «σε μία παραλία υπάρχουν άπειροι κόκκοι άμμου». Στην ίδια κατηγορία αντίληψης εντάσσονται και οι απαντήσεις στις οποίες οι μαθητές θεωρούν το άπειρο ως αριθμό, για παράδειγμα ένας μαθητής της Γ΄ Λυκείου έγραψε «ο μεγαλύτερος αριθμός είναι το άπειρο». Το πλαίσιο της πρώτης ερώτησης δεν είναι μαθηματικό και ίσως σε αυτό να οφείλονται τα υψηλά ποσοστά της πεπερασμένης αντίληψης καθώς οι μαθητές έδωσαν αρκετές απαντήσεις κάνοντας μεταφορική χρήση της λέξης άπειρο. Ένα σημαντικό ποσοστό των μαθητών έγραψε προτάσεις οι οποίες δείχνουν διαδικαστική αντίληψη. Για παράδειγμα ένας μαθητής της ΣΤ΄ Δημοτικού έγραψε «δεν ξέρω που τελειώνουν οι αριθμοί καθώς είναι άπειροι», ενώ μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και της Γ΄ Λυκείου συχνά ανέφεραν ότι «το άπειρο δηλώνει κάτι το απεριόριστο» ή «οι αριθμοί είναι άπειροι δηλαδή δεν έχουν τέλος», δείχνοντας την αντίληψή τους για την έννοια του απείρου ως διαδικασία χωρίς τέλος. Οι μαθητές στους οποίους συναντάμε την αντίληψη του πραγματικού απείρου παρουσιάζουν το μικρότερο ποσοστό. Οι χαρακτηριστικότερες απαντήσεις της συγκεκριμένης αντίληψης είναι αυτές που αναφέρουν ότι όλοι οι αριθμοί είναι άπειροι ή αυτές οι οποίες αναφέρονται στην απειρία του σύμπαντος ως ολότητα το οποίο περιέχει άπειρο πλήθος αστεριών και πλανητών.

Πίνακας 5.1: Αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο στην ερώτηση 1

Αντίληψη	Ερ.1α	Ερ.1β	Ερ.1γ
Πεπερασμένη	44,3%	48,0%	50,9%
Διαδικαστική	31,8%	27,1%	21%
Πραγματική	13,5%	12,2%	8,8%
Ασαφής αντίληψη	10,4%	12,7%	19,3%

Η δεύτερη ερώτηση του ερωτηματολογίου (πίνακας 5.2) είναι η πιο σημαντική όσον αφορά τις αντιλήψεις που προκύπτουν για την έννοια του απείρου καθώς σε αυτή οι μαθητές καλούνται να αναφέρουν τι νομίζουν ότι είναι το άπειρο στα Μαθηματικά. Πρέπει να σημειώσουμε ότι πολλοί μαθητές στην ερώτηση αυτή απάντησαν με μαθηματικά παραδείγματα. Παρατηρούμε ότι η συχνότερη αντίληψη είναι η διαδικαστική καθώς οι περισσότεροι μαθητές έδωσαν απαντήσεις σχετικές με το δυνητικό άπειρο. Για παράδειγμα ένας μαθητής του Δημοτικού έδωσε την απάντηση «άπειρο είναι ότι οι αριθμοί στα Μαθηματικά δεν τελειώνουν ποτέ». Παρόμοιες απαντήσεις συναντήσαμε και σε μεγαλύτερες τάξεις όπως στο Γυμνάσιο «το άπειρο στα Μαθηματικά κατά την άποψή μου είναι κάτι το οποίο δεν τελειώνει» και στο Λύκειο «δεν θα μπορούσαμε να ορίσουμε το άπειρο ως σύνολο αριθμών, αλλά ως την αύξουσα ή τη φθίνουσα πορεία των αριθμών χωρίς κάποιο συγκεκριμένο τέλος», «είναι κάτι το οποίο δεν διακόπτεται από κάποιο όριο» οι οποίες δείχνουν την αντίληψη του απείρου ως μια ατέρμονη διαδικασία. Στη συγκεκριμένη ερώτηση, το ποσοστό των μαθητών που εμφανίζει πεπερασμένη αντίληψη μειώθηκε σημαντικά σε σχέση με την πρώτη ερώτηση. Αυτό ίσως οφείλεται στο μαθηματικό πλαίσιο της ερώτησης. Παρ’ όλα αυτά δεν έλειψαν απαντήσεις στη ΣΤ΄ Δημοτικού όπως «το άπειρο είναι ο μεγαλύτερος αριθμός», ή «στα Μαθηματικά το άπειρο είναι όταν θέλουμε να εκφράσουμε το πάρα πολύ». Ένας μαθητής της Γ΄ Γυμνασίου ανέφερε «είναι κάτι το οποίο δεν μπορούμε να υπολογίσουμε και να φανταστούμε», ενώ παρουσιάζουν ενδιαφέρον απαντήσεις όπως «είναι μια γενικότερη έννοια για μεγάλους αριθμούς που δεν μπορούμε με ευκολία να υπολογίσουμε» που δείχνουν την πεπερασμένη αντίληψη ακόμα και στην Γ΄ Λυκείου.

Πίνακας 5.2:Αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο στην ερώτηση 2

Αντίληψη	
Πεπερασμένη	17,2%
Διαδικαστική	41,6%
Πραγματική	22,5%
Απροσδιόριστη έννοια	4%
Ασαφής αντίληψη	14,7%

Παρατηρώντας τον πίνακα 5.2 βλέπουμε ότι περίπου ένας στους τέσσερις μαθητές φαίνεται να αντιλαμβάνεται το άπειρο με την έννοια του πραγματικού απείρου. Για παράδειγμα ένας μαθητής του Δημοτικού αναφέρθηκε στα άπειρα σημεία μιας ευθείας ενώ ένας μαθητής της Γ΄ Γυμνασίου έκανε αναφορά στο ότι άπειροι είναι όλοι οι αριθμοί αλλά και τα σημεία μιας ευθείας. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το ακόλουθο παράδειγμα ενός μαθητή της Γ΄ Γυμνασίου «Έχουμε ένα ρολόι που μετράει 60 λεπτά. Μετά από 30 λεπτά πατάμε ένα κουμπί. Μετά από 15 λεπτά το πατάμε ξανά. Μετά από 7.5 λεπτά ξανά και πάει λέγοντας… μόλις τελειώσει η μία ώρα θα έχουμε πατήσει το κουμπί άπειρες φορές», βλέπουμε δηλαδή να αντιμετωπίζει το άπειρο ως μια ολοκληρωμένη διαδικασία. Οι περισσότεροι μαθητές του λυκείου που ανήκουν στη συγκεκριμένη αντίληψη ανέφεραν ότι άπειρο είναι το πλήθος όλων των αριθμών. Τέλος δεν πρέπει να αγνοήσουμε ότι ένα μικρό ποσοστό των μαθητών θεωρεί ότι το άπειρο είναι κάτι το απροσδιόριστο. Χαρακτηριστική είναι η απάντηση ενός μαθητή της Γ΄ Γυμνασίου «το άπειρο στα Μαθηματικά είναι κάτι που δεν μπορούμε να το προσδιορίσουμε, δεν μπορούμε να το ορίσουμε» και ενός μαθητής της Γ΄ Λυκείου «πρόκειται για μια απροσδιόριστη έννοια».

5.1.2 Οι αντιλήψεις που διαμορφώνουν οι μαθητές για την έννοια του απείρου κατά τη διάρκεια της σχολικής τους εκπαίδευσης

Στη συγκεκριμένη ενότητα παρουσιάζονται οι αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο ανά εκπαιδευτική βαθμίδα και συγκεκριμένα στη ΣΤ΄ Δημοτικού, τη Γ΄ Γυμνασίου και τη Γ΄ Λυκείου . Οι μαθητές έδωσαν τρεις απαντήσεις στην πρώτη ερώτηση οι οποίες έχουν χωριστεί σε τρία μέρη αντίστοιχα 1α,1β,1γ (πίνακας 5.3).

Παρατηρούμε ότι υψηλότερα ποσοστά και ανά τάξη εμφανίζει η πεπερασμένη αντίληψη με μία μικρή μείωση του ποσοστού της κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο γυμνάσιο και περίπου ίδια ποσοστά ανάμεσα στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο. Τα ιδιαίτερα υψηλά ποσοστά δείχνουν το πόσο συχνή είναι σε όλες τις τάξεις η μεταφορική χρήση της λέξης άπειρο για κάτι πολύ μεγάλο αλλά πεπερασμένο το οποίο δεν έχουμε τη δυνατότητα να το μετρήσουμε. Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα αναδεικνύει σοβαρούς προβληματισμούς σχετικά με το βαθμό στον οποίο η καθημερινή χρήση της λέξης επηρεάζει και τη μαθηματική της χρήση καθώς η ταύτισή της με το «πάρα πολύ αλλά πεπερασμένο» μπορεί να δημιουργήσει σημαντικές εσφαλμένες αντιλήψεις. Η δεύτερη συχνότερη αντίληψη είναι η διαδικαστική χωρίς να παρουσιάζονται σημαντικές διαφορές στα ποσοστά της ανάμεσα στις εκπαιδευτικές βαθμίδες που μελετήσαμε. Όσον αφορά την πραγματική αντίληψη παρατηρούμε αύξηση των ποσοστών της κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο και από το Γυμνάσιο στο Λύκειο, κάτι το οποίο είναι αναμενόμενο. Αξιοσημείωτο είναι ότι παρά το διπλασιασμό των ποσοστών της πραγματικής αντίληψης στη Γ΄ Λυκείου σε σχέση με τη ΣΤ' Δημοτικού, εξακολουθεί να είναι αυτή με τη μικρότερη συχνότητα.

Τέλος, όσον αφορά τα ποσοστά των αντιλήψεων στις υποερωτήσεις της ερώτηση 1, παρατηρούμε ότι για την πεπερασμένη και την διαδικαστική αντίληψη ακολουθείται το ίδιο μοτίβο με αυτό που παρατηρήσαμε στον Πίνακα 5.1.

Πίνακας 5.3: Αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο ανά εκπαιδευτική βαθμίδα στην ερώτηση 1α, 1β και 1γ

Βαθμίδα / Αντίληψη	Δημοτικό Ερ.1α-1β-1γ			Γυμνάσιο Ερ.1α-1β-1γ			Λύκειο Ερ.1α-1β-1γ		
Πεπερασμένη	50,8 %	58,1 %	64,5 %	40,9 %	43,5 %	42,2 %	41,4 %	42,4 %	47,5 %
Διαδικαστική	34,7 %	23,4 %	19,4 %	33,1 %	32,5 %	22,1 %	26,3 %	23,2 %	21,2 %
Πραγματική	8,1 %	8,1%	4%	15,6 %	9,7%	9,1%	17,2 %	21,2 %	14,1 %
Ασαφής αντίληψη	6,5 %	10,5 %	12,1 %	10,4 %	14,3 %	26,6 %	15,2 %	13,1 %	17,2 %

Στον Πίνακα 5.4 παρουσιάζονται τα ποσοστά των αντιλήψεων ανά τάξη, όπως αυτά προκύπτουν από τις απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση 2. Παρατηρούμε ότι η διαδικαστική αντίληψη επικρατεί σε όλες τις τάξεις. Η πεπερασμένη αντίληψη παρουσιάζει υψηλότερα ποσοστά στο Δημοτικό όπου συναντάται σε περίπου έναν στους τέσσερις μαθητές. Παρ' όλα αυτά, και παρά τη μείωσή τους, σημαντικά είναι και τα ποσοστά που συναντάμε στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο. Στη συγκεκριμένη ερώτηση οι μαθητές καλούνταν να αναφέρουν τι νομίζουν ότι είναι το άπειρο στα Μαθηματικά, όμως παρά το μαθηματικό πλαίσιο της ερώτησης ένα μέρος των μαθητών εξακολουθεί να αντιλαμβάνεται το άπειρο ως κάτι πολύ μεγάλο αλλά πεπερασμένο. Ένα σημαντικό ποσοστό των μαθητών αναφέρθηκε στην απειρία των αριθμών, με αποτέλεσμα ακόμα και στη ΣΤ΄ Δημοτικού να συναντάμε απαντήσεις οι οποίες αφορούν το πραγματικό άπειρο (πραγματική αντίληψη). Τα συγκεκριμένα ποσοστά είναι λίγο υψηλότερα όπως αναμένονταν στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο.

Πίνακας 5.4:Αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο ανά εκπαιδευτική βαθμίδα στην ερώτηση 2

Βαθμίδα / Αντίληψη	Δημοτικό	Γυμνάσιο	Λύκειο
Πεπερασμένη	25%	13%	14,1%
Διαδικαστική	45,2%,	39,6%	40,4%
Πραγματική	21%	24%	22,2%
Απροσδιόριστη έννοια	0%	5,2%	7,1%
Ασαφής αντίληψη	8,9%	18,2%	16,2%

Η συχνότερη αντίληψη σε όλα τα εκπαιδευτικά επίπεδα είναι η διαδικαστική, της οποίας το ποσοστό δεν αλλάζει σημαντικά κατά τη διάρκεια των σχολικών σπουδών. Οι μεγαλύτερες αλλαγές στην αντίληψη συμβαίνουν κατά τη μετάβαση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο κυρίως όσον αφορά την πεπερασμένη αντίληψη η οποία μειώνεται. Επιπλέον ενώ στο Δημοτικό απουσιάζουν απαντήσεις στις οποίες οι μαθητές θεωρούν το άπειρο ως κάτι απροσδιόριστο, η έλλειψη της διδασκαλίας κάποιο ορισμού ίσως οδήγησε ένα μικρό μέρος των μαθητών στις μεγαλύτερες τάξεις στην αντιμετώπιση του απείρου ως κάποιο μαθηματικό αντικείμενο που δεν ορίζεται. Παρουσιάζει ενδιαφέρον ότι τα ποσοστά των αντιλήψεων ανάμεσα στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο είναι περίπου τα ίδια. Φαίνεται οι αντιλήψεις να μην επηρεάζονται από την εκπαιδευτική διαδικασία με αποτέλεσμα αυτές να σταθεροποιούνται μετά το Δημοτικό.

Από τα προηγούμενα, παρατηρούμε ότι συχνά οι μαθητές χρησιμοποιούν τη λέξη άπειρο λανθασμένα για να εκφράσουν το «πάρα πολύ» καθώς ένα μεγάλο ποσοστό τους ειδικά στις μικρές τάξεις κάνει μεταφορική χρήση της λέξης για πράγματα τα οποία στην πραγματικότητα είναι πεπερασμένα. Τα παιδιά σε αρκετές περιπτώσεις δεν κατανοούν τη διαφορά μεταξύ του μεγάλου πεπερασμένου και του άπειρου συνόλου. Η διαδικαστική αντίληψη φαίνεται να είναι η πιο συχνή, καθώς οι μαθητές σε αρκετές περιπτώσεις αντιμετωπίζουν το άπειρο ως μια διαδικασία χωρίς τέλος. Η σημαντικότερη ερώτηση για την εξαγωγή συμπερασμάτων για τις αντιλήψεις των μαθητών είναι η δεύτερη καθώς οι μαθητές ουσιαστικά καλούνται να δώσουν τον «προσωπικό ορισμό» τους για την έννοια του απείρου. Το είδος της κάθε ερώτησης φαίνεται να επηρεάζει τις απαντήσεις των μαθητών επομένως και τις αντιλήψεις που διαμορφώνονται. Συγκεκριμένα, όταν οι μαθητές καλούνται να δώσουν κάποιο παράδειγμα που αφορά την έννοια του απείρου, η πεπερασμένη αντίληψη είναι αυτή που επικρατεί ενώ όταν προσπαθούν να δώσουν τον «προσωπικό» τους ορισμό για την έννοια η διαδικαστική αντίληψη είναι αυτή που κυριαρχεί. Επιπλέον υπάρχει σημαντική σταθερότητα των αντιλήψεων ειδικά μεταξύ των μαθητών του Γυμνασίου και του λυκείου. Εξετάζοντας τις απαντήσεις συνολικά και για τις τρεις τάξεις προκύπτουν μικρές διαφοροποιήσεις για την κάθε αντίληψη στο πέρασμα των χρόνων, φαίνεται λοιπόν αυτές να έχουν ως αφετηρία τους κυρίως τη διαίσθηση και όχι την μαθηματική εκπαίδευση.

5.1.3 Συσχέτιση μεταξύ των αντιλήψεων για το άπειρο

Παρατηρώντας τον πίνακα 7.1 (παράρτημα), βλέπουμε πως οι συσχετίσεις μεταξύ των ποσοστών των αντιλήψεων στις ερωτήσεις 1α,1β και 1γ είναι στατιστικά σημαντικές δηλαδή σε επίπεδο μικρότερο του 1%. Αντιθέτως, τα ποσοστά των αντιλήψεων στο ερώτημα 2 έχουν αδύναμες έως μέτριες συσχετίσεις με τα ερωτήματα 1α, 1β και 1γ. Τα ερωτήματα 1α, 1β και 1γ είναι ουσιαστικά τα τρία μέρη τις ίδιας ερώτησης και γι' αυτό υπάρχει σημαντική συσχέτιση μεταξύ τους καθώς σε αυτές μελετώνται τα παραδείγματα που έδωσαν οι μαθητές με τη λέξη άπειρο. Η ισχυρή συσχέτιση, μεταξύ των 1α,1β και 1γ σημαίνει ότι οι απαντήσεις που δίνουν οι ερωτηθέντες σε αυτές τις ερωτήσεις τείνουν να συμπίπτουν. Αν ένας ερωτηθείς δώσει σωστή απάντηση στην ερώτηση 1α, τότε είναι πιθανό να δώσει σωστή απάντηση και στις ερωτήσεις 1β και 1γ. Οι συγκεκριμένες ερωτήσεις μας δείχνουν τις αντιλήψεις για το άπειρο ακόμα και εκτός μαθηματικού πλαισίου και γι' αυτό δεν παρουσιάζουν ισχυρή συσχέτιση με την ερώτηση 2 η οποία έχει αυστηρό μαθηματικό χαρακτήρα καθώς σε αυτή ζητείται από τους μαθητές να απαντήσουν τι νομίζουν στα Μαθηματικά ότι είναι το άπειρο.

5.1.4 Στατιστική σημαντικότητα των αποτελεσμάτων των αντιλήψεων για το άπειρο

Στον πίνακα 7.2 (παράρτημα) φαίνεται να υπάρχει μια τάση οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και της Γ΄ Λυκείου να έχουν υψηλότερους μέσους όρους κατάταξης (Mean Ranks) σε σχέση με τους μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού. Αν δούμε τα συγκριτικά αποτελέσματα στις ερωτήσεις 1α,1β και 1γ οι μαθητές του Γυμνασίου και του Λυκείου έχουν υψηλότερους μέσους όρους κατάταξης από αυτούς του Δημοτικού αλλά όχι σημαντικές διαφορές μεταξύ τους. Η τάση που παρατηρείται στον πίνακα 6.2, όπου οι μαθητές της Γ' Γυμνασίου και της Γ' Λυκείου παρουσιάζουν υψηλότερους μέσους όρους κατάταξης (Mean Ranks) σε σχέση με τους μαθητές της ΣΤ' Δημοτικού, υποδηλώνει ότι οι μεγαλύτεροι μαθητές έχουν πιο σωστές αντιλήψεις για το άπειρο, μέσα από τα παραδείγματα που έδωσαν, σε σύγκριση με τους μικρότερους μαθητές. Στην ερώτηση 2 οι διαφορές στους μέσους όρους κατάταξης μεταξύ των τριών τάξεων που μελετήθηκαν είναι μικρότερες.

Τα Kruskal-Wallis H και Asymp. Sig. του πίνακα 7.3 (παράρτημα) είναι αποτελέσματα που προκύπτουν από το Kruskal-Wallis Test. Ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας είναι 2, καθώς υπάρχουν τρεις ομάδες (ΣΤ΄ Δημοτικού, Γ΄ Γυμνασίου, Γ΄ Λυκείου). Τα αποτελέσματα δείχνουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις αντιλήψεις μεταξύ των ομάδων για τις ερωτήσεις 1β και 1γ, καθώς τα p-values είναι μικρότερα από τα καθορισμένα επίπεδα σημαντικότητας και συγκεκριμένα 0,016 και 0,010. Συμπεραίνουμε ότι οι μαθητές, μέσα από τα παραδείγματα που έδωσαν, παρουσίασαν διαφορά στις αντιλήψεις τους για το άπειρο σε αυτές τις δύο ερωτήσεις. Φαίνεται, στην ερώτηση 1γ να παρουσιάζουν τη μεγαλύτερη διαφορά στις αντιλήψεις τους μεταξύ των τριών τάξεων, καθώς η τιμή του Kruskal-Wallis H είναι η υψηλότερη από όλες. Οι στατιστικά σημαντικές διαφορές στις ερωτήσεις 1β και 1γ οφείλονται στη μείωση των παραδειγμάτων που αφορούν τη διαδικαστική αντίληψη στις μεγαλύτερες τάξεις και στην αύξηση των ποσοστών των παραδειγμάτων που αφορούν την πεπερασμένη αντίληψη ειδικά στη ΣΤ΄ Δημοτικού. Ωστόσο, δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές για την ερώτηση 2, καθώς τα αντίστοιχα p-values είναι 0,170 και 0,107 δηλαδή μεγαλύτερα από 0,05. Τα αποτελέσματα της ερώτησης 1α δείχνουν ότι στο πρώτο παράδειγμα που έδωσαν οι μαθητές για το άπειρο, δεν υπήρξαν στατιστικά σημαντικές διαφορές στην αντίληψή τους για την έννοια μεταξύ των μαθητών της ΣΤ΄ Δημοτικού, της Γ΄ Γυμνασίου και της Γ΄ Λυκείου. Παρόμοια αποτελέσματα έχουμε στην ερώτηση 2 όπου οι μαθητές καλούνται να αναφέρουν τι νομίζουν στα Μαθηματικά ότι είναι το άπειρο. Παρατηρούμε δηλαδή, ότι σε αυτές τις δύο ερωτήσεις οι μαθητές παρουσίασαν παρόμοιες αντιλήψεις σε κάθε τάξη.

Τα αποτελέσματα στις ερωτήσεις 1α και 2 δείχνουν ότι δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές στις αντιλήψεις καθώς η αφετηρία αυτών είναι η διαίσθηση και όχι η συστηματική διδασκαλία. Παρ' όλα αυτά στην ερώτηση 1 όσο οι μαθητές σχημάτιζαν προτάσεις με το άπειρο έδειξαν να δυσκολεύονται, ειδικά στο Δημοτικό, με αποτέλεσμα να δίνουν απαντήσεις που αφορούν κυρίως την πεπερασμένη αντίληψη στα 1β και 1γ . Σε αυτό οφείλονται οι στατιστικά σημαντικές διαφορές μεταξύ των τριών τάξεων που μελετήθηκαν.

5.1.5 Συμβατότητα των αντιλήψεων μεταξύ των ερωτήσεων

Στην παρούσα ενότητα εξετάζουμε τη συμβατότητα των αντιλήψεων για το άπειρο ανάμεσα στην ερώτηση 2 και στις αντιλήψεις που εμφάνισαν οι μαθητές στην ερώτηση 1 αλλά και τις απαντήσεις που έδωσαν στις ερωτήσεις 4 και 8. Από την ερώτηση 2 προέκυψαν οι κυρίαρχες αντιλήψεις για το άπειρο ενώ οι υπόλοιπες ερωτήσεις δείχνουν και αυτές, τις αντιλήψεις που έχουν οι μαθητές για το άπειρο. Η συμβατότητα των απαντήσεων μελετήθηκε ξεχωριστά για κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα.

Τα ευρήματα, όπως παρουσιάζονται στον πίνακα 4.5 αποτυπώνουν ενδιαφέρουσες τάσεις και εξελικτικές διαφοροποιήσεις. Συγκεκριμένα, ανάμεσα στους μαθητές που εμφάνισαν πεπερασμένη αντίληψη στην ερώτηση 2, η πεπερασμένη αντίληψη του απείρου αποτελεί την πιο συχνή αντίληψη που προκύπτει από τις απαντήσεις στην ερώτηση 1 σε όλες τις ηλικιακές ομάδες. Η συχνότητα εμφάνισής της μειώνεται σταδιακά από το Δημοτικό προς το Λύκειο, υποδηλώνοντας εξελικτική πορεία. Η διαδικαστική αντίληψη του απείρου έρχεται δεύτερη σε συχνότητα. Σε αντίθεση με την πεπερασμένη αντίληψη, η συχνότητα της διαδικαστικής αντίληψης αυξάνεται σταδιακά από το Δημοτικό προς το Λύκειο. Η πραγματική αντίληψη του απείρου, εμφανίζεται σπάνια. Τα αποτελέσματα υποδηλώνουν εξελικτική πορεία στην αντίληψη του απείρου στους μαθητές, καθώς στο Δημοτικό, οι μαθητές τείνουν να δίνουν παραδείγματα που αφορούν την πεπερασμένη αντίληψη, βλέποντας το άπειρο ως ένα πολύ μεγάλο, αλλά τελικά περιορισμένο μέγεθος. Στις μεγαλύτερες εκπαιδευτικές βαθμίδες, οι μαθητές αρχίζουν να αναπτύσσουν διαδικαστική αντίληψη, αντιλαμβανόμενοι το άπειρο ως μια διαδικασία που δεν έχει τέλος. Η πεπερασμένη αντίληψη κυριαρχεί στο Δημοτικό και σταδιακά υποχωρεί προς όφελος της διαδικαστικής αντίληψης. Στο Λύκειο, η πεπερασμένη αντίληψη μειώνεται ακόμα περισσότερο, ενώ η διαδικαστική αντίληψη γίνεται η πιο συχνή.

Πίνακας 5.5: Συμβατότητα των αντιλήψεων με την ερώτηση 2 στην ερώτηση 1 (πεπερασμένη αντίληψη)

Αντίληψη στην Ερ.2	**Βαθμίδα**	**Αντίληψη**	**Ερ.1α**	**Ερ.1β**	**Ερ.1γ**
Πεπερασμένη	Δημοτικό	Πεπερασμένη	67,7%	74,2%	67,7%
		Διαδικαστική	16,1%	16,1%	16,1%
		Πραγματική	9,7%	0%	6,5%
		Ασαφής αντίληψη	6,5%	9,7%	9,7%
	Γυμνάσιο	Πεπερασμένη	50%	40,0%	60,0%
		Διαδικαστική	25%	40,0%	15,0%
		Πραγματική	20%	0%	5,0%
		Ασαφής αντίληψη	5%	20%	20,0%
	Λύκειο	Πεπερασμένη	50%	42,9%	35,7%
		Διαδικαστική	42,9%	28,6%	28,6%
		Πραγματική	0%	28,6%	28,6%
		Ασαφής αντίληψη	7,1%	0%	7,1%

Από τους μαθητές που στη δεύτερη ερώτηση εμφάνισαν διαδικαστική αντίληψη (πίνακας 5.6), η πεπερασμένη αντίληψη του απείρου αποτελεί και σε αυτή την περίπτωση την πιο συχνή σε όλες τις ηλικιακές ομάδες. Όμως, σε αυτή την περίπτωση η συχνότητα εμφάνισής της δεν διαφοροποιείται σημαντικά ανάμεσα στις τρεις τάξεις που μελετήθηκαν. Η διαδικαστική αντίληψη του απείρου έρχεται δεύτερη σε συχνότητα. Η συχνότητα εμφάνισής της αυξάνεται ελαφρώς από το Δημοτικό προς το Γυμνάσιο, και ύστερα μειώνεται στο Λύκειο. Η πραγματική αντίληψη του απείρου εμφανίζεται συχνότερα από ό,τι προηγουμένως. Φαίνεται ότι οι μαθητές που εμφάνισαν διαδικαστική αντίληψη στην ερώτηση 2 δίνουν πιο εύκολα παραδείγματα για το άπειρο που αφορούν την πραγματική αντίληψη σε σχέση με αυτούς που ανήκουν στην πεπερασμένη αντίληψη . Τα ευρήματα σε αυτή την περίπτωση δείχνουν μια μικρή εξελικτική πορεία στην αντίληψη του απείρου κυρίως όσον αφορά την πραγματική αντίληψη.

Πίνακας 5.6: Συμβατότητα των αντιλήψεων με την ερώτηση 2 στην ερώτηση 1 (διαδικαστική αντίληψη)

Αντίληψη στην Ερ.2	Βαθμίδα	Αντίληψη	Ερ.1α	Ερ.1β	Ερ.1γ
Διαδικαστική	Δημοτικό	Πεπερασμένη	44,6%	48,2%	64,3%
		Διαδικαστική	39,3%	26,8%	16,1%
		Πραγματική	10,7%	12,5%	5,4%
		Ασαφής αντίληψη	5,4%	12,5%	14,3%
	Γυμνάσιο	Πεπερασμένη	36,1%	49,2%	37,7%
		Διαδικαστική	45,9%	32,8%	29,5%
		Πραγματική	16,4%	11,5%	11,5%
		Ασαφής αντίληψη	1,6%	6,6%	21,3%
	Λύκειο	Πεπερασμένη	42,5%	42,5%	50,0%
		Διαδικαστική	22,5%	25,0%	30,0%
		Πραγματική	22,5%	15,0%	5,0%
		Ασαφής αντίληψη	12,5%	17,5%	15,0%

Τέλος παρουσιάζει ενδιαφέρον να δούμε τα ποσοστά των αντιλήψεων στους μαθητές που παρουσίασαν πραγματική αντίληψη για το άπειρο (πίνακας 5.7). Παρατηρούμε μια εξελικτική πορεία στις τρεις κατηγορίες αντίληψης (πεπερασμένη, διαδικαστική, πραγματική) από το Δημοτικό προς το Λύκειο. Η πεπερασμένη εμφανίζει τα μεγαλύτερα ποσοστά και στις τρεις τάξεις που μελετήθηκαν. Επιπλέον τα ποσοστά της μειώνονται σημαντικά από τη ΣΤ΄ Δημοτικού στη Γ΄ Γυμνασίου. Η διαδικαστική αντίληψη μειώνεται στη Γ΄ Λυκείου, ενώ η πραγματική αντίληψη αυξάνεται σταδιακά από το Δημοτικό προς το Λύκειο. Η εκπαιδευτική βαθμίδα φαίνεται να επηρεάζει την αντίληψη που εμφανίζουν οι μαθητές για το άπειρο μέσα από τα παραδείγματα που δίνουν.

Πίνακας 5.7: Συμβατότητα των αντιλήψεων με την ερώτηση 2 στην ερώτηση 1 (πραγματική αντίληψη)

Αντίληψη στην Ερ.2	**Βαθμίδα**	**Αντίληψη**	**Ερ.1α**	**Ερ.1β**	**Ερ.1γ**
Πραγματική	Δημοτικό	Πεπερασμένη	50%	69,2%	73,1%
		Διαδικαστική	42,3%	15,4%	23,1%
		Πραγματική	3,8%	11,5%	0%
		Ασαφής αντίληψη	3,8%	3,8%	3,8%
	Γυμνάσιο	Πεπερασμένη	43,2%	32,4%	43,2%
		Διαδικαστική	27%	37,8%	24,3%
		Πραγματική	13,5%	10,8%	5,4%
		Ασαφής αντίληψη	16,2%	18,9%	27,0%
	Λύκειο	Πεπερασμένη	36,4%	45,5%	45,5%
		Διαδικαστική	31,8%	13,6%	9,1%
		Πραγματική	18,2%	36,4%	22,7%
		Ασαφής αντίληψη	13,6%	4,5%	22,7%

Συμπερασματικά, όσον αφορά τις αντιλήψεις που αναδεικνύονται μέσα από τα παραδείγματα των μαθητών που έδωσαν στην ερώτηση 1, η πεπερασμένη αντίληψη είναι η πιο συχνή σε όλες τις ηλικιακές ομάδες και στις τρεις περιπτώσεις, ενώ μειώνεται κυρίως από τη ΣΤ΄ Δημοτικού στη Γ΄ Γυμνασίου. Η διαδικαστική αντίληψη είναι η δεύτερη πιο συχνή, ενώ όσον αφορά την εξέλιξή της στις διάφορες εκπαιδευτικές βαθμίδες εξαρτάται από το είδος της αντίληψης που εμφάνισαν οι μαθητές στην ερώτηση 2. Τέλος, η πραγματική αντίληψη είναι η σπανιότερη και αυξάνεται σταδιακά από το Δημοτικό προς το Λύκειο σε όλες τις περιπτώσεις.

Συμβατότητα Πεπερασμένης Αντίληψης

Τα ποσοστά της πεπερασμένης αντίληψης (στην ερώτηση 1), παρ' ότι είναι αρκετά υψηλά και στις τρεις περιπτώσεις των βασικών αντιλήψεων που προέκυψαν στην ερώτηση 2, φαίνεται να είναι υψηλότερα στην περίπτωση που οι μαθητές ανήκουν στην κατηγορία της πεπερασμένης αντίληψης. Κάτι τέτοιο είναι αναμενόμενο καθώς οι μαθητές που εμφανίζουν πεπερασμένη αντίληψη ενδέχεται να δυσκολεύονται να κατανοήσουν τις έννοιες του δυνητικού απείρου και αυτή του πραγματικού απείρου. Έχουν την τάση να ερμηνεύουν το άπειρο ως ένα πεπερασμένο μέγεθος, αντί για μια διαδικασία ή την έννοια του πραγματικού απείρου. Συγκεκριμένα, από τους μαθητές που εμφάνισαν πεπερασμένη αντίληψη, περίπου επτά στους δέκα της ΣΤ΄ Δημοτικού, οι μισοί μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και τέσσερις στους δέκα μαθητές της Γ΄ Λυκείου έδωσαν στην ερώτηση 1 κάποιο παράδειγμα που αντιστοιχεί στη συγκεκριμένη αντίληψη.

Συμβατότητα Διαδικαστικής Αντίληψης

Από τους μαθητές που εμφάνισαν διαδικαστική αντίληψη στην ερώτηση 2, οι περισσότεροι έδωσαν στην ερώτηση 1 απαντήσεις οι οποίες αφορούσαν κυρίως παραδείγματα τα οποία δείχνουν πεπερασμένη αντίληψη, καθώς οι συγκεκριμένες απαντήσεις ήταν αυτές με τη μεγαλύτερη συχνότητα. Όπως είναι λογικό, τα ποσοστά των απαντήσεων που αφορούν τη διαδικαστική αντίληψη (στην ερώτηση 1) ήταν υψηλότερα σε αυτή την περίπτωση σε σχέση με τις άλλες αντιλήψεις. Όμως δεν είναι αρκετά υψηλά καθώς φαίνεται από τους μαθητές που έχουν διαδικαστική αντίληψη για το άπειρο περίπου μόνο ένας στους τέσσερις μαθητές να δίνει παραδείγματα αντίστοιχα με αυτή την αντίληψη.

Συμβατότητα Πραγματικής Αντίληψης

Η συμβατότητα ανάμεσα στην πραγματική αντίληψη που εμφάνισαν οι μαθητές στο δεύτερο ερώτημα και στις αντιλήψεις τους μέσα από τα παραδείγματα που έδωσαν στο πρώτο ερώτημα αυξάνεται σταδιακά από το Δημοτικό προς το Λύκειο. Και σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές έδωσαν κυρίως παραδείγματα που δείχνουν πεπερασμένη αντίληψη για την έννοια. Τα ποσοστά των μαθητών που έδωσαν απαντήσεις οι οποίες δείχνουν πραγματική αντίληψη για το άπειρο, όπως είναι λογικό είναι υψηλότερα σε αυτή την περίπτωση. Ειδικά στο Λύκειο, περίπου ένας στους τέσσερις μαθητές σχημάτισε κάποια πρόταση η οποία δείχνει την πραγματική αντίληψη του απείρου.

Η συμβατότητα των αντιλήψεων επηρεάζεται από την κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα. Συγκεκριμένα, οι μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού οι οποίοι είχαν λάθος αντίληψη για την έννοια (πεπερασμένη αντίληψη), έδωσαν σε μεγαλύτερο ποσοστό παραδείγματα που αφορούσαν τη συγκεκριμένη αντίληψη. Αντίστοιχα οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου που εμφάνισαν πραγματική αντίληψη έδωσαν σε μεγαλύτερο ποσοστό κάποιο παράδειγμα που αφορά τη συγκεκριμένη αντίληψη. Όσον αφορά τη συμβατότητα των απαντήσεων των μαθητών που ανήκουν στην κατηγορία της διαδικαστικής αντίληψης, περίπου ένας στους τέσσερις μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού και της Γ΄ Λυκείου έδωσε κάποια πρόταση που αφορά τη συγκεκριμένη αντίληψη ενώ τα ποσοστά είναι ελαφρώς αυξημένα στη Γ΄ Γυμνασίου, δείχνοντας ότι η διαδικαστική αντίληψη στη συγκεκριμένη εκπαιδευτική βαθμίδα είναι πιο συχνή.

Στον πίνακα 5.8 παρουσιάζονται τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων των μαθητών στις ερωτήσεις 4, 8α και 8β ανάλογα με την αντίληψή τους στην ερώτηση 2. Οι ερωτήσεις 4, 8α και 8β δείχνουν αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο. Στην ερώτηση 4 ζητήθηκε από τους μαθητές να απαντήσουν αν υπάρχει αριθμός που είναι μεγαλύτερος από όλους τους άλλους. Παρατηρούμε ότι στη συγκεκριμένη ερώτηση τα ποσοστά των μαθητών που απάντησαν σωστά, αν και αρκετά υψηλά, είναι μικρότερα σε αυτούς που εμφάνισαν πεπερασμένη αντίληψη. Σε όλες τις περιπτώσεις παρατηρείται βελτίωση των σωστών απαντήσεων στις μεγαλύτερες εκπαιδευτικές βαθμίδες, με εξαίρεση τη Γ΄ Λυκείου στην περίπτωση της διαδικαστικής αντίληψης που παρατηρείται μια μικρή μείωση των σωστών απαντήσεων και στην περίπτωση της πραγματικής αντίληψης όπου τα ποσοστά παραμένουν σχεδόν σταθερά ανάμεσα στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο. Στη Γ΄ Λυκείου υπήρξε μια αύξηση των απαντήσεων στις οποίες οι μαθητές θεωρούσαν το άπειρο ως το μεγαλύτερο αριθμό, κάτι τέτοιο εξηγεί το παραπάνω εύρημα. Όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα οι μαθητές στη συγκεκριμένη τάξη συναντούν συχνά το άπειρο ως αποτέλεσμα κάποιου ορίου. Κάποια από αυτούς επηρεασμένοι από αυτό τείνουν να το θεωρούν ως το μεγαλύτερο αριθμό, η συγκεκριμένη αντίληψη τους οδηγεί σε λάθος απαντήσεις σε περιπτώσεις όπως στην ερώτηση 4.

Στην ερώτηση 8α και 8β ζητήθηκε από τους μαθητές να απαντήσουν αν συμφωνούν ή όχι με δύο προτάσεις. Η πρώτη πρόταση ανέφερε ότι «στα κεφάλια των ανθρώπων υπάρχουν άπειρες τρίχες», ενώ η δεύτερη ότι «στην Ελλάδα υπάρχουν άπειρες καστανές γυναίκες». Τα ποσοστά του πίνακα 5.8 αφορούν τις σωστές απαντήσεις, δηλαδή τις περιπτώσεις στις οποίες οι μαθητές απάντησαν αρνητικά στο ερώτημα. Παρατηρούμε ότι τα ποσοστά των ορθών απαντήσεων είναι χαμηλά και στις τρεις αντιλήψεις, ειδικά στην ερώτηση 8α. Όπως θα δούμε σε επόμενη ενότητα, κάποιοι από τους μαθητές απαντούν ότι στα κεφάλια των ανθρώπων υπάρχουν άπειρες τρίχες με είτε με τη μεταφορική χρήση της λέξης, δηλαδή για να εκφράσουν το «πάρα πολύ», είτε επειδή θεωρούν ότι δεν είμαστε σε θέση να τις μετρήσουμε άρα είναι αμέτρητες, ενώ ένα μέρος των μαθητών θεωρεί ότι επειδή βγαίνουν συνεχώς νέες τρίχες, έχουμε μια διαδικασία η οποία είναι ατελείωτη άρα άπειρη. Τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων ειδικά στο Δημοτικό είναι ιδιαιτέρως χαμηλά καθώς οι μαθητές ταυτίζουν το άπειρο με το πολύ μεγάλο αλλά πεπερασμένο πλήθος. Παρατηρούμε ότι οι μαθητές που εμφανίζουν διαδικαστική αντίληψη παρουσιάζουν την καλύτερη επίδοση στη συγκεκριμένη ερώτηση, ειδικά στη Γ΄ Λυκείου, καθώς επικρατεί η αντίληψη του απείρου ως ατελείωτη διαδικασία έναντι εκείνης ως μεγάλου πλήθους.

Στην ερώτηση 8β τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων είναι μεγαλύτερα σε σχέση με την ερώτηση 8α. Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι περισσότεροι μαθητές θεωρούν ότι υπάρχει συγκεκριμένος αριθμός καστανών γυναικών. Παρ’ όλα αυτά δεν έλειψαν απαντήσεις στις οποίες ταυτίζεται το άπειρο με το πολύ μεγάλο στο πλήθος ή με το ατελείωτο καθώς συνεχώς γεννιούνται καστανές γυναίκες. Τα ποσοστά ανάμεσα στη ΣΤ΄ Δημοτικού, στη Γ΄ Γυμνασίου και στη Γ΄ Λυκείου είναι παρόμοια και για τις τρεις αντιλήψεις.

Πίνακας 5.8: Ποσοστά σωστών απαντήσεων στις ερωτήσεις 4, 8α και 8β ανάλογα με την αντίληψη στην ερώτηση 2

Αντίληψη στην Ερ.2	**Βαθμίδα**	**Ερ.4**	**Ερ.8α**	**Ερ.8β**
Πεπερασμένη	Δημοτικό	64,5%	41,9%	74,2%
	Γυμνάσιο	65%	55%	80%
	Λύκειο	78,6%	42,9%	78,6%
Διαδικαστική	Δημοτικό	82,1%	37,5%	71,4%
	Γυμνάσιο	88,5%	57,4%	78,7%
	Λύκειο	78,5%	80%	87,5%
Πραγματική	Δημοτικό	80,8%	38,5%	69,2%
	Γυμνάσιο	86,5%	51,4%	81,1%
	Λύκειο	86,4%	54,5%	81,8%

5.1.6 Στατιστική σημαντικότητα των κυρίαρχων αντιλήψεων

Στους πίνακες 7.4, 7.5 και 7.6 (παράρτημα) βλέπουμε τα αποτελέσματα του Kruskal-Wallis Test για κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα που μελετήθηκε. Οι αντιλήψεις που προέκυψαν στην ερώτηση 2 αποτέλεσαν την ανεξάρτητη μεταβλητή ενώ εκείνες οι οποίες αφορούν τις ερωτήσεις 1α,1β,1γ καθώς και οι απαντήσεις των μαθητών στις ερωτήσεις 4,8α και 8β τις εξαρτημένες μεταβλητές.

Η στατιστικά σημαντική διαφορά στην ερώτηση 4 και στις τρεις εκπαιδευτικές βαθμίδες (0,025, 0,020 και 0,026) υποδηλώνει ότι οι απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση «Υπάρχει αριθμός που είναι μεγαλύτερος από όλους τους άλλους;» σχετίζονται με τις αντιλήψεις τους για το άπειρο στην ερώτηση 2. Αυτό συμβαίνει καθώς οι μαθητές που χαρακτηρίζονται από διαδικαστική αντίληψη απαντούν με μεγαλύτερη ευκολία ότι δεν υπάρχει μεγαλύτερος αριθμός από όλους τους άλλους. Επίσης οι μαθητές που ανήκουν στην πεπερασμένη αντίληψη θεωρούν το άπειρο ως το μεγαλύτερο αριθμό.

Η έλλειψη στατιστικά σημαντικής διαφοράς στις περισσότερες από τις υπόλοιπες ερωτήσεις υποδηλώνει ότι οι αντιλήψεις και οι απαντήσεις των μαθητών σε αυτές τις ερωτήσεις δεν σχετίζονται άμεσα με τις αντιλήψεις τους για το άπειρο στην ερώτηση 2. Για παράδειγμα στην ερώτηση 1 στην οποία οι μαθητές έφτιαξαν τρεις προτάσεις με τη λέξη άπειρο, οι αντιλήψεις που προέκυψαν δε σχετίζονται σε μεγάλο βαθμό με την αντίληψη των μαθητών για την έννοια του απείρου. Τέλος στον πίνακα 6.6, η τιμή p για την ερώτηση 8α είναι 0.043, η οποία αγγίζει το όριο στατιστικής σημαντικότητας

($p < 0.05$). Αυτό σημαίνει ότι οι απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση 8α σχετίζονται με τις αντιλήψεις τους για το άπειρο στην ερώτηση 2. Συγκεκριμένα όπως είδαμε στον πίνακα 5.8 οι μαθητές που χαρακτηρίζονται από διαδικαστική αντίληψη στη Γ΄ Λυκείου απαντούν σε εξαιρετικά μεγάλο ποσοστό σωστά στην ερώτηση «Στα κεφάλια των ανθρώπων υπάρχουν άπειρες τρίχες;».

5.1.7 Τα κριτήρια σύγκρισης των άπειρων συνόλων

Στην ερώτηση 5 δίνονται δύο άπειρα σύνολα αριθμών και ζητείται από τους μαθητές να απαντήσουν αν αυτά έχουν το ίδιο πλήθος αριθμών ή κάποιο σύνολο έχει μεγαλύτερο πλήθος αριθμών από κάποιο άλλο. Επιπλέον οι μαθητές καλούνται να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Η πλειοψηφία των μαθητών (πίνακας 5.9) απάντησε σωστά, όμως οι μαθητές εμφάνισαν σημαντικές δυσκολίες ως προς την αιτιολόγηση που έδωσαν καθώς μόνο το 1,9% των μαθητών κατάφερε να αιτιολογήσει σωστά.

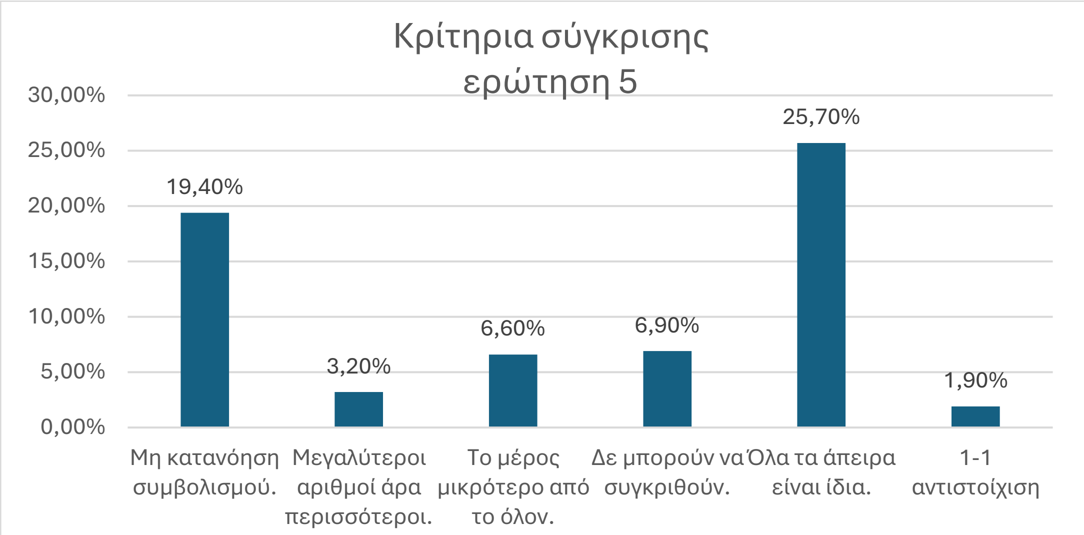
Πίνακας 5.9: Απαντήσεις συμμετεχόντων στην ερώτηση 5

	Ποσοστά
Λάθος απάντηση	35,3%
Σωστή απάντηση με μη ορθή αιτιολόγηση	62,9%
Σωστή αιτιολόγηση	1,9%

Το ραβδόγραμμα 5.1 αναφέρεται στις τεχνικές που χρησιμοποίησαν οι μαθητές κατά τη σύγκριση των άπειρων συνόλων. Τα κριτήρια σύγκρισης περιγράφονται αναλυτικά στην ενότητα «Μεθοδολογία της ποσοτικής ανάλυσης των δεδομένων».

Συγκεκριμένα περίπου ένας στους πέντε μαθητές δίνει απαντήσεις βασιζόμενος στους αριθμούς που βλέπει, αγνοώντας τις τελείες στο τέλος της κάθε σειράς αριθμών που δείχνουν ότι οι αριθμοί συνεχίζονται. Ένα εξαιρετικά μικρό ποσοστό (3,2%) των μαθητών κάνει αναφορά στο ότι η δεύτερη σειρά έχει μεγαλύτερο πλήθος καθώς αποτελείται από μεγαλύτερους αριθμούς. Το 6,6% αναφέρει ότι στο δεύτερο σύνολο λείπουν αριθμοί άρα εκείνο έχει μικρότερο πλήθος. Το 6,9% θεωρεί ότι δεν είμαστε σε θέση να συγκρίνουμε δύο άπειρα σύνολα καθώς δεν γνωρίζουμε από ποιους και πόσους αριθμούς αποτελούνται. Το κριτήριο με τη μεγαλύτερη συχνότητα (25,7%) είναι αυτό σύμφωνα με το οποίο όλα τα άπειρα είναι ίδια ως προς το πλήθος τους. Τέλος η 1-1 αντιστοίχιση η οποία είναι το σωστό κριτήριο σύγκρισης παρουσιάζει εξαιρετικά μικρό ποσοστό και συγκεκριμένα μόλις 1,9%. Βλέπουμε λοιπόν ότι οι περισσότεροι μαθητές θεωρούν ότι τα δύο άπειρα σύνολα που συγκρίνουν είναι ίδια στο πλήθος, παρ' όλα αυτά οι σωστές αιτιολογήσεις ήταν ελάχιστες.

Ραβδόγραμμα 5.1: Κριτήρια σύγκρισης στην ερώτηση 5



Στην ερώτηση 9α (πίνακας 5.10) δίνεται η υποθετική απάντηση μιας μαθήτριας σύμφωνα με την οποία «οι αριθμοί είναι περισσότεροι στη δεύτερη σειρά καθώς είναι μεγαλύτεροι» και ζητήθηκε από τους μαθητές να απαντήσουν αν συμφωνούν ή διαφωνούν, με τα λεγόμενά της. Οι λάθος απαντήσεις ήταν λίγες (μόνο 16%), παρ' όλα αυτά μόλις ένας στους πέντε μαθητές ήταν σε θέση να δώσει εκτός από σωστή απάντηση και σωστή αιτιολόγηση. Στην ερώτηση 9β (πίνακας 5.10) δίνεται η υποθετική απάντηση ενός μαθητή σύμφωνα με τον οποίο «Μπορούμε να ζευγαρώσουμε τους αριθμούς μεταξύ τους άρα οι δύο σειρές είναι ίδιες στο πλήθος.» Η συγκεκριμένη υποθετική απάντηση είναι η σωστή. Από το σύνολο των συμμετεχόντων, το 12,2% των μαθητών δέχεται την 1-1 αντιστοίχιση ως τη σωστή παρόλο που δεν έχει διδαχθεί κάτι ανάλογο στο παρελθόν. Στην ερώτηση 9γ (πίνακας 5.10) δίνεται η υποθετική απάντηση μιας μαθήτριας η οποία ισχυρίζεται ότι «Η πρώτη σειρά έχει πιο πολλούς αριθμούς από τη δεύτερη γιατί στη δεύτερη λείπουν ορισμένοι αριθμοί που είναι στην πρώτη.». Από το σύνολο των συμμετεχόντων, παρότι περίπου τέσσερις στου πέντε μαθητές έδωσαν σωστή απάντηση, μόλις το 7,2% ήταν σε θέση να αιτιολογήσει σωστά την απάντησή του. Στην ερώτηση 9δ (πίνακας 5.10) δόθηκε η υποθετική απάντηση «Οι δύο σειρές έχουν το ίδιο πλήθος αριθμών καθώς οι αριθμοί που έχουν είναι άπειροι.». Περίπου ένας στους πέντε μαθητές έδωσε σωστή απάντηση, το ποσοστό όμως των σωστών αιτιολογήσεων είναι σχεδόν αμελητέο (0,5%).

Πίνακας 5.10: Απαντήσεις συμμετεχόντων στις ερωτήσεις 9α,9β,9γ και 9δ

	Ποσοστά Ερ.9α	Ποσοστά Ερ.9β	Ποσοστά Ερ.9γ	Ποσοστά Ερ.9δ
Λάθος απάντηση	16,4%	65,3%	20,7%	78%
Σωστή απάντηση με μη ορθή αιτιολόγηση	63,7%	22,5%	72,1%	21,5%
Σωστή αιτιολόγηση	19,9%	12,2%	7,2%	0,5%

Στην ερώτηση 9α το κριτήριο σύγκρισης «μεγαλύτεροι αριθμοί άρα περισσότεροι» και κάποιες από τις απαντήσεις του κριτηρίου σύγκρισης «μη κατανόηση συμβολισμού» οδηγούν σε λάθος απαντήσεις, τα υπόλοιπα κριτήρια και η απάντηση «και οι δυο σειρές έχουν επτά αριθμούς» του κριτηρίου «μη κατανόηση συμβολισμού» οδηγούν σε σωστές απαντήσεις με λάθος αιτιολόγηση. Παρατηρούμε (ραβδόγραμμα 5.2) ότι περίπου ένας στους δέκα μαθητές χρησιμοποιεί το κριτήριο «μη κατανόηση συμβολισμού», ενώ τα υπόλοιπα ποσοστά είναι αρκετά μικρά καθώς το μόνο ποσοστό που ξεχωρίζει είναι εκείνο σύμφωνα με το οποίο οι μαθητές θεωρούν όλα τα άπειρα ίδια (15,1%). Η συγκεκριμένη αντίληψη είναι αρκετά συχνή στους μαθητές και οφείλεται στην παρανόηση ότι κάθε άπειρο σύνολο είναι ατελείωτο, επομένως εφόσον το κάθε σύνολο είναι ατελείωτο θα έχει και το ίδιο πλήθος με ένα επίσης ατελείωτο σύνολο. Επιπλέον όσον αφορά τα άπειρα σύνολα αριθμών οι μαθητές έρχονται σε επαφή κυρίως με αριθμήσιμα σύνολα, στα οποία ισχύει κάτι τέτοιο, με αποτέλεσμα να καλλιεργείται η εντύπωση ότι όλα τα άπειρα σύνολα είναι και ισοπληθικά.

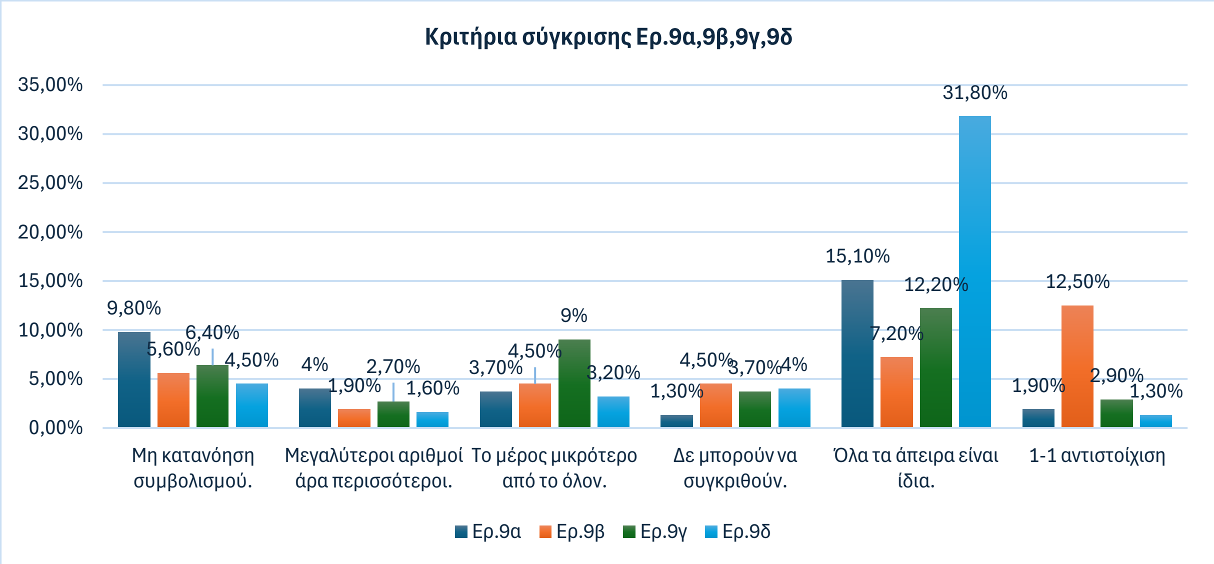
Στην ερώτηση 9β η χρήση του κριτηρίου σύγκρισης «δε μπορούν να συγκριθούν» και η απάντηση «και οι δυο σειρές έχουν επτά αριθμούς» του κριτηρίου σύγκρισης «μη κατανόηση συμβολισμού» οδηγούν σε σωστές απαντήσεις με λάθος αιτιολόγηση. Τα ποσοστά του κάθε κριτηρίου σύγκρισης (ραβδόγραμμα 5.2) είναι μικρά, ενώ αυτό που ξεχωρίζει είναι το 12,5% του τελευταίου κριτηρίου το οποίο είναι και η σωστή απάντηση. Η αύξηση στο συγκεκριμένο ποσοστό οφείλεται στην υποθετική απάντηση που δόθηκε στους μαθητές η οποία στην ουσία αφορά την 1-1 αντιστοίχιση καθώς έκανε αναφορά για ζευγάρωμα μεταξύ των αριθμών της κάθε σειράς.

Στην ερώτηση 9γ η χρήση των περισσότερων εκ των κριτηρίων οδηγεί σε σωστή απάντηση με λάθος όμως αιτιολόγηση. Ξεχωρίζει το 12,2% (ραβδόγραμμα 5.2) των μαθητών το οποίο πιστεύει ότι όλα τα άπειρα είναι ίδια στο πλήθος το οποίο όπως είδαμε αποτελεί συχνή εσφαλμένη αντίληψη των μαθητών. Το ποσοστό των σωστών απαντήσεων είναι ιδιαιτέρως μικρό (2,9%).

Στην ερώτηση 9δ (ραβδόγραμμα 5.2) η χρήση του κριτηρίου «όλα τα άπειρα είναι ίδια» και η απάντηση «και οι δυο σειρές έχουν επτά αριθμούς» του κριτηρίου «μη κατανόηση συμβολισμού» οδηγούν σε σωστές απαντήσεις με λάθος αιτιολόγηση. Παρατηρούμε ότι μεγαλύτερο ποσοστό παρουσιάζει το κριτήριο σύγκρισης σύμφωνα με το οποίο όλα τα άπειρα είναι ίδια (31,8%). Το συγκεκριμένο ποσοστό οφείλεται στην υποθετική απάντηση που δόθηκε στη συγκεκριμένη περίπτωση στους μαθητές η οποία ήταν ότι τα δύο σύνολα είναι άπειρα άρα έχουν και το ίδιο πλήθος αριθμών. Η συγκεκριμένη αντίληψη όπως είδαμε είναι η συχνότερη κατά τη σύγκριση των άπειρων συνόλων, όμως στη συγκεκριμένη περίπτωση φάνηκε τα ποσοστά της να ενισχύονται από τον τρόπο που δόθηκε η ερώτηση. Οι απαντήσεις με σωστή αιτιολόγηση είναι ακόμα λιγότερες (1,3%).

Τα κριτήρια που χρησιμοποιούν οι μαθητές επηρεάζονται από τις υποθετικές απαντήσεις που τους δόθηκαν στην ερώτηση. Όταν μια υποθετική απάντηση αντιστοιχεί σε κάποιο κριτήριο σύγκρισης, τότε τα ποσοστά του αντίστοιχου κριτηρίου σύγκρισης αυξάνονται. Π.χ. στην υποθετική απάντηση στην ερώτηση 9β η οποία αντιστοιχεί στο κριτήριο «1-1 αντιστοίχιση» το ποσοστό του αντίστοιχου κριτηρίου σύγκρισης είναι 12,5% ή στην υποθετική απάντηση στην ερώτηση 9γ η οποία αντιστοιχεί στο κριτήριο «το μέρος είναι μικρότερο από το όλον» το ποσοστό είναι 9%. Το κριτήριο με τη μεγαλύτερη συχνότητα είναι το «όλα τα άπειρα είναι ίδια» καθώς είναι κοινή πεποίθηση των μαθητών ότι όλα τα άπειρα σύνολα είναι ίσα ως προς το πλήθος των στοιχείων τους. Αν αθροίσουμε σε κάθε ερώτηση τα ποσοστά των κριτηρίων σύγκρισης σε κάθε ερώτηση θα δούμε ότι τα αθροίσματα δεν είναι 100%, αυτό οφείλεται στο ότι κάποιοι μαθητές είτε δεν ήταν σε θέση να αιτιολογήσουν την απάντησή τους είτε έδωσαν κάποια απάντηση η οποία όμως δεν αξιοποιούσε κάποιο από τα κριτήρια σύγκρισης.

Ραβδόγραμμα 5.2: Κριτήρια σύγκρισης στις ερωτήσεις 9α,9β,9γ και 9δ



4.1.8 Τα κριτήρια σύγκρισης των άπειρων συνόλων ανά εκπαιδευτική βαθμίδα

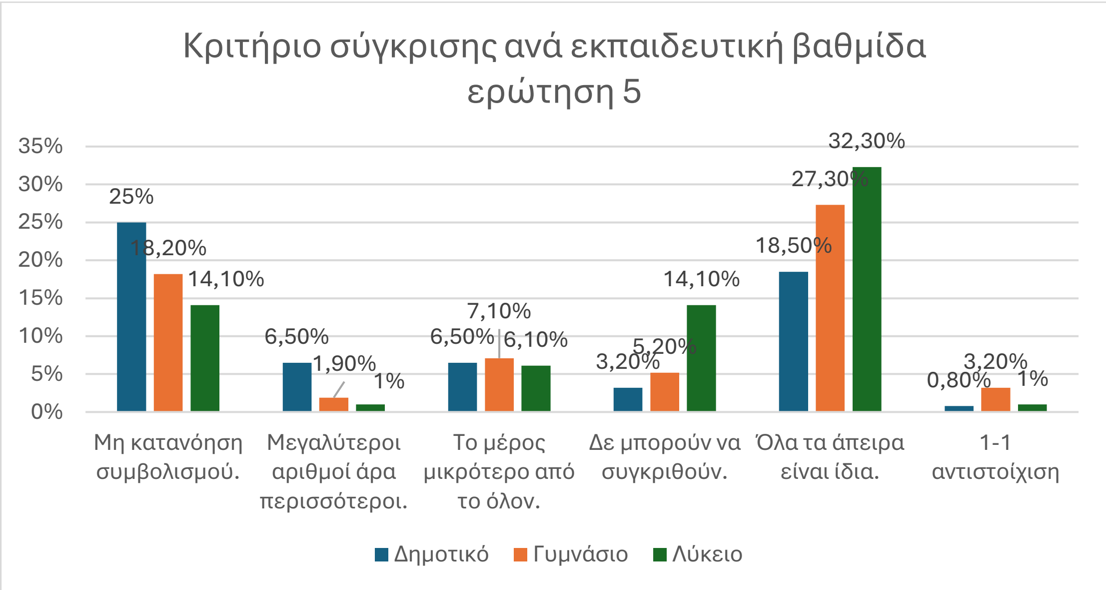
Παρατηρώντας τον πίνακα 5.11 βλέπουμε ότι η πλειοψηφία των μαθητών δίνει κάποια σωστή απάντηση αλλά με λάθος αιτιολόγηση. Έχουμε μια μικρή αύξηση των σωστών απαντήσεων από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο και τα ποσοστά ανάμεσα στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο είναι σχεδόν σταθερά.

Πίνακας 5.11: Απαντήσεις συμμετεχόντων στην ερώτηση 5 ανά εκπαιδευτική βαθμίδα

Βαθμίδα / Αιτιολόγηση	Δημοτικό	Γυμνάσιο	Λύκειο
Λάθος απάντηση	42,7%	31,8%	31,3%
Σωστή απάντηση με μη ορθή αιτιολόγηση	56,5%	64,9%	67,7%
Σωστή αιτιολόγηση	0,8%	3,2%	1%

Τα περισσότερα από τα κριτήρια σύγκρισης οδηγούν σε λανθασμένες απαντήσεις ενώ το μοναδικό σωστό είναι αυτό της 1-1 αντιστοίχισης. Παρ' όλα αυτά ανάμεσα στα κριτήρια σύγκρισης υπάρχει μια ιεράρχηση αυτών. Για παράδειγμα το κριτήριο σύγκρισης που ονομάσαμε «μη κατανόηση συμβολισμού» είτε αφορά τρόπους σύγκρισης οι οποίοι είναι αποτελεσματικοί μόνο κατά τη σύγκριση πεπερασμένων συνόλων, για παράδειγμα ότι τα δύο σύνολα αποτελούνται από επτά αριθμούς είτε τρόπους σύγκρισης οι οποίοι δείχνουν τεράστια σύγχυση, για παράδειγμα τη σύγκριση των ψηφίων των δύο συνόλων ή τον υπολογισμό του αθροίσματος κάθε συνόλου. Το δεύτερο κατά σειρά κριτήριο σύγκρισης αφορά ένα σημαντικό λάθος των μαθητών καθώς σε αυτό συγκρίνουν τους αριθμούς των συνόλων και όχι τα σύνολα ως προς το πλήθος τους. Τα συγκεκριμένα κριτήρια σύγκρισης αφορούν σημαντικές μαθηματικά εσφαλμένες αντιλήψεις, μάλιστα ειδικά στο πρώτο οι μαθητές αγνοούν τις τελείες στο τέλος με αποτέλεσμα να μην είναι σε θέση να κάνουν σκέψεις γύρω από την έννοια του απείρου. Το τρίτο κριτήριο σύγκρισης, «το μέρος είναι μικρότερο από το όλον» είναι αποτελεσματικό μόνο σε πεπερασμένα σύνολα. Το κριτήριο σύγκρισης «δε μπορούν να συγκριθούν» αφορά μια συχνή εσφαλμένη αντίληψη των μαθητών σύμφωνα με την οποία όταν δύο σύνολα είναι άπειρα δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε ποιο έχει τα πιο πολλά στοιχεία. Φυσικά είναι λάθος, όμως σε αυτή την περίπτωση οι μαθητές βλέπουν την απειρία των συνόλων κάτι που όπως είδαμε σε προηγούμενες περιπτώσεις δεν πρέπει να θεωρείται δεδομένο. Το κριτήριο σύμφωνα με το οποίο όλα τα άπειρα είναι ίδια είναι αυτό που συναντάμε συχνότερα. Είναι λάθος ο συγκεκριμένος τρόπος σύγκρισης καθώς όταν ορισμένοι μαθητές ως φοιτητές συναντήσουν έννοιες όπως τα υπεραριθμήσιμο η συγκεκριμένη αντίληψη μπορεί να τους δημιουργήσει γνωστικά εμπόδια. Παρόλο που σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες οι σωστές αιτιολογήσεις είναι σχεδόν αμελητέες, αν εξετάσουμε ιεραρχικά τα κριτήρια σύγκρισης παρατηρούμε (ραβδόγραμμα 5.3) μια μείωση των ποσοστών των πιο σοβαρών εσφαλμένων αντιλήψεων και μια αύξηση εκείνων που είναι πιο κοντά σε αυτό που αναμένουμε ως σωστό.

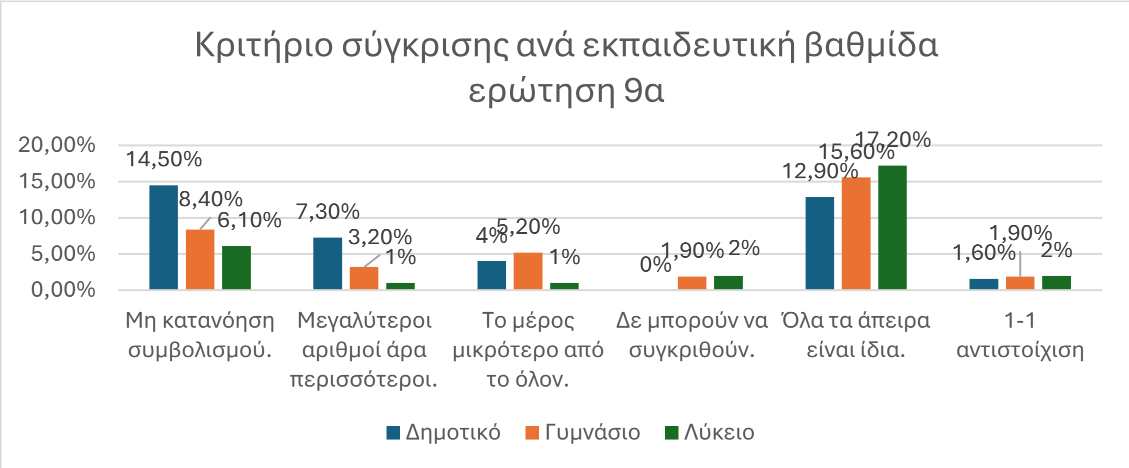
Ραβδόγραμμα 5.3: Κριτήρια σύγκρισης ανά εκπαιδευτική βαθμίδα στην ερώτηση 5



Εφαρμόζοντας Kruskal-Wallis Test για τα κριτήρια σύγκρισης των άπειρων συνόλων στην ερώτηση 5 (πίνακας 7.7 στο παράρτημα) παρατηρούμε ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές σε δύο από τα πέντε κριτήρια σύγκρισης και συγκεκριμένα στα κριτήρια «μεγαλύτεροι αριθμοί άρα περισσότεροι» και «δε μπορούν να συγκριθούν». Το πρώτο συμβαίνει λόγω της μεγάλης μείωσης του ποσοστού του από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο ενώ το δεύτερο λόγω της μεγάλης αύξησης του ποσοστού του από το Γυμνάσιο στο Λύκειο. Στα υπόλοιπα κριτήρια σύγκρισης οι διαφορές δεν είναι στατιστικά σημαντικές κάτι που δείχνει ότι η σχολική εκπαίδευση στη συγκεκριμένη περίπτωση δε διαδραμάτισε τόσο σημαντικό ρόλο.

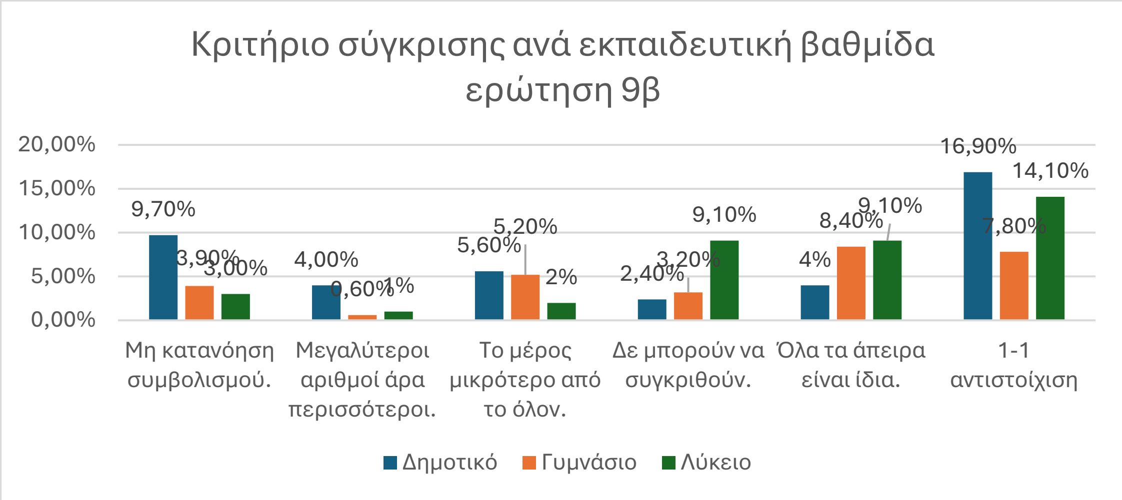
Στην ερώτηση 9 όπως και στην ερώτηση 5 οι μαθητές φάνηκε να επηρεάζονται από τις υποθετικές απαντήσεις που τους δόθηκαν. Το κριτήριο σύγκρισης «μεγαλύτεροι άρα περισσότεροι» αντιστοιχεί στην υποθετική απάντηση που δόθηκε στην ερώτηση 9α. Παρατηρώντας το ραβδόγραμμα 5.4, βλέπουμε ανάλογα αποτελέσματα με την ερώτηση 5 στην οποία μειώνονται τα ποσοστά των πιο σοβαρών εσφαλμένων αντιλήψεων και αυξάνονται εκείνων που είναι πιο κοντά σε αυτό που αναμένουμε ως σωστό. Οι σοβαρότερες εσφαλμένες αντιλήψεις, όπως είναι αναμενόμενο, εμφανίζονται στη ΣΤ΄ Δημοτικού και παρουσιάζουν μείωση στη Γ΄ Γυμνασίου. Η αντίληψη ότι όλα τα άπειρα σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος είναι η πιο κοινή και στις τρεις εκπαιδευτικές βαθμίδες που μελετήσαμε. Στην ερώτηση 9α (πίνακας 7.8 παράρτημα) δεν υπάρχει κάποια στατιστική σημαντική διαφορά για κάποιο κριτήριο σύγκρισης.

Ραβδόγραμμα 5.4: Κριτήρια σύγκρισης ανά εκπαιδευτική βαθμίδα στην ερώτηση 9α



Το κριτήριο σύγκρισης «1-1 αντιστοίχιση» αντιστοιχεί στην υποθετική απάντηση που δόθηκε στους μαθητές στην ερώτηση 9β σύμφωνα με την οποία τα δύο σύνολα αποτελούνται από το ίδιο πλήθος αριθμών καθώς μπορούμε να τους ζευγαρώσουμε μεταξύ τους. Σε αυτό οφείλονται τα υψηλά ποσοστά της 1-1 αντιστοίχισης σε σχέση με το 9α και το 9γ και 9δ που θα δούμε στη συνέχεια. Η αύξηση του ποσοστού του συγκεκριμένου κριτηρίου σύγκρισης συναντάται με ταυτόχρονη μείωση των ποσοστών των κριτηρίων «μη κατανόησης συμβολισμού» και «όλα τα άπειρα είναι ίδια» καθώς ένας μέρος των μαθητών που είχε χρησιμοποιήσει αυτά τα κριτήρια πείστηκε από την 1-1 αντιστοίχιση. Φαίνεται ότι, παρόλο που οι μαθητές δε διδάσκονται κάτι αντίστοιχο στα σχολικά τους χρόνια, ένας μέρος αυτών όταν έρχεται αντιμέτωπο με το συγκεκριμένο τρόπο σύγκρισης πείθεται με αποτέλεσμα να το χρησιμοποιεί στην επιχειρηματολογία του.

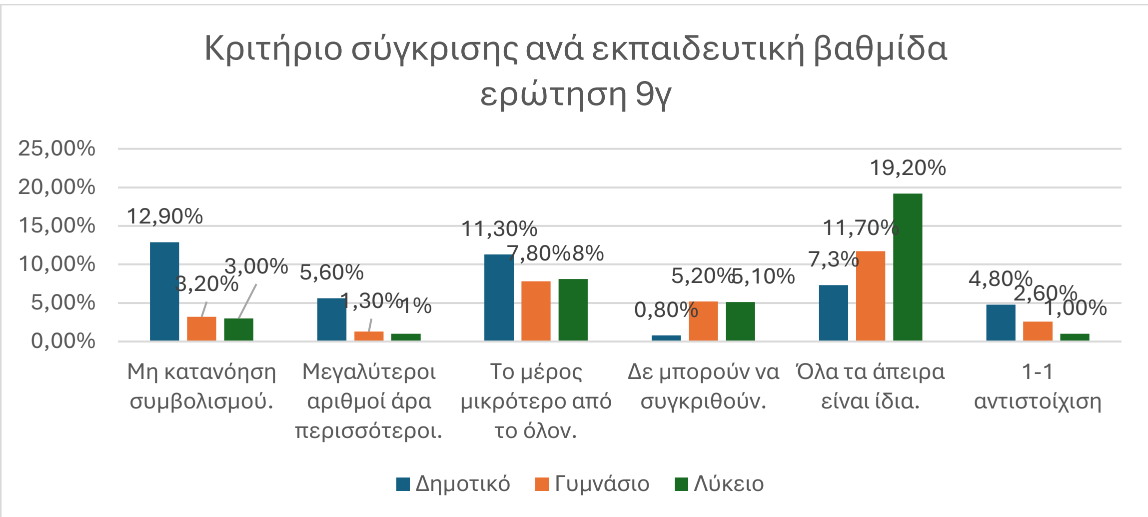
Ραβδόγραμμα 5.5: Κριτήρια σύγκρισης ανά εκπαιδευτική βαθμίδα στην ερώτηση 9β



Μελετώντας την ερώτηση 9β (πίνακας 6.9 παράτημα) παρατηρούμε ότι υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μόνο στο κριτήριο σύγκρισης «δε μπορούν να συγκριθούν». Αυτό οφείλεται στη σημαντική αύξηση του ποσοστού από τη Γ΄ Γυμνασίου στη Γ΄ Λυκείου. Μάλιστα παρατηρούμε ότι το συγκεκριμένο ποσοστό αυξάνεται και στο 9δ, το οποίο έχει με το 9β ως κοινό χαρακτηριστικό ότι οι υποθετικές απαντήσεις που δόθηκαν σε αυτά μιλούσαν για ίσα ως προς το πλήθος σύνολα.

Στην ερώτηση 9γ δόθηκε η υποθετική απάντηση «στη δεύτερη σειρά λείπουν ορισμένοι αριθμοί άρα είναι λιγότεροι» η οποία αντιστοιχεί στο κριτήριο σύγκρισης «το μέρος μικρότερο από το όλον». Παρατηρούμε (ραβδόγραμμα 5.6) ότι σε σχέση με τις υπόλοιπες ερωτήσεις αυξάνονται τα ποσοστά του συγκεκριμένου κριτηρίου, καθώς οι μαθητές επηρεάζονται από την υποθετική απάντηση. Το κυρίαρχο κριτήριο σύγκρισης, όπως και σε άλλες περιπτώσεις, είναι αυτό σύμφωνα με το οποία όλα τα άπειρα σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος.

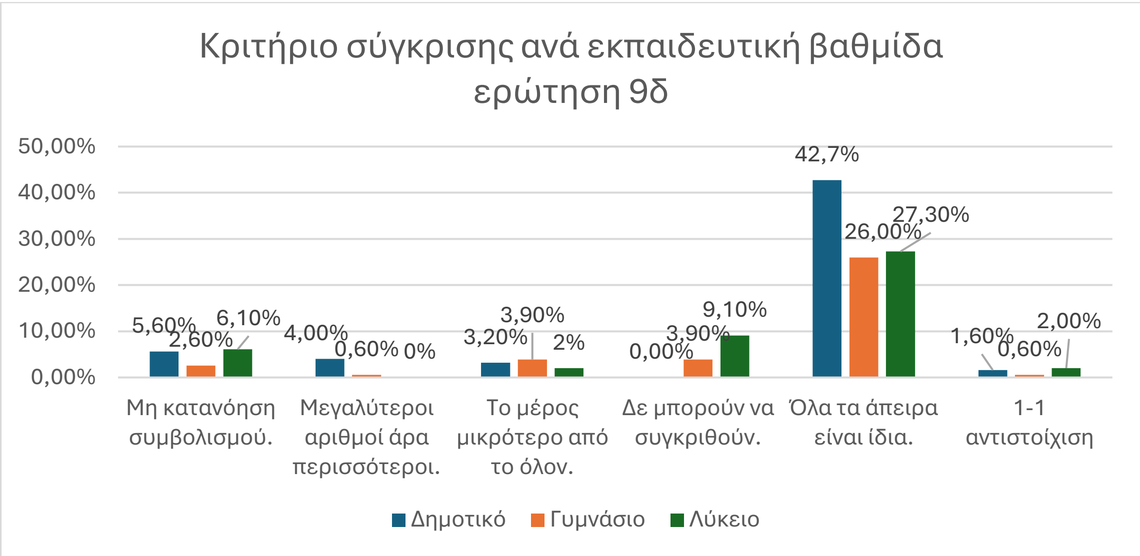
Ραβδόγραμμα 5.6: Κριτήρια σύγκρισης ανά εκπαιδευτική βαθμίδα στην ερώτηση 9γ



Όπως παρατηρούμε τα ποσοστά των κριτηρίων σύγκρισης «μη κατανόηση συμβολισμού» και «μεγαλύτεροι αριθμοί άρα περισσότεροι» μειώνονται σημαντικά από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο αυτό έχει ως αποτέλεσμα να έχουμε στατιστικά σημαντικές διαφορές (πίνακας 7.10 παράρτημα). Επίσης το ποσοστό των μαθητών που θεωρεί ότι όλα τα άπειρα είναι ίδια παρουσιάζει σημαντική αύξηση στη Γ΄ Λυκείου με αποτέλεσμα να βλέπουμε στατιστικά σημαντική διαφορά.

Η υποθετική απάντηση στην ερώτηση 9δ αντιστοιχεί στο κριτήριο σύγκρισης «όλα τα άπειρα είναι ίδια». Τα ποσοστά του συγκεκριμένου κριτηρίου σύγκρισης είναι ιδιαίτερα υψηλά σε σχέση με τις υπόλοιπες ερωτήσεις ειδικά στο Δημοτικό που περίπου τέσσερα στα δέκα παιδιά το χρησιμοποιούν (ραβδόγραμμα 5.7). Το συγκεκριμένο ποσοστό μειώνεται στο μισό στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο παραμένει περίπου σταθερό. Παρατηρούμε δηλαδή ότι οι μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού έχουν την τάση να συμφωνούν με την αντίληψη ότι όλα τα άπειρα σύνολα είναι το ίδιο ως προς το πλήθος τους όταν αυτό τους δίνεται ως πιθανή απάντηση. Στην ερώτηση 5, στην οποία δεν είχαν δοθεί υποθετικές απαντήσεις στους μαθητές, δε συναντήσαμε ανάλογα αποτελέσματα καθώς εκεί ένα μικρότερο μέρος των μαθητών του Δημοτικού αξιοποίησε το συγκεκριμένο κριτήριο σύγκρισης των άπειρων συνόλων.

Ραβδόγραμμα 5.7: Κριτήρια σύγκρισης ανά εκπαιδευτική βαθμίδα στην ερώτηση 9δ



Στην ερώτηση 9δ (πίνακας 7.11 παράρτημα) το ποσοστό των μαθητών που θεωρεί ότι οι μεγαλύτεροι αριθμοί ενός σύνολο σημαίνουν και μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων για αυτό, σχεδόν εκμηδενίζεται μετά το Δημοτικό. Το ποσοστό των μαθητών το οποίο θεωρεί ότι δύο άπειρα σύνολα δεν μπορούν να συγκριθούν σχεδόν τριπλασιάζεται στη Γ΄ Λυκείου ενώ βλέπουμε μεγάλη μείωση του ποσοστού των μαθητών που θεωρούν ότι όλα τα άπειρα είναι ίδια από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Τα παραπάνω έχουν ως αποτέλεσμα στις συγκεκριμένες τρεις κατηγορίες να βλέπουμε στατιστικά σημαντικές διαφορές.

Παρατηρώντας συνολικά τα ραβδογράμματα (5.4,5.5,5.6 και 5.7) βλέπουμε αύξηση των ποσοστών των κριτηρίων σύγκρισης όταν δίνεται στους μαθητές η αντίστοιχη υποθετική απάντηση με αυτά. Τα ποσοστά του κριτηρίου σύγκρισης «μη κατανόηση συμβολισμού» και του κριτηρίου «μεγαλύτεροι αριθμοί άρα περισσότεροι» μειώνονται ανά εκπαιδευτική βαθμίδα. Η μείωση των ποσοστών είναι μεγαλύτερη από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Τα ποσοστά του κριτηρίου σύγκρισης «το μέρος μικρότερο από το όλον» παρουσιάζουν τις μικρότερες διαφορές ανά εκπαιδευτική βαθμίδα. Στις ερωτήσεις 9β και 9δ (στις οποίες γίνονταν αναφορά ότι τα δύο σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος) ανάμεσα στη Γ΄ Γυμνασίου και στη Γ΄ Λυκείου αυξήθηκε το ποσοστό των μαθητών που ανέφεραν ότι τα δύο σύνολα δεν μπορούν να συγκριθούν. Στις τρεις πρώτες υποθετικές απαντήσεις η απάντηση όλα τα άπειρα είναι ίδια αυξάνεται με παρόμοιο τρόπο ανά εκπαιδευτική βαθμίδα όμως στο 9δ όπου στην ουσία η υποθετική απάντηση είναι η ίδια με το συγκεκριμένο κριτήριο σύγκρισης το ποσοστό στο Δημοτικό είναι ιδιαίτερα υψηλό (42,7%) δείχνοντας την έντονη τάση των μαθητών αυτής της ηλικίας να συμφωνήσουν με την πρόταση ότι όλα τα άπειρα σύνολα είναι ίδια στο πλήθος. Τα ποσοστά της 1-1 αντιστοίχισης είναι τα μικρότερα σε κάθε περίπτωση εκτός από το 9β στο οποίο και δόθηκε ως υποθετική απάντηση ότι μπορούμε να ζευγαρώσουμε τους αριθμούς ανάμεσα στα δύο σύνολα άρα αυτά είναι ίδια στο πλήθος.

5.1.9 Αποτελέσματα ποσοτικής ανάλυσης στις ερωτήσεις 4,6,7 και 8

Στην ερώτηση 4 (πίνακας 5.12), ζητήθηκε από τους μαθητές να απαντήσουν αν υπάρχει αριθμός μεγαλύτερος από όλους τους άλλους καθώς και να αιτιολογήσουν την απάντησή τους. Παρατηρούμε ότι σημαντικό ποσοστό των απαντήσεων είναι σωστό, αλλά οι μαθητές παρουσίασαν μεγάλη δυσκολία κατά την αιτιολόγηση των απαντήσεών τους. Μόνο ένας στους πέντε μαθητές ήταν σε θέση να αιτιολογήσει σωστά γιατί δεν υπάρχει μεγαλύτερος αριθμός από όλους τους άλλους.

Οι μαθητές στην προσπάθειά τους να αιτιολογήσουν γιατί δεν υπάρχει μεγαλύτερος αριθμός από όλους τους άλλους συχνά έκαναν αναφορά στο δυνητικό άπειρο και συγκεκριμένα στο ότι κάθε αριθμός έχει πάντα έναν επόμενο χωρίς αυτή η διαδικασία να έχει κάποιο τέλος. Για παράδειγμα ένας μαθητής της ΣΤ΄ Δημοτικού αναφέρει «Όχι, δεν υπάρχει μεγαλύτερος αριθμός γιατί οι αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ, έτσι δεν ξέρουμε ποιος είναι ο μεγαλύτερος από όλους.», ενώ αντίστοιχες ήταν οι απαντήσεις και στις μεγαλύτερες τάξεις καθώς οι περισσότεροι μαθητές απάντησαν ότι δεν υπάρχει κάποιος αριθμός μεγαλύτερος από όλους τους άλλους καθώς οι αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ. Ένα μέρος των μαθητών παρουσιάζει πεπερασμένη αντίληψη με συχνότερες απαντήσεις αυτές στις οποίες θεωρούν το ίδιο το άπειρο ως το μεγαλύτερο αριθμό. Χαρακτηριστικά ένας μαθητής της Γ΄ Γυμνασίου έγραψε «Η έννοια άπειρο είναι μεγαλύτερη από όλους τους αριθμούς.» ενώ ένας της Γ΄ Λυκείου έγραψε «Είναι θεωρώ λογικό να υπάρχει ένας αριθμός μεγαλύτερος από όλους τους άλλους. Θα μπορούσαμε αυτό να το πούμε άπειρο.». Στη ΣΤ΄ Δημοτικού συναντήσαμε περιπτώσεις στις οποίες οι μαθητές δίνουν ως απάντηση ένα αριθμό, για παράδειγμα ένας μαθητής έγραψε, «Ο πιο μεγαλύτερος αριθμός από όλους είναι το 1000.». Όσον αφορά τις απαντήσεις που δείχνουν την αντίληψη του πραγματικού απείρου οι περισσότεροι από τους μαθητές έδωσαν κάποια απάντηση η οποία αναφέρονταν στο άπειρο πλήθος των αριθμών. Για παράδειγμα ένας μαθητής της Γ΄ Λυκείου έγραψε, «Υπάρχουν άπειροι στο πλήθος αριθμοί άρα δεν μπορούμε να ορίσουμε κάποιον μεγαλύτερο.». Τέλος, ορισμένοι μαθητές αντιμετώπισαν το άπειρο ως μια έννοια η οποία εκφράζει κάτι το απροσδιόριστο. Χαρακτηριστική είναι η απάντηση ενός μαθητή της Γ΄ Γυμνασίου ο οποίος στην ερώτηση αν υπάρχει μεγαλύτερος αριθμός από όλους τους άλλους έγραψε, «Δεν υπάρχει επειδή το άπειρο δεν μπορεί να βρεθεί, είναι κάτι γενικό και απροσδιόριστο.».

Πίνακας 5.12: Απαντήσεις στην ερώτηση 4

	Ποσοστά Ερ.4
Λάθος απάντηση	19,4%
Σωστή με απουσία αιτιολόγησης	15,6%
Σωστή με μη ορθή αιτιολόγηση	43,5%
Σωστή αιτιολόγηση	21,5%

Η ερώτηση 6 αφορά το παράδοξο του ξενοδοχείου του Hilbert. Οι απαντήσεις χωρίζονται σε δύο μεγάλες κατηγορίες, εκείνη στην οποία συμφώνησαν ότι μπορεί να φιλοξενηθεί κάποιος καινούριος ένοικος και εκείνη στην οποία διαφώνησαν. Περίπου επτά στους δέκα μαθητές απάντησαν ότι θα υπάρξει τρόπος ένας νέος ένοικος να φιλοξενηθεί. Από αυτούς παρατηρούμε ότι μόνο το 4,5% ήταν σε θέση να αιτιολογήσει σωστά την απάντησή του (πίνακας 5.13), κάτι που δείχνει ότι οι μαθητές μπορεί να δίνουν τη σωστή απάντηση, αλλά έχουν δυσκολία στο να αιτιολογήσουν σωστά.

Οι περισσότεροι από τους μαθητές που απάντησαν ότι δε μπορεί να φιλοξενηθεί κάποιο άτομο, θεώρησαν ότι αφού τα δωμάτια είναι γεμάτα δε μπορεί να μείνει κάπου μόνος του ένας νέος ένοικος. Από τους μαθητές που έδωσαν σωστή απάντηση αλλά με λάθος αιτιολόγηση ορισμένοι έδωσαν απαντήσεις μέσα από το καθημερινό πλαίσιο π.χ. να φύγει κάποιος για να μείνει ένας καινούριος ένοικος. Η απάντηση με τη μεγαλύτερη συχνότητα ήταν ότι θα μπορούσε να φιλοξενηθεί ένας καινούριος ένοικος καθώς τα δωμάτια είναι άπειρα με αποτέλεσμα να είναι ατελείωτα οπότε πάντα θα υπάρχει κάποιο κενό δωμάτιο. Κάποιοι από τους μαθητές ανέφεραν μαθητές ότι οι άνθρωποι δε μπορούν να είναι άπειροι και σε αντιπαραβολή με τα άπειρα δωμάτια που αναφέρονται στην εκφώνηση σκέφτονται ότι θα υπάρχει πάντα κάποιο κενό δωμάτιο, ενώ κάποιοι άλλοι θεώρησαν ότι μπορεί να δημιουργηθεί ένα νέο δωμάτιο.

Πίνακας 5.13: Αιτιολόγηση των σωστών απαντήσεων στην ερώτηση 6

	Ποσοστά Ερ.6
Μη ορθή αιτιολόγηση	95,5%
Σωστή αιτιολόγηση	4,5%

Στην ερώτηση 7 (πίνακας 5.14) παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο ποσοστό των μαθητών θεωρεί ότι υπάρχει πιο κοντινός αριθμός σε έναν άλλο αριθμό. Κάτι τέτοιο δείχνει τις δυσκολίες που παρουσιάζουν οι μαθητές στη δεκαδική αναπαράσταση των αριθμών καθώς αντιλαμβάνονται το 9,99.. ως διαφορετικό από το 10. Οι περισσότεροι μαθητές έδωσαν λανθασμένες απαντήσεις όπως ότι το 9,999... είναι ο κοντινότερος αριθμός στο 10. Ένα σημαντικό μέρος των μαθητών της ΣΤ΄ Δημοτικού έδωσαν ως απάντηση το 9, κάτι το οποίο είναι αναμενόμενο αν σκεφτούμε ότι σε αυτή την τάξη οι μαθητές ασχολούνται κυρίως με το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Πίνακας 5.14: Απαντήσεις στην ερώτηση 7

	Ποσοστά Ερ.4
Λάθος	83,6%
Σωστό	16,4%

Στο πρώτο μέρος της ερώτησης 8 (πίνακας 5.15) βλέπουμε ότι το 48,3% του συνόλου των μαθητών θεωρεί ότι στα κεφάλια των ανθρώπων υπάρχουν άπειρες τρίχες. Αυτό δείχνει ότι οι μαθητές θεωρούν άπειρο κάτι πολύ μεγάλο στο πλήθος το οποίο δεν είναι σε θέση να μετρήσουν. Το συγκεκριμένο ποσοστό είναι παρόμοιο με αυτό της πεπερασμένης αντίληψης που αφορούσε την ερώτηση 1. Στο δεύτερο μέρος της ερώτησης 8 (πίνακας 5.15), οι μαθητές ρωτήθηκαν αν οι καστανές γυναίκες της Ελλάδος είναι άπειρες στο πλήθος. Το ποσοστό των θετικών απαντήσεων, παρότι αρκετά υψηλό, μειώθηκε σε σχέση με το πρώτο μέρος αυτής της ερώτησης. Αυτό οφείλεται στο ότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι το πλήθος των γυναικών είναι πολύ μεγάλο όμως θεωρούν ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση υπάρχει η δυνατότητα σε αντίθεση με πριν αυτές να μετρηθούν. Σε αυτή την περίπτωση η λέξη άπειρο εκφράζει το πάρα πολύ (μεταφορική χρήση) ενώ στο πρώτο μέρος της ερώτησης ένα μέρος των απαντήσεων εκφράζει το πάρα πολύ και ένα άλλο την αδυναμία μέτρησης.

Πίνακας 5.15: Απαντήσεις στην ερώτηση 8

	Ποσοστά Ερ.8α	Ποσοστά Ερ.8β
Λάθος	48,3%	22,5%
Σωστό	51,7%	77,5%

5.1.10 Αποτελέσματα ποσοτικής ανάλυσης στις ερωτήσεις 4,6,7 και 8 ανά εκπαιδευτική βαθμίδα

Εξετάζοντας τα ποσοστά των συγκεκριμένων ερωτήσεων ανά εκπαιδευτική βαθμίδα (πίνακας 5.16) παρατηρούμε ότι οι μαθητές κατά το πέρασμα των χρόνων παρουσιάζουν καλύτερες επιδόσεις στα συγκεκριμένα ερωτήματα.

Πίνακας 5.16: Ποσοστά σωστών απαντήσεων στις ερωτήσεις 4,6,7 και 8 ανά εκπαιδευτική βαθμίδα

Βαθμίδα / Ποσοστό σωστών απαντήσεων	Δημοτικό	Γυμνάσιο	Λύκειο
Ερώτηση 4	15,3%	22,1%	28,3%
Ερώτηση 6	0%	4,5%	5,1%
Ερώτηση 7	7,3%	15,6%	29,3%
Ερώτηση 8α	40,3%	51,3%	66,7%
Ερώτηση 8β	72,6%	77,9%	82,8%

Η μεγαλύτερη βελτίωση συναντάται στην ερώτηση 7 και στην ερώτηση 8α και σε αυτό οφείλονται οι στατιστικά σημαντικές διαφορές σε αυτές τις δύο ερωτήσεις που βλέπουμε στον πίνακα 7.12 (παράρτημα). Συγκεκριμένα, υπάρχει συσχέτιση μεταξύ της εκπαιδευτικής βαθμίδας του μαθητή και της επίδοσής του σε ερωτήματα όπως στην ερώτηση 7, «Από τους αριθμούς που είναι μικρότεροι από το 10 υπάρχει κάποιος που να είναι πιο κοντινός σε αυτόν;» ή στην ερώτηση 8α «Στα κεφάλια των ανθρώπων υπάρχουν άπειρες τρίχες;». Παρατηρούμε με το πέρασμα των χρόνων τα ποσοστά των σωστών απαντήσεων να αυξάνονται σημαντικά σε αυτές τις δύο ερωτήσεις.

5.1.11 Ανάλυση της διακύμανσης ανά τάξη

Τα αποτελέσματα της ανάλυσης ANOVA δείχνουν ότι υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές στις ομάδες για τα ερωτήματα Ερ.7 Sig (<,001), Ερ.8α Sig.(<,001) και Ερ.9α Sig(,001). Στις ερωτήσεις Ερ.1α, Ερ.5, και Ερ.9β τα Sig. είναι αρκετά κοντά ή ίσα με το 0,05 (0,051,0,053 και 0,05 αντίστοιχα), αυτό υποδηλώνει ότι υπάρχει κάποια αμφισημία ως προς τη στατιστική σημαντικότητα. Για τα υπόλοιπα ερωτήματα, δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές ως εκ τούτου, δεν μπορούμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση (Η0) για αυτά τα ερωτήματα.

Στην ερώτηση 7 οι μαθητές καλούνταν να απαντήσουν αν υπάρχει κάποιος αριθμός πιο κοντινός στο 10. Όπως είδαμε και στην προηγούμενη παράγραφο σε αυτή την ερώτηση υπάρχει μεγάλη βελτίωση των ποσοστών των σωστών απαντήσεων στις μεγαλύτερες τάξεις. Στην ερώτηση 8α οι μαθητές καλούνται να απαντήσουν αν υπάρχουν άπειρες τρίχες στα κεφάλια των ανθρώπων. Βλέπουμε να υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά ειδικά μεταξύ των μαθητών Δημοτικού και Λυκείου. Η συγκεκριμένη διαφορά οφείλεται στο ότι οι μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού ταυτίζουν το άπειρο ευκολότερα με το πολύ μεγάλο σε πλήθος, όπως π.χ. το πλήθος των τριχών στα κεφάλια των ανθρώπων. Επιπλέον παρατηρούνται στατιστικά σημαντικές διαφορές στις απαντήσεις στην ερώτηση 9α μεταξύ των μαθητών του Δημοτικού και του Λυκείου καθώς και του Γυμνασίου και του Λυκείου. Η ερώτηση 9α αφορά μια συχνή εσφαλμένη αντίληψη κατά τη σύγκριση δύο άπειρων συνόλων (το σύνολο με τους μεγαλύτερους αριθμούς έχει και περισσότερα στοιχεία) η οποία συναντάται κυρίως στις μικρότερες τάξεις. Στις περισσότερες ερωτήσεις δεν παρατηρούμε στατιστικά πολύ μεγάλες διαφορές κάτι που δείχνει ότι η αφετηρία των απαντήσεων είναι η διαίσθηση των μαθητών η οποία δεν αλλάζει σημαντικά στο πέρασμα των χρόνων.

Τέλος βλέπουμε κάποιες διαφορές βάσει των αποτελεσμάτων του πολλαπλού τεστ σύγκρισης Scheffé. Τα ομοιογενή υποσύνολα αντιπροσωπεύουν ομάδες δεδομένων (στην περίπτωσή μας ΣΤ΄ Δημοτικού, Γ΄ Γυμνασίου και Γ΄ Λυκείου) οι οποίες είναι στατιστικά όμοιες μεταξύ τους. Σχηματίζονται από το τεστ Scheffé, το οποίο συγκρίνει όλα τα πιθανά ζεύγη ομάδων και εντοπίζει στατιστικά σημαντικές διαφορές. Στην ερώτηση 9β το ποσοστό των σωστών απαντήσεων στο Δημοτικό ήταν 35,5%, ενώ στο Λυμνάσιο μόλις 26,6% και στο Λύκειο 46,5%. Στη συγκεκριμένη ερώτηση υπήρχε μία υποθετική απάντηση σύμφωνα με την οποία δύο σύνολα είναι ίδια στο πλήθος καθώς μπορούμε να ζευγαρώσουμε τους αριθμούς μεταξύ τους. Φαίνεται αρκετοί μαθητές του Δημοτικού να συμφωνούν με την ισότητα των δύο συνόλων αλλά στην πραγματικότητα για διαφορετικούς λόγους π.χ. επειδή μέτρησαν από επτά αριθμούς σε κάθε σύνολο και αγνόησαν τις τελείες στο τέλος. Σημαντικές διαφορές βλέπουμε και στις ερωτήσεις 7 και 8α στις οποίες υπάρχει σημαντική βελτίωση στα ποσοστά των σωστών απαντήσεων στις μεγαλύτερες τάξεις.

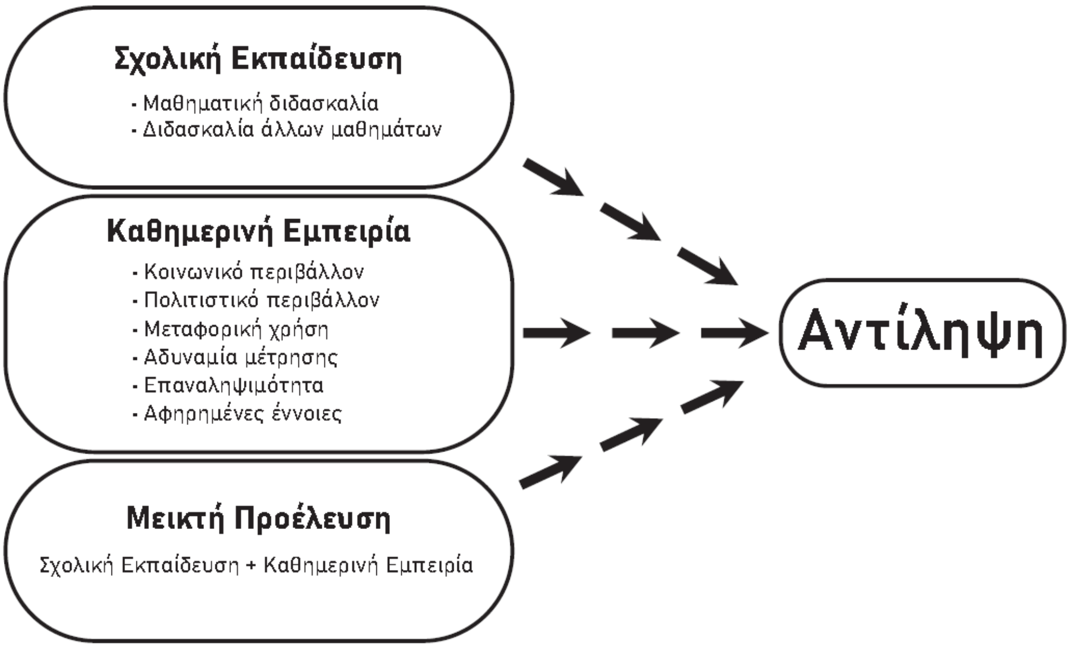
5.2 Αποτελέσματα από την ποιοτική ανάλυση των δεδομένων

5.2.1 Οι αντιλήψεις για την έννοια του απείρου και η προέλευσή τους

Η προέλευση των αντιλήψεων των μαθητών για το άπειρο αποτελεί ένα σύνθετο ζήτημα, καθώς αυτές επηρεάζονται από διάφορους παράγοντες. Η κάθε προέλευση μπορεί να διαφέρει από τον έναν μαθητή στον άλλο, ανάλογα με τις προσωπικές του εμπειρίες και το περιβάλλον του. Επιπλέον, όπως θα δούμε, οι αντιλήψεις των μαθητών δεν είναι πάντα σταθερές και μπορούν να υποστούν αλλαγές με την πάροδο του χρόνου, καθώς και με την απόκτηση νέων εμπειριών και γνώσεων.

Όπως είδαμε σε προηγούμενη ενότητα, ενώ η έννοια υπεισέρχεται σε αρκετά σημεία, απουσιάζει από τα σχολικά εγχειρίδια οποιαδήποτε άμεση αναφορά σε αυτή, ενώ η σύνδεσή της με τις διάφορες θεματικές ενότητες αποδεικνύεται ασθενής, καθώς παρουσιάζεται αποσπασματικά και χωρίς συνοχή. Η ύπαρξη ή η απουσία τυπικών μαθηματικών γνώσεων και νοητικών σχημάτων σχετικών με το άπειρο επηρεάζει την κατανόησή του, αφήνοντας το πεδίο ανοιχτό για τη δημιουργία αντιλήψεων ακόμα και εκτός του μαθήματος των Μαθηματικών.

Μέσω της ανάλυσης των απαντήσεων των μαθητών, φάνηκε ότι η προέλευση των αντιλήψεών τους δύναται να κατηγοριοποιηθεί. Στις ενότητες που ακολουθούν θα δούμε ότι οι αντιλήψεις τους προέρχονται από τη σχολική εκπαίδευση (Μαθηματικά, Φυσικές επιστήμες κ.ά.), τις καθημερινές εμπειρίες (μεταφορική χρήση της λέξης, κοινωνικό και πολιτιστικό περιβάλλον κ.ά) ενώ σε κάποιες περιπτώσεις η προέλευση είναι μεικτή. Στην εικόνα 5.1 βλέπουμε ένα δίκτυο της προέλευσης των αντιλήψεων για το άπειρο.



Εικόνα 5.1 Η προέλευση των αντιλήψεων για το άπειρο

5.2.1.1 Η προέλευση των αντιλήψεων για το άπειρο σε μαθητές της Στ΄ Δημοτικού

Η παρουσίαση του απείρου σε διάφορα μέσα (π.χ.ταινίες) δύναται να επηρεάσει τις ερμηνείες των μαθητών. Στο επόμενο απόσπασμα βλέπουμε ότι η ταινία «Μάτριξ» επηρέασε την αντίληψη του μαθητή της Στ΄ Δημοτικού Δ7'.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με το μαθητή Δ7'
1	Ε: Άρα το πρώτο που είπες ήταν;
2	Δ7': Ο μεγαλύτερος αριθμός, ο μεγαλύτερος αριθμός σε μια σειρά αριθμών.
3	Ε: Δηλαδή το φαντάζεσαι σαν έναν αριθμό, έναν αριθμό που έχει πολλά ψηφία ή σαν πολλούς αριθμούς στη σειρά;
4	Δ7': Σαν ένας αριθμός που έχει πολλά ψηφία.
5	…
6	Δ7': Έχετε δει το Μάτριξ;
7	Ε: Το Μάτριξ ναι.
8	Δ7': Σε έναν υπολογιστή δεν υπήρχαν πάρα πολλά πράγματα…;
9	Ε: Μπράβο, που είχε αριθμούς που εναλλάσσονταν. Κατάλαβα. Άρα για σένα ποια είναι η πιο κατάλληλη λέξη για το άπειρο;
10	Δ7': Ότι δεν ξέρουμε ακριβώς και αυτό… στην ουσία το άπειρο δεν ξέρουμε πόσα ψηφία έχει, εγώ ας πούμε πιστεύω ότι το άπειρο συμβολίζεται έτσι επειδή οι πιο παλιοί μαθηματικοί θα είχαν γράψει 1 και πάρα πολλά μηδενικά, άπειρα.

Ο μαθητής αντιλαμβάνεται το άπειρο ως το μεγαλύτερο αριθμό, έναν αριθμό με άπειρα ψηφία (1-4). Η απάντησή του προέρχεται από πολύπλευρες πηγές, συνδυάζοντας μαθηματικές έννοιες και καθημερινές εμπειρίες, συγκεκριμένα επιρροές από τον κινηματογράφο (6-8). Ο μαθητής αναφέρεται στην ταινία «Μάτριξ», όπου εμφανίζονται στην οθόνη του υπολογιστή συνεχώς εναλλασσόμενοι αριθμοί. Αυτή η εικόνα του φέρνει στο μυαλό την έννοια του απείρου. Μάλιστα, κάνει μια παρομοίωση, συγκρίνοντας το άπειρο με την ατελείωτη ροή αριθμών που εμφανίζονται στην οθόνη. Μέσω αυτής της παρομοίωσης, προσπαθεί να περιγράψει τη διαίσθησή του για το άπειρο χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα.

Η αντίληψή για το άπειρο σε κάποιες περιπτώσεις προέρχεται από τη καθημερινή χρήση της λέξης εκτός του μαθηματικού πλαισίου π.χ. μεταφορικά για να εκφράσει το πάρα πολύ. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η μαθήτρια της Στ΄ Δημοτικού Δ7, η οποία παρουσιάζει πεπερασμένη αντίληψη για την έννοια.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με τη μαθήτρια Δ7
1	Ε: Τι νομίζεις στα Μαθηματικά ότι είναι το άπειρο;
2	Δ7: Το άπειρο είναι ένας αριθμός, που το θεωρώ σαν να είναι το τέλος των αριθμών.
3	Ε:Δηλαδή σαν τι το θεωρείς;

4	Δ7:Σαν τον τελευταίο αριθμό.
5	Ε: Πιστεύεις ότι υπάρχει αριθμός που είναι μεγαλύτερος από όλους τους άλλους;
6	Δ7:Το άπειρο.
7	Ε: θες να μου πεις μια πρόταση με τη λέξη άπειρο;
8	Δ7:Το γρασίδι είναι άπειρο.
9	Ε: Με τι θα άλλαζες τη λέξη άπειρο άμα σου έλεγα να πεις την ίδια πρόταση; Το γρασίδι είναι…;
10	Δ7: Ξέρω εγώ, πολύ;
11	Ε: Οκει εντάξει. Στα Μαθηματικά τι νομίζεις ότι είναι το άπειρο;
12	Δ7: Νούμερο.

Η μαθήτρια Δ7 φαίνεται να έχει πεπερασμένη αντίληψη για το άπειρο θεωρώντας το λανθασμένα ως έναν αριθμό, και συγκεκριμένα τον «τελευταίο» αριθμό (1-6). Όταν της ζητήθηκε να σχηματίσει μια πρόταση με τη λέξη άπειρο, αναφέρθηκε στο «άπειρο γρασίδι» (11-12), κάτι που πέρα από την πεπερασμένη αντίληψη δείχνει και την προέλευση αυτής μέσα από την καθημερινή χρήση της λέξης άπειρο με μεταφορικό τρόπο για να εκφράσει κάτι πολύ μεγάλο αλλά πεπερασμένο σε πλήθος. Η αντίληψη της μαθήτριας αντικατοπτρίζει την προσπάθειά της να δώσει μια συγκεκριμένη μορφή σε μια αφηρημένη έννοια. Η χρήση της λέξης «άπειρο» στην καθημερινή ζωή, συχνά για να περιγράψει μεγάλες ποσότητες, επηρεάζει την αντίληψη των παιδιών. Η καθημερινή εμπειρία των μαθητών με πεπερασμένα αντικείμενα και φαινόμενα δύναται να διαμορφώσει μια διαισθητική αντίληψη για το «πάρα πολύ» (αλλά πεπερασμένο), η οποία έρχεται σε αντίθεση με την έννοια του απείρου. Σε αυτό διαδραματίζει σημαντικό ρόλο ότι η μαθήτρια δεν έχει ακόμη αναπτύξει τις απαραίτητες μαθηματικές έννοιες για να κατανοήσει το άπειρο σε βάθος

Η επίδραση του κοινωνικού περίγυρου, συμπεριλαμβανομένων των συνομηλίκων, της οικογένειας και της κοινωνίας γενικότερα, δύναται να διαμορφώσει τις αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο. Η αντίληψη του μαθητή Δ8' για το άπειρο, προέρχεται από το οικογενειακό του περιβάλλον και συγκεκριμένα τις συζητήσεις με τη μητέρα του.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με το μαθητή Δ8'
1	Ε: Πες μου μια πρόταση με τη λέξη άπειρο.
2	Δ8': Η μητέρα μου μου λέει να θυμάσαι ότι τα αστέρια είναι άπειρα.
3	Ε: Αν άλλαζες τη λέξη άπειρα με κάποια άλλη συνώνυμη τι θα έλεγες; Ότι τα αστέρια είναι;
4	Δ8': Εκατομμύρια.
5	…
6	Ε: Τι ζωγράφισες;
7	Δ8': Αλάτι.
8	Ε: Πώς το σκέφτηκες αυτό;
9	Δ8': Αφού σκέφτηκα ότι το αλάτι είναι πολύ μικρά κομματάκια που είναι μέσα στη σακούλα δεν πρόκειται να είναι λίγο, θα είναι πάρα πολύ.

10	Ε: Επειδή είναι πολλοί κόκκοι αλατιού μέσα στη σακούλα δηλαδή. Ωραία. Πιστεύεις ότι υπάρχει αριθμός που να είναι πιο μεγάλος από όλους τους άλλους;
11	Δ8’: Μου έχει πει και η μητέρα μου ότι υπάρχουν κι άλλοι αριθμοί πάνω από το άπειρο αλλά δεν θυμάμαι πολύ.
12	Ε: Οπότε τελικά τι είναι το άπειρο;
13	Δ8’: Εγώ θα έλεγα ένας αριθμός.

Στο απόσπασμα, ο μαθητής αναφέρει ότι η μητέρα του, του λέει ότι τα αστέρια είναι άπειρα (1-2). Επιπλέον, η αντίληψή του φαίνεται μέσα από την προσπάθειά του να ζωγραφίσει κάτι άπειρο καθώς προσπάθησε να αποδώσει την ιδέα του απείρου μέσα από τους κόκκους αλατιού σε μια σακούλα, θεωρώντας ότι λόγω του μεγάλου αριθμού αυτών η ποσότητά τους είναι άπειρη (6-9). Αυτή η σύνδεση δείχνει μια προσπάθεια του μαθητή να ερμηνεύσει το άπειρο με βάση το πλήθος απτών και οικείων πραγμάτων. Ο μαθητής ταυτίζει το άπειρο με το «πάρα πολύ» και με αριθμό, δηλαδή έχει «πεπερασμένη αντίληψη» (4,13). Στο τέλος του αποσπάσματος κάνει πάλι αναφορά στη μητέρα του καθώς όπως ισχυρίζεται του έχει μιλήσει για την ύπαρξη αριθμών μεγαλύτερων του απείρου. Η μητέρα του μαθητή αποτελεί την κύρια πηγή πληροφοριών για το άπειρο καθώς του έχει μιλήσει, λανθασμένα, για την απειρία των αστεριών και την ύπαρξη αριθμών μεγαλύτερων από το άπειρο. Η έλλειψη εικόνων για την έννοια στο σχολικό περιβάλλον αφήνει το πεδίο ανοιχτό στη διαμόρφωση αντιλήψεων εκτός του μαθηματικού πλαισίου, στην περίπτωση αυτή από το οικογενειακό περιβάλλον.

Η γλώσσα ως μέσο επικοινωνίας, μπορεί να επηρεάσει τις αντιλήψεις των μαθητών. Για παράδειγμα η χρήση μεταφορών μπορεί να οδηγήσει σε παρερμηνείες. Η χρήση της γλώσσας, ενώ αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για την κατανόηση των εννοιών, θέτει και όρια. Στο επόμενο απόσπασμα ζητήθηκε από τη μαθήτρια της Στ΄ Δημοτικού Δ3 να απαντήσει αν οι άνθρωποι έχουμε στα μαλλιά μας άπειρες τρίχες και αν στην Ελλάδα κατοικούν άπειρες καστανές γυναίκες.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με τη μαθήτρια Δ3
1	Ε: Λες ότι στα κεφάλια των ανθρώπων υπάρχουν άπειρες τρίχες. Με αυτό συμφωνείς ή διαφωνείς;
2	Δ3: Αμ… με αυτό, αυτό είναι καλή ερώτηση. Αυτό θυμάμαι είχαμε κάνει μια συζήτηση και κάποιοι σίγουρα είπαν ναι γιατί δεν μπορούμε να τις μετρήσουμε.
3	Ε: Ας σκεφτούμε το δικό μου κεφάλι για παράδειγμα. Έχει κάποιες τρίχες. Αυτές θεωρείς ότι είναι άπειρες ή ότι είναι ένας πολύ μεγάλος αριθμός που απλώς δεν έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε;
4	Δ3: Μάλλον ότι είναι ένας πολύ μεγάλος αριθμός που δεν έχουμε τη δυνατότητα να μετρήσουμε.
5	Ε: Μάλιστα. Άρα εδώ όταν είπες ναι το είπες με την έννοια ότι δεν έχουμε τη δυνατότητα να τα μετρήσουμε;

6	Δ3: Νομίζω και με τα δύο κάπως. Γιατί δεν έχουμε τη δυνατότητα και γιατί είναι πάρα πάρα πάρα πολλές.
7	Ε: Αν υπήρχε ένα μηχάνημα, μια ειδική συσκευή που μέτραγε τις τρίχες και σου έδινε έναν τεράστιο αριθμό θα έλεγες ότι είναι άπειρες;
8	Δ3: Οι τρίχες όχι.
9	Ε: Μετά λες ότι στην Ελλάδα δεν υπάρχουν άπειρες καστανές.
10	Δ3: Ε όχι δεν υπάρχουν γιατί είναι το ίδιο ακριβώς με τις τρίχες. Αν είχες ένα μηχάνημα να τις μετράει δεν σημαίνει ότι είναι…
11	Ε: Απλώς εδώ έβαλες όχι γιατί είναι πιο εύκολο να μετρηθούν οι καστανές γυναίκες;
12	Δ3: Ναι και επίσης δεδομένου ότι δεν είναι σαν τις τρίχες που αλλάζουν στο μισό δευτερόλεπτο.

Στο παραπάνω απόσπασμα παρατηρούμε ότι παρόλο που και τα δύο για τα οποία ερωτήθηκε αφορούν κάποιο πεπερασμένο μεγάλο πλήθος, η αντιμετώπισή της δεν ήταν η ίδια σε κάθε περίπτωση. Η μαθήτρια αρχικά ανέφερε ότι οι τρίχες είναι άπειρες το πλήθος (1-6). Η προέλευση της αντίληψής της φαίνεται να είναι επηρεασμένη από τη μεταφορική χρήση της λέξης για πράγματα στα οποία υπάρχει αντικειμενική δυσκολία της μέτρησης του πλήθους τους, με αποτέλεσμα να υπάρχει αδυναμία μέτρησής τους. Παρ' όλα αυτά, στη συνέχεια, όταν ρωτήθηκε αν στην Ελλάδα κατοικούν άπειρες καστανές γυναίκες απάντησε αρνητικά (9-12).

Βλέπουμε ότι η ταύτιση της λέξης άπειρο με την αδυναμία μέτρησης κάποιου πράγματος την οδήγησε να απαντήσει καταφατικά στην πρώτη ερώτηση αλλά αρνητικά στη δεύτερη ερώτηση καθώς σε αυτή την περίπτωση το πλήθος είναι μεγάλο αλλά υπάρχει τρόπος να υπολογιστεί. Όταν η μαθήτρια ισχυρίζεται ότι οι τρίχες είναι «άπειρες», χρησιμοποιεί την έννοια μεταφορικά για να εκφράσει ότι ο αριθμός τους είναι τόσο μεγάλος που φαίνεται αδύνατο να μετρηθεί. Εδώ η λέξη άπειρο δεν χρησιμοποιείται με την αυστηρή μαθηματική έννοια, αλλά για να υποδηλώσει έναν τεράστιο αριθμό που ξεπερνάει την ανθρώπινη ικανότητα να τον μετρήσει. Η αντίληψή της εξαρτάται από τη δυνατότητα μέτρησης, καθώς το ίδιο σύνολο είναι άπειρο αν δεν μπορούμε να μετρήσουμε το πλήθος των στοιχείων του ή πεπερασμένο αν μπορούμε να το μετρήσουμε. Η επίγνωση των περιορισμών της γλώσσας, η χρήση κατάλληλων μεταφορών και η κριτική σκέψη είναι απαραίτητα για μια πιο σφαιρική κατανόηση κάθε έννοιας.

Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι ένα άτομο μπορεί να έχει πολλαπλές προελεύσεις αντιλήψεων για το άπειρο ταυτόχρονα. Αυτές οι αντιλήψεις αλληλοεπιδρούν και διαμορφώνουν μια σύνθετη και δυναμική κατανόηση της έννοιας. Για παράδειγμα, ένας μαθητής μπορεί να συνδέει το άπειρο με το σύμπαν (αστροφυσική) και παράλληλα να το αντιλαμβάνεται ως κάτι «πολύ μεγάλο» επηρεασμένος από τη χρήση του στην καθημερινή γλώσσα. Ο μαθητής της Στ΄ Δημοτικού Δ6' φαίνεται να αποτελεί χαρακτηριστική περίπτωση μεικτής προέλευσης αντιλήψεων.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με το μαθητή Δ6’
1	Πολύ ωραία ζωγραφική. Πώς και σκέφτηκες το σύμπαν;
2	Δ6’ : Γιατί δεν ξέρουμε, το σύμπαν είναι ένα τεράστιο πράγμα που δεν έχει ούτε αρχή ούτε τέλος.
3	Ε: Τέλεια, αυτό θυμάσαι πού άκουσες για το άπειρο πρώτη φορά;
4	Δ6’ : Δεν θυμάμαι πότε το άκουσα, αλλά πιστεύω γενικά, όποτε ακούω τη λέξη σύμπαν.
	…
5	Ε: Κάτι είπες στην αρχή ότι το άπειρο σχηματίζει το πολύ;
6	Δ6’ : Ναι το άπειρο το χρησιμοποιούμε όταν μιλάμε για κάτι που δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε και είναι πάρα πολύ.
7	Ε: Θεωρείς ότι η σωστή χρήση είναι για κάτι που είναι πάρα πολύ ή όταν δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε; Ή το λες με τη λογική ότι είναι πάρα πολύ άρα δεν μπορούμε να το υπολογίσουμε;
8	Δ6’ : Το άπειρο είναι ένα σχήμα, όχι αριθμός, σχηματίζει το πολύ, όχι έναν αριθμό, το πάρα πολύ.

Ο μαθητής αρχικά χρησιμοποιεί τη λέξη για να περιγράψει το σύμπαν το οποίο θεωρεί ότι δεν έχει αρχή και τέλος (2). Αυτή η ιδέα πιθανότατα προέρχεται από τις γνώσεις που έχει αποκτήσει από τη σχολική εκπαίδευση, από συζητήσεις ή από την ευρύτερη επιστημονική αντίληψη του κόσμου. Το σύμπαν, με την έννοια της απεραντοσύνης του, είναι μια ισχυρή εικόνα που ενσωματώνει την ιδέα του απείρου και αυτή φαίνεται να έχει επηρεάσει τον τρόπο που ο μαθητής κατανοεί και περιγράφει το άπειρο. Έπειτα συνδέει την έννοια με πολύ μεγάλα πλήθη που δεν μπορούν να μετρηθούν (6). Δηλαδή, το άπειρο χρησιμοποιείται μεταφορικά για να δηλώσει κάτι που είναι αδύνατο να μετρηθεί. Αυτή η αντίληψη πιθανότατα προέρχεται από την εμπειρική κατανόηση της λέξης άπειρο στην καθημερινή γλώσσα, όπου χρησιμοποιείται για να περιγράψει κάτι εξαιρετικά μεγάλο ή αμέτρητο. Στη συνέχεια ερμηνεύει το άπειρο ως κάποιο σχήμα, το οποίο πιστεύει ότι «εκφράζει» το «πάρα πολύ» (8). Αυτό υποδεικνύει μια μεταφορική κατανόηση του απείρου ως κάτι που αντιπροσωπεύει το αμέτρητο, κάτι που δεν μπορεί να περιοριστεί σε έναν αριθμό, αλλά σε μια έννοια του «πολύ» ή του «πάρα πολύ».

Συμπερασματικά οι αντιλήψεις του μαθητή για το άπειρο φαίνεται να είναι ένα μείγμα από επιστημονικές ιδέες για το σύμπαν και την απεραντοσύνη του, καθώς και από μια καθημερινή, εμπειρική χρήση της λέξης για να περιγράψει κάτι που δε μπορούμε να υπολογίσουμε. Αυτές οι αντιλήψεις διαμορφώνουν τη μεταφορική κατανόηση του απείρου ως κάτι που αντιπροσωπεύει το «πάρα πολύ» και το «αμέτρητο».

Ο μαθητής Δ1 παρουσιάζει μια ενδιαφέρουσα και πολυδιάστατη αντίληψη για το άπειρο, ξεπερνώντας τα όρια της στενής μαθηματικής ερμηνείας.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με τον μαθητή Δ1
1	Ε: Το άπειρο για σένα είναι αριθμός;

2	Δ1: Είναι και αριθμός αλλά είναι και πολλά άλλα πράγματα.
3	Ε: Για πες.
4	Δ1: Είναι το διάστημα, ο αέρας, το νερό.
5	Ε: Όταν λες ο αέρας και το νερό γιατί πιστεύεις ότι είναι άπειρα;
6	Δ1: Επειδή δεν τελειώνουν ποτέ.
7	Ε: : Δεν τελειώνουν με την έννοια ότι ανακυκλώνονται, ή επειδή δεν μπορείς να ξέρεις την ποσότητα του νερού επειδή είναι τεράστια;
8	Δ1: Με την ανακύκλωση.
	…
9	Ε: Το διάστημα γιατί είναι άπειρο;
10	Δ1: Επειδή έχει πάρα πολλούς γαλαξίες που δεν έχουμε εξερευνήσει ακόμα, υπάρχουν τόσα πολλά πράγματα που δεν έχουμε εξερευνήσει στο διάστημα και έχει πάρα πολλούς πλανήτες δεν ξέρουμε δηλαδή πόσο μεγάλο είναι το άπειρο.
11	Ε: Άρα για σένα πέρα απ’ το ότι κάτι που δεν τελειώνει και ανακυκλώνεται είναι και το άγνωστο κατά κάποιο τρόπο;
12	Δ1: Δεν μπορούμε να το σκεφτούμε, να το επεξεργαστούμε.
13	Ε: Είπες όμως ότι μπορεί να είναι και αριθμός το άπειρο.
14	Δ1: Σκέφτηκα ότι τους αριθμούς δεν μπορούμε να τους μετρήσουμε, δεν μπορούμε δηλαδή να βρούμε τον μεγαλύτερο αριθμό, δεν υπάρχει.
15	Ε: Αν το άπειρο ήταν αριθμός, ποιος αριθμός θα ήταν;
16	Δ1: Κανένας!
17	Ε: Άρα ένας άγνωστος αριθμός;
18	Δ1: Ναι.
19	Ε:Ο οποίος όμως τι ιδιότητα έχει;
20	Δ1: Αφού είναι άγνωστος αριθμός δεν ξέρουμε ποιος είναι, δηλαδή μπορεί να είναι και το τρισεκατομμύριο, μπορεί να είναι και πολύ παραπάνω.

Δεν περιορίζει το άπειρο στα Μαθηματικά, αλλά το αντιλαμβάνεται ως μια πολυδιάστατη οντότητα που διαπερνά τον κόσμο γύρω μας, για παράδειγμα το διάστημα, τον αέρα και το νερό (4). Συγκεκριμένα αναφέρει ότι το άπειρο δεν έχει τέλος και ανακυκλώνεται, ενώ χαρακτηρίζεται από διαδικαστική αντίληψη καθώς αναγνωρίζει την ατέλειωτη φύση του απείρου, με την έννοιας της συνεχούς ανακύκλωσης(6-8). Επιπλέον δείχνει να χρησιμοποιεί την έννοια σε περιπτώσεις όπου δε γνωρίζουμε τις διαστάσεις (διάστημα) ή το πλήθος τους (πλανήτες), στις οποίες οι άνθρωποι παρουσιάζουμε αδυναμία σύλληψης αυτών των μεγεθών. Εκτός από τη συγκεκριμένη αντίληψη παρουσιάζει και πεπερασμένη αντίληψη καθώς αναφέρει ότι το άπειρο είναι κάποιος άγνωστος αριθμός, π.χ. θα μπορούσε να είναι το ένα τρισεκατομμύριο ή κάποιος άλλος πεπερασμένος αριθμός (13-20).

Συμπερασματικά, συνθέτει διαφορετικές οπτικές και αντιλήψεις για το άπειρο, ξεπερνώντας τα στενά μαθηματικά όρια. Αντίστοιχα και η προέλευση των αντιλήψεων αυτών ποικίλει. Ο μαθητής αναφέρει το διάστημα, τον αέρα και το νερό ως άπειρα. Αυτή η αντίληψη πιθανότατα προέρχεται από την καθημερινή του εμπειρία και τις παρατηρήσεις του για τον φυσικό κόσμο. Η ιδέα ότι το διάστημα είναι αχανές, ότι ο αέρας και το νερό ανακυκλώνεται ατελείωτα, είναι αντιλήψεις που συνδέονται με την αίσθηση του άπειρου στην καθημερινή ζωή. Επιπλέον η αναφορά του μαθητή στο σύμπαν ως κάτι που περιέχει αμέτρητους γαλαξίες και πλανήτες που δεν έχουν εξερευνηθεί ακόμα, υποδηλώνει ότι οι αντιλήψεις του για το άπειρο μπορεί να έχουν επηρεαστεί από την επιστημονική εκπαίδευση. Ο μαθητής αντιλαμβάνεται το σύμπαν ως ένα μέρος όπου το άπειρο σχετίζεται με το άγνωστο και το ανεξερεύνητο. Όταν ο μαθητής αναφέρεται στο άπειρο ως «κανένας» συγκεκριμένος αριθμός και ότι «δεν μπορούμε να βρούμε τον μεγαλύτερο αριθμό», φαίνεται να βασίζεται σε μαθηματικές έννοιες που έχει μάθει, πιθανώς από το σχολείο. Η κατανόηση ότι οι αριθμοί είναι ατελείωτοι και ότι το άπειρο δεν είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός, αλλά μια έννοια, είναι μια θεμελιώδης μαθηματική ιδέα. Η ιδέα ότι το άπειρο συνδέεται με το άγνωστο και το ακατανόητο, και ότι είναι κάτι που «δεν μπορούμε να σκεφτούμε, να επεξεργαστούμε» (12), δείχνει ότι ένα μέρος των αντιλήψεων του μαθητή μπορεί να προέρχεται από συζητήσεις, βιβλία ή άλλες εκπαιδευτικές πηγές που παρουσιάζουν το άπειρο ως κάτι που υπερβαίνει την ανθρώπινη κατανόηση.

Σύνοψη των αποτελεσμάτων της Στ΄ Δημοτικού

Οι μαθητές στη Στ΄ Δημοτικού παρουσιάζουν ποικιλία αντιλήψεων, ενώ κάποιες φορές συνδυάζουν μαθηματικές έννοιες με καθημερινές εμπειρίες και πολιτιστικές επιρροές. Η διαμόρφωση αυτών των αντιλήψεων, είναι αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης μεταξύ σχολικής εκπαίδευσης, καθημερινής γλώσσας, κοινωνικών-πολιτιστικών επιρροών και προσωπικών εμπειριών. Συγκεκριμένα, οι προελεύσεις των αντιλήψεων για το άπειρο που αναδεικνύονται στο κείμενο μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως εξής:

Σχολική εκπαίδευση

Μαθηματική διδασκαλία: Οι μαθητές αντλούν αντιλήψεις για το άπειρο μέσω της διδασκαλίας μαθηματικών εννοιών στο σχολείο, παρά το γεγονός ότι η διδασκαλία αυτή μπορεί να είναι αποσπασματική και χωρίς συνοχή. Ορισμένοι μαθητές, όπως η Δ7 και ο Δ8, αντιλαμβάνονται το άπειρο ως έναν «τελευταίο αριθμό» ή «μεγάλο αριθμό», κάτι που υποδηλώνει τη λανθασμένη αντίληψή τους για την έννοια.

Καθημερινή εμπειρία

Μεταφορική χρήση: Οι μαθητές διαμορφώνουν την αντίληψή τους με βάση την καθημερινή εμπειρία τους με πεπερασμένα αντικείμενα. Ο σημαντικότερος παράγοντας της δημιουργίας αυτών των αντιλήψεων είναι η μεταφορική χρήση της λέξης για να περιγράψει κάτι πολύ μεγάλο αλλά όχι άπειρο. Για παράδειγμα ο μαθητής Δ7 αναφέρεται σε άπειρο γρασίδι.

Αδυναμία μέτρησης: Η χρήση της λέξης «άπειρο» στην καθημερινή γλώσσα για να περιγράψει μεγάλες ποσότητες ή πράγματα που δεν μπορούν να μετρηθούν, επηρεάζει τη διαισθητική κατανόηση των μαθητών. Για παράδειγμα η μαθήτρια Δ3 φαίνεται να βασίζει τις αντιλήψεις της για το άπειρο στην ιδέα της δυνατότητας μέτρησης. Αν κάτι μπορεί να μετρηθεί, τότε δεν είναι άπειρο, ενώ αν δε μπορεί να μετρηθεί π.χ. οι τρίχες στο κεφάλι μας τότε είναι άπειρο. Με βάση την προσέγγισή της η αδυναμία μέτρησης πολύ μεγάλων ποσοτήτων μπορεί να οδηγήσει στη χρήση της έννοιας του άπειρου για να περιγράψει κάτι που φαίνεται αμέτρητο.

Επιστημονικές έννοιες: Ορισμένοι μαθητές, όπως ο Δ6, συνδέουν την έννοια του απείρου με επιστημονικές έννοιες, όπως η απεραντοσύνη του σύμπαντος, το οποίο θεωρούν άπειρο λόγω της αδυναμίας πλήρους εξερεύνησής του.

Κοινωνικό περιβάλλον: Οι απόψεις για το άπειρο διαμορφώνονται και από την οικογένεια, όπως φαίνεται από τον μαθητή Δ8, ο οποίος έχει επηρεαστεί από τις συζητήσεις με τη μητέρα του.

Πολιτιστικό περιβάλλον : Ο κινηματογράφος διαμορφώνει επίσης αντιλήψεις για το άπειρο, όπως φαίνεται από την αναφορά του μαθητή Δ7 στην ταινία «Μάτριξ».

Μεικτή προέλευση

Ορισμένοι μαθητές αναπτύσσουν μια πολυδιάστατη κατανόηση του απείρου, συνδυάζοντας επιστημονικές γνώσεις με εμπειρικές και καθημερινές αντιλήψεις. Ο μαθητής Δ1, για παράδειγμα, αναγνωρίζει το άπειρο τόσο ως αριθμό όσο και ως κάτι που δεν έχει τέλος και γίνεται διαρκώς, για παράδειγμα το αξιοποιεί για να περιγράψει ένα φυσικό φαινόμενο (π.χ. ο αέρας).

5.2.1.2 Η προέλευση των αντιλήψεων για το άπειρο σε μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου

Η αντιλήψεις της μαθήτριας της Γ΄ Γυμνασίου Γ16 προέρχονται από την αλληλεπίδραση της σχολικής διδασκαλίας, των καθημερινών εμπειριών της και των προσωπικών της σκέψεων κατά την προσπάθειά της να κατανοήσει την έννοια.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με τη μαθήτρια Γ16
1	Ε: Στα Μαθηματικά συγκεκριμένα, τι νομίζεις ότι είναι το άπειρο; Τι έχεις βάλει στην ερώτηση 2;
2	Γ16: Έβαλα ότι το άπειρο είναι κάτι απροσδιόριστο, μπορεί να είναι είτε η αρχή, καθώς δεν υπάρχει τέλος στους αριθμούς, είτε μια ευθεία γραμμή που έχει άπειρα σημεία και δεν τελειώνει ποτέ.
3	Ε: Όταν λες ότι οι αριθμοί είναι άπειροι, τι εννοείς;
4	Γ16: Πιστεύω ότι γενικά οι αριθμοί, σε κάθε περίπτωση είναι ατελείωτοι, άπειροι, δεν υπάρχει τέλος, δεν υπάρχει ένας αριθμός που είναι μεγαλύτερος απ’ όλους.
5	Ε: Και απροσδιόριστο, με ποια έννοια είναι απροσδιόριστο;
6	Γ16: Πιστεύω δεν υπάρχει κάτι, ένας ορισμός για να πούμε τι είναι το άπειρο. Είναι κάτι το οποίο δεν έχουμε προσδιορίσει. Μπορεί να είναι οι αριθμοί , μπορεί να το χρησιμοποιούμε και μεταφορικά και κυριολεκτικά.
	…
7	Ε: Αν δεν είναι αριθμός τι πιστεύεις ότι είναι;
8	Γ16: Τι να σας πω τώρα, δεν το έχω σκεφτεί, άπειρο πιστεύω είναι κάτι το οποίο θα χρησιμοποιούσαμε ως, νομίζω επιθετικό προσδιορισμό αν με

	καταλαβαίνετε, δηλαδή ως άπειρο, άπειρα είναι τα αστέρια, άπειροι είναι οι αριθμοί, δεν είναι κάτι συγκεκριμένο το άπειρο, αυτό πιστεύω.
	…
9	Ε: Από την άλλη λες ότι είναι δύσκολη έννοια και δεν είναι εύκολο να τη συλλάβει το μυαλό του ανθρώπου, με το απροσδιόριστο αυτό θες να πεις;
10	Γ16: Είναι κάτι δύσκολο, πιστεύω είναι κάτι πολύ περίπλοκο, πρέπει να γίνουν πολλές έρευνες για να δούμε τι ακριβώς είναι το άπειρο και αν όντως υπάρχει τέλος στους αριθμούς ή δεν υπάρχει, αυτό δεν το ξέρω, οπότε είναι κάτι το οποίο θα βάλει τους πάντες να σκεφτούν πάρα πολύ.
	…
11	Ε: Εν τέλει τι πιστεύεις για το άπειρο;
12	Γ16: Άπειρο για μένα είναι κάτι το οποίο δεν έχει τέλος, που συνεχίζει για πάντα, δεν πιστεύω ότι μπορούμε, είναι δύσκολο βασικά να πούμε τι είναι άπειρο σίγουρα, αν το ερευνήσουμε μπορεί να βρούμε κάτι αλλά δεν πιστεύω, είναι κάτι το απροσδιόριστο για μένα, δεν υπάρχει τέλος για μένα, το άπειρο δεν είναι κάτι το οποίο έχει τέλος και επίσης δεν πιστεύω ότι είναι ας πούμε κάτι συγκεκριμένο. Το άπειρο μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε δηλαδή ως επιθετικό προσδιορισμό και μεταφορικά και κυριολεκτικά, αυτό.

Η μαθήτρια αρχικά αναφέρει ότι το άπειρο μπορεί να ερμηνευτεί ως κάτι απροσδιόριστο, που μπορεί να είναι είτε η αρχή των αριθμών καθώς δεν υπάρχει τέλος είτε μια ευθεία γραμμή με άπειρα σημεία και δεν τελειώνει ποτέ (1-4). Παρατηρούμε δηλαδή την ύπαρξη δύο αντιλήψεων, της διαδικαστικής («μια ευθεία γραμμή έχει άπειρα σημεία και δεν τελειώνει ποτέ») και αυτής ως κάτι απροσδιόριστο («είναι κάτι απροσδιόριστο»). Κατά τη διάρκεια της συζήτησης, επεκτείνει την ιδέα της απροσδιοριστίας, αναφέροντας ότι δεν υπάρχει ένας συγκεκριμένος ορισμός για το άπειρο (6). Η μαθήτρια μέσα από την αναφορά για την έλλειψη ορισμού αναδεικνύει τις δυσκολίες που προκύπτουν από την αποσπασματική διδασκαλία της έννοιας, καθώς καταλήγει στο συμπέρασμα ότι ως έννοια δεν έχει προσδιοριστεί πλήρως. Τη συγκεκριμένη πεποίθηση της ενισχύει η συνειδητοποίηση της διπλής χρήσης της λέξης άλλοτε στο καθημερινό πλαίσιο (μεταφορικά) και άλλοτε στο μαθηματικό πλαίσιο (κυριολεκτικά) (6). Επιπλέον η μαθήτρια επισημαίνει την πολυπλοκότητα της έννοιας και την ανάγκη για περαιτέρω έρευνα για την κατανόησή της (10). Συνολικά, παρουσιάζει μια σύνθετη και πολυδιάστατη αντίληψη για την έννοια του άπειρου καθώς το συνδέει με διαφορετικές έννοιες και χρήσεις (12).

Οι αντιλήψεις της μαθήτριας Γ16 για το άπειρο φαίνεται να προέρχονται από έναν συνδυασμό εμπειριών και σχολικής διδασκαλίας. Συγκεκριμένα φαίνεται ότι έχει επηρεαστεί από τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο σχολείο, όπου πιθανότατα έχει διδαχθεί το άπειρο σε σχέση με τους αριθμούς και γεωμετρικά αντικείμενα (όπως η ευθεία γραμμή) (2). Η χρήση του όρου «άπειρο» ως επιθετικός προσδιορισμός (π.χ. «άπειρα αστέρια») (8) υποδεικνύει ότι ένα μέρος των αντιλήψεων της προέρχεται από τη χρήση του όρου σε άλλα πεδία όπως αυτό της αστροφυσικής. Η συνειδητοποίησή της για τη μεταφορική χρήση της λέξης (6) δείχνει ότι η αντίληψή της για το άπειρο δεν είναι αποκλειστικά μαθηματική, αλλά περιλαμβάνει και τη γενικότερη χρήση της λέξης που υπάρχει στην καθημερινή ζωή. Οι αναφορές της στο άπειρο ως «απροσδιόριστο» και «περίπλοκο» (6,10) φανερώνουν μια προσωπική προσπάθεια κατανόησης αυτής της έννοιας, πέρα από ό,τι έχει διδαχθεί. Συνολικά, οι αντιλήψεις της προέρχονται από μια αλληλεπίδραση μεταξύ της σχολικής διδασκαλίας, των εμπειριών από την καθημερινή ζωή και της προσπάθειας κατανόησης της έννοιας.

Είναι σημαντικό η προέλευση των αντιλήψεων να αναζητηθεί και σε άλλα γνωστικά αντικείμενα εκτός των Μαθηματικών. Η λέξη άπειρο, μέσω της μεταφορικής της χρήσης υπεισέρχεται και σε άλλα μαθήματα εκτός των μαθηματικών. Στο απόσπασμα που ακολουθεί, η μαθήτρια της Γ΄ Γυμνασίου Γ1 έχει αποκτήσει κάποια αντίληψη για το άπειρο με βάση αυτά που έμαθε στο μάθημα της Βιολογίας.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με τη μαθήτρια Γ1
1	Ε: Θυμάσαι πού είχες ακούσει για το άπειρο για πρώτη φορά,;
2	Γ1: Εεε, άπειρα παιδιά πεινάνε ή άπειρες λέξεις.
3	Ε: Άρα και στα Μαθηματικά αλλά και στην καθημερινή ζωή.
	…
4	Θυμάσαι να το ‘χεις ακούσει κάπου στο σχολείο, σε κάποιο μάθημα ή κάπου σαν έννοια στα Μαθηματικά;
5	Γ1: Άπειρα κύτταρα.
6	Ε: Είναι όντως άπειρα ή με την έννοια του ότι επειδή είναι πολλά κύτταρα;
7	Γ1: Είναι άπειρα.
8	Ε: Δεν έχουν τέλος εννοείς; Επειδή ξαναγεννιούνται, με ποια λογική;
9	Γ1: Επειδή και δεν μπορούμε να τα μετρήσουμε και ξαναγεννιούνται.

Ο παραπάνω διάλογος δείχνει ότι η μαθήτρια συνδέει την έννοια του απείρου με την καθημερινή της χρήση μέσω κάποιων μεταφορών, π.χ. «άπειρα παιδιά πεινάνε», «άπειρες λέξεις» (1-3). Επιπλέον έχει ακούσει στο μάθημα της Βιολογίας για το τεράστιο πλήθος των κυττάρων στο σώμα μας και τον αέναο κύκλο θανάτου και αναγέννησής τους, κάτι το οποίο την οδηγεί στο συμπέρασμα ότι υπάρχει ένας άπειρος αριθμός κυττάρων στο ανθρώπινο σώμα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να κατανοεί το άπειρο, από τη μία πλευρά ως μια ατελείωτη διαδικασία, και από την άλλη ως κάτι που είναι είτε πολύ μεγάλο για να μετρηθεί είτε δεν έχουμε τη δυνατότητα να το μετρήσουμε (6-9).

Η αντίληψη της μαθήτριας για το άπειρο φαίνεται να προέρχεται από ένα συνδυασμό της χρήσης της λέξης στην καθημερινή ζωή και την έλλειψη συγκεκριμένης μαθηματικής εκπαίδευσης σχετικά με την έννοια. Όπως είδαμε, αναφέρει ότι «άπειρα παιδιά πεινάνε» και «άπειρες λέξεις», κάτι που δείχνει ότι έχει εξοικειωθεί με τη χρήση της λέξης «άπειρο» για κάτι πολύ μεγάλο στο πλήθος ή αμέτρητο (2). Στην καθημερινή γλώσσα, το άπειρο χρησιμοποιείται συχνά για να περιγράψει κάτι που είναι εξαιρετικά μεγάλο ή αδύνατο να μετρηθεί ακριβώς. Επιπλέον, όταν ερωτήθηκε αν έχει συναντήσει στο σχολείο το άπειρο, αναφέρει τα κύτταρα ως άπειρα, γιατί «δεν μπορούμε να τα μετρήσουμε και ξαναγεννιούνται» (5,9). Αυτό δείχνει ότι η κατανόηση της για το άπειρο βασίζεται στην ιδέα της αδυναμίας μέτρησης και της συνεχούς αναγέννησης, χωρίς να έχει μια σαφή μαθηματική κατανόηση της έννοιας. Η συζήτηση υποδηλώνει ότι η μαθήτρια μπορεί να μην έχει λάβει συγκεκριμένη διδασκαλία για το άπειρο στα Μαθηματικά. Η έλλειψη συγκεκριμένων παραδειγμάτων και ορισμών από τα Μαθηματικά έχει αφήσει χώρο για πιο ελεύθερη, καθημερινή ερμηνεία του απείρου.

Η μαθήτρια της Γ΄ Γυμνασίου Γ11, δείχνει να έχει μια λιγότερο ακριβή κατανόηση της έννοιας του απείρου, που συνδέεται περισσότερο με το πολύ μεγάλο πλήθος και το αμέτρητο παρά με την μαθηματική χρήση της έννοιας.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με τη μαθήτρια Γ11
1	Ε: Μετά θέλω να μου πεις αν πιστεύεις ότι στα κεφάλια μας έχουμε άπειρες τρίχες, τι πιστεύεις;
2	Γ11: Ότι έχουμε άπειρες τρίχες.
3	Ε: Πως σκέφτεσαι ότι είναι άπειρες;
4	Γ11: Δεν μπορείς να τις μετρήσεις ποτέ.
5	Ε: Αν είχα ένα ειδικό μηχάνημα, που θα μπορούσε να τις μετρήσει, θα ήταν άπειρες πιστεύεις;
6	Γ11: Ναι.
7	Ε: Πιστεύεις ότι στην Ελλάδα υπάρχουν άπειρες καστανές γυναίκες;
8	Γ11: Όχι εντάξει, δεν είναι πολλές.

Παρατηρούμε ότι θεωρεί ότι οι τρίχες στο κεφάλι μας είναι άπειρες, καθώς δεν μπορούν να μετρηθούν (1-4). Η αντίληψη της μαθήτριας Γ11 ότι οι τρίχες στο κεφάλι μας είναι άπειρες φαίνεται να βασίζεται στην ιδέα ότι το άπειρο εκφράζει κάτι που είναι αδύνατο να μετρηθεί. Η άποψη αυτή παραμένει σταθερή, ακόμα και με την υποθετική ύπαρξη ενός μηχανήματος που θα μπορούσε να τις μετρήσει (5-6). Το γεγονός ότι επιμένει πως οι τρίχες θα παραμείνουν άπειρες ακόμη και αν υπήρχε ένα ειδικό μηχάνημα για να τις μετρήσει δείχνει ότι για εκείνη, το άπειρο συνδέεται με τη δυσκολία της μέτρησης (6). Αντίθετα, όταν της ζητείται να σκεφτεί ένα πλήθος που είναι πιο εύκολα μετρήσιμο, όπως οι καστανές γυναίκες στην Ελλάδα, αναγνωρίζει ότι δεν πρόκειται για κάτι άπειρο γιατί δεν είναι πολλές (7-8).

Η προέλευση της αντίληψης της μαθήτριας Γ11 για το άπειρο φαίνεται να βασίζεται σε μια διαισθητική κατανόηση του τι σημαίνει «άπειρο», που προέρχεται κυρίως από την καθημερινή χρήση της λέξης και την αδυναμία μέτρησης μεγάλων ποσοτήτων. Στην καθημερινή εμπειρία, τα πολύ μεγάλα μεγέθη ή οι ποσότητες που δεν μπορούν να μετρηθούν εύκολα, συχνά περιγράφονται ως «άπειρα» μέσω της μεταφορικής χρήσης της λέξης (2). Σύμφωνα με την αντίληψή της, το άπειρο συνδέεται με την υποκειμενική δυσκολία στη μέτρηση, παρά με την αυστηρή μαθηματική έννοια (4,8). Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, η απουσία μιας αυστηρής μαθηματικής κατανόησης της έννοιας του απείρου οδηγεί τη μαθήτρια σε μια ερμηνεία που βασίζεται στη δική της υποκειμενική εμπειρία. Αυτό φαίνεται από τη διαφοροποίηση που κάνει όταν μιλάει για τις καστανές γυναίκες, όπου αναγνωρίζει ότι το πλήθος τους είναι πεπερασμένο, κάτι που δείχνει ότι κατανοεί τη διαφορά μεταξύ των μετρήσιμων ποσοτήτων και αυτών που είναι δύσκολο να μετρηθούν.

Η αντίληψη του μαθητή Γ14 για την αγάπη ως κάτι «απέραντο» και «μη μετρήσιμο» αποκαλύπτει μια διαισθητική κατανόηση της έννοιας του απείρου που συνδέεται με συναισθηματικές και αφηρημένες έννοιες.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με το μαθητή Γ14
1	Ε: Μετά ζωγράφισες εδώ μια καρδιά.
2	Γ14: Ναι η αγάπη.
3	Ε: Αυτό πώς το σκέφτηκες;
4	Γ14: Δεν ξέρω, η αγάπη δεν μετριέται.
5	Ε: Α με την έννοια του μη μετρήσιμου;
6	Γ14: Όχι, η αγάπη είναι απέραντη, δηλαδή πώς να το πω…

Ο μαθητής χρησιμοποιεί το σύμβολο της καρδιάς για να εκφράσει την αγάπη (1-2) και, μέσα από τη συζήτηση, φαίνεται να θεωρεί την αγάπη ως κάτι που δεν μπορεί να μετρηθεί και δεν έχει όρια (3-6).

Παρατηρούμε ότι συνδέει την αγάπη με την έννοια του απείρου, κάτι που όπως είδαμε σε άλλη ενότητα συμβαίνει για αφηρημένες έννοιες όπως τα συναισθήματα. Η ιδέα ότι η αγάπη είναι «απέραντη» προκύπτει από την εμπειρία ότι τα συναισθήματα δεν έχουν σαφή όρια και δεν μπορούν να περιοριστούν σε αριθμούς ή μετρήσεις. Μάλιστα στην καθημερινή γλώσσα, η αγάπη συχνά περιγράφεται ως «άπειρη» ή «χωρίς όρια». Αυτό μπορεί να έχει επηρεάσει τον μαθητή στο να αντιλαμβάνεται την αγάπη ως κάτι που υπερβαίνει την έννοια της μέτρησης, ενισχύοντας την αντίληψή του για την απεραντοσύνη της. Η χρησιμοποίηση του απείρου από το μαθητή για να εκφράσει την ένταση και το βάθος ενός συναισθήματος, δείχνει τον τρόπο με τον οποίο οι αφηρημένες έννοιες μπορούν να οδηγήσουν σε μια λανθασμένη διαισθητική αντίληψη.

Η αντίληψη της μαθήτριας Γ4 για το άπειρο παρουσιάζει μια ενδιαφέρουσα σύνθεση σκέψεων που συνδυάζουν την ιδέα του αμέτρητου με τη διαδικασία της συνεχούς αναγέννησης ή δημιουργίας.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με τη μαθήτρια Γ4
1	Ε:Τι ακριβώς είναι το άπειρο;
2	Γ4: Το χρησιμοποιούμε σαν έκφραση για να δηλώσουμε ότι κάτι δεν έχει τέλος.
3	Ε: Μετά λες ότι στα κεφάλια υπάρχουν άπειρες τρίχες αλλά δεν υπάρχουν άπειρες καστανές γυναίκες. Αυτό γιατί;
4	Γ4: Γιατί στα μαλλιά όταν πας για κούρεμα, το μαλλί θα μεγαλώσει ξανά, άρα δεν έχει τελειωμό αυτό.
	…

5	Ε: Αυτή τη στιγμή δηλαδή αν μετρήσω τις τρίχες μου θεωρείς ότι είναι άπειρες;
6	Γ4: Σίγουρα δεν είναι άπειρες, είναι όμως πολλές.
7	Ε: Άρα το άπειρο για σένα πιο πολύ είναι το πολύ μεγάλο ή το ατελείωτο;
8	Γ4: Είναι συνδυασμός, είναι λίγο απ' όλα.
9	Ε: Σε αυτή την περίπτωση με τις τρίχες τι είναι;
10	Γ4: Είναι ότι … «αναγέννηση» κάπως έτσι.

Η μαθήτρια φαίνεται να αντιλαμβάνεται το άπειρο ως κάτι που το χρησιμοποιούμε για να δείξουμε ότι κάτι δεν έχει τέλος (1-2). Στη συνέχεια, εστιάζει στο παράδειγμα των τριχών στο κεφάλι, όπου οι τρίχες μεγαλώνουν συνεχώς (3-4). Χρησιμοποιεί το συγκεκριμένο παράδειγμα για να υποστηρίξει την ιδέα του ατελείωτου και εστιάζει στην διαδικασία (δημιουργία μαλλιών) με αποτέλεσμα να χρησιμοποιεί το άπειρο και εκτός μαθηματικού πλαισίου για οτιδήποτε δεν έχει τέλος. Θεωρεί ότι ενώ οι τρίχες είναι άπειρες ως προς το πλήθος τους, οι καστανές γυναίκες δεν είναι (3), κάτι που δείχνει ότι χρησιμοποιεί το άπειρο για να εκφράσει το ατελείωτο και όχι το πάρα πολύ. Ωστόσο, αργότερα η μαθήτρια λέει ότι οι τρίχες δεν είναι πραγματικά άπειρες αλλά είναι «πολλές» (6), δείχνει ότι αναγνωρίζει τη διαφορά μεταξύ ενός μεγάλου αλλά πεπερασμένου αριθμού και μιας διαδικασίας που φαίνεται να μην έχει τέλος. Φαίνεται αρχικά, να ταυτίζει το άπειρο με οτιδήποτε δεν έχει τέλος όμως στο τέλος δείχνει να αντιλαμβάνεται ότι το πλήθος δεν είναι πραγματικά άπειρο.

Όπως είδαμε κατανοεί ότι το άπειρο χρησιμοποιείται ως έκφραση για να δηλώσει κάτι που δεν έχει τέλος (2). Αυτό δείχνει μια κατανόηση της έννοιας του απείρου που είναι περισσότερο καθημερινή και λιγότερο αυστηρά μαθηματική. Για εκείνη, το άπειρο είναι κάτι το οποίο περιγράφει την ατελείωτη φύση κάποιων πραγμάτων. Συνολικά, η αντίληψη της Γ4 για το άπειρο φαίνεται να πηγάζει την πεποίθηση ότι το άπειρο σχετίζεται με κάτι που δεν τελειώνει, από την παρατήρηση φυσικών διαδικασιών χωρίς τέλος (όπως η ανάπτυξη των μαλλιών) αλλά και τη χρήση της γλώσσας. Αυτή η σύνθεση οδηγεί σε μια διαισθητική προσέγγιση, η οποία δεν είναι πλήρως ευθυγραμμισμένη με τη μαθηματική έννοια του απείρου.

Η παρατήρηση της φύσης και των αλλαγών στον κόσμο μπορεί να οδηγήσει τους μαθητές στο να σκέφτονται το άπειρο σε σχέση με τον χρόνο, τον χώρο κλπ. Για παράδειγμα, μπορεί να σκεφτούν το άπειρο όταν προσπαθούν να φανταστούν το μέγεθος του σύμπαντος. Η αντίληψη της μαθήτριας Γ15 για το άπειρο φαίνεται να έχει διαμορφωθεί κυρίως από τη μελέτη και το ενδιαφέρον της για το σύμπαν, παρά από τη σχολική εκπαίδευση.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με τη μαθήτρια Γ15
1	Ε: Πού θυμάσαι να το έχεις ακούσει σαν έννοια;
2	Γ15: Ε…κυρίως όσο ασχολούμουν με το σύμπαν, εκεί έβρισκα αυτή τη λέξη συνέχεια και.. αυτό πιο πολύ. Στο σχολείο όχι τόσο.
3	Ε: Το σύμπαν πώς το φαντάζεσαι, όταν λες ότι είναι άπειρο;
4	Γ15: Ξέρω εγώ, σαν έναν χώρο που όλο και εξαπλώνεται και περισσότερο.

Η μαθήτρια αναφέρει ότι η έννοια του απείρου της είναι πιο οικεία μέσα από τη μελέτη του σύμπαντος, όπου η λέξη άπειρο εμφανίζεται συχνά (1-2). Αναφέρει ότι φαντάζεται το σύμπαν ως έναν χώρο που συνεχώς εξαπλώνεται και διευρύνεται, παρέχοντας έτσι μια εικόνα του ως έναν άπειρο χώρο (4). Αυτή η εικόνα του σύμπαντος που διαρκώς επεκτείνεται ενισχύει την αντίληψή της για το άπειρο ως κάτι που δεν έχει όρια, που συνεχώς αυξάνεται και δεν σταματά ποτέ.

Αναφέρει ότι η έννοια του απείρου σχετίζεται περισσότερο με το ενδιαφέρον της για το σύμπαν παρά με τη σχολική διδασκαλία (2). Αυτό δείχνει ότι η αντίληψή της για το άπειρο έχει διαμορφωθεί από εξωσχολικές πηγές, όπως βιβλία, ντοκιμαντέρ, ή άλλες πηγές πληροφόρησης που ασχολούνται με την αστροφυσική και τις επιστήμες του διαστήματος. Στην αστροφυσική συχνά το σύμπαν περιγράφεται με όρους παρόμοιους με την έννοια του απείρου, είτε πρόκειται για το μέγεθος, τη χρονική διάρκεια, ή την επέκτασή του. Η μαθήτρια φαίνεται να έχει επηρεαστεί από αυτό, αντιλαμβανόμενη το άπειρο ως μια ιδιότητα του σύμπαντος που εκφράζει την ιδέα της απεριόριστης επέκτασης και της απουσίας ορίων.

Όπως είδαμε ένα άτομο μπορεί να έχει διαφορετικές προελεύσεις αντιλήψεων για το άπειρο ταυτόχρονα. Η μαθήτρια Γ3 έχει μια συνδυαστική αντίληψη του απείρου, η οποία ενσωματώνει τόσο μαθηματικές όσο και έννοιες της αστροφυσικής.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με τη μαθήτρια Γ3
1	Ε: Στη δεύτερη ερώτηση αυτό που ζητάμε είναι να μας πεις τι νομίζεις ότι είναι το άπειρο στα Μαθηματικά.
2	Γ3: Ουσιαστικά το άπειρο είναι οι αριθμοί από ένα σημείο και πάνω που είναι τόσο μεγάλοι σαν αριθμοί που δεν μπορούμε να τους μετρήσουμε.
3	Ε: Πιστεύεις δηλαδή ότι το άπειρο είναι αριθμός ή εκφράζει το πλήθος των αριθμών;
4	Γ3: Είναι αριθμός αλλά χαρακτηρίζουμε έτσι τους αριθμούς από ένα σημείο και πάνω που δεν χρειαζόμαστε λεπτομερή ανάλυση οπότε λέμε άπειρο.
5	Ε: Δηλαδή το βλέπεις σαν ένα σύμβολο για να εκφράσει τους πολύ μεγάλους αριθμούς;
6	Γ3: Ναι ουσιαστικά από ένα σημείο και πάνω, επειδή οι αριθμοί δεν τελειώνουν ποτέ όπως είπα και πριν, από ένα σημείο και πάνω που δεν μπορούμε να μετρήσουμε λέμε άπειρο.
	…
7	Ε: Άρα τώρα όταν ακούς άπειρο, τι σου έρχεται στο νου, τι πιστεύεις τελικά ότι είναι το άπειρο;
8	Γ3: Μια συνεχόμενη ροή που δεν τελειώνει ποτέ.
9	Ε: Μια ροή αριθμών που δεν έχει τέλος ε…
10	Γ3: Όχι μόνο αριθμών, και γενικά. Όταν ακούμε τη λέξη άπειρο και στο διάστημα πάλι… ότι το σύμπαν δεν τελειώνει ποτέ.
11	Ε: Άρα θεωρείς ότι το άπειρο δεν είναι μόνο Μαθηματική έννοια, είναι και άλλα πράγματα.

12	Γ3: Βασικά πιστεύω, έτσι όπως το έχω ακούσει εγώ ότι είναι στο διάστημα και στα Μαθηματικά. Δηλαδή στο διάστημα όσο και να ταξιδέψεις δεν μπορείς ποτέ να το εξερευνήσεις ολόκληρο. Και στα Μαθηματικά και όλες τις μέρες της ζωής μου να μετράω πάλι δεν θα έχω τελειώσει το μέτρημα.

Στο παραπάνω απόσπασμα βλέπουμε πως η μαθήτρια κατανοεί το άπειρο ως κάτι που συνδέεται με τους αριθμούς που «δεν μπορούμε να μετρήσουμε» και το θεωρεί ως έναν τρόπο να περιγράψουμε αριθμούς που είναι πάρα πολύ μεγάλοι (1-6). Η μαθήτρια φαίνεται να έχει συνδυάσει τη μαθηματική έννοια του απείρου με τη γενικότερη ιδέα της ατελείωτης ροής ή της απεριόριστης επέκτασης (7-10). Αυτό φαίνεται όταν αναφέρει ότι το άπειρο μπορεί να εφαρμοστεί και στο σύμπαν, υποδεικνύοντας πως το βλέπει ως κάτι που υπερβαίνει τα μαθηματικά και αγγίζει και άλλα πεδία (11-12).

Πέρα από τη μαθηματική εκπαίδευση φαίνεται να έχει επηρεαστεί και από άλλες πηγές, όπως η αστροφυσική. Αναφέρει ότι το σύμπαν είναι άπειρο, κάτι που συναντάται συχνά σε συζητήσεις για το διάστημα, όπου το σύμπαν περιγράφεται ως ατελείωτο και ανεξερεύνητο. Συνολικά, η μαθήτρια έχει μια πολύπλευρη αντίληψη του απείρου, η οποία προέρχεται από μια συνδυαστική επίδραση της μαθηματικής εκπαίδευσης και του ενδιαφέροντος της για το σύμπαν. Για εκείνη, το άπειρο είναι μια έννοια που εφαρμόζεται τόσο σε μαθηματικά πλαίσια όσο και στη φυσική πραγματικότητα, περιγράφοντας κάτι που δεν έχει τέλος, είτε πρόκειται για αριθμούς, το διάστημα, ή άλλες ατελείωτες διαδικασίες.

Σύνοψη των αποτελεσμάτων της Γ΄ Γυμνασίου

Συμπερασματικά οι αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια του απείρου στη Γ΄ Γυμνασίου επηρεάζονται από διάφορους παράγοντες, όπως η σχολική εκπαίδευση και η καθημερινή εμπειρία. Συγκεκριμένα, οι προελεύσεις των αντιλήψεων για το άπειρο που αναδεικνύονται στο κείμενο μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως εξής:

Σχολική εκπαίδευση

Μαθηματική διδασκαλία: Η μαθήτρια Γ16 αναφέρει ότι το άπειρο συνδέεται με τους αριθμούς και τις γεωμετρικές γραμμές, δηλώνοντας ότι δεν υπάρχει τέλος στους αριθμούς και ότι μια ευθεία γραμμή έχει άπειρα σημεία. Αυτές οι αντιλήψεις δείχνουν επιρροή από τη σχολική διδασκαλία των Μαθηματικών.

Διδασκαλία άλλων μαθημάτων: Η μαθήτρια Γ1 αναφέρει τη χρήση του όρου «άπειρο» για να περιγράψει πράγματα όπως τα άπειρα κύτταρα στο σώμα, υποδεικνύοντας μια εμπειρική προσέγγιση που πηγάζει από το μάθημα της Βιολογίας. Η μαθήτρια Γ15 έχει επηρεαστεί από τη μελέτη του σύμπαντος και την αστροφυσική, όπου το άπειρο σχετίζεται με την απεριόριστη επέκταση του χώρου.

Καθημερινή εμπειρία

Μεταφορική Χρήση: Οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν το άπειρο μεταφορικά στην καθημερινή τους ζωή. Η Γ16 αναγνωρίζει τη διπλή χρήση της λέξης, τόσο μεταφορικά όσο και κυριολεκτικά, όπως συμβαίνει και στη καθημερινή ζωή.

Αδυναμία μέτρησης- επαναληψιμότητα: Στις περιπτώσεις των μαθητριών Γ11 και Γ4, παρατηρείται ότι η έλλειψη συγκεκριμένης μαθηματικής διδασκαλίας για το άπειρο οδηγεί σε μια πιο διαισθητική και καθημερινή κατανόηση της έννοιας. Για παράδειγμα, η Γ11 θεωρεί ότι οι τρίχες στο κεφάλι μας είναι άπειρες επειδή δεν μπορούν να μετρηθούν εύκολα, ενώ η Γ4 συνδέει το άπειρο με τη συνεχή αναγέννηση των τριχών, χωρίς να αντιλαμβάνεται πλήρως τη μαθηματική έννοια του απείρου.

Αφηρημένες έννοιες: Ο μαθητής Γ14 χρησιμοποιεί το άπειρο για να περιγράψει την αγάπη, την οποία θεωρεί απέραντη και μη μετρήσιμη, δείχνοντας πώς οι αφηρημένες έννοιες και τα συναισθήματα μπορούν να οδηγήσουν σε μια διαισθητική κατανόηση του απείρου.

5.2.1.3 Η προέλευση των αντιλήψεων για το άπειρο σε μαθητές της Γ΄ Λυκείου

Οι αντιλήψεις της μαθήτριας της Γ΄ Λυκείου Λ5, έχουν διαμορφωθεί από μια συνδυασμένη επίδραση της φαντασίας και της εμπειρίας της μέσα από τον κινηματογράφο, καθώς και από το μάθημα των Μαθηματικών.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με τη μαθήτρια Λ5
1	Ε: Θυμάσαι πότε άκουσες τη λέξη άπειρο; Ήταν στο σχολείο, ήταν στην τηλεόραση ή στην οικογένειά σου;
2	Λ5: Νομίζω στο Toy Story.
3	Ε: Α στην παιδική ταινία; Αυτή είναι η φράση που λες στο άπειρο κι ακόμα παραπέρα; Από τον Μπαζ ε;
4	Λ5: Ναι.
5	Ε: Και τότε όταν άκουσες το άπειρο τι σκέφτηκες ότι είναι;
6	Λ5: Σκέφτηκα ότι είναι μια μαύρη τρύπα στο διάστημα και ότι μπαίνεις εκεί μέσα και δεν θα βγεις ποτέ, αλλά όχι με την σκοτεινή έννοια, με μια πιο φυσιολογική έννοια.
7	Ε: Δηλαδή τι εννοείς πιο φυσιολογική έννοια;
8	Λ5: Εννοώ όχι σαν κάτι κακό, σαν κάτι που δεν θα τελειώσει.
9	Ε: Όταν πήγες στο σχολείο, το άκουσες ποτέ σαν λέξη;
10	Λ5: Ε ναι, στα Μαθηματικά.
11	Ε: Θυμάσαι αν ήταν στο Δημοτικό ή στο Γυμνάσιο και σε τι μάθημα;
12	Λ5: Νομίζω στο Γυμνάσιο θα ήταν. Βασικά όταν κάναμε τα σύνολα των αριθμών και λέγαμε τρία έως άπειρο.
	…
13	Ε: Λες ότι στα Μαθηματικά το άπειρο είναι οι διαφορετικοί συνδυασμοί αριθμών, τι εννοείς σε αυτό;

14	Λ5: Ότι επειδή δεν υπάρχει κάποιος περιορισμός στα ψηφία των αριθμών και ούτε κάποιος περιορισμός στο πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένα ψηφίο σε έναν αριθμό, και ούτε κάποιος περιορισμός όσον αφορά τη σειρά τους.
15	Ε: Τι εννοείς χωρίς κανέναν περιορισμό;
16	Λ5: Ούτε στον αριθμό των ψηφίων που θα χρησιμοποιηθούν, ούτε στη σειρά τους, ούτε και στο αν θα είναι αρνητικός, θετικός, κλάσμα, δεκαδικός και όλα αυτά.
17	Ε: Τα ψηφία του αριθμού έχουν σταματημό ή όχι;
18	Λ5: Εεε έχουν έναν σταματημό. …αλλά και να σκεφτούμε ότι δεν θα σταματάγανε δεν θα χωρούσε μια εικόνα στο μυαλό μας.
19	Ε: Και οι αριθμοί αυτοί έχουν κάποιο μοτίβο ή είναι τυχαίοι;
20	Λ5: Σκέφτομαι έναν μεγάλο αριθμό, έναν ενιαίο, με πολλά ψηφία. Ας πούμε 5678…13.

Όπως παρατηρούμε η πρώτη επαφή της μαθήτριας με την έννοια του απείρου φαίνεται να ήταν μέσω της δημοφιλούς ταινίας κινουμένων σχεδίων Toy Story (2), όπου ο Μπαζ Λαίτγιερ αναφέρει τη φράση «στο άπειρο και ακόμα παραπέρα» (3). Η μαθήτρια όταν άκουσε τη συγκεκριμένη φράση συνέδεσε την έννοια με μια «μαύρη τρύπα στο διάστημα», ερμηνεύοντάς την ως κάτι άπειρο, κάνει αναφορά στο ατελείωτο δείχνοντας τη «διαδικαστική» της αντίληψη (6-8). Η προσωπική ερμηνεία της για το άπειρο φαίνεται να είναι έμμεσα επηρεασμένη από την παιδική της φαντασία και τον τρόπο με τον οποίο αντιλαμβανόταν τον κόσμο ως παιδί. Επιπλέον αναφέρει ότι είχε ακούσει τη λέξη στο μάθημα των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο, συγκεκριμένα σε μία διδασκαλία σχετική με τα σύνολα των αριθμών (11-12).

Στη συνέχεια αντιλαμβάνεται το άπειρο ως έναν αριθμό που δεν έχει κανέναν περιορισμό, ούτε στα ψηφία των αριθμών ούτε στη σειρά που αυτά χρησιμοποιούνται (13-20). Θεωρεί ότι τα ψηφία αυτού του αριθμού έχουν κάποιο τέλος, ενώ επισημαίνει ότι δεν εμφανίζεται κάποιο συγκεκριμένο μοτίβο στα ψηφία του. Αυτό συμβαίνει, καθώς αναγνωρίζει τη δυσκολία απεικόνισης του απείρου στο μυαλό μας, λόγω των περιορισμών της ανθρώπινης αντίληψης. Η μαθήτρια εκτός από τη διαδικαστική αντίληψη που είδαμε παρουσιάζει και πεπερασμένη αντίληψη καθώς φαντάζεται το άπειρο σαν έναν μεγάλο, ενιαίο αριθμό και μέσα από το παράδειγμα του αριθμού «5678...13», προσπαθεί να απεικονίσει την έννοια του απείρου.

Οι αντιλήψεις της φαίνεται να έχουν προέλευση από δύο βασικές πηγές, τον κινηματογράφο και τη μαθηματική εκπαίδευση. Η πρώτη επαφή της με την έννοια του άπειρου προήλθε από μια ταινία κινουμένων σχεδίων, το Toy Story (2). Η φράση, «στο άπειρο κι ακόμα παραπέρα», προκάλεσε μια έντονη φανταστική εικόνα του άπειρου ως κάτι που σχετίζεται με το διάστημα που δεν έχει κάποιο τέλος. Συγκεκριμένα η σύνδεση του απείρου με τη μαύρη τρύπα είναι μια μεταφορά που δίνει μια προσπάθεια οπτικής της έννοιας (6). Όταν η συζήτηση προχώρησε στα Μαθηματικά, φάνηκε ότι η αντίληψή της για το άπειρο εξελίχθηκε μέσω της σχολικής εκπαίδευσης (12). Στα Μαθηματικά, το άπειρο συχνά παρουσιάζεται στα πλαίσια των αριθμών και των συνόλων, ως κάτι που δεν έχει όριο ή τέλος. Αυτή η έννοια του απείρου συνδέεται με την ιδέα ότι οι αριθμοί μπορούν να είναι ατελείωτοι σε πλήθος και μορφή (θετικοί, αρνητικοί, δεκαδικοί, κλάσματα κλπ.) (16). Παρ' όλα αυτά στο τέλος παρουσιάζει λανθασμένη αντίληψη για την έννοια καθώς στην προσπάθειά της να την οπτικοποιήσει σκέφτεται κάποιο μεγάλο αριθμό (18-20).

Σε επόμενο απόσπασμα της συνέντευξης με τη μαθήτρια Λ5, βλέπουμε ότι θεωρεί το άπειρο ως κάτι που δεν έχει δομή ή κανόνες και είναι εντελώς ελεύθερο από περιορισμούς. Περιγράφει το άπειρο ως μια αφηρημένη έννοια που ξεπερνά την ανθρώπινη κατανόηση και δεν μπορεί να αποδοθεί με συγκεκριμένο τρόπο.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με τη μαθήτρια Λ5
1	Ε: Και όταν έλεγες ότι φαντάζεσαι κάποιους αριθμούς, τι αριθμούς φανταζόσουν; Ή δεν φανταζόσουν καν ποιοι μπορεί να είναι ;
2	Λ5: Ε, με πολλά ψηφία και όχι κάποια, βασικά φανταζόμουν έναν αριθμό με άπειρα ψηφία.
3	Ε: Τώρα που είναι σειρά αριθμών, μπορείς να φανταστείς πώς θα ήταν άπειρη; Δεν θα έβλεπες καν από ποιους αριθμούς αποτελείται;
4	Λ5: Ναι σκέφτομαι απλά, ας πούμε ένα τεράστιο χαρτί να αναγράφονται πάρα πάρα πολλοί αριθμοί με διάφορα ψηφία.
5	Ε: Τι αριθμοί θα μπορούσε να είναι; Με τυχαία σειρά;
6	Λ5: Στην αρχή μπορεί να είναι το 1 μετά μπορεί να είναι το 5.603.000.
7	Ε: Έχοντας δει τόσα πολλά, τι είναι λοιπόν για σένα το άπειρο;
8	Λ5: Νομίζω είναι κάτι άτακτο και κάτι χωρίς περιορισμούς.
	…
9	Ε: Και γιατί είναι άγνωστο; Για ποιο λόγο το θεωρείς άγνωστο;
10	Λ5: Επειδή δεν μπορούμε καν να το φανταστούμε.
11	Ε: Είναι λίγο αφηρημένη έννοια δηλαδή;
12	Λ5: Ναι, ακόμα και αυτά που σκέφτονται όλοι οι άνθρωποι του κόσμου να σκεφτούμε, να τα συλλέξουμε ας πούμε, δεν μπορούμε και πάλι να πλησιάσουμε το τι μπορεί να είναι.

Η σκέψη της για έναν αριθμό με άπειρα ψηφία δείχνει μια προσπάθεια να κατανοήσει το άπειρο με βάση μαθηματικές έννοιες που έχει συναντήσει (1-2). Η φαντασία της περιλαμβάνει εικόνες όπως ένα τεράστιο χαρτί με πολλούς αριθμούς, σε μια προσπάθειά της να οπτικοποιήσει κάτι αφηρημένο (3-4). Στη συνέχεια χαρακτηρίζει το άπειρο ως κάτι «άτακτο» και «χωρίς περιορισμούς», πράγμα που δείχνει μια γενική αντίληψη ότι το άπειρο ότι είναι κάτι που δεν υπόκειται σε κανονικότητες ή όρια (7-8). Τέλος, θεωρεί ότι το άπειρο είναι άγνωστο επειδή δεν μπορούμε να το φανταστούμε πλήρως (9-10). Αυτό αναδεικνύει την αντίληψή της για το άπειρο ως κάτι αφηρημένο το οποίο δεν μπορεί να προσδιοριστεί και να κατανοηθεί πλήρως.

Η προέλευση των αντιλήψεών της για το άπειρο περιλαμβάνει πτυχές που συνδυάζουν εκπαιδευτικά ερεθίσματα και προσωπικές πεποιθήσεις καθώς αναφέρει ότι το άπειρο είναι κάτι που ξεπερνά τις ανθρώπινες δυνατότητες. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η αναφορά της στην αδυναμία να συλλάβουμε πλήρως το άπειρο, ακόμη και με τη συλλογική προσπάθεια όλων των ανθρώπων.

Από το απόσπασμα της συνέντευξης με το μαθητή Λ3, προκύπτει ότι η αντίληψή του για το άπειρο συνδέεται κυρίως με την ιδέα της αδυναμίας μέτρησης.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με το μαθητή Λ3
1	Ε: Και όταν λες άπειρα πράγματα είπες είναι το σύμπαν, οι αριθμοί, έχεις σκεφτεί άλλο άπειρο πράγμα;
2	Λ3: Η άμμος.
3	Ε: Εμ.. αν τη μετρούσαμε για πολλά χρόνια…
4	Λ3: Ναι, η άμμος είναι σε όλη τη Γη, δεν γίνεται να τη μετρήσει κάποιος.
	…
5	Ε: Το άπειρη δηλαδή εδώ το λες με την έννοια της αδυναμίας μέτρησης, ότι άπειρο είναι ό,τι δεν μπορούμε να το μετρήσουμε;
6	Λ3: Όχι, ότι είναι σε όλο τον κόσμο, υπάρχει μέσα στη θάλασσα στους βυθούς και δεν μπορούμε να την βρούμε.
7	Ε: Δεν έχουμε αυτή τη δυνατότητα σίγουρα.
8	Λ3: Και οι κόκκοι είναι σε όλη την επιφάνεια της Γης, υπάρχουν πάρα πολύ που είναι απειροελάχιστοι και απλά δεν μπορούμε να βρούμε πόσοι είναι.
9	…
10	Ε: Οπότε για σένα άπειρο είναι και ό,τι δεν μπορούμε, έχουμε την αδυναμία να το μετρήσουμε.
11	Λ3: Εντάξει δεν λέω ότι δεν μπορούμε να μετρήσουμε κάτι πιο απλό αλλά κάτι που δεν μπορούμε και να θέλουμε να το μετρήσουμε.

Ο μαθητής συνδέει την έννοια του απείρου με τα πολύ μεγάλα πλήθη που δεν μπορούν να μετρηθούν, καθώς θεωρεί άπειρη την άμμο (2). Αναγνωρίζει ότι με τα σημερινά μέσα δεν είναι εφικτό να μετρηθεί η άμμος, με αποτέλεσμα να αντιμετωπίζει το άπειρο ως κάτι το οποίο είναι πρακτικά αδύνατο να ποσοτικοποιηθεί (6). Φαίνεται σε κάποιο βαθμό η αντίληψή του να έχει επηρεαστεί από την καθημερινή χρήση της λέξης καθώς χρησιμοποιεί το άπειρο σε καταστάσεις όπου έχουμε αδυναμία μέτρησης με αποτέλεσμα το πλήθος να είναι άγνωστο (8,10).

Η χρήση της λέξης «άπειρο» στην καθημερινή γλώσσα για να περιγράψει μεγάλες ποσότητες επηρεάζει την αντίληψη του μαθητή. Αυτό συμβαίνει, καθώς συνδέει άμεσα το άπειρο με την αδυναμία ακριβούς μέτρησης. Δηλαδή, κάτι που δεν μπορούμε να το μετρήσουμε, για εκείνον θεωρείται άπειρο.

Σε επόμενο σημείο της συνέντευξης ο ίδιος μαθητής (Λ3) φαίνεται να αντιμετωπίζει την έννοια του απείρου ως κάτι που είναι απροσδιόριστο και είναι δύσκολο να συλλάβουμε πλήρως.

	Απόσπασμα από τη συνέντευξη του μαθητή Λ3
1	Λ3: Όλες αυτές οι ερωτήσεις σε μπερδεύουν γιατί απ' τη μία σου φαίνεται ότι μπορεί να είναι σωστό αλλά απ' την άλλη μπορεί να είναι και λάθος, επειδή το άπειρο είναι κάτι απροσδιόριστο που δεν μπορούμε να το αντιληφθούμε οπότε για αυτό με μπερδεύει .
2	Ε: Απροσδιόριστο με την έννοια ότι δεν μπορούμε να το αντιληφθούμε, σαν άγνωστο το λες;
3	Λ3: Ναι δεν μπορούμε να το προσδιορίσουμε, να πούμε το άπειρο είναι αυτό. Είναι μια έννοια έτσι λίγο…δεν ξέρω.
4	Ε: Ούτε το άγνωστο σου φαίνεται κατάλληλη λέξη;
5	Λ3: Ναι, το απροσδιόριστο γιατί μου φαίνεται το ίδιο πράγμα με το διάστημα που δεν μπορούμε να αντιληφθούμε πού υπάρχει, τι είναι όλο αυτό στο γύρω γύρω.
	…
6	Ε: Υπάρχει κάτι άπειρο αλλά όχι απροσδιόριστο;
7	Λ3: Ναι μπορούμε, ενώ ας πούμε κάποια πράγματα δεν μπορούμε, εγώ εννοώ ότι το άπειρο σαν έννοια, δηλαδή δεν υπάρχει ένας αριθμός, τι είναι άπειρο-είναι αυτό, γι' αυτό λέω ότι είναι κάτι απροσδιόριστο, όμως ας πούμε, πώς να σας το πω, εννοώ ότι την έννοια γενικά του απείρου, δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε και να συλλάβουμε το τι είναι άπειρο.

Συγκεκριμένα, χαρακτηρίζει το άπειρο ως κάτι απροσδιόριστο, που δεν μπορούμε να κατανοήσουμε πλήρως (1). Ο μαθητής κάνει μια αναλογία μεταξύ του απείρου και του διαστήματος. Για εκείνον, όπως το διάστημα είναι κάτι που δεν μπορούμε να αντιληφθούμε πλήρως, έτσι και το άπειρο είναι μια έννοια που δεν μπορούμε να κατανοήσουμε ολοκληρωτικά (5). Αυτό δείχνει πως συνδέει το άπειρο με κάτι που η ανθρώπινη διάνοια αδυνατεί να το συλλάβει σε όλη του την έκταση.

Στο συγκεκριμένο απόσπασμα φαίνεται η αντίληψή του να έχει προέλευση από την πεποίθηση ότι το διάστημα είναι άπειρο καθώς κάνει ένα παραλληλισμό της έννοιας του απείρου με αυτό. Η δυσκολία του να προσδιορίσει το άπειρο υποδεικνύει μια αναζήτηση για βαθύτερη κατανόησή του, επηρεασμένη από σκέψεις για το σύμπαν καθώς θεωρεί ότι και τα δύο υπερβαίνουν τα όρια της αντίληψής μας (7).

Ο μαθητής Λ2 αντιλαμβάνεται το άπειρο ως κάτι που δεν έχει τέλος και το συνδέει με την ιδέα ότι ο άνθρωπος δεν μπορεί να το αντιληφθεί πλήρως.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με το μαθητή Λ2
1	Ε: Έχεις ζωγραφίσει μια ευθεία που δεν μπορούμε να διακρίνουμε τις άκρες της. Τι εννοείς δεν μπορούμε να τις διακρίνουμε;

2	Λ2: Έχουμε ένα χαρτί και κάνουμε μια ευθεία η οποία δεν έχει κάπου τέλος, δηλαδή κόβεται εκεί που τελειώνει το χαρτί αλλά αν είχαμε κι άλλο χαρτί θα συνέχιζε.
	…
3	Ε: Το άπειρο τι είναι;
4	Λ2: Είναι ένας συμβολισμός για οτιδήποτε δεν έχει τέλος.
	…
5	Ε: Το πρώτο που σκέφτηκες όταν ξεκινήσαμε τη συνέντευξη, για το άπειρο ποιο ήταν;
6	Λ2: Είναι μια έννοια που συμβολίζει κάτι οτιδήποτε, δεν έχει τέλος.
7	Ε: Μου κάνει εντύπωση που ενώ έχετε δει πολλά πλέον στην Γ΄ Λυκείου , δεν σου έρχεται καμία ανάμνηση από αυτά όταν μιλάς για το άπειρο.
8	Λ2: Μου έρχεται ότι εκεί το συμβολίζουμε σαν αριθμό.
9	Ε: Α στα Μαθηματικά είναι σαν αριθμός;
10	Λ2: Εγώ έτσι το έχω αποκωδικοποιήσει, ότι λέμε ας πούμε αυτό το όριο κάνει άπειρο, σαν να λέμε ότι κάνει έναν αριθμό, αλλά απ' την άλλη δεν μπορώ να το φανταστώ σαν αριθμό, γιατί σκέφτομαι και μια συνάρτηση που είναι μια καμπύλη και πάει…δεν τελειώνει.
11	Ε: Άρα πάλι είναι κάτι που δεν τελειώνει απλώς εννοείς ότι ο συμβολισμός λειτουργεί περίπου σαν αριθμός;
12	Λ2: Ναι χωρίς όμως να το απεικονίζει απόλυτα.
	…
13	Ε: Έχοντας δει λοιπόν πλέον τόσα πολλά για το άπειρο, τι είναι για εσένα;
14	Λ2: Είναι κάτι που πιστεύω ότι ο άνθρωπος δεν μπορεί να το αντιληφθεί απόλυτα και κάποιος που δεν πολύ-ξέρει, όταν ακούει άπειρο και εγώ σκέφτομαι κάτι ατελείωτο, χωρίς όμως να μπορώ να το προσδιορίσω.

Αρχικά, συνδέει το άπειρο με οπτικές παραστάσεις καθώς σχεδιάζει μια ευθεία που όπως αναφέρει συνεχίζεται ανεξάντλητα άρα η σχεδίασή της καταλαμβάνει όλη τη σελίδα (2). Με τη συγκεκριμένη μεταφορά-αναπαράσταση προσπαθεί να εξηγήσει την έννοια του απείρου καθώς η ευθεία γραμμή είναι κάτι συγκεκριμένο που μπορούμε να δούμε, ωστόσο η ιδέα της απεριόριστης προέκτασής της μας οδηγεί στην αφηρημένη έννοια του απείρου. Στη συνέχεια, αναφέρει το άπειρο ως έναν συμβολισμό για οτιδήποτε δεν έχει τέλος, ανεξαρτήτως εάν αυτό αφορά μια σειρά αριθμών ή μια καμπύλη συνάρτηση (4-10). Παράλληλα, αντιλαμβάνεται το άπειρο ως μια έννοια που υπερβαίνει τα όρια της ανθρώπινης κατανόησης και δυσκολεύεται να το περιγράψει με απόλυτο τρόπο (14).

Η προέλευση των αντιλήψεων του μαθητή για το άπειρο είναι σύνθετη καθώς φαίνεται η αλληλεπίδραση μεταξύ των προσωπικών του εμπειριών και της μαθηματικής του εκπαίδευσης. Από τη μια πλευρά, το αντιμετωπίζει ως κάτι αφηρημένο, που ξεφεύγει από την ανθρώπινη κατανόηση και δεν μπορεί να προσδιοριστεί με ακρίβεια, ενώ από την άλλη πλευρά, προσπαθεί αλλά δυσκολεύεται να το συνδέσει με συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες.

Σε επόμενο απόσπασμα ο Λ2 φαίνεται να έχει μια βασική κατανόηση του απείρου από τη μαθηματική του εκπαίδευση, αλλά η γνώση του είναι κυρίως πρακτική και περιορίζεται στις μαθηματικές εφαρμογές.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με το μαθητή Λ2
1	Ε: Θυμάσαι πρώτη φορά πού άκουσες για το άπειρο;
2	Λ2: Δεν θυμάμαι αλλά σίγουρα ήταν πολύ παλιά, αλλά δεν θυμάμαι καθόλου.
3	Ε: Καθόλου ε; Στο σχολείο θυμάσαι πότε το άκουσες πρώτη φορά;
4	Λ2: Δεν θυμάμαι, αλλά σίγουρα και στο σχολείο το λέγανε, ακουγόταν συχνά.
5	Ε: Ακόμα και στο Δημοτικό;
6	Λ2: Μπορεί.
7	Ε: Φέτος την Γ΄ Λυκείου πού το συνάντησες;
8	Λ2: Στα όρια.
9	Ε: Άλλο σημείο που να το έχεις συναντήσει;
10	Λ2: Τώρα δεν μου έρχεται κάτι.
11	Ε: Θεωρείς ότι είναι επαρκείς οι εικόνες που έχεις για το άπειρο από το σχολείο ή θα ήθελες να σας μιλήσουν περισσότερο;
12	Λ2: Όχι, θα ήταν ενδιαφέρον να μου μιλήσει κάποιος για αυτό, γιατί και στο σχολείο, δεν το έχουνε κάνει και πολύ να μας μιλήσουν για αυτό.
13	Ε: Άρα κάποια πράγματα νιώθεις ότι τα έχεις κάνει ας πούμε λίγο μηχανικά;
14	Λ2: Ναι, λίγο πιο πολύ με τύπους για να βγουν κάποιες ασκήσεις στα Μαθηματικά.

Παρατηρούμε ότι δεν θυμάται ακριβώς πού ή πότε άκουσε για το άπειρο για πρώτη φορά, αλλά γνωρίζει ότι το έχει συναντήσει σε διάφορες περιπτώσεις, πιθανώς και στο Δημοτικό και σίγουρα στη Γ΄ Λυκείου, όπου σχετίζεται με τη θεωρία των ορίων (1-8). Ο μαθητής αναφέρει πως δε θυμάται πότε ακριβώς πρωτοείδε την έννοια, καθώς η προέλευση των αντιλήψεών του είναι αποσπασματική και ελλιπής (12). Επιπλέον εκφράζει την ανάγκη του να μάθει περισσότερα για την έννοια, κάτι που δείχνει την επιθυμία του για μια πιο πλήρη κατανόηση της, πέρα από την απλή μηχανική εφαρμογή της σε μαθηματικά προβλήματα (14).

Η εστίαση αποκλειστικά σε μεθοδολογίες και ασκήσεις φαίνεται να αποτελεί συχνό πρόβλημα στην εκπαίδευση καθώς ο μαθητής δυσκολεύεται να ερμηνεύσει την έννοια με τρόπο ουσιαστικό και κατανοητό. Η απουσία μιας ολοκληρωμένης κατανόησης για την έννοια τον οδηγεί στη σκέψη ότι η εκπαίδευση του είναι ελλιπής και ότι θα μπορούσε να επωφεληθεί από μια πιο εκτενή και πολυδιάστατη διδασκαλία.

Το επόμενο απόσπασμα είναι από τη συνέντευξη με το μαθητή Λ4, ο οποίος είναι μαθητής της Γ΄ Λυκείου. Η αντίληψή του για το άπειρο σχετίζεται με την αδυναμία μέτρησης λόγω περιορισμών.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με το μαθητή Λ4
1	Λ4: Πιστεύω ότι είναι άπειροι οι κόκκοι γιατί δεν θα μπορέσουν ποτέ να τους μετρήσουν όλους, είναι πάρα πάρα πολλοί.
2	Ε: Άρα το άπειροι το χρησιμοποιείς όταν δεν έχουμε τη δυνατότητα να μετρήσουμε κάτι;
3	Λ4: Ναι.
4	Ε: Κατάλαβα, για σένα λοιπόν τι είναι το άπειρο;
5	Λ4: Κάτι που είναι τόσο μεγάλο, τόσο πολύ, που δεν μπορούμε να το μετρήσουμε με τίποτα. Όλα. Ας πούμε δεν μπορούμε να μετρήσουμε όλους τους κόκκους άμμου της Γης.
6	Ε:Αν προχωρούσε η τεχνολογία και τελικά μας έδιναν έναν αριθμό για το πόσοι είναι οι κόκκοι άμμου, έναν τεράστιο αριθμό, θα ισχυριζόσουν πάλι ότι είναι άπειροι;
7	Λ4: Αν είχαμε έναν αριθμό;
8	Ε: Ναι αν μπορούσαμε να τους μετρήσουμε με κάποιο ειδικό μηχάνημα.
9	Λ4: Δεν θα θεωρούσα ότι είναι άπειροι, όχι.
10	Ε: Με αυτή τη λογική όμως είναι σαν να μου λες ότι υπάρχουν δύο είδη άπειρων πραγμάτων, οι αριθμοί που δεν τελειώνουν ποτέ και πράγματα που είναι πολύ μεγάλα αλλά απλώς δεν έχει αναπτυχθεί η τεχνολογία για να μετρήσουμε και λέμε αμέτρητα με την έννοια ότι εμείς δεν μπορούμε. Για σένα τι είναι πιο ισχυρό;
11	Λ4: Και τα δύο, γιατί αν προχωρήσει η τεχνολογία μπορούμε να μάθουμε περισσότερα για το άπειρο.

Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης υποστήριξε ότι υπάρχει ένας «άπειρος αριθμός», και όχι απλά ένας πολύ μεγάλος αριθμός, κόκκων άμμου στη γη (5). Στην περίπτωση αυτή η έννοια του είναι συνδεδεμένη με την πρακτική αδυναμία του ανθρώπου να καταμετρήσει ή να υπολογίσει με ακρίβεια κάτι εξαιρετικά μεγάλο το οποίο είναι αδύνατο να μετρηθεί. Όταν του τέθηκε το υποθετικό σενάριο μιας συσκευής που θα μπορούσε να μετρήσει τους κόκκους της άμμου, πρότεινε ότι η ποσότητα δεν θα ήταν πλέον άπειρη (6-9). Αυτό δείχνει ότι καταλαβαίνει πως δεν είναι πραγματικά άπειρη και χρησιμοποιεί τη λέξη μεταφορικά. Τέλος, αναγνωρίζει ότι οι αντιλήψεις του για το άπειρο, είναι ότι είναι ατελείωτο και εκείνο που δεν μπορούμε να το μετρήσουμε (10-11).

Η ιδέα ότι το άπειρο συνδέεται με την αδυναμία μέτρησης μεγάλων ποσοτήτων, έχει την προέλευσή της στη μεταφορική χρήση της λέξης, στο καθημερινό πλαίσιο, όπου συχνά αναφέρονται λανθασμένα παραδείγματα όπως οι κόκκοι άμμου ή άλλες μεγάλες ποσότητες για να εξηγήσουν την έννοια. Η αντίληψη ότι η κατανόηση για το άπειρο μπορεί να σχετίζεται με την τεχνολογία και την πρόοδο της επιστήμης προέρχεται από την πεποίθηση ότι η τεχνολογία εξελίσσεται και επηρεάζει το πώς κατανοούμε τον κόσμο γύρω μας.

Σύνοψη των αποτελεσμάτων της Γ΄ Λυκείου

Η διαμόρφωση των αντιλήψεων των μαθητών της Γ΄ Λυκείου για το άπειρο συνδυάζει την καθημερινή εμπειρία, τις πολιτιστικές επιρροές, τη μαθηματική εκπαίδευση και των πρακτικών δυσκολιών στη μέτρηση μεγάλων ποσοτήτων. Συγκεκριμένα, οι προελεύσεις των αντιλήψεων για το άπειρο που αναδεικνύονται στο κείμενο μπορούν να κατηγοριοποιηθούν ως εξής:

Σχολική εκπαίδευση

Μαθηματική διδασκαλία: Ο μαθητής Λ5 αντιμετωπίζει το άπειρο ως μία έννοια χωρίς όριο ή τέλος, π.χ., σύνολα αριθμών που εκτείνονται στο άπειρο. Ωστόσο, η ερμηνεία αυτή συνοδεύεται από λανθασμένες αντιλήψεις, όπως η οπτικοποίηση του απείρου ως ένας μεγάλος αριθμός. Η αντίληψή του μαθητή Λ2 για το άπειρο φαίνεται να συνδυάζει οπτικές αναπαραστάσεις και μαθηματικές έννοιες. Σχεδιάζει μια ευθεία που συνεχίζεται απεριόριστα για να εξηγήσει την έννοια του απείρου. Ο ίδιος θεωρεί το άπειρο ως έναν συμβολισμό για οτιδήποτε δεν έχει τέλος. Η αντίληψή του επηρεάζεται από τη μαθηματική του εκπαίδευση, ισχυρίζεται όμως ότι αυτή διακρίνεται από έλλειψη εικόνων για την έννοια. Κάτι τέτοιο θεωρεί ότι δημιουργεί δυσκολίες στη διαμόρφωση σωστών αντιλήψεων.

Καθημερινή εμπειρία

Αδυναμία μέτρησης: Η καθημερινή γλώσσα και οι εμπειρίες επηρεάζουν την αντίληψη για το άπειρο. Οι μαθητές συνδέουν το άπειρο με την αδυναμία μέτρησης, όπως το παράδειγμα της άμμου που δεν μπορεί να μετρηθεί πλήρως (π.χ. μαθητής Λ3). Στη συνέχεια, ο ίδιος μαθητής συνδέει το άπειρο με κάτι που δεν μπορούμε να αντιληφθούμε πλήρως, αναφέροντας ότι είναι απροσδιόριστο, όπως το διάστημα. Επιπρόσθετα, οι αντιλήψεις ενός ακόμη μαθητή, του Λ4, φαίνεται να προέρχονται και αυτές από την καθημερινή χρήση της γλώσσας. Ο Λ4 συνδέει το άπειρο με την αδυναμία του ανθρώπου να μετρήσει ή να κατανοήσει κάτι πολύ μεγάλο, κάτι που είναι πέρα από τις τρέχουσες τεχνολογικές ή γνωστικές δυνατότητες. Αυτή η αντίληψη προέρχεται κυρίως από την αδυναμία μέτρησης και την αντίληψη ότι κάποια πράγματα είναι τόσο μεγάλα που τα θεωρούμε άπειρα, παρόλο που μπορεί να μην είναι στην πραγματικότητα.

Πολιτιστικό περιβάλλον: Ο κινηματογράφος, όπως το παράδειγμα του Toy Story, φαίνεται να επηρεάζει την αντίληψη για το άπειρο. Η φράση «στο άπειρο και ακόμα παραπέρα» προκαλεί φανταστικές εικόνες, όπως η μαύρη τρύπα στο διάστημα που αντιπροσωπεύει το άπειρο (π.χ., μαθήτρια Λ5). Αυτή η οπτική ερμηνεία του απείρου είναι αποτέλεσμα της φαντασίας που αναπτύχθηκε μέσω των οπτικοακουστικών ερεθισμάτων.

Μεικτή προέλευση

Ο μαθητής Λ3 ενώ αρχικά χρησιμοποιεί το άπειρο για να εκφράσει την αδυναμία μέτρησης κάποιου πράγματος, στη συνέχεια το αντιμετωπίζει ως αφηρημένη έννοια, η οποία θεωρεί ότι υπερβαίνει τα όρια της ανθρώπινης αντίληψης. Αυτή η αφηρημένη διάσταση καθιστά την κατανόηση του απείρου δύσκολη καθώς τον οδηγεί στην αντίληψη ότι ως έννοια είναι κάτι απροσδιόριστο.

Σύνοψη των αποτελεσμάτων και για τις τρεις εκπαιδευτικές βαθμίδες

Μελετώντας την προέλευση των αντιλήψεων και για τις τρεις εκπαιδευτικές βαθμίδες μπορούμε να δημιουργήσουμε τις εξής κατηγορίες:

Σχολική εκπαίδευση

Η διδασκαλία που λαμβάνουν οι μαθητές στο πλαίσιο του σχολικού προγράμματος ασκεί σημαντική επιρροή στην αντίληψή τους όσον αφορά το άπειρο. Πιο συγκεκριμένα, η διδασκαλία σε μαθήματα όπως τα Μαθηματικά, η Φυσική κ.ά. δύναται να επηρεάσει την κατανόησή τους για το άπειρο.

Μαθηματική διδασκαλία: Οι μαθητές αντιλαμβάνονται το άπειρο μέσω της διδασκαλίας μαθηματικών εννοιών, όπως άπειρα σύνολα, ευθείες που εκτείνονται απεριόριστα, ή γεωμετρικά σχήματα με άπειρα σημεία. Οι αντιλήψεις που προκύπτουν κάποιες φορές είναι λανθασμένες, όπως η αντίληψη του απείρου ως «πολύ μεγάλου αριθμού».

Διδασκαλία άλλων μαθημάτων: Εκτός από τα Μαθηματικά, η έννοια του απείρου αναφέρεται και σε άλλα μαθήματα, π.χ. στη Βιολογία, όπου μπορεί να γίνει αναφορά σε άπειρα κύτταρα στο ανθρώπινο σώμα (μεταφορικά) ή στη Φυσική με την αναφορά στο άπειρο σύμπαν.

Καθημερινή εμπειρία

Η καθημερινή εμπειρία παίζει σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση των αντιλήψεων των μαθητών για το άπειρο, ιδιαίτερα μέσω των εξής μηχανισμών:

Αδυναμία μέτρησης: Πολλοί μαθητές αντιλαμβάνονται το άπειρο ως κάτι που δεν μπορεί να μετρηθεί λόγω του μεγάλου του πλήθους ή της ανθρώπινης αδυναμίας να το αντιληφθεί πλήρως. Χρησιμοποιούν την έννοια του απείρου για να περιγράψουν μεγάλες ποσότητες π.χ. η άμμος ή οι τρίχες.

Μεταφορική Χρήση: Η καθημερινή γλώσσα επηρεάζει τις αντιλήψεις των μαθητών, οδηγώντας τους να χρησιμοποιούν το άπειρο για να περιγράψουν κάτι πολύ μεγάλο, ακόμη και αν δεν είναι πραγματικά άπειρο, όπως το γρασίδι ή τα συναισθήματα (π.χ. η αγάπη).

Αδυναμία μέτρησης: Όταν οι μαθητές αντιλαμβάνονται κάτι ως «άπειρο» λόγω της αδυναμίας τους να το μετρήσουν ή να το υπολογίσουν με ακρίβεια, συνήθως αναφέρονται σε μεγάλες ποσότητες ή μεγέθη που υπερβαίνουν τις δυνατότητες των καθημερινών εργαλείων μέτρησης ή της ανθρώπινης αντίληψης. Αυτή η αδυναμία τους οδηγεί στη χρήση του όρου «άπειρο» για να περιγράψουν κάτι που είναι τεράστιο ή αναλογικά ατελείωτο. Η μεταφορική χρήση της έννοιας του απείρου στην καθημερινή γλώσσα, όπως όταν λέμε «άπειρη αγάπη» ή «άπειρο γρασίδι», προέρχεται από αυτήν ακριβώς την αδυναμία μέτρησης. Η αδυναμία μέτρησης και η μεταφορική χρήση του απείρου αλληλοσυμπληρώνονται στην καθημερινή εμπειρία, καθώς η πρώτη δημιουργεί το πλαίσιο για την μεταφορική χρήση του απείρου, η οποία με τη σειρά της επηρεάζει την αντίληψη των μαθητών για το μαθηματικό άπειρο.

Επαναληψιμότητα: Στη συγκεκριμένη περίπτωση οι μαθητές αναφέρονται στο άπειρο μέσω μιας διαδικασίας η οποία επαναλαμβάνεται με ατέρμονο τρόπο (π.χ. οι καινούριες τρίχες που βγαίνουν σε ένα κεφάλι). Η ιδέα ότι κάποιες διαδικασίες επαναλαμβάνονται συνεχώς (π.χ. η ανακύκλωση του νερού) συνδέει το άπειρο με την έννοια της κυκλικής επαναληψιμότητας.

Το κοινωνικό και πολιτιστικό περιβάλλον διαμορφώνει τις αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο μέσω της έκθεσης σε πολιτιστικά προϊόντα (π.χ. ταινίες), συζητήσεις και κοινωνικές αλληλεπιδράσεις

Πολιτιστικό περιβάλλον: Οι μαθητές επηρεάζονται από τον κινηματογράφο και άλλα πολιτιστικά ερεθίσματα. Φράσεις και εικόνες από ταινίες, όπως το «Toy Story» ή το «Μάτριξ», δημιουργούν αντιλήψεις για το άπειρο που συνδέονται με φανταστικές ή αφηρημένες εικόνες.

Κοινωνικό περιβάλλον: Οι συζητήσεις και οι αντιλήψεις που διαμορφώνονται από το οικογενειακό και κοινωνικό περιβάλλον συμβάλλουν στην κατανόηση του απείρου. Οι απόψεις των γονέων ή άλλων ανθρώπων μπορούν να διαμορφώσουν τις αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο, είτε πρόκειται για επιστημονικές συζητήσεις είτε για πιο γενικές συζητήσεις.

Μεικτή προέλευση

Ορισμένοι μαθητές αναπτύσσουν μια πιο πολυδιάστατη κατανόηση του απείρου, συνδυάζοντας τις επιστημονικές γνώσεις από το σχολείο με τις εμπειρίες τους από την καθημερινή ζωή και τις κοινωνικο-πολιτιστικές επιρροές. Οι μαθητές πολλές φορές συσχετίζουν τις εικόνες της έννοιας που αντλούν από τις παραπάνω κατηγορίες για να σχηματίσουν μια ολοκληρωμένη αντίληψη του απείρου. Αυτή η σύνθεση αντικατοπτρίζει την αλληλεπίδραση των πηγών προέλευσης των αντιλήψεων και τονίζει την ανάγκη για μια ενοποιημένη κατανόηση των επιρροών αυτών.

Συνοψίζοντας, οι βασικές πηγές από τις οποίες οι μαθητές αντλούν τις αντιλήψεις τους για το άπειρο, είναι η σχολική εκπαίδευση, οι καθημερινές εμπειρίες ενώ μερικές φορές η προέλευση των αντιλήψεων είναι μεικτή.

5.2.2 Κριτήρια σύγκρισης των άπειρων συνόλων- Χαρακτηριστικά παραδείγματα

Στη συγκεκριμένη ενότητα βλέπουμε, μέσα από συγκεκριμένα αποσπάσματα των συνεντεύξεων, τα σημαντικότερα κριτήρια σύγκρισης που αξιοποιούν οι μαθητές κατά τη σύγκριση δυο άπειρων συνόλων. Μέσα από αυτά σε αρκετά σημεία αναδεικνύονται οι αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο. Επιπλέον παρατηρούμε ότι πολλά από τα κριτήρια σύγκρισης αφορούν και τις τρεις εκπαιδευτικές βαθμίδες που μελετήθηκαν.

Μέσα από τις απαντήσεις στα ερωτηματολόγια διαπιστώθηκε ότι ορισμένοι μαθητές, στις ερωτήσεις 5 και 9, αγνόησαν τις τελείες στο τέλος των δύο συνόλων, εστιάζοντας αποκλειστικά στους αριθμούς που εμφανίζονταν. Η εν λόγω κατηγορία απαντήσεων εντοπίστηκε και κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων. Η μη παρατήρηση των τελειών στο τέλος των συνόλων (μη κατανόηση συμβολισμού) και η αποκλειστική εστίαση στους αριθμούς υποδηλώνει σημειωτικό πρόβλημα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί το απόσπασμα συνέντευξης με τον μαθητή Λ3.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με το μαθητή Λ3
1	Ε: Σου είχα δώσει δύο σειρές αριθμών και λες η Β έχει περισσότερους γιατί αν σκέφτομαι τον κάθε αριθμό μεμονωμένα στη σειρά Β υπάρχουν περισσότερα ψηφία εφόσον έχει και διψήφιους.
2	Λ3: Επειδή έλεγε πλήθος αριθμών εγώ το σκέφτηκα ξεχωριστά το κάθε ψηφίο, εδώ ας πούμε που είναι το 25 το θεώρησα σαν δύο ψηφία και το πήρα ας πούμε 1, 4, 9 το 16 1 και 6
3	Ε: Κατάλαβα, άρα σύγκρινες ψηφία και όχι αριθμούς.
4	Λ3: Ναι.
5	Ε: Ας αφήσουμε τα ψηφία, γιατί εδώ λέει να συγκρίνουμε αριθμούς, και το 25 είναι ένας αριθμός είναι απλώς αποτελείται από δύο ψηφία, αν σου πω σαν πλήθος αριθμών, τι θα έλεγες;
6	Λ3: Ξέρω γω…ε…ότι είναι επτά αριθμοί στην πάνω σειρά και επτά στην κάτω.
7	Ε: Αν όμως δούμε τις τελίτσες που συνεχίζονται; Σκέψου ότι συνεχίζονται αυτές οι δύο σειρές.
8	Λ3: Ε, αφού δεν ξέρουμε πόσοι θα είναι μέχρι το τέλος… δεν θα μπορούμε να ξέρουμε ποια έχει περισσότερα.
9	Ε: Γιατί δεν μπορείς να ξέρεις ποια έχει περισσότερα;
10	Λ3: Γιατί μπορεί η μια από κάτω να έχει άλλα 15 και η άλλη να έχει άλλα 3.
11	Ε: Αν πούμε ότι είναι και τα δύο άπειρα;
12	Λ3: Δεν μπορούμε να τα συγκρίνουμε γιατί δεν μπορούμε να συγκρίνουμε το άπειρο με το άπειρο .
13	Ε: Γιατί δεν μπορείς να συγκρίνεις δύο άπειρα σύνολα;
14	Λ3: Δεν ξέρω…γιατί δεν μπορούμε σε κάτι που είναι άπειρο να μετρήσουμε πόσα έχει, γιατί το άπειρο όπως είπα και στην αρχή, είναι κάτι το αμέτρητο, οπότε δεν μπορούμε να μετρήσουμε πόσα έχει για να τα συγκρίνουμε με κάτι άλλο.

Ο μαθητής αρχικά εστιάζει στα ψηφία (2-4), ενώ στη συνέχεια αγνοεί την άπειρη φύση των συνόλων (6). Έπειτα όμως, αναγνωρίζει ότι οι αριθμοί συνεχίζονται και καταλήγει στο συμπέρασμα ότι δυο άπειρα σύνολα δε μπορούν να συγκριθούν. Παρατηρούμε στο συγκεκριμένο απόσπασμα ότι συνυπάρχει η μαθηματικά εσφαλμένη αντίληψη της σύγκρισης ψηφίων αντί αριθμών με το σημειωτικό πρόβλημα των τελειών στο τέλος κάθε συνόλου αριθμών. Επιπλέον παρουσιάζει ενδιαφέρον ότι θα ήθελε να γνωρίζει συγκεκριμένο αριθμό για το πλήθος κάθε συνόλου για να μπορέσει να τα συγκρίνει, κάτι που δεν είναι εφικτό καθώς το άπειρο εκφράζει κάτι το αμέτρητο (7-14).

Βλέπουμε λοιπόν ότι σε ορισμένες περιπτώσεις, ακόμα και οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου δεν κατανοούν τι σημαίνουν οι τελείες στο τέλος και θεωρούν ότι οι συγκεκριμένες αναπαραστάσεις δεν αφορούν άπειρο πλήθος αριθμών, καθώς θεωρούν λανθασμένα ότι κάθε σειρά αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος, συγκεκριμένα επτά. Μία άλλη σημαντική παρατήρηση είναι ότι ορισμένες φορές συγκρίνουν το πλήθος των ψηφίων, δείχνοντας τη σύγχυσή τους ανάμεσα στην έννοια του αριθμού και αυτή του ψηφίου, ακόμα και σε μαθητές της Γ΄ Λυκείου .

Ένα ακόμη λανθασμένο κριτήριο σύγκρισης που χρησιμοποιούν οι μαθητές, είναι αυτό σύμφωνα με το οποίο στη μία σειρά λείπουν ορισμένοι αριθμοί σε σχέση με την άλλη. Έτσι για παράδειγμα, θεωρούν ότι οι φυσικοί αριθμοί είναι περισσότεροι από τους άρτιους καθώς στην δεύτερη περίπτωση απουσιάζουν οι περιττοί αριθμοί. Για παράδειγμα ο μαθητής Γ13 θεωρεί ότι στη δεύτερη σειρά, λείπουν κάποιοι αριθμοί άρα είναι μικρότερος το πλήθος των αριθμών της.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με το μαθητή Γ13
1	Γ13: Δεν το έχω διατυπώσει πολύ καλά. Ουσιαστικά εδώ πέρα στη δεύτερη σειρά λείπουν ενδιάμεσοι αριθμοί, ας πούμε λείπει το 2,το 3, ενώ εδώ είναι με σειρά, είναι όλοι.
2	Ε: Άρα λόγω αυτής της έλλειψης λες ότι είναι περισσότεροι;
3	Γ13: Ναι, ναι.
4	…
5	Ε: Ο Μιχάλης που ισχυρίζεται ότι είναι άπειροι και ότι συνεχίζονται;
6	Γ13: Δεν νομίζω να είναι άπειροι, νομίζω μέχρι το 14 πάνε.
7	Ε: Όχι συνεχίζονται, άμα δεις τις τελίτσες.
8	Γ13: Και να συνεχιστούν νομίζω ακόμα μικρότερη είναι γιατί θα λείπουν αριθμοί.

Στο απόσπασμα βλέπουμε το μαθητή της Γ΄ Γυμνασίου, να παρατηρεί ότι στη δεύτερη σειρά των αριθμών που του δόθηκαν απουσιάζουν κάποιοι αριθμοί (1-3). Λόγω αυτής της έλλειψης των αριθμών, θεωρεί ότι η πρώτη σειρά έχει μεγαλύτερο πλήθος καθώς σε αυτή αναφέρονται όλοι οι φυσικοί αριθμοί. Ουσιαστικά πρόκειται για την εσφαλμένη αντίληψη ότι το μέρος δε μπορεί να είναι ίσο με το όλον, κάτι το οποίο δεν ισχύει στα άπειρα σύνολα. Στη συνέχεια, σε επόμενο μέρος του αποσπάσματος παρουσιάζει σημειωτικό πρόβλημα καθώς θεωρεί ότι οι αριθμοί που δίνονται στα δυο σύνολα σταματάνε στον αριθμό 14(6). Παρ' όλα αυτά, όταν γίνεται αναφορά στη στο ότι οι αριθμοί τελικά συνεχίζονται, αναφέρεται ξανά στην έλλειψη ορισμένων αριθμών, δείχνοντας ότι για εκείνον το κυρίαρχο κριτήριο σύγκρισης είναι «το μέρος μικρότερο είναι από το όλον».

Ορισμένοι μαθητές θεωρούν ότι δύο σύνολα αριθμών όταν είναι άπειρα στο πλήθος δε μπορούν να συγκριθούν. Στο συγκεκριμένο συμπέρασμα καταλήγει ο μαθητής της Στ΄ Δημοτικού Δ3.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με το μαθητή Δ3
1	Ε: Οπότε τι θα έλεγες για τα δυο σύνολα;
2	Δ3: Οπότε θα έλεγα ότι δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε πόσους αριθμούς έχει το καθένα γιατί αποσιωπητικά στη μία αποσιωπητικά στην άλλη.
3	Ε: Άρα δεν ξέρεις πόσοι θα συνεχίσουν;
4	Δ3: Ναι στη μία μπορεί να είναι ένας αριθμός μετά και στην άλλη 800.
5	Ε: Πιστεύεις ότι είναι ίσα, υπάρχει κάποιο που είναι μεγαλύτερο ή δεν μπορούμε να τα συγκρίνουμε;
6	Δ3: Όταν έχει άπειρους αριθμούς δεν μπορείς να το συγκρίνεις, γιατί πώς θα το συγκρίνεις; Με πράξεις δηλαδή πρόσθεση αφαίρεση;

Κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, ο μαθητής Δ3 αναγνώρισε ότι η ύπαρξη τελειών υποδηλώνει άπειρους αριθμούς, κατέληξε όμως στο λανθασμένο συμπέρασμα ότι οι δύο σειρές αριθμών δεν είναι σε θέση να συγκριθούν καθώς είναι άπειρες (1-6).

Ανάλογα αποτελέσματα παρατηρούμε και στο μαθητή της Γ΄ Γυμνασίου Γ7.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με το μαθητή Γ7
1	Γ7: Στην αρχή βέβαια εγώ είχα σκεφτεί μόνο τα νούμερα και δεν είχα σκεφτεί τις τελείες.
2	Ε: Με τις τελείες δηλαδή τι άλλαξε;
3	Γ7: Με τις τελείες τώρα αλλάζω και τότε δεν συγκρίνονται.
4	Ε: Ότι δεν μπορούν να συγκριθούν;
5	Γ7: Εμ… πιστεύω επειδή έχει τις τελείες πάλι, δεν μπορούν να συγκριθούν και να είναι ίδια στο πλήθος στο τέλος ό,τι και να κάνουμε.
6	Ε: Δηλαδή για αυτό διαφωνείς, με τη λογική ότι δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το αν είναι άπειροι;
7	Γ7: Ναι δεν μπορούμε να έχουμε κάποιο συμπέρασμα γιατί κανείς μας δεν έχει καταλάβει πιστεύω ακριβώς τι είναι το άπειρο και δεν μπορούμε να συγκρίνουμε, να πούμε ότι είναι ίσοι κάποιοι αριθμοί άμα είναι και άπειροι.

Ο μαθητής αρχικά εστιάζει στους αριθμούς, αγνοώντας τις τελείες (1). Μέσα από τη συνέντευξη, η ύπαρξη τελειών μετατοπίζει τη σκέψη του μαθητή (2-3) με αποτέλεσμα εκείνος να εκφράζει την πεποίθησή ότι τα δύο σύνολα δε μπορούν να συγκριθούν ως προς το πλήθος (5-7). Συγκεκριμένα, αναφέρει ότι δεν έχει κατανοήσει πλήρως την έννοια του απείρου, οπότε θεωρεί αδύνατη τη σύγκριση άπειρων μεγεθών.

Στους μαθητές που δε δέχονται τη σύγκριση των άπειρων συνόλων, φαίνεται η διαδικαστική αντίληψη να ενισχύει αυτή την άποψη. Για παράδειγμα η μαθήτρια της Γ΄ Γυμνασίου Γ12 καταλήγει στο συμπέρασμα ότι δεν είμαστε σε θέση να συγκρίνουμε τα δύο άπειρα σύνολα.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με τη μαθήτρια Γ12
1	Γ12: Και οι δύο δεν ξέρουμε ποια έχει περισσότερους αριθμούς γιατί έχει τις τελείες οπότε δεν μας λέει ακριβώς πώς συνεχίζει.
2	Ε: Άρα η απάντηση είναι ότι δεν μπορούμε καν να τα συγκρίνουμε;
3	Γ12: Ναι… βασικά έχουν και οι δύο άπειρους αριθμούς.
	…
4	Ε: Και γιατί επειδή είναι άπειρα δεν μπορούμε να τα συγκρίνουμε; Τι σε εμποδίζει να τα συγκρίνουμε;
5	Γ12: Γιατί δεν ξέρουμε ποιοι συγκεκριμένοι αριθμοί είναι, δεν είναι συγκεκριμένος αριθμός.
6	Ε: Εννοείς ποιος αριθμός ακολουθεί;
7	Γ12: Όχι, πόσοι είναι οι αριθμοί.

Η μαθήτρια Γ12 εξέφρασε την άποψη ότι η ύπαρξη τελειών υποδηλώνει την άπειρη συνέχεια αριθμών, παρ' όλα αυτά αρχικά δεν ήταν σε θέση να αναγνωρίσει το μοτίβο των αριθμών (1), καθιστώντας σύμφωνα με εκείνη αδύνατη την ακριβή μέτρηση και σύγκριση του πλήθους των δύο συνόλων. Στη συνέχεια, η Γ12 αναθεώρησε την άποψή της, θεωρώντας ότι τα δύο σύνολα είναι άπειρα (3). Στο τέλος, αμφισβήτησε τη δυνατότητα σύγκρισης των άπειρων συνόλων, καθώς θα ήθελε να γνωρίζει συγκεκριμένο αριθμό για κάθε πλήθος ώστε να προχωρήσει στη σύγκριση (4-7).

Όπως φάνηκε στην ποσοτική ανάλυση των δεδομένων το συχνότερο κριτήριο σύγκρισης που χρησιμοποιούν οι μαθητές είναι αυτό σύμφωνα με το οποίο όλα τα άπειρα σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος. Στο απόσπασμα, ο μαθητής της Στ΄ Δημοτικού Δ10 εκφράζει τη λανθασμένη άποψη ότι όλα τα άπειρα σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με το μαθητή Δ10
1	Δ10: Εγώ να ρωτήσω κάτι, συγγνώμη, εγώ συμφωνώ και με τον Μιχάλη γιατί οι δύο σειρές έχουν το ίδιο πλήθος αριθμών καθώς οι αριθμοί αυτοί είναι άπειροι, έχει τις τελείες οπότε οι αριθμοί δεν τελειώνουν, θα είναι άπειροι.
2	Ε: Άρα συμφωνείς με τον Μιχάλη επειδή είναι άπειροι. Επομένως όλα τα άπειρα είναι ίσα;
3	Δ10: Το άπειρο με το άπειρο είναι ίσα. Το άπειρο +1 είναι ίσο, το άπειρο +2, +3 είναι ίσο με το άπειρο.
4	Ε: Το άπειρο είπες συν;
5	Δ10:Λέω αν λέγαμε άπειρο+3=άπειρο.

Ο μαθητής Δ10 θεωρεί ότι όλα τα άπειρα έχουν το ίδιο πλήθος (1), μάλιστα για να αιτιολογήσει την απάντησή του δίνει ένα πολύ ενδιαφέρον παράδειγμα καθώς αναφέρει ότι το άπειρο +1 είναι ίσο με το άπειρο. Συγκεκριμένα εκφράζει την ιδέα ότι η πρόσθεση οποιουδήποτε αριθμού στο άπειρο δεν αλλάζει το «μέγεθος» του απείρου. (3-5). Όταν λέμε «άπειροι φυσικοί αριθμοί» αναφερόμαστε στην πληθικότητα του συνόλου των φυσικών αριθμών. Αν κάνουμε αναφορά σε «άπειρους πραγματικούς αριθμούς», το άπειρο αναφέρεται και σε αυτή την περίπτωση στην πληθικότητα ή ισχύ του συνόλου. Η λέξη άπειρο και για τα δυο σύνολα μπορεί να οδηγήσει στην εσφαλμένη αντίληψη ότι όλα τα άπειρα σύνολα έχουν την ίδια πληθικότητα. Όμως, το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι αριθμήσιμο άπειρο (πληθικότητα $\aleph_0$), ενώ το σύνολο των πραγματικών αριθμών, είναι μη αριθμήσιμο άπειρο, με μεγαλύτερη πληθικότητα από αυτό των φυσικών αριθμών. Η χρήση της λέξης άπειρο, για να περιγράψουμε τη πληθικότητα, μπορεί να είναι παραπλανητική εάν δεν διευκρινίσουμε ότι υπάρχουν διαφορετικά επίπεδα όσον αφορά την πληθικότητα ενός άπειρου συνόλου. Εάν χρησιμοποιούμε μόνο τη λέξη άπειρο χωρίς να προσδιορίζουμε την πληθικότητα, μπορεί να δίνεται η εντύπωση ότι όλα τα άπειρα είναι ισοπληθικά, κάτι που δεν ισχύει (για παράδειγμα, το άπειρο των φυσικών αριθμών είναι μικρότερο από το άπειρο των πραγματικών αριθμών).

Η λέξη άπειρο στην καθημερινή της χρήση, συνήθως σημαίνει κάτι απεριόριστο ή τεράστιο. Είναι σημαντικό να χρησιμοποιούμε πιο ακριβείς όρους όταν μιλάμε για την πληθικότητα των άπειρων συνόλων. Μπορούμε να πούμε «αριθμήσιμο άπειρο» για το σύνολο των φυσικών αριθμών και «μη αριθμήσιμο άπειρο» ή «συνεχές άπειρο» για το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Σε άλλο απόσπασμα η μαθήτρια της Στ΄ Δημοτικού Δ3 συνδέει την ισοδυναμία του πλήθους των συνόλων με την απειρία αυτών αλλά και με την ταυτόχρονη προσθήκη αριθμών στις δύο σειρές.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με τη μαθήτρια Δ3
1	Ε: Άρα συμφωνείς με τον Μιχάλη απ’ ότι κατάλαβα, που λέει ότι είναι και οι δύο σειρές άπειρες επομένως έχουν το ίδιο πλήθος.
2	Δ3: Ναι αφού δεν σταματάνε ποτέ, έχουν το ίδιο πλήθος.
3	Ε: Οπότε για σένα όλα τα άπειρα είναι ίδια στο πλήθος;
4	Δ3: Ναι γιατί το άπειρο δεν έχει συγκεκριμένο πλήθος. Αν το προσδιορίσεις δεν θα είναι πια άπειρο, θα είναι συγκεκριμένο.
5	Ε: Πως λες ότι έχουν ίδιο πλήθος εφόσον δεν ξέρεις το πλήθος τους;
6	Δ3: Με την έννοια ότι αφού συνεχώς αυξάνονται και θα βάζεις στην μία θα βάζεις και στην άλλη, πχ είναι 7, θα γίνουν 8, 9, 10, 11, άπειρα ναι.. κοκ
7	Ε: Ότι θα συνεχίζονται και δεν θα ξέρεις πόσους αριθμούς έχει η κάθε σειρά;
8	Δ3: Δηλαδή θα ξέρεις ότι αν αυτή εδώ πέρα έχει 10 θα έχει κι αυτή 10. Αν αυτή εδώ έχει 8.900 θα έχει και η άλλη 8.900.

Η συγκεκριμένη μαθήτρια κάνει αναφορά στη συνεχή προσθήκη αριθμών, κάτι που την οδηγεί στην αντίληψη ότι όλα τα άπειρα σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος (1-2). Θεωρεί ότι εφόσον σε κάθε σειρά έχουμε κάθε φορά έναν επιπλέον αριθμό, όσους αριθμούς και να προσθέσουμε, στο τέλος τα δυο σύνολα θα έχουν το ίδιο πλήθος αριθμών (5-8).

Σε ορισμένες από τις συνεντεύξεις φάνηκε, ότι παρόλο που οι μαθητές δεν είναι εξοικειωμένοι με την 1-1 αντιστοίχιση, ορισμένοι όταν έρχονται αντιμέτωποι με αυτή τη δέχονται ως την καταλληλότερη διαδικασία σύγκρισης των άπειρων συνόλων.

Η μαθήτρια Γ16, κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, παρουσίασε μια ενδιαφέρουσα εξέλιξη σκέψης όσον αφορά την ισοδυναμία άπειρων συνόλων.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με τη μαθήτρια Γ16
1	Ε: Α ωραία, πώς το σκέφτηκες λοιπόν για πες μου, έχει ενδιαφέρον η απάντησή σου.
2	Γ16: Έχουμε ότι είναι άπειρα δωμάτια. Έχουμε το δωμάτιο νούμερο 1 που μένει ένα άτομο. Αυτό το άτομο στο δωμάτιο Νο 1 μπορούμε να του πούμε να πάει να κοιμηθεί στο δωμάτιο Νο 2. Ωστόσο το άτομο που μένει στο Νο 2 να πάει στο Νο 3 και να συνεχίσει έτσι αν με καταλαβαίνετε. Και ο καθένας θα κοιμάται μόνος του. Έτσι θα συνεχίσουν όλοι μέχρι τα άπειρα δωμάτια αλλά το δωμάτιο Νο1 θα μείνει κενό, άρα θα μπορεί να μείνει εκεί ο επισκέπτης
	…
3	Ε: Τέλος συμφώνησες με τον Μιχάλη που είπε ότι όλοι οι άπειροι είναι ίσοι. Εδώ τι εννοείς;
4	Γ16: Ότι έχουμε ας πούμε ζευγάρια αριθμών, άπειροι είναι οι αριθμοί, μπορούμε να ζευγαρώσουμε τους αριθμούς, όχι βασικά, τώρα που το σκέφτομαι άλλαξα γνώμη. Από τη στιγμή που οι αριθμοί είναι άπειροι, δεν υπάρχει ένα τέλος για να μπορέσουμε να τους ζευγαρώσουμε όλους με όλους καταλάβατε;
5	Ε: Το ότι είναι άπειροι τι σε ενοχλεί δηλαδή στο να συμφωνήσεις με τον Κώστα;
6	Γ16: Ότι από τη στιγμή που είναι άπειροι αριθμοί, δεν υπάρχει ένα τέλος βασικά αφού είναι άπειροι, θα ζευγαρώνουμε και θα ζευγαρώνουμε αριθμούς αλλά δεν θα υπάρχει ένα τέλος για να πούμε ότι είναι ίσοι.
7	Ε: Άρα λοιπόν τι θα έλεγες για το δύο σύνολα αριθμών; Όκει δεν δέχεσαι τώρα τη διαδικασία του Κώστα γιατί λες ότι θα έπρεπε να σταματάει η διαδικασία. Δέχεσαι το ζευγάρωμα σαν μέτρηση το βλέπεις από ότι κατάλαβα και λες ότι δεν σταματάει αυτή η μέτρηση, δεν έχει ένα τέλος για να πούμε ότι τα ζευγαρώσαμε όλα άρα είναι ίδια στο πλήθος. Αλλά ποιο είναι το συμπέρασμα; Σε αυτό που λέει ο Μιχάλης ότι όλα τα άπειρα είναι ίσα λοιπόν συμφωνείς ή διαφωνείς πλέον;
8	Γ16: Ε…πιστεύω ότι τα άπειρα είναι ίσα, αλλά δεν υπάρχει ένας συγκεκριμένος αριθμός ζευγαρώματος να το πω έτσι, για να πούμε πόσο είναι το άπειρο. Μπορούμε να συνεχίσουμε να ζευγαρώνουμε αριθμούς, δεν υπάρχει τέλος βασικά, μπορούμε να συνεχίσουμε και να ζευγαρώνουμε αριθμούς όλη την ώρα άρα είναι ίσοι αλλά δεν υπάρχει ένα τέλος.

Παρατηρούμε ότι αρχικά κατάφερε να δώσει τη σωστή απάντηση στο παράδοξο του ξενοδοχείου του Hilbert (1-2). Στη λύση που έδωσε ο πρώτος ένοικος θα πάει στο δεύτερο δωμάτιο, ο δεύτερος ένοικος στο τρίτο δωμάτιο κ.ο.κ. οπότε είναι σα να αντιστοιχεί το 1 με το 2 και αυτό συνεχίζεται και για τους επόμενους ένοικους. Στη συνέχεια, η Γ16 αμφισβήτησε την 1-1 αντιστοίχιση στην περίπτωση του άπειρου πλήθους αριθμών. Η αμφισβήτηση αυτή οφείλεται στην απουσία τελευταίου αριθμού, προβληματίζοντάς την για την ολοκλήρωση της διαδικασίας ζευγαρώματος (3-6).

Παρά τις αρχικές αμφιβολίες, η Γ16 κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τα άπειρα σύνολα είναι όντως ίσα στο πλήθος. Η μαθήτρια αντιλήφθηκε ότι, αν και δεν υπάρχει τελευταίος αριθμός, η διαδικασία ζευγαρώματος μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον, διατηρώντας την ισοδυναμία (7-8).

Η εξέλιξη της σκέψης της μαθήτριας Γ16 αποτελεί ένα ενδιαφέρον παράδειγμα κριτικής σκέψης και ερμηνευτικής προσπάθειας. Η μαθήτρια όχι μόνο υιοθέτησε την ορθή άποψη για ισοδυναμία άπειρων, αλλά και εξέφρασε εύλογες ανησυχίες και ερμηνείες. Η εξέλιξη της σκέψης της αποτελεί μια ενθαρρυντική ένδειξη για την κατανόηση των άπειρων συνόλων.

Η μαθήτρια Λ5 παρουσιάζει έναν ενδιαφέρον και πρωτότυπο τρόπο σύγκρισης για τα δύο σύνολα.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με τη μαθήτρια Λ5
1	Ε: Ο Μιχάλης λέει ότι είναι άπειρες και οι δύο σειρές των αριθμών, άρα έχουν ίδιο πλήθος. Συμφωνείς ή διαφωνείς μαζί του;
2	Λ5: Διαφωνώ αλλά όχι για τον λόγο που έγραψα, τώρα διαφωνώ γιατί σε αυτές τις σειρές υπάρχει αρχή. Μπορεί να μην υπάρχει τέλος αλλά υπάρχει αρχή, οπότε αυτόματα υπάρχει ένας περιορισμός.
3	Ε: Τι εννοείς υπάρχει ένας περιορισμός;
4	Λ5: Εννοώ ότι, αυτό που σας είπα και πριν, θεωρώ ότι το άπειρο δεν έχει κάποιο όριο και τώρα επειδή αυτή η σειρά ξεκινάει με το 1 και αυτή ξεκινάει με το 2, ότι υπάρχει κάποιος περιορισμός και ότι μπορούν να προστεθούν στο τέλος των σειρών αλλά όχι στα αριστερά.
5	Ε: Και αυτός ο περιορισμός που λες, τι σε κάνει να σκέφτεσαι;
6	Λ5: Ότι αυτόματα δεν είναι άπειρα τα ψηφία που μπορούν να προστεθούν.
7	Ε: Διαφωνείς και με αυτό που λέει ο Μιχάλης; Θεωρείς ότι δεν είναι άπειροι, ότι απλώς είναι πάρα πολλοί;
8	Λ5: Ε… τώρα πάλι μπερδεύομαι λίγο γιατί θεωρώ πως από το τέλος μπορούν όντως να προστεθούν όσοι αριθμοί θέλουμε, αλλά δεν μπορώ να το θεωρήσω πως θα είναι και άπειροι. Θεωρώ βασικά ότι μόνο προς το τέλος μπορούν να προστεθούν άπειροι αριθμοί, αλλά όχι γενικά σε αυτό το σύνολο.

Παρατηρούμε ότι διαφωνεί με την άποψη ότι οι δύο σειρές αριθμών έχουν το ίδιο άπειρο πλήθος, καθώς πιστεύει ότι η ύπαρξη μιας αρχής σε αυτές τις σειρές δημιουργεί έναν περιορισμό. Αν και οι σειρές αριθμών δεν έχουν τέλος, η ύπαρξή τους ξεκινάει από έναν αρχικό αριθμό (όπως το 1 ή το 2), κάτι που για την ίδια της δημιουργεί την εντύπωση ότι υπάρχει ένα είδος περιορισμού (1-6). Θεωρεί ότι το άπειρο είναι κάτι χωρίς περιορισμούς και παρόλο που αναγνωρίζει ότι μπορούμε να προσθέσουμε άπειρους αριθμούς στο τέλος της κάθε σειράς, προβληματίζεται γιατί αυτό δεν μπορούμε να το κάνουμε και προς τις δύο κατευθύνσεις και συγκεκριμένα προς τα αριστερά (7-8).

5.2.3 Μεταβλητότητα των απαντήσεων

Σε ορισμένες συνεντεύξεις φάνηκε η έντονη μεταβλητότητα των απαντήσεων των μαθητών, καθώς αρκετές φορές μεταφέρονταν από το ένα κριτήριο σύγκρισης στο άλλο με ιδιαίτερη ευκολία. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο μαθητής της Στ΄ Δημοτικού Δ8.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με το μαθητή Δ8
1	Ε: Εσύ τι πιστεύεις;
2	Δ8: Άμα τα μετρήσουμε 1, 2, 3, 4, 5, 6, αυτή η σειρά είναι μεγαλύτερη.
3	Ε: Γιατί;
4	Δ8: Γιατί αν τα προσθέσουμε θα βγουν μεγαλύτεροι αριθμοί.
	…
5	Ε: Η Σοφία ισχυρίζεται ότι η $1^η$ έχει τους πιο πολλούς γιατί εδώ λείπουν κάποιοι αριθμοί.
6	Δ8: Λείπουν οι μονοί αριθμοί εδώ, εγώ συμφωνώ.
7	Ε: Άρα πιστεύεις ότι η $1^η$ έχει πιο πολλούς;
8	Δ8: Βασικά τώρα σκέφτηκα κάτι άλλο. Σκέφτηκα πως είναι εδώ τα διπλάσια ακριβώς και είναι λιγότεροι γιατί άμα τους διαιρέσουμε θα μας βγουν το ίδιο.
9	Ε: Τι εννοείς αν τους διαιρέσουμε;
10	Δ8: Αν τους διαιρέσουμε με τον πάνω αριθμό θα βγούνε ίδιοι.
11	Ε: Θα βγούνε ίδιοι, άρα βρήκες μια διαδικασία, άρα θεωρείς ότι είναι ίσοι.
12	Δ8: Ναι
13	Ε: Οπότε συμφωνείς εν τέλει ότι ζευγαρώνουμε το 1-2, 2-4, 3-6;
14	Δ8: Ναι

Αρχικά θεωρεί, λανθασμένα, ότι η σύγκριση των άπειρων συνόλων βασίζεται στο άθροισμα των αριθμών τους, με αποτέλεσμα η σειρά με το μεγαλύτερο άθροισμα να θεωρείται εκείνη με το μεγαλύτερο πλήθος (1-4). Περιορίζεται μόνο στους αριθμούς που αναφέρονται και για να συγκρίνει ως προς το πλήθος τα δυο σύνολα έχει την ανάγκη να αθροίσει τους αριθμούς που παρατηρεί.

Στη συνέχεια αλλάζει την αρχική του άποψη καθώς ισχυρίζεται ότι το δεύτερο σύνολο περιέχει λιγότερα στοιχεία από το πρώτο καθώς σε αυτό λείπουν οι μονοί αριθμοί (5-6). Στο τέλος, ο Δ8 πρότεινε μια διαδικασία ζευγαρώματος, αντιστοιχίζοντας τα στοιχεία 1-2, 2-4, 3-6 κ.ό.κ. Η διαδικασία αυτή βασίστηκε στη διαίρεση για κάθε ζευγάρι αριθμών (8-10). Ο μαθητής συμφώνησε με την άποψη ότι τα δύο σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος και δεν ενοχλήθηκε από την απουσία στοιχείων στο δεύτερο σύνολο, εστιάζοντας στην ύπαρξη ζευγαρώματος για όλα τα στοιχεία.

Μέσα από τις συνεντεύξεις εκτός από την αλλαγή ορισμένων αρχικών απαντήσεων, αποκαλύπτονται και σπανιότερα κριτήρια σύγκρισης. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα της μαθήτριας της Γ΄ Γυμνασίου Γ3.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με τη μαθήτρια Γ3
1	Ε: Τώρα, στην ερώτηση 9 δίνονται δύο σειρές με αριθμούς. Και λέει η Μαρία ότι στη δεύτερη σειρά οι αριθμοί είναι περισσότεροι γιατί είναι μεγαλύτεροι οι αριθμοί. Πιστεύεις έχει δίκιο ή όχι;
2	Γ3: Θεωρώ πως μπορεί και να έχει και δίκιο από την άποψη ναι μεν δεν θα τελειώσουν ποτέ και οι δύο σειρές αλλά η μία πάντα θα έχει ένα προβάδισμα.
3	Ε: Ότι θα είναι πιο μπροστά;
4	Γ3: Ναι, δεν θα τελειώσει ποτέ αλλά η μια θα είναι πιο μπροστά από την άλλη.
5	Ε: Άρα έχει σημασία όταν συγκρίνεις δύο σειρές αριθμών, το αν οι αριθμοί είναι μεγάλοι ή μικροί;
6	Γ3: Ναι θεωρώ. Βασικά να δω μία κάτι από την πρώτη σελίδα;
7	Ε: Την ερώτηση 5 ε;
8	Γ3: Ναι. Ουσιαστικά πιστεύω έχω απαντήσει και εδώ λάθος.
9	Ε: Άρα αλλάζεις εδώ την αρχική σου άποψη.
10	Γ3: Ναι δεν έχουν το ίδιο πλήθος, η μία θα είναι πάντα πιο μπροστά από την άλλη, αφού το ένα είναι 7 και το άλλο 49.
11	Ε: Άρα όταν συγκρίνεις δύο σειρές σημασία έχει ποιος τελευταίος αριθμός είναι μεγαλύτερος; Το λέω αυτό γιατί πριν μου είπες ότι είναι άπειρες και οι δύο.
12	Γ3: Ουσιαστικά είναι και οι δύο άπειρες και δεν τελειώνουν αλλά η μια πάντα θα έχει προβάδισμα σε σχέση με την άλλη.
13	Ε: Προβάδισμα τι εννοείς, περισσότερους αριθμούς;
14	Γ3: Ναι, μπορεί η μια να έχει 1 εκατομμύριο και η άλλη να έχει 500.000.
	…
15	Ε: Πιστεύεις ότι είναι σαν δυο δρομείς που ο ένας δρομέας είναι πιο μπροστά επειδή είναι μεγαλύτεροι οι αριθμοί;
16	Γ3: Ουσιαστικά εδώ πέρα απ' ότι κατάλαβα, επειδή υπάρχει ένα μοτίβο, θα είναι όχι μόνο λόγω του τελευταίου αριθμού αλλά επειδή αναπτύσσεται και πιο γρήγορα. Δηλαδή το ένα πάει 1,2,3 και εδώ πάει 1,4,9 .
	…
17	Ε: Αυτό, όταν το κάνεις εικόνα, το βλέπεις σαν δυο δρόμους με αριθμούς που συνεχίζουν και απλώς βλέπεις στον δεύτερο δρόμο μεγαλύτερους αριθμούς και γι' αυτό λες ότι είναι περισσότεροι;
18	Γ3: Το βλέπω σαν ένα πίνακα με σκορ που το ένα σκορ μετράει πολύ πιο γρήγορα από το άλλο.

19	Ε: Όταν λες σκορ εννοείς τον αριθμό προς το τέλος, δηλαδή το 7 και το 49 και τα συγκρίνεις ή κοιτάς από τι αριθμούς αποτελείται η κάθε σειρά, ανεξάρτητα από το τι λέει ο αριθμός προς το τέλος;
20	Γ3: 7 και 49. Αλλά κοιτάξτε, θα κοιτάξω και το μοτίβο παραπίσω για να δω τι εξέλιξη μπορεί να έχει. Γιατί μπορεί να μου έχει 1,2,4,9 και εδώ να έχει 5,15,25 και να είναι χαμηλότερο αλλά εκ των υστέρων θα το περάσει θα είναι και περισσότεροι οι αριθμοί.

Η μαθήτρια θεωρεί ότι μία σειρά με μεγαλύτερους αριθμούς έχει περισσότερα στοιχεία καθώς θα είναι πιο «κοντά στο άπειρο». Αρχικά θεωρεί ότι η δεύτερη σειρά αριθμών έχει περισσότερους αριθμούς, επειδή οι αριθμοί είναι μεγαλύτεροι και όπως λέει θα προηγείται της πρώτης (1-6). Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αλλάξει την αρχική της απάντηση και στην ερώτηση 5 (7-10), καθώς θεωρεί ότι παρόλο που και στις δυο σειρές οι αριθμοί είναι άπειροι, η δεύτερη έχει μεγαλύτερο πλήθος καθώς έχει προβάδισμα (11-14). Στη συνέχεια αναφέρει ότι το πλήθος των αριθμών δεν εξαρτάται μόνο από το πόσο μεγάλος είναι ο αριθμός που βλέπει στο «τέλος» της κάθε σειράς αριθμών αλλά και στον ρυθμό ανάπτυξης της κάθε σειράς (15-16). Στο τέλος, αναφέρει ότι το μοτίβο ανάπτυξης είναι το κλειδί για την εύρεση του πλήθους του κάθε συνόλου (17-20).

Παρατηρήθηκε μεταβλητότητα των απαντήσεων ακόμα και σε μαθητές μεγαλύτερων τάξεων. Μάλιστα, συχνά μέσα από τις απαντήσεις που δίνουν έρχονται σε γνωστική σύγκρουση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η μαθήτρια της Γ΄ Λυκείου Λ5.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με τη μαθήτρια Λ5
1	Ε: Ωραία, πολύ ωραία. Πάμε στην ερώτηση 5 που σου δίνω δύο σειρές αριθμών. Μου λες ότι η 1η έχει μεγαλύτερο πλήθος καθώς προστίθενται αριθμοί με μεγαλύτερη συχνότητα. Τι εννοείς εδώ;
2	Λ5: Ότι στην 1η σειρά οι αριθμοί, η ακολουθία των αριθμών αυξάνεται κατά 2 μονάδες.
3	Ε: Κατά 1 μονάδα.
4	Λ5: Ναι κατά 1 μονάδα. Και ενώ στη 2η αυξάνεται με τυχαίο τρόπο, αλλά μεσολαβούν περισσότερες μονάδες ανάμεσα σε αυτούς τους αριθμούς.
5	Ε: Οπότε λες ότι με αυτό τον τρόπο έχεις πιο πολλούς αριθμούς στην $1^{η}$;
6	Λ5: Ναι.
7	Ε: Παρότι έχεις τελίτσες στο τέλος. Σε νοιάζει η συχνότητα εδώ απ’ ότι καταλαβαίνω για να απαντήσεις.
8	Λ5: Ναι.
	…
9	Ε: Ο Κώστας, λέει ότι κάθε αριθμός της πάνω σειράς ζευγαρώνεται με έναν αριθμό της κάτω σειράς. Με αυτή την έννοια είπε ο Κώστας ότι οι σειρές έχουν το ίδιο πλήθος αριθμών γιατί μπορούμε να τους ζευγαρώσουμε μεταξύ τους. Συμφωνείς ή διαφωνείς;
10	Λ5: Όταν λέμε πλήθος αριθμών εννοούμε πόσοι αριθμοί;

11	Ε: Εννοούμε πόσοι είναι, ναι.
12	Λ5: Ναι όντως μπορούμε να το κάνουμε αυτό.
13	Ε: Μπορούμε να τους ζευγαρώσουμε; Ναι αλλά αυτό έρχεται σε σύγκρουση με αυτό που είπες εσύ ότι στην 1η είναι περισσότεροι.
14	Λ5: Ε…άμα θέλουμε να πούμε για παράδειγμα ότι πρέπει να φτάσουμε μέχρι το 100 τη σειρά Α και Β, στη σειρά Α θα χρειαστούν 100 αριθμοί ενώ στη σειρά Β θα χρειαστούν 50 αριθμοί.
15	Ε: Αυτό το δέχομαι. Εδώ όμως δεν σου λέω μέχρι το 100, σου δίνω τελίτσες και εννοώ ότι αυτό δεν σταματάει ως διαδικασία.
16	Λ5: Ε τότε θεωρώ πως ε…συμφωνώ με τον Κώστα.

Στην αρχή της συνέντευξής της, θεωρούσε ότι η πρώτη σειρά αριθμών έχει μεγαλύτερο πλήθος. Η αιτιολόγησή της βασίστηκε στην συχνότητα προσθήκης αριθμών, με την πρώτη σειρά να αυξάνεται κατά 1 μονάδα και την δεύτερη με διαφορετικό τρόπο και μεγαλύτερες διαφορές μεταξύ των αριθμών της (1-8). Στη συνέχεια, αναγνώρισε την ύπαρξη άπειρου πλήθους αριθμών και συμφώνησε με τον Κώστα (μία από τις υποθετικές απαντήσεις της ερώτησης 9) του οποίου η απάντηση στο ταυτίζεται με την 1-1 αντιστοίχιση (9-16). Η μαθήτρια αντιλήφθηκε ότι η αρχική της αντιμετώπιση δεν ήταν σωστή, καθώς ήρθε σε γνωστική σύγκρουση, με αποτέλεσμα να αλλάξει την απάντησή της.

Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων παρατηρήθηκε πως η αβεβαιότητα και η αμφισβήτηση είναι διάχυτη στα λεγόμενά των μαθητών. Ο μαθητής της Γ΄ Λυκείου Λ1 δέχεται την απειρία των αριθμών αλλά θεωρεί ότι αυτή είναι ο λόγος που τα δύο σύνολα δε μπορούν να συγκριθούν.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με το μαθητή Λ1
1	Ε: Είσαι πιο κοντά στο «δεν είμαστε σε θέση να τα συγκρίνουμε» ή ότι «επειδή είναι άπειρα έχουν το ίδιο πλήθος»;
2	Λ1: Ε….αν είχε έναν αριθμό λιγότερο, ένα από τα δύο, ίσως να έλεγα ότι το άλλο είναι μεγαλύτερο γιατί είναι μείον έναν αριθμό. Αλλά από τη στιγμή που έχουν άπειρους δεν είναι συγκρίσιμα άρα θα πω ότι δεν…
3	Ε: Και γιατί δεν είναι συγκρίσιμα όταν είναι άπειρα;
4	Λ1: Γιατί δεν μπορώ να πω ότι έχει 10εκ αυτό, 10εκ αυτό, είναι ατελείωτο, δεν τελειώνει το ένα ούτε το άλλο οπότε δεν γίνεται να συγκριθούν.
	…
5	Ε: Είδα ότι είχες συμφωνήσει, και σαν διαδικασία το ζευγάρωμα μου είπες ότι όσο το κάνουμε θα είναι ίδιες στο πλήθος, αλλά κάτι σε σταματάει, τι είναι αυτό που σε σταματάει, αυτό δηλαδή προσπαθώ να καταλάβω.
6	Λ1: Αυτό δεν ξέρω, σκέφτομαι ότι δεν μπορούμε να συγκρίνουμε το άπειρο με το άπειρο, δηλαδή….ουσιαστικά ένας αριθμός αντιστοιχεί σε έναν άλλο………ναι ένας αντιστοιχεί σε έναν άλλο.
7	Ε: Άρα;

8	Λ1: Αλλά δεν μπορώ να πω ότι είναι ίσα.
	…
9	Ε: Τότε είχες συμφωνήσει με το ότι είναι άπειρα άρα είναι ίσα. Τώρα πώς το βλέπεις;
10	Λ1: Ε….δεν μπορώ να πω ότι έχουν το ίδιο πλήθος αριθμών.
11	Ε: Άρα διαφωνείς με τον Μιχάλη, αλλάζεις άποψη.
12	Λ1: Συμφωνώ στο ότι είναι άπειροι απλώς αν ήταν κάπου να τελειώνουν θα είχαν το ίδιο πλήθος ίσως.
	…
13	Ε: Οπότε δεν είναι συγκρίσιμα ή είναι ίδια στο πλήθος επειδή είναι άπειρα;
14	Λ1: Δεν είναι συγκρίσιμα γιατί και τα δύο δεν τελειώνουν.

Στο συγκεκριμένο απόσπασμα βλέπουμε ότι ο μαθητής θεωρεί ότι τα άπειρα σύνολα δεν είναι συγκρίσιμα καθώς για να συγκριθούν θα ήθελε να μπορούσε να αντιστοιχίσει το πλήθος τους με συγκεκριμένο αριθμό (1-4). Παρ' όλα αυτά η ύπαρξη της 1-1 αντιστοίχισης φέρνει αμφιβολίες στην σκέψη του καθώς αναρωτιέται εάν τα δύο σύνολα μπορούν να θεωρηθούν ισοπληθικά χωρίς τελικά να πείθεται για κάτι τέτοιο (5-8). Για εκείνον προϋπόθεση για την ισοπληθικότητα είναι τα δύο σύνολα να τερματίζονταν σε κάποιον αριθμό (9-14). Στη σχολική εκπαίδευση η ισοπληθικότητα δεν ταυτίζεται με την 1-1 αντιστοίχιση καθώς οι μαθητές για να χαρακτηρίσουν δύο σύνολα ίδια ως προς το πλήθος έχουν συνηθίσει να έχουν συγκεκριμένο αριθμό για το πλήθος κάθε συνόλου.

Επιπλέον, όπως θα δούμε στο επόμενο απόσπασμα, ο συγκεκριμένος μαθητής κάνει χρήση ενός ιδιαίτερα σπάνιου κριτηρίου σύγκρισης.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με το μαθητή Λ1
1	Λ1: Και η κάτω πόσους έχει; Έχει 7 νομίζω;
2	Ε: Έχει 7 και συνεχίζεται. Εσύ όταν είπες ότι έχουν ίδιο πλήθος εννοούσες ότι έχουν 7 και 7; Με ποια λογική;
3	Λ1: Όχι, ότι είναι 7 συν τους υπόλοιπους που συνεχίζονται μέχρι το άπειρο.
4	Ε:Α σκέφτηκες και τους άλλους που συνεχίζονται, ωραία.
5	Λ1:Αν είχε 8 και συνεχιζόταν η κάτω θα έλεγα ότι είναι η κάτω.
6	Ε:Άρα αν μετά το 49 σου έδινα για παράδειγμα το 64 και είχε τελίτσες και το πάνω θα έμενε με το 7 και τελίτσες, θα μου έλεγες ότι η κάτω έχει πιο πολλούς; Γιατί αυτό;
7	Λ1: Ε…ναι εννοείτε κιόλας ότι συνεχίζουν μέχρι το άπειρο.
8	Ε: Ναι εγώ εννοώ ότι συνεχίζουν. Εσύ δηλαδή σύγκρινες τους αριθμούς που φαίνονται οπτικά και τους αγνόησες.
9	Λ1: Δεν θυμάμαι αν είχα προσέξει τις τελείες αλλά αν με ρωτούσατε τώρα δεν ξέρω αν θα έλεγα το ίδιο, γιατί…
10	Ε: Και τι θα έλεγες τώρα που έχεις δει τις τελείες;

11	Λ1: Αυτό που έλεγα και πριν, ότι επειδή είναι το άπειρο δεν μπορούμε να συγκρίνουμε αλλά αν έχει άπειρους αριθμούς η πάνω θα έχει άπειρους αριθμούς και η κάτω.

Παρατηρούμε ότι αρχικά θεωρεί ότι οι δύο σειρές αριθμών έχουν το ίδιο πλήθος, βασιζόμενος στην σύγκριση των αριθμών που βλέπει και λαμβάνοντας υπόψη τις τελείες, συνειδητοποιεί ότι οι σειρές είναι άπειρες (1-4). Έπειτα τροποποιεί την άποψή του και θεωρεί ότι αν η μία σειρά είχε έναν παραπάνω αριθμό από την άλλη (παρόλο που παρατηρεί τις τελείες στο τέλος της κάθε σειράς) τότε εκείνη θα είχε μεγαλύτερο πλήθος (5-6). Το συγκεκριμένο κριτήριο σύγκρισης δε συναντάται συχνά. Δείχνει να βασίζεται στην σύγκριση πεπερασμένων τμημάτων των άπειρων σειρών. Επιπλέον εκφράζει την αμφιβολία του για την αρχική του άποψη και επιθυμεί επανεξέταση του θέματος (7-9). Στο τέλος τείνει προς την άποψη της μη σύγκρισης, θεωρώντας ότι η ύπαρξη άπειρων αριθμών σε κάθε σειρά καθιστά αδύνατη την σύγκριση (10-11).

Ο μαθητής Λ2 φαίνεται να χρησιμοποιεί παραπάνω από ένα κριτήρια σύγκρισης τα οποία τον φέρνουν σε συνεχείς αντιφάσεις.

	Απόσπασμα της συνέντευξης με το μαθητή Λ2
1	Ε: Άρα για σένα η αντιστοίχιση είναι η καλύτερη διαδικασία για να μετρήσεις δύο άπειρα σύνολα ε;
2	Λ2: Δεν μπορώ να τα μετρήσω, απλά μπορώ σε κάθε αριθμό που μου δίνεται ζυγό, να αντιστοιχίσω και έναν άλλο.
	…
3	Ε: Αν σε ρωτήσει κάποιος, είναι ίσα τα σύνολα; Ναι ή όχι; Ή δεν ξέρουμε;
4	Λ2: Απ’ τη μία είπα και πριν ότι το άπειρο μπορεί και να μην μπορεί να μετρηθεί αλλά απ’ την άλλη εγώ σκέφτομαι ότι από τη στιγμή που έχω πει ότι κάθε αριθμός μπορεί να αντιστοιχηθεί, να έχει κάποιον αντίστοιχο, θα πω ότι είναι ίσα.
	…
5	Ε: Πάμε και στον Μιχάλη, ο Μιχάλης λέει το εξής, λέει ότι έχουν το ίδιο πλήθος καθώς είναι άπειροι. Βλέπει τις τελίτσες, σου λέει άπειρο το ένα, άπειρο το άλλο, λέει είναι ίσες. Τι θα του έλεγες του Μιχάλη;
6	Λ2: Θα έλεγα ότι δεν μπορώ να ξέρω αν είναι ίσοι ή όχι.
7	Ε: Μα δεν μου πες ότι είναι ισοπληθικά μέσα από την αντιστοίχιση;
8	Λ2: Συμφωνώ στο να είναι ίσοι γιατί αντιστοιχούμε αλλά από την άλλη σκέφτομαι ότι το άπειρο είναι κάτι που δεν τελειώνει και δεν είναι μετρήσιμο, οπότε δεν μπορώ να το συγκρίνω, απ’ τη μία, αλλά απ’ την άλλη είναι η πιο κοντινή μου απάντηση είναι ότι επειδή αντιστοιχίζω δεν θα μπορούσε και να μην είναι ίσα.

Αρχικά αντιλαμβάνεται ότι η μέτρηση άπειρων συνόλων είναι αδύνατη, ωστόσο, εστιάζει στην ύπαρξη της 1-1 αντιστοίχισης (1-2). Θεωρεί ότι η δυνατότητα αντιστοίχισης κάθε αριθμού του ενός συνόλου με έναν αριθμό του άλλου, οδηγεί σε ισοπληθικά σύνολα (3-4). Από την άλλη εκφράζει αμφιβολίες, καθώς τα άπειρα πλήθη του φαντάζουν μη συγκρίσιμα (5-6). Στη συνέχεια αντιλαμβάνεται την δυσκολία σύγκρισης άπειρων μεγεθών και θεωρεί την αντιστοίχιση ως την πιο σωστή απάντηση με αποτέλεσμα να τείνει προς την άποψη των ισοπληθικών συνόλων, λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη της 1-1 αντιστοίχισης (7-8).

Σύνοψη των αποτελεσμάτων

Η ανάλυση των συνεντεύξεων με μαθητές αποκαλύπτει σημαντικά σημεία σύγχυσης και μαθηματικά εσφαλμένων αντιλήψεων σχετικά με την έννοια του απείρου και τη σύγκριση άπειρων συνόλων. Οι μαθητές, ακόμα και σε πιο προχωρημένα στάδια της εκπαίδευσης όπως στη Γ΄ Λυκείου , φαίνεται να δυσκολεύονται σημαντικά. Ορισμένα ενδιαφέροντα σημεία που συναντήσαμε στις συνεντεύξεις, είναι τα εξής:

Σύγχυση μεταξύ αριθμών και ψηφίων: Όπως δείχνει η περίπτωση του μαθητή Λ3, η έλλειψη σαφούς κατανόησης μεταξύ αριθμών και ψηφίων μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένες συγκρίσεις. Ο μαθητής αρχικά συγκρίνει τα σύνολα βασιζόμενος στα ψηφία των αριθμών. Επιπλέον ο διάλογος μαζί του αναδεικνύει κάποια σημειωτικά προβλήματα και εσφαλμένες αντιλήψεις ως προς τη σημασία των τελειών στο τέλος κάθε συνόλου αριθμών που υποδηλώνουν την απειρία των συνόλων.

Η εσφαλμένη αντίληψη ότι το μέρος είναι πάντα μικρότερο από το όλον: Αυτή η λανθασμένη πεποίθηση, όπως εκφράστηκε από το μαθητή Γ13, δείχνει ότι πολλοί μαθητές εφαρμόζουν κανόνες που αφορούν τα πεπερασμένα σύνολα σε άπειρα σύνολα.

Αδυναμία σύγκρισης άπειρων συνόλων: Ορισμένοι μαθητές, όπως ο Δ3 και η Γ12, θεωρούν ότι η σύγκριση άπειρων συνόλων είναι αδύνατη λόγω της άπειρης φύσης τους. Αυτή η δυσκολία προκύπτει από τη διαδικαστική αντίληψη ότι οι αριθμοί στα δύο σύνολα δεν έχουν τέλος, ενώ απαιτείται συγκεκριμένο πλήθος για να γίνει σύγκριση.

Λανθασμένη γενίκευση ότι όλα τα άπειρα σύνολα είναι ίσοπληθικά: Κάποιοι μαθητές, όπως ο Δ10, εκφράζουν την άποψη ότι όλα τα άπειρα σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος. Αυτό οφείλεται στην μαθηματικά εσφαλμένη αντίληψη ότι η λέξη «άπειρο» υποδηλώνει πάντοτε την ίδια πληθικότητα, κάτι που δεν ισχύει στα Μαθηματικά.

Κατανόηση της 1-1 αντιστοίχισης: Παρά τις δυσκολίες, ορισμένοι μαθητές όπως η Γ16 αρχίζουν να αντιλαμβάνονται την έννοια της 1-1 αντιστοίχισης και τη σημασία της στη σύγκριση των άπειρων συνόλων. Παρόλο που τελικά η μαθήτρια αλλάζει γνώμη κατά τη διάρκεια της συνέντευξης, η συζήτηση αποκαλύπτει ότι η έννοια αυτή μπορεί να γίνει αποδεκτή με την κατάλληλη καθοδήγηση.

Συνολικά, οι μαθητές παρουσιάζουν ποικιλία εσφαλμένων αντιλήψεων γύρω από την έννοια του απείρου και τη σύγκριση άπειρων συνόλων. Αυτές οι εσφαλμένες αντιλήψεις υποδηλώνουν την ανάγκη για πιο σαφή και στοχευμένη διδασκαλία γύρω από τις έννοιες της πληθικότητας και της 1-1 αντιστοίχισης, ώστε να αποφεύγονται κοινά σφάλματα και να επιτευχθεί η βαθύτερη κατανόηση των συγκεκριμένων εννοιών.

Μεταβλητότητα των απαντήσεων: Οι μαθητές στις συνεντεύξεις έδειξαν μεταβλητότητα στις απαντήσεις τους, μεταβαίνοντας από ένα κριτήριο σύγκρισης σε άλλο. Τα κυριότερα σημεία είναι τα εξής:

Αριθμητικό άθροισμα: Κάποιοι μαθητές, όπως ο Δ8, βασίζονται στο άθροισμα των αριθμών για να συγκρίνουν τα σύνολα, θεωρώντας ότι το μεγαλύτερο άθροισμα συνεπάγεται και μεγαλύτερο πλήθος αριθμών.

Απουσία στοιχείων: Ο Δ8 άλλαξε κριτήριο, θεωρώντας ότι το σύνολο με τα λιγότερα στοιχεία είναι το μικρότερο, λόγω της απουσίας των μονών αριθμών.

Ζευγάρωμα στοιχείων: Στη συνέχεια, ο Δ8 πρότεινε τη διαδικασία ζευγαρώματος (αντιστοιχία 1-1) ως κριτήριο σύγκρισης και αποδέχθηκε ότι τα δύο σύνολα είναι ίσα.

Μέτρο των αριθμών: Η μαθήτρια Γ3 βασίστηκε στο μέτρο των αριθμών για να κρίνει ότι ένα σύνολο έχει περισσότερα στοιχεία, θεωρώντας ότι η σειρά με τους μεγαλύτερους αριθμούς θα έχει προβάδισμα και, άρα, μεγαλύτερο πλήθος.

Ρυθμός ανάπτυξης: Στη συνέχεια η Γ3 εισήγαγε το κριτήριο του ρυθμού ανάπτυξης των αριθμών στη σειρά ως κριτήριο σύγκρισης.

Συχνότητα προσθήκης αριθμών: Η Λ5 αρχικά θεώρησε ότι η συχνότητα προσθήκης αριθμών είναι κριτήριο για να συγκρίνει τα σύνολα.

1-1 αντιστοίχιση: Η Λ5 ήρθε σε γνωστική σύγκρουση όταν αποδέχτηκε την αντιστοίχιση ως το σωστό κριτήριο σύγκρισης, παρ' όλο που αρχικά θεώρησε ότι η πρώτη σειρά έχει περισσότερους αριθμούς.

Μη σύγκριση άπειρων συνόλων: Ο Λ1, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τα άπειρα σύνολα δεν είναι συγκρίσιμα, λόγω της αδυναμίας καθορισμού του πλήθους τους.

Σύγκριση πεπερασμένων τμημάτων: Ο Λ1 χρησιμοποίησε το σπάνιο κριτήριο της σύγκρισης πεπερασμένων τμημάτων των σειρών.

Αντιφατικές απαντήσεις: Ο Λ2 έδωσε αντιφατικές απαντήσεις, αναγνωρίζοντας την αξία της 1-1 αντιστοίχισης αλλά παράλληλα αμφισβητώντας την εγκυρότητά της.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI: ΣΥΖΗΤΗΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ-ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

6.1. Σχολιασμός αποτελεσμάτων σε σχέση με το 1ο ερευνητικό ερώτημα

6.1.1 Κατηγορίες αντιλήψεων για την έννοια του απείρου

Η συγκεκριμένη ενότητα απαντά στο πρώτο ερευνητικό ερώτημα του οποίου το πρώτο μέρος αφορά τις αντιλήψεις που διαμορφώνουν οι μαθητές για την έννοια του απείρου κατά τη διάρκεια της σχολικής τους εκπαίδευσης. Στις απαντήσεις που έδωσαν οι μαθητές καταγράφονται ποικίλες αντιλήψεις, οι οποίες όμως μπορούν να κατηγοριοποιηθούν στις παρακάτω βασικές κατηγορίες:

Πεπερασμένη αντίληψη: Ορισμένοι μαθητές παρουσιάζουν λανθασμένες αντιλήψεις, χρησιμοποιώντας τον όρο άπειρο για πεπερασμένα στο πλήθος αντικείμενα. Στην έρευνά μας, ορισμένοι μαθητές ανέφεραν χαρακτηριστικά παραδείγματα όπως «οι μαθητές στο σχολείο είναι άπειροι» και «το νερό στον πλανήτη είναι άπειρο». Αυτές οι απαντήσεις δείχνουν ότι οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν τον όρο «άπειρο» για να περιγράψουν κάτι που είναι πολύ μεγάλο ή ανέφικτο να μετρηθεί, επιβεβαιώνοντας την πεπερασμένη αντίληψη του άπειρου. Βλέπουμε λοιπόν το άπειρο να ταυτίζεται με κάτι πολύ μεγάλο, αλλά πεπερασμένο, όπως ένας μεγάλος αριθμός ή η άμμος στη Γη όπως αναφέρει και ο Falk (1994). Συναντήσαμε την πεποίθηση, ότι το άπειρο είναι ένας μεγάλος πεπερασμένος αριθμός ή ένας αριθμός καθαυτός όπως και σε άλλες έρευνες (Monaghan, 2001, Pehkonen et al., 2006, Tιrosh, D. & Tsamir, P., 2006).

Διαδικαστική αντίληψη: Όπως είδαμε και σε αντίστοιχες μελέτες (Fischbein et al. 1981, Tirosh 1999, Singer & Voica 2008) η διαδικαστική αντίληψη φαίνεται να είναι η πιο συχνή, καθώς οι μαθητές σε αρκετές περιπτώσεις αντιμετωπίζουν το άπειρο ως κάτι ατελείωτο και ανεξάντλητο, όπως οι φυσικοί αριθμοί. Στην έρευνά μας, η μεγαλύτερη συχνότητα της διαδικαστικής αντίληψης καταγράφηκε στην ερώτηση που ζητούσε να περιγράφει το άπειρο στα Μαθηματικά. Οι μαθητές ανέφεραν συχνά ότι το άπειρο στα Μαθηματικά «δεν τελειώνει ποτέ» ή «δεν έχει τέλος», υποδηλώνοντας ότι αντιλαμβάνονται το άπειρο ως μια ατέρμονη διαδικασία. Πολλοί μαθητές συνδέουν το άπειρο με την έννοια των ατελείωτων αριθμών, θεωρώντας ότι δεν υπάρχει τελευταίος αριθμός. Ορισμένοι μαθητές χρησιμοποιούν οπτικές παραστάσεις, όπως μια ευθεία γραμμή που συνεχίζεται αδιάκοπα, για να ερμηνεύσουν το άπειρο. Συνολικά η διαδικαστική αντίληψη αποτελεί την πιο κοινή ερμηνεία του απείρου, εστιάζοντας στην ατελείωτη φύση του.

Πραγματική αντίληψη: Η έννοια του πραγματικού άπειρου, όπως προσδιορίζεται από τον Fischbein (2001), αναφέρεται στο άπειρο ως μια τελική κατάσταση μιας ατελείωτης διαδικασίας. Στην έρευνά μας, μόνο ένας στους πέντε μαθητές αναφέρθηκε στο πραγματικό άπειρο, με παραδείγματα όπως «άπειρα σημεία σε μια ευθεία» και «άπειροι αριθμοί σε ένα διάστημα». Τα ευρήματά μας συμφωνούν με την παρατήρηση των Kolar & Čadež (2012) ότι η κατανόηση του πραγματικού άπειρου απαιτεί μια προηγούμενη κατανόηση του δυνητικού άπειρου. Για να βοηθήσουμε τους μαθητές να ξεπεράσουν τις δυσκολίες τους σχετικά με το πραγματικό άπειρο, είναι σημαντικό να ενσωματώσουμε στην εκπαίδευση παραδείγματα που μπορούν να το απεικονίσουν. Για παράδειγμα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε παραδείγματα από τη γεωμετρία (π.χ., τα σημεία σε μια ευθεία). Αυτά τα παραδείγματα μπορούν να βοηθήσουν τους μαθητές να αναπτύξουν μια καλύτερη διαισθητική κατανόηση του πραγματικού άπειρου.

Αντίληψη ως κάτι απροσδιόριστο: Αφορά μια πιο σπάνια αντίληψη που συναντήσαμε, σύμφωνα με την οποία οι μαθητές θεωρούν το άπειρο ως κάτι ασαφές, απροσδιόριστο, που δε μπορεί να οριστεί ή να κατανοηθεί πλήρως.

Όπως είδαμε και στους Singer και Voica (2008) οι κατηγορίες αντιλήψεων δεν είναι αποκλειστικές στο μυαλό των παιδιών καθώς διαφορετικοί τύποι αντιλήψεων ενσωματώνονται και συνδέονται. Σε έρευνα των Kolar και Čadež (2012) η κατανόηση του δυνητικού απείρου συνυπάρχει με αυτή της έννοιας του πραγματικού απείρου. Ανάλογα αποτελέσματα είχαμε και στη συγκεκριμένη μελέτη καθώς πολλοί μαθητές παρουσιάζουν μεικτές αντιλήψεις, συνδυάζοντας στοιχεία από διαφορετικές κατηγορίες. Η ανθρώπινη σκέψη είναι σύνθετη και πολυδιάστατη, και κάθε άτομο μπορεί να έχει διαφορετικές αντιλήψεις ή να συνδυάζει πολλές προσεγγίσεις για ένα θέμα. Όπως είδαμε στα αποτελέσματα ορισμένοι μαθητές συνδύαζαν την πεπερασμένη και τη διαδικαστική αντίληψη, βλέποντας το άπειρο ως κάτι ατελείωτο αλλά και ως έναν άγνωστο αριθμό. Ένας μαθητής συνδύασε την πεπερασμένη, τη διαδικαστική και την πραγματική αντίληψη, βλέποντας το άπειρο ως έναν αριθμό με ατελείωτα ψηφία, ως κάτι απεριόριστο ή ως μια ευθεία γραμμή με άπειρα σημεία. Κάποιες από αυτές τις αντιλήψεις μπορεί να είναι αντιφατικές ενώ σε άλλες περιπτώσεις, π.χ. η διαδικαστική αντίληψη με την πραγματική αντίληψη μπορούν να συνυπάρχουν και να αλληλοσυμπληρώνονται αρμονικά. Η διδασκαλία του απείρου με μεγαλύτερη συχνότητα θα βοηθήσει ώστε να υποστηριχθεί η μετάβαση από την έννοια του δυνητικού στην έννοια του πραγματικού απείρου.

Η φύση κάθε ερώτησης φαίνεται να επηρεάζει σε κάποιο βαθμό τις αντιλήψεις των μαθητών. Παρατηρούμε ότι όταν οι μαθητές καλούνται να δώσουν παραδείγματα σχετικά με το άπειρο, συνήθως δίνουν απαντήσεις που αφορούν την πεπερασμένη αντίληψη. Ωστόσο, όταν τους ζητείται να ορίσουν το άπειρο στα Μαθηματικά, οι απαντήσεις τους ευθυγραμμίζονται κυρίως με τη διαδικαστική αντίληψη.

Επιπλέον, τα αποτελέσματα της έρευνας σχετικά με τις αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια του απείρου έδειξαν ότι οι μαθητές για τις απαντήσεις τους στηρίζονται στην εικόνα της έννοιας (Tall & Vinner, 1981). Η εικόνα της έννοιας, η οποία συντίθεται από οπτικές αναπαραστάσεις, σύμβολα, παραδείγματα και διαγράμματα, μπορεί να περιλαμβάνει απλουστευμένες ή ακόμα και διαισθητικές προσεγγίσεις, που δεν είναι απαραίτητα ακριβείς. Αυτό καθιστά τη μαθηματική κατανόηση του απείρου λιγότερο αυστηρή και πιο υποκειμενική, επιτρέποντας στους μαθητές να διαμορφώνουν τις δικές τους ερμηνείες με βάση τις εμπειρίες τους και όχι βάσει μιας τυπικής μαθηματικής θεωρίας.

Στην πρώτη ερώτηση, η συχνή χρήση της λέξης για να εκφράσουν κάτι «πολύ μεγάλο αλλά πεπερασμένο» δείχνει μια ελλιπή εικόνα για την έννοια. Ο ορισμός της έννοιας δεν είναι γνωστός στους μαθητές, με αποτέλεσμα να ανακαλούν μια εικόνα της έννοιας που βασίζεται στην καθημερινή τους εμπειρία. Στη δεύτερη ερώτηση, που αφορά το άπειρο στα Μαθηματικά, η συχνότερη αντίληψη είναι η διαδικαστική. Αυτή η αντίληψη συνδέεται με την εικόνα έννοιας, καθώς οι μαθητές ανακαλούν συνήθως μια ακολουθία αριθμών που δεν τελειώνει ποτέ. Οι μαθητές που έχουν πραγματική αντίληψη του απείρου, π.χ. κάνοντας αναφορά στα άπειρα σημεία μιας ευθείας, παρουσιάζουν μια πιο ανεπτυγμένη εικόνα της έννοιας.

Συνολικά, τα αποτελέσματα της έρευνας δείχνουν ότι οι αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο διαμορφώνονται από την εμπειρία τους. Εξαιτίας της απουσίας ενός σαφούς ορισμού, είναι φυσικό οι μαθητές να στηρίζονται στην εικόνα που έχουν για την έννοια του απείρου, αντί να χρησιμοποιούν έναν τυπικό ορισμό. Αυτό συνδέεται άμεσα με τη θεωρία των Tall και Vinner (1981), καθώς πολλοί μαθητές έχουν αναπτύξει μια εικόνα έννοιας που βασίζεται περισσότερο στην καθημερινή χρήση του όρου και λιγότερο στην τυπική μαθηματική του σημασία. Συνεπώς, η αντίληψη της έννοιας του απείρου διαμορφώνεται κυρίως μέσω ατομικών εμπειριών και έμμεσων αναφορών στα σχολικά βιβλία. Παρατηρούμε λοιπόν, ότι οι μαθητές οδηγούνται στη διαμόρφωση άτυπων και «προσωπικών ορισμών».

Η έννοια του άπειρου αποτελεί θεμέλιο λίθο των προχωρημένων Μαθηματικών, καθώς αποτελεί τη βάση για έννοιες όπως το όριο, η παράγωγος και το ολοκλήρωμα. Ωστόσο, η αφηρημένη φύση του απείρου καθιστά δύσκολη την κατανόησή του από τους μαθητές. Η διδασκαλία του απείρου απαιτεί ιδιαίτερη προσοχή και ευελιξία από τους καθηγητές, λαμβάνοντας υπόψη τις ποικίλες αντιλήψεις των μαθητών. Είναι σημαντικό να ενθαρρύνεται η σύνθεση διαφορετικών, συμβατών με την έννοια, αντιλήψεων μέσω της διδασκαλίας. Η αξιοποίηση διαφορετικών μαθησιακών στρατηγικών, ο εμπλουτισμός της ύλης με θέματα που αφορούν το άπειρο και η ενθάρρυνση του ανοιχτού διαλόγου μπορούν να συμβάλλουν στην βαθύτερη κατανόηση αυτής της σύνθετης και πολυδιάστατης έννοιας. Η έρευνα για τις αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο αποτελεί πολύτιμο εργαλείο για την ανάπτυξη αποτελεσματικών εκπαιδευτικών προγραμμάτων.

6.1.2 Η προέλευση των αντιλήψεων για το άπειρο

Η συγκεκριμένη ενότητα αφορά το δεύτερο μέρος του πρώτου ερευνητικού ερωτήματος, το οποίο αναφέρεται στην προέλευση των αντιλήψεων για το άπειρο. Κατά την εκπόνηση της έρευνάς μας, διερευνήσαμε τις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με την έννοια του απείρου και τις συνδέσαμε με θεωρητικά πλαίσια που εξετάζουν πώς αυτές οι αντιλήψεις διαμορφώνονται. Η κατανόηση της προέλευσης των αντιλήψεων για την έννοια του απείρου αποτελεί ένα σημαντικό ζήτημα στη μαθηματική εκπαίδευση.

Η έρευνα αποκαλύπτει διάφορους παράγοντες που επηρεάζουν τις αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο, π.χ. καθημερινές εμπειρίες, καθημερινή χρήση της γλώσσας και επιρροές από τη σχολική εκπαίδευση.

Μία σημαντική διάσταση της έρευνάς μας είναι η χρήση της γλώσσας και η επιρροή της στην κατανόηση της έννοιας του απείρου. Όπως υποστηρίζουν οι Gough (2007) και Cirillo et al. (2010), η γλώσσα που χρησιμοποιείται στην τάξη μπορεί να επηρεάσει σημαντικά τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται μαθηματικές έννοιες. Στην έρευνά μας, διαπιστώσαμε ότι οι μαθητές συχνά αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην κατανόηση του απείρου λόγω της χρήσης λέξεων που έχουν διαφορετική σημασία στην καθημερινή ζωή και στα Μαθηματικά. Για παράδειγμα, η λέξη «άπειρο» χρησιμοποιείται μεταφορικά στην καθημερινότητα, ενώ στα Μαθηματικά έχει συγκεκριμένη σημασία. Στην καθημερινή ζωή, η λέξη «άπειρο» χρησιμοποιείται μεταφορικά για να περιγράψει καταστάσεις ή ποσότητες που φαίνονται ατελείωτες ή πολύ μεγάλες στο πλήθος είτε για κάτι που είναι δύσκολο να υπολογιστεί, π.χ. «άπειρες δουλειές», «άπειρος κόσμος» ή «άπειροι κόκκοι άμμου». Αυτό το γλωσσικό χάσμα οδηγεί συχνά σε παρανοήσεις, όπως όταν οι μαθητές συγχέουν τη μαθηματική έννοια του απείρου με την καθημερινή, μεταφορική χρήση του όρου. Όπως είδαμε και σε αντίστοιχη έρευνα για τη μεταφορική χρήση του απείρου (Ueno, 2005), οι μαθητές που δεν έχουν μια σαφή μαθηματική εξήγηση του απείρου συχνά βασίζονται στις καθημερινές χρήσεις της λέξης, οι οποίες δεν είναι πάντα ακριβείς ή πλήρεις.

Η μεταφορική χρήση της λέξης δημιουργεί έναν πρώτο εννοιολογικό πλαίσιο για τους μαθητές, το οποίο μπορεί να επηρεάσει τη μαθηματική τους κατανόηση. Για παράδειγμα, η φράση «άπειρες δουλειές» υποδηλώνει με μεταφορικό τρόπο μια κατάσταση χωρίς τέλος. Σύμφωνα με τη Sfard (2015) η μεταφορά εννοιών από ένα πεδίο σε ένα άλλο ενέχει κινδύνους καθώς πολλές φορές επιτρέπει στη διαίσθηση να διαμορφώνει επιστημονικές ιδέες. Επιπλέον, είδαμε ότι η έννοια του μαθηματικού απείρου περιλαμβάνει αφηρημένες έννοιες, όπως η δυνατότητα μιας διαδικασίας να συνεχίζεται επ' άπειρον, κάτι που δεν αντικατοπτρίζεται πλήρως από τις καθημερινή μεταφορική χρήση της λέξης.

Το πολιτιστικό πλαίσιο, οι προσωπικές εμπειρίες των μαθητών, καθώς και φιλοσοφικά ρεύματα έχουν σημαντική επίδραση στη διαμόρφωση των αντιλήψεών τους για το άπειρο, όπως επισημαίνει η θεωρία του Carey (2009). Το πολιτιστικό περιβάλλον διαμορφώνει τις αντιλήψεις των μαθητών μέσω της έκθεσης σε πολιτιστικά προϊόντα, όπως ταινίες. Οι μαθητές επηρεάζονται από τον κινηματογράφο και άλλα πολιτιστικά ερεθίσματα, τα οποία συνεισφέρουν στη διαμόρφωση της αντίληψής τους για το άπειρο. Φράσεις και εικόνες από ταινίες δημιουργούν αντιλήψεις που συνδέονται για το άπειρο. Παρατηρήσαμε ότι οι πολιτιστικές αναφορές σε ταινίες (π.χ. «Μάτριξ», «Toy Story»), επηρεάζουν την πρωτογενή αντίληψη του απείρου (Singer & Voica, 2008). Εκτός του πολιτιστικού περιβάλλοντος και το οικογενειακό-κοινωνικό περιβάλλον έχει σημαντική επίδραση στην κατανόηση των μαθητών για το άπειρο. Οι συζητήσεις που γίνονται στο σπίτι μπορούν να διαμορφώσουν την αντίληψη των μαθητών.

Ορισμένοι μαθητές, αντιλαμβάνονται το άπειρο ως κάτι που είναι αδύνατο να κατανοηθεί πλήρως. Αυτή η αντίληψη συνδέεται με την πεποίθηση ότι ως έννοια ξεφεύγει από τις δυνατότητες κατανόησης που διαθέτουμε.

Η μελέτη μας, είναι σύμφωνη με τη θεωρία του Vygotsky (1978), η οποία τονίζει τη σημασία της κοινωνικής αλληλεπίδρασης και της εκπαίδευσης στη διαμόρφωση των αντιλήψεων. Ειδικότερα, οι συζητήσεις και οι αντιλήψεις που διαμορφώνονται μέσω του οικογενειακού περιβάλλοντος αποδεικνύονται καθοριστικές για την κατανόηση του απείρου. Οι απόψεις που διατυπώνονται από γονείς ή άλλα άτομα γύρω από το άπειρο, είτε μέσω επιστημονικών συζητήσεων είτε μέσω πιο γενικών συνομιλιών, μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά τη διαμόρφωση των μαθητών σχετικά με την έννοια του απείρου. Αυτό συμβαίνει λόγω της μη επαρκούς παρουσίασης της έννοιας στο σχολικό περιβάλλον η οποία αφήνει το πεδίο ανοιχτό στη διαμόρφωση αντιλήψεων εκτός του μαθηματικού πλαισίου, ακόμα και από το οικογενειακό περιβάλλον.

Η αδυναμία πλήρους μέτρησης μεγάλων ποσοτήτων και η αφηρημένη φύση του απείρου συνεισφέρουν στην αντίληψη του ως κάτι αμέτρητο ή απροσδιόριστο. Μάλιστα ορισμένοι μαθητές αντιλαμβάνονται το άπειρο ως κάτι που υπερβαίνει τα όρια της ανθρώπινης αντίληψης και κατανόησης. Αντίστοιχη άποψη συναντήσαμε στον Καντ (1781) ο οποίος πρόσθεσε μια φιλοσοφική διάσταση στην κατανόηση του απείρου, τονίζοντας ότι, παρά την ικανότητά μας να σκεφτόμαστε το άπειρο ως έννοια, η πλήρης κατανόησή του παραμένει πέρα από τα όρια της ανθρώπινης αντίληψης.

Η θεωρία του Piaget (1970), η οποία τονίζει την έμφυτη προδιάθεση των παιδιών να αναπτύσσουν αντιλήψεις μέσω της αλληλεπίδρασής τους με το περιβάλλον και της νοητικής τους ωρίμανσης, προσφέρει μια σημαντική βάση για την κατανόηση των πρωταρχικών αντιλήψεων των μαθητών σχετικά με το άπειρο. Στην έρευνά μας παρατηρήσαμε ότι οι μαθητές συχνά ξεκινούν με απλοϊκές και ενστικτώδεις αντιλήψεις για το άπειρο, οι οποίες φαίνονται να βασίζονται σε τέτοιες έμφυτες ιδέες. Για παράδειγμα, πολλοί μαθητές αντιλαμβάνονται το άπειρο ως μια ατελείωτη διαδικασία, συνδέοντάς το με έννοιες όπως η ατελείωτη αρίθμηση.

Η επίδραση της μαθηματικής εκπαίδευσης στις αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο ήταν εμφανής στην έρευνά μας. Διαπιστώσαμε ότι αντιλήψεις των μαθητών επηρεάζονται μέσω της διδασκαλίας μαθηματικών εννοιών, όπως τα άπειρα σύνολα, οι ευθείες που εκτείνονται απεριόριστα, ή γεωμετρικά σχήματα που έχουν άπειρα σημεία. Επιπλέον, η έννοια του απείρου δεν περιορίζεται μόνο στα Μαθηματικά. Η μικρή παρουσία του απείρου στα σχολικά βιβλία γίνεται ακόμα πιο ανησυχητική, λαμβάνοντας υπόψη τη χρήση της λέξης σε άλλα μαθήματα. Για παράδειγμα, στη Βιολογία έγινε αναφορά στα άπειρα κύτταρα στο ανθρώπινο σώμα με τη μεταφορική έννοια, ενώ στη Φυσική έγινε αναφορά στο άπειρο σύμπαν. Η μη συστηματική ενασχόληση με την έννοια του απείρου στα Μαθηματικά ωθεί ορισμένους μαθητές να βασίζουν τις αντιλήψεις τους αποκλειστικά στις καθημερινές τους εμπειρίες. Οι πολλαπλές χρήσεις της έννοιας δημιουργούν τον κίνδυνο λανθασμένων ερμηνειών. Όπως επισημαίνουν οι Fischbein et al. (1979), οι μαθητές συχνά βασίζονται σε διαισθητικούς κανόνες που προσαρμόζονται σε πεπερασμένες πραγματικότητες, γεγονός που οδηγεί σε λανθασμένες ερμηνείες όταν προσπαθούν να κατανοήσουν την έννοια του απείρου. Στην έρευνά μας, παρατηρήσαμε ότι πολλοί μαθητές δυσκολεύονταν να κατανοήσουν έννοιες όπως τα άπειρα σύνολα, καθώς οι λογικές τους δομές ήταν προσαρμοσμένες σε πεπερασμένα σύνολα. Αυτό καταδεικνύει την ανάγκη για μία πιο εστιασμένη προσέγγιση στη διδασκαλία του απείρου, η οποία θα βοηθήσει τους μαθητές να ξεπεράσουν τις δυσκολίες τους και να αναπτύξουν μία βαθύτερη κατανόηση της έννοιας.

Η έρευνά μας ανέδειξε την πολυπλοκότητα της κατανόησης της έννοιας του απείρου από τους μαθητές. Οι διαισθητικές, κοινωνικές, πολιτιστικές, γλωσσικές και εκπαιδευτικές παράμετροι συνυπάρχουν και αλληλοεπιδρούν, διαμορφώνοντας τις αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο. Είναι σημαντικό να αναγνωρίσουμε αυτές τις διαφορετικές επιρροές και να αναπροσαρμόσουμε τη διδασκαλία μας ώστε να αντιμετωπίσουμε τις προκλήσεις που προκύπτουν. Μέσα από τη διδασκαλία που λαμβάνει υπόψη τις καθημερινές εμπειρίες και τις μαθηματικές ανάγκες των μαθητών, μπορούμε να τους βοηθήσουμε να αποκτήσουν μια πιο ολοκληρωμένη και ακριβή κατανόηση του απείρου, ενισχύοντας ταυτόχρονα την ικανότητά τους να αντιμετωπίζουν πιο σύνθετα μαθηματικά προβλήματα στο μέλλον. Η μετάβαση από τη διαισθητική κατανόηση στην τυπική μαθηματική γνώση απαιτεί μια πιο οργανωμένη και με μεγαλύτερη συχνότητα διδασκαλία της έννοιας, με σκοπό την κατανόηση και τη σωστή εφαρμογή της (Fischbein, 1979, Tsamir, 1999).

Η προέλευση των αντιλήψεων για το άπειρο είναι πολύπλευρη. Συχνά η αντίληψη διαμορφώνεται από ένα συνδυασμό εκπαίδευσης και προσωπικών καθημερινών εμπειριών. Η εστίαση αποκλειστικά σε μεθοδολογίες και ασκήσεις, οι οποίες έχουν έμμεση σχέση με το άπειρο δεν συμβάλλει ουσιαστικά στην απόλυτη κατανόησή του. Η έλλειψη αφορμών στα σχολικά βιβλία, όπου η έννοια παρουσιάζεται αποσπασματικά, δημιουργεί την ανάγκη στους εκπαιδευτικούς να αναζητήσουν συμπληρωματικές πηγές για την καλλιέργεια της διαισθητικής αντίληψης των μαθητών. Η συνειδητοποίηση της σημαντικότητας και της πολυπλοκότητας της έννοιας του απείρου αποτελεί καθοριστικό βήμα για την ουσιαστική διδασκαλία.

6.1.3 Η χρήση της λέξης άπειρο στην καθημερινή γλώσσα

Όπως είδαμε στην προηγούμενη ενότητα, η χρήση της γλώσσας αποτελεί σημαντικότατο παράγοντα δημιουργίας αντιλήψεων για το άπειρο. Ορισμένοι μαθηματικοί όροι χρησιμοποιούνται στην καθημερινή γλώσσα όχι μόνο με την μαθηματική τους έννοια αλλά και με άλλες έννοιες. Μερικές φορές η μη μαθηματική χρήση ενδέχεται να μην έχει άμεση ή ακόμη και έμμεση σύνδεση με τη μαθηματική έννοια, ή ακόμη και να αναφέρεται σε κάποια μαθηματική έννοια εντελώς διαφορετική. Η λέξη άπειρο σημαίνει «χωρίς τέλος» αλλά στην καθημερινή γλώσσα, συχνά χρησιμοποιείται είτε για να εκφράσει κάτι που είναι πολύ μεγάλο αλλά πεπερασμένο είτε είναι δύσκολο ή αδύνατο να το μετρήσουμε.

Υπάρχουν διαφορετικές και μερικές φορές αντίθετες απόψεις σχετικά με τη σύνδεση της καθημερινής και της επίσημης μαθηματικής γλώσσας. Η μελέτη μας ακολούθησε τη μέθοδο της Prediger (2019, 2022) και επικεντρώθηκε μόνο στη μία κατεύθυνση, η οποία είναι η επίδραση της καθημερινής γλώσσας στην κατανόηση της μαθηματικής έννοιας του απείρου. Τα αποτελέσματα της μελέτης μας δείχνουν ότι η χρήση του όρου άπειρο στην ελληνική γλώσσα επηρεάζει την κατανόηση της μαθηματικής έννοιας από τους μαθητές. Επιπλέον, όπως προέκυψε στην περίπτωση μιας μαθήτριας, η χρήση μιας λέξης σε άλλο επιστημονικό πεδίο (στην περίπτωσή μας, στη Βιολογία) μπορεί επίσης να επηρεάσει την κατανόηση της έννοιας στα μαθηματικά από τους μαθητές. Ως εκ τούτου, ένας μαθητής ενδέχεται να έχει αναπτύξει πολλαπλές και αντικρουόμενες ερμηνείες, με τη μία ή την άλλη να επικρατεί ανάλογα με το περιβάλλον. Τα ευρήματά μας δείχνουν ότι η καθημερινή γλώσσα ασκεί ισχυρή επιρροή στην κατανόηση του απείρου, κάτι που είναι εμφανές σε μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού, της Γ΄ Γυμνασίου και της Γ΄ Λυκείου. Βασιζόμενοι σε αυτά, συμφωνούμε με το Cirillo et al. (2010) ότι η έκθεση των μαθητών στην ετυμολογία και την προέλευση των λέξεων μπορεί να βοηθήσει στη γεφύρωση μεταξύ της καθημερινής γλώσσας, της γλώσσας στο μάθημα των Μαθηματικών και της μαθηματικής γλώσσας.

Μια σημαντική παράμετρος της γλώσσας είναι οι μεταφορές. Στην έρευνά μας, διαπιστώσαμε ότι οι μαθητές συχνά χρησιμοποιούν το άπειρο στην καθημερινή τους ζωή μεταφορικά, κάτι που επιβεβαιώνει τις θεωρητικές προσεγγίσεις που αναφέρονται στη σημασία των μεταφορών στην ανθρώπινη νόηση (Ueno, 2005). Παρατηρήσαμε ότι οι μαθητές, χρησιμοποιούν τη λέξη «άπειρο» για να περιγράψουν μεγάλες αλλά πεπερασμένες ποσότητες, γεγονός που δείχνει την επίδραση της καθημερινής γλώσσας στη διαμόρφωση των μαθηματικών αντιλήψεών τους.

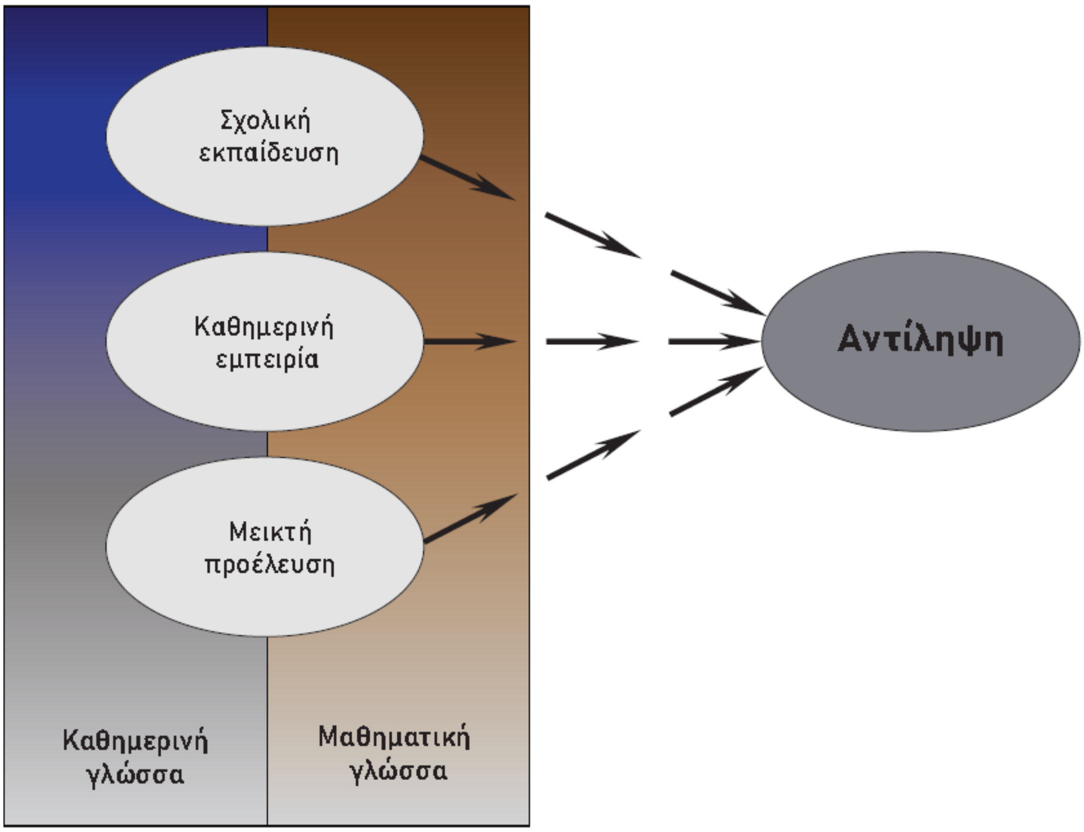
Αυτό ευθυγραμμίζεται με τη θεωρία της Sfard (2015), που υποστηρίζει ότι οι μεταφορές διασχίζουν τα όρια μεταξύ της καθημερινής και της επιστημονικής γλώσσας, επιτρέποντας στις πρωτογενείς διαισθήσεις να διαμορφώσουν επιστημονικές ιδέες. Ωστόσο, όπως διαπιστώθηκε στην έρευνα των Habaci και Çetin (2023), η χρήση μεταφορών που βασίζονται στην καθημερινή ζωή μπορεί να οδηγήσει σε λανθασμένες αντιλήψεις για το άπειρο, κάτι το οποίο επιβεβαιώθηκε και στην έρευνά μας.

Συνεπώς, η μελέτη μας επιβεβαιώνει ότι, παρόλο που οι μεταφορές είναι αναπόσπαστο κομμάτι της μαθηματικής σκέψης και μπορούν να διευκολύνουν την κατανόηση αφηρημένων εννοιών (Saban, 2004), η ανεξέλεγκτη χρήση τους μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα μαθηματικά συμπεράσματα. Αυτό υπογραμμίζει τη σημασία της προσεκτικής επιλογής των μεταφορών στη διδασκαλία, καθώς και της αναλυτικής επεξήγησης των μαθηματικών εννοιών σε σχέση με τις ηλικιακές ανάγκες των μαθητών, όπως προτείνεται από τους Habaci και Çetin (2023).

Για να αντιμετωπιστεί αυτή η πρόκληση, είναι σημαντικό οι εκπαιδευτικοί να αναγνωρίσουν την επίδραση της γλώσσας στη διαμόρφωση των αντιλήψεων των μαθητών. Η διδασκαλία θα πρέπει να περιλαμβάνει στρατηγικές που βοηθούν τους μαθητές να συνδέσουν τις καθημερινές τους εμπειρίες με την μαθηματική έννοια, ενώ ταυτόχρονα να καθοδηγούν την ανάπτυξη μιας πιο επίσημης και ακριβούς κατανόησης του απείρου. Αυτό μπορεί να περιλαμβάνει τη χρήση μεταφορών με προσοχή, εστιάζοντας στη σαφήνεια και στην ακριβή αναφορά των μαθηματικών εννοιών, έτσι ώστε να γεφυρωθεί το χάσμα μεταξύ της καθημερινής και της μαθηματικής γλώσσας (Sfard, 2015).

Συνοψίζοντας, όπως είδαμε η κατανόηση του απείρου είναι μια σύνθετη διαδικασία που επηρεάζεται από διάφορους παράγοντες. Η σχολική εκπαίδευση και οι καθημερινές εμπειρίες διαμορφώνουν την αντίληψη του μαθητή για το άπειρο. Η χρήση της λέξης άπειρο στην καθημερινή γλώσσα διαφέρει από την μαθηματική έννοια. Η καθημερινή χρήση εστιάζει στο «πολύ μεγάλο» ή «αδύνατο να μετρηθεί», ενώ η μαθηματική ερμηνεία εστιάζει στο «χωρίς τέλος». Και οι δύο αυτές χρήσεις της λέξης (μαθηματική και καθημερινή) αποτελούν συνιστώσες των τριών κυριότερων παραγόντων στη διαμόρφωση των αντιλήψεων για την έννοια (εικόνα 6.1). Για παράδειγμα στο μάθημα των Μαθηματικών πέρα από τη μαθηματική χρήση της λέξης ενδέχεται ένας καθηγητής να αξιοποιήσει και την καθημερινή της χρήση για να εκφράσει το «πάρα πολύ». Η ελλιπής παρουσίαση στα σχολικά βιβλία, η μη συστηματική διδασκαλία της έννοιας στα σχολικά μαθηματικά και η πολλαπλή χρήση της λέξης στην καθημερινή γλώσσα δημιουργούν δυσκολίες στην κατανόησή της.

Στην εικόνα 6.1 που ακολουθεί βλέπουμε μια προσπάθεια οπτικοποίησης των συγκεκριμένων συμπερασμάτων.



Εικόνα 6.1 Η προέλευση των αντιλήψεων και η χρήση της γλώσσας

6.1.4 Κριτήρια σύγκρισης των άπειρων συνόλων

Η σύγκριση των άπειρων συνόλων αποτελεί μια πρόκληση για τους μαθητές, καθώς δεν είναι συνηθισμένοι στην αντιμετώπιση ανάλογων προβλημάτων. Η ύπαρξη διαφορετικών τρόπων σύγκρισης, οι συχνά εσφαλμένες αντιλήψεις και η μεταβλητότητα των απαντήσεών τους φανερώνει την πολυπλοκότητα της έννοιας του απείρου. Μέσα από τις απαντήσεις στα ερωτηματολόγια και τις συνεντεύξεις προέκυψαν συγκεκριμένες κατηγορίες οι οποίες φανερώνουν τους πιο συχνούς τρόπους με τους οποίους οι μαθητές συγκρίνουν δύο άπειρα σύνολα.

Εστίαση στους αριθμούς: Ορισμένοι μαθητές αγνοούν τις τελείες στο τέλος των συνόλων και συγκρίνουν μόνο τους αριθμούς που βλέπουν, οδηγούμενοι λανθασμένα στο συμπέρασμα ότι κάθε σειρά αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος αριθμών.

Σύγκριση πλήθους ψηφίων: Μερικοί συγκρίνουν το πλήθος των ψηφίων των αριθμών κάθε συνόλου αντί για το πλήθος των στοιχείων τους.

Άθροισμα των αριθμών: Κάποιοι από τους μαθητές αθροίζουν τους αριθμούς που αναγράφονται σε κάθε σύνολο με αποτέλεσμα να θεωρούν ότι το μεγαλύτερο άθροισμα σημαίνει και μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων.

Τα τρία προηγούμενα κριτήρια όπως είδαμε στην ενότητα των αποτελεσμάτων ενοποιήθηκαν στην κατηγορία με την ονομασία «μη κατανόηση συμβολισμού».

Μεγαλύτεροι αριθμοί άρα περισσότεροι: Ένα μικρό μέρος των μαθητών παρουσιάζει σύγχυση ανάμεσα στη σύγκριση των αριθμών και το πλήθος αυτών, με αποτέλεσμα να θεωρεί ότι το σύνολο με τους μεγαλύτερους αριθμούς έχει και περισσότερα στοιχεία.

Το μέρος μικρότερο από το όλον: Ορισμένοι μαθητές θεωρούν ότι η απουσία αριθμών σε μια σειρά αριθμών σημαίνει ότι η σειρά έχει λιγότερα στοιχεία. Δηλαδή, το πλήθος των στοιχείων κάθε γνήσιου υποσυνόλου ενός συνόλου είναι μικρότερο από το πλήθος των στοιχείων ολόκληρου του συνόλου.

Αδυναμία σύγκρισης άπειρων συνόλων: Μερικοί μαθητές πιστεύουν ότι η σύγκριση άπειρων συνόλων είναι αδύνατη λόγω της συνεχούς προσθήκης στοιχείων.

Όλα τα άπειρα είναι ισοπληθικά: Η συχνότερη αντίληψη είναι ότι όλα τα άπειρα σύνολα έχουν ίσο πλήθος, ανεξάρτητα από τα στοιχεία τους.

1-1 και επί αντιστοίχιση: Μερικοί μαθητές υιοθετούν την 1-1 και επί αντιστοίχιση ως κριτήριο, αντιστοιχώντας τα στοιχεία των συνόλων και καταλήγοντας στην ισοδυναμία τους.

Παρατηρούμε ότι η ανάλυση των στρατηγικών που χρησιμοποιούν οι μαθητές για τη σύγκριση άπειρων συνόλων αποκάλυψε σημαντικές εσφαλμένες αντιλήψεις. Τα αποτελέσματα μας δείχνουν ότι οι μαθητές συχνά βασίζονται σε μη κατάλληλα κριτήρια για να συγκρίνουν άπειρα σύνολα, όπως η σύγκριση του πλήθους ψηφίων ή το άθροισμα των αριθμών, ενώ η πιο κοινή αντίληψη είναι ότι όλα τα άπειρα σύνολα έχουν το ίδιο πλήθος. Οι παρατηρήσεις μας ευθυγραμμίζονται με τις θεωρίες που αναφέρουν ότι οι μαθητές συχνά προσπαθούν να χρησιμοποιήσουν πεπερασμένες στρατηγικές για την κατανόηση άπειρων συνόλων, οι οποίες καταλήγουν σε αντιφάσεις και γνωστικές συγκρούσεις (Fischbein, 2001).

Η έρευνα των Tsamir και Tirosh (2006) επιβεβαιώνει ότι οι μαθητές χρησιμοποιούν συχνά διαισθητικά κριτήρια και αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην εφαρμογή σωστών μαθηματικών μεθόδων για τη σύγκριση άπειρων συνόλων. Παρ' όλα αυτά όταν αναφέρθηκε η 1-1 αντιστοίχιση ως πιθανή απάντηση ένα σημαντικό μέρος των μαθητών συμφώνησε. Η αύξηση είναι εντυπωσιακή αν σκεφτούμε ότι σε αντίστοιχη προηγούμενη ερώτηση του ερωτηματολογίου, ήταν ελάχιστοι οι μαθητές που αξιοποίησαν την 1-1 αντιστοίχιση. Φαίνεται πως ένα μέρος των μαθητών όταν έρχεται σε επαφή με την 1-1 και επί αντιστοίχιση είναι σε θέση να την κατανοήσει παρ' όλα αυτά η χρήση της σε ανοιχτού τύπου ερωτήσεις που αφορούν τη σύγκριση άπειρων συνόλων είναι περιορισμένη (Singer &Voica 2003).

Μελετώντας τα ποσοστά των απαντήσεων βλέπουμε να υπάρχουν μεγάλες αντιφάσεις στις απαντήσεις που δίνει ο κάθε μαθητής καθώς άλλοτε οι μαθητές θεωρούν όλα τα άπειρα σύνολα ισοπληθικά μεταξύ τους ενώ άλλες φορές τους πείθει η 1-1 και επί αντιστοίχιση είτε άλλοι τρόποι σύγκρισης ανάλογα με τη μορφή του κάθε ερωτήματος. Κατά τη διάρκεια των συνεντεύξεων, παρατηρήθηκαν ανάλογα αποτελέσματα καθώς ορισμένοι μαθητές άλλαζαν τις αρχικές τους απόψεις. Οι μαθητές συχνά μεταβαίνουν εύκολα από το ένα κριτήριο σύγκρισης στο άλλο, οδηγούμενοι σε αντιφάσεις και γνωστικές συγκρούσεις. Ορισμένοι από αυτούς χρησιμοποιούν πολλαπλά κριτήρια για τη σύγκριση των συνόλων, μερικές φορές ακόμα και εξαιρετικά σπάνια κριτήρια ενώ σε αρκετούς από αυτούς παρατηρείται αβεβαιότητα και αμφισβήτηση στις απαντήσεις τους. Οι Tirosh (1991) και Tsamir (2001) επισημαίνουν την ανάγκη για στρατηγικές που βοηθούν τους μαθητές να συνειδητοποιήσουν τις αντιφάσεις στις διαισθητικές τους αντιλήψεις ώστε να αναπτύξουν μια πιο σωστή κατανόηση των άπειρων συνόλων.

Η μελέτη των Kolar και Čadež (2012) σε φοιτητές επιβεβαιώνει ότι, παρόλο που εκείνοι έχουν δεχθεί σημαντική μαθηματική εκπαίδευση, εξακολουθούν να συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση της σύγκρισης άπειρων συνόλων λόγω των ισχυρών διαισθητικών αντιλήψεών τους. Τα αποτελέσματα της έρευνας επαληθεύουν την ύπαρξη αυτών των ισχυρών αντιλήψεων και στους μαθητές.

6.2 Σχολιασμός αποτελεσμάτων σε σχέση με το 2ο ερευνητικό ερώτημα

6.2.1 Οι διαφοροποιήσεις των αντιλήψεων στα διάφορα στάδια της σχολικής εκπαίδευσης

Η συγκεκριμένη ενότητα αφορά το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα καθώς αναφέρεται στις διαφοροποιήσεις που προκύπτουν στα διάφορα στάδια της σχολικής εκπαίδευσης. Όπως είδαμε, συχνά οι μαθητές χρησιμοποιούν τη λέξη άπειρο λανθασμένα, για να εκφράσουν το «πάρα πολύ» καθώς ένα μεγάλο ποσοστό τους ειδικά στις μικρές τάξεις κάνει μεταφορική χρήση της λέξης για πράγματα τα οποία στην πραγματικότητα είναι πεπερασμένα. Παρατηρήσαμε, όπως και οι Fischbein et. al (1979), ότι υπάρχουν μικρές διαφορές στα ποσοστά της συγκεκριμένης αντίληψης ανάλογα με το μαθηματικό υπόβαθρο του κάθε μαθητή (ειδικά ανάμεσα στο Γυμνάσιο και το Λύκειο). Συγκεκριμένα, τα ποσοστά της μειώνονται στις μεγαλύτερες τάξεις σε σχέση με το Δημοτικό. Αντιθέτως, παρατηρείται σταθερότητα στα ποσοστά της διαδικαστικής αντίληψης όπως είχε παρατηρηθεί και σε ανάλογη έρευνα της Tirosh (1999), καθώς και της πραγματικής αντίληψης. Οι διαφορές στους μέσους όρους κατάταξης μεταξύ των τριών τάξεων είναι μικρές και δε θεωρούνται στατιστικά σημαντικές, όπως φαίνεται από τα p-values που είναι μεγαλύτερα από 0,05. Μία πιθανή ερμηνεία αυτού είναι ότι οι αντιλήψεις για το άπειρο όπως είδαμε, βασίζονται κυρίως στη διαίσθηση και όχι στη διδασκαλία της έννοιας.

Όταν οι μαθητές σχηματίζουν προτάσεις με τη λέξη άπειρο, τα ποσοστά της πεπερασμένης αντίληψης αυξάνονται σημαντικά και στις τρεις βαθμίδες, όμως παρουσιάζουν μείωση στο Γυμνάσιο και στο Λύκειο σε σχέση με το Δημοτικό. Στο ίδιο ερώτημα τα ποσοστά της διαδικαστικής αντίληψης παραμένουν σταθερά ανάμεσα στις τρεις εκπαιδευτικές βαθμίδες ενώ αυτά της πραγματικής αντίληψης αυξάνονται στις μεγαλύτερες τάξεις. Στην ερώτηση 1, όσο οι μαθητές προσπαθούσαν να σχηματίσουν προτάσεις για το άπειρο, έδειξαν να δυσκολεύονται, ειδικά στο Δημοτικό. Αυτό οδήγησε σε απαντήσεις που αφορούν κυρίως την πεπερασμένη αντίληψη στα 1β και 1γ. Οι στατιστικά σημαντικές διαφορές, οφείλονται στη μείωση των παραδειγμάτων που αφορούν τη διαδικαστική αντίληψη στις μεγαλύτερες τάξεις και στο μεγάλο ποσοστό των παραδειγμάτων που αφορούν την πεπερασμένη αντίληψη ειδικά στη ΣΤ΄ Δημοτικού. Επιπλέον σε αυτή την περίπτωση φαίνεται οι μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου και της Γ΄ Λυκείου να έχουν υψηλότερους μέσους όρους κατάταξης σε σχέση με τους μαθητές της ΣΤ΄ Δημοτικού, κάτι που υποδεικνύει μια τάση βελτίωσης.

Παρ’ όλα αυτά οι διαφοροποιήσεις που παρατηρούνται και στα τρία εκπαιδευτικά επίπεδα, είναι μικρές, ιδιαίτερα όταν συγκρίνονται τα ποσοστά των μαθητών Γυμνασίου και Λυκείου. Παρατηρήθηκε όπως και σε άλλες μελέτες, στο Δημοτικό οι αντιλήψεις να είναι πιο εύκολα μεταβαλλόμενες και έπειτα να σταθεροποιούνται σε κάποιο βαθμό (Fischbein et. al 1979, Jirotková & Littler 2004, Hannula et al. 2006).

Επιπλέον, οι μαθητές τείνουν να δίνουν παραδείγματα για το άπειρο που ευθυγραμμίζονται με την κυρίαρχη αντίληψή τους γι’ αυτό. Η συμβατότητα των απαντήσεων ανάμεσα στις αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο και στις αντιλήψεις που προκύπτουν μέσα από παραδείγματα που δίνουν γι’ αυτό ή τις απαντήσεις τους σε ερωτήματα που αφορούν την έννοια, επηρεάζεται από την εκάστοτε εκπαιδευτική βαθμίδα. Στο Γυμνάσιο η συμβατότητα των απαντήσεων βελτιώνεται, με τους μαθητές να δίνουν πιο συνεπείς απαντήσεις, ενώ στο Λύκειο είναι ακόμα υψηλότερη, με τους μαθητές να δίνουν πιο σταθερές και συνεπείς απαντήσεις.

Από τη συσχέτιση των απαντήσεων στην ερώτηση 2 (που αφορούσε τη κυρίαρχη αντίληψη κάθε μαθητή για το άπειρο) με τις υπόλοιπες ερωτήσεις, φάνηκε να υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά στις απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση 4 (που αφορούσε το αν υπάρχει μεγαλύτερος αριθμός από όλους τους άλλους) και στις τρεις εκπαιδευτικές βαθμίδες. Οι μαθητές με διαδικαστική αντίληψη απαντούν με μεγαλύτερη ευκολία ότι δεν υπάρχει αριθμός μεγαλύτερος από όλους τους άλλους, ενώ οι μαθητές με πεπερασμένη αντίληψη θεωρούν το άπειρο ως τον μεγαλύτερο αριθμό. Επιπλέον παρατηρήσαμε ότι οι απαντήσεις των μαθητών στην ερώτηση 8α (που αφορούσε το αν στα κεφάλια των ανθρώπων υπάρχουν άπειρες τρίχες) σχετίζονται με τις αντιλήψεις τους για το άπειρο στην ερώτηση 2. Ειδικότερα, οι μαθητές της Γ΄ Λυκείου με διαδικαστική αντίληψη απαντούν σε εξαιρετικά μεγάλο ποσοστό σωστά στην ερώτηση «Στα κεφάλια των ανθρώπων υπάρχουν άπειρες τρίχες;». Η έλλειψη στατιστικά σημαντικής διαφοράς στις υπόλοιπες ερωτήσεις δείχνει ότι οι αντιλήψεις και οι απαντήσεις των μαθητών σε αυτές τις ερωτήσεις δεν σχετίζονται άμεσα με την κυρίαρχη αντίληψή τους για το άπειρο. Για παράδειγμα, στην ερώτηση 1 όπου οι μαθητές έφτιαξαν τρεις προτάσεις με τη λέξη «άπειρο», οι αντιλήψεις τους δεν σχετίζονται σε μεγάλο βαθμό με την κυρίαρχη αντίληψή τους για την έννοια του απείρου.

Συνολικά, παρατηρείται μια βελτίωση στις επιδόσεις των μαθητών σε ερωτήματα που αφορούν το άπειρο με την πάροδο του χρόνου. Η μεγαλύτερη βελτίωση παρατηρήθηκε στην ερώτηση που αφορούσε τον πιο κοντινό αριθμό στο 10. Η βελτίωση οφείλεται στην καλύτερη κατανόηση της έννοιας του «πιο κοντινού» αριθμού στις μεγαλύτερες τάξεις. Εξίσου σημαντική βελτίωση συναντήσαμε στην ερώτηση «Στα κεφάλια των ανθρώπων υπάρχουν άπειρες τρίχες;». Η βελτίωση σε αυτή την ερώτηση οφείλεται στην καλύτερη διάκριση μεταξύ του «πολύ μεγάλου» και του «άπειρου» στις μεγαλύτερες εκπαιδευτικές βαθμίδες. Στην ερώτηση που εξέταζε την εσφαλμένη αντίληψη σύμφωνα με την οποία «Στη δεύτερη σειρά οι αριθμοί είναι περισσότεροι γιατί είναι μεγαλύτεροι οι αριθμοί.», οι μαθητές του Λυκείου εμφάνισαν σημαντικά καλύτερες επιδόσεις σε σύγκριση με τους μαθητές του Δημοτικού και του Γυμνασίου. Στην ερώτηση που αφορούσε τη σύγκριση των άπειρων συνόλων συναντήσαμε τιμές που υποδηλώνουν κάποια αμφισημία ως προς τη στατιστική σημαντικότητα καθώς βρίσκονται κοντά στο όριο στατιστικής σημαντικότητας.

Αξιοσημείωτο είναι, ότι παρατηρούμε να υπάρχουν κάποιες ομοιότητες ανάμεσα στην ιστορική εξέλιξη της έννοιας του απείρου και στον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές αντιλαμβάνονται το άπειρο. Σε αμφότερες τις περιπτώσεις, η αντίληψη του δυνητικού απείρου αναπτύσσεται πριν από την κατανόηση του πραγματικού απείρου. Τα ζητήματα που ανακύπτουν ανάμεσα στο πραγματικό και το δυνητικό άπειρο παραμένουν σύγχρονα, απασχολώντας τους μαθητές.

Συμπερασματικά, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι οι απαντήσεις των μαθητών διαφέρουν ανάλογα με την εκπαιδευτική τους βαθμίδα και την ερώτηση που τους υποβλήθηκε. Σε ελάχιστες ερωτήσεις, η διαφοροποίηση είναι στατιστικά σημαντική, ενώ σε κάποιες λίγες υπάρχει αμφισημία ως προς τη σημαντικότητα. Συνοψίζοντας, οι μαθητές δείχνουν μια γενική βελτίωση στις επιδόσεις τους στις μεγαλύτερες εκπαιδευτικές βαθμίδες, ιδιαίτερα σε συγκεκριμένα ερωτήματα, στις περισσότερες περιπτώσεις όμως δεν είναι αρκετά μεγάλη ώστε να θεωρηθεί στατιστικά σημαντική.

6.2.2 Οι διαφοροποιήσεις στη σύγκριση άπειρων συνόλων στα διάφορα στάδια της σχολικής εκπαίδευσης

Τα ποσοτικά αποτελέσματα αυτής της έρευνας, αναδεικνύουν ότι κατά τη σύγκριση δύο άπειρων συνόλων η πλειοψηφία των μαθητών δίνει σωστές απαντήσεις, αλλά με λανθασμένη αιτιολόγηση. Υπάρχει μια μικρή αύξηση των σωστών απαντήσεων από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο, με τα ποσοστά μεταξύ Γυμνασίου και Λυκείου να είναι παρόμοια. Το ποσοστό των μαθητών που αιτιολογούν σωστά την απάντησή τους είναι χαμηλό όπως φάνηκε και σε αντίστοιχη μελέτη των Tsamir και Tirosh (2006). Υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές σε δύο από τα πέντε κριτήρια σύγκρισης και συγκεκριμένα στο κριτήριο «μεγαλύτεροι αριθμοί άρα περισσότεροι» και στο κριτήριο «δε μπορούν να συγκριθούν». Το κριτήριο «μεγαλύτεροι αριθμοί άρα περισσότεροι» παρουσιάζει μεγάλη μείωση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο, κάτι που δείχνει ότι οι μαθητές στο Γυμνάσιο αρχίζουν να απομακρύνονται από αυτήν την λανθασμένη αντίληψη. Αντιθέτως το κριτήριο «δε μπορούν να συγκριθούν» , παρόλο που είναι λάθος, παρουσιάζει μεγάλη αύξηση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο. Στα υπόλοιπα κριτήρια σύγκρισης, δεν υπάρχουν στατιστικά σημαντικές διαφορές, κάτι που υποδηλώνει ότι η σχολική εκπαίδευση δεν έχει τόσο σημαντική επίδραση στις αντιλήψεις των μαθητών σχετικά με αυτά τα συγκεκριμένα κριτήρια.

Η πλειοψηφία των μαθητών θεωρεί ότι όλα τα άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά, παρ' όλα αυτά για διαφορετικούς λόγους. Οι περισσότεροι αναφέρονται στην απειρία των αριθμών των δύο συνόλων κάτι που φαίνεται και στη βιβλιογραφία καθώς οι μαθητές τείνουν να θεωρούν όλα τα άπειρα μεταξύ τους ισοπληθικά (Fischbein 2001). Ένα μικρότερο ποσοστό των μαθητών βλέπει ότι και στις δύο σειρές έχουμε επτά αριθμούς αγνοώντας τις τελείες στο τέλος της κάθε σειράς.

Τα κριτήρια σύγκρισης με την ονομασία «μη κατανόηση συμβολισμού» και «μεγαλύτεροι αριθμοί άρα περισσότεροι», παρουσιάζουν μείωση των ποσοστών τους στις μεγαλύτερες εκπαιδευτικές βαθμίδες. Πολλές φορές οι μαθητές μπερδεύονται ανάμεσα στους τρόπους σύγκρισης των άπειρων συνόλων με αυτούς των πεπερασμένων όπως αναφέρει και η βιβλιογραφία (Singer & Voica 2003). Παρατηρείται συχνά η τάση οι μαθητές να εργάζονται με άνεση εντός ενός συγκεκριμένου πλαισίου, το οποίο όμως καταρρέει όταν η θεωρία διευρύνεται. Στην περίπτωση της σύγκρισης δύο άπειρων συνόλων, η εφαρμογή συλλογισμών που ισχύουν για πεπερασμένα σύνολα (όπως η ιδιότητα ότι ένα γνήσιο υποσύνολο έχει λιγότερα στοιχεία από το αρχικό σύνολο) οδηγεί σε αντιφάσεις όταν επιχειρούμε να τις επεκτείνουμε σε άπειρα σύνολα. Επιπλέον μπορεί να έρθουν σε σύγχυση και με άλλες στρατηγικές όπως το άθροισμα των αριθμών καθώς για ορισμένους η λέξη πλήθος ταυτίζεται με τη λέξη άθροισμα. Τα ποσοστά του κριτηρίου σύγκρισης «το μέρος μικρότερο από το όλον» παρουσιάζουν τις μικρότερες διαφορές ανά εκπαιδευτική βαθμίδα.

Όπως είδαμε ένα ποσοστό των μαθητών θεωρεί ότι δεν μπορούμε να συγκρίνουμε δύο σύνολα άπειρων αριθμών καθώς αυτοί είτε δε σταματάνε είτε δεν έχουν τέλος. Η λανθασμένη αντίληψη ότι τα άπειρα σύνολα δεν μπορούν να συγκριθούν αυξάνεται στο Λύκειο, με αποτέλεσμα να υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά. Ανάλογα αποτελέσματα είδαμε και στη βιβλιογραφία όπου κάποιοι μαθητές θεώρησαν ότι δεν μπορούμε να συγκρίνουμε άπειρα σύνολα (Tsamir & Tirosh 1999; Tsamir, 1999; Tall & Tirosh, 2001; Tsamir & Dreyfus, 2002).

Τα ποιοτικά δεδομένα επιβεβαιώνουν τις προϋπάρχουσες έρευνες, αλλά προσθέτουν και κάποια επιπλέον στοιχεία, όπως κάποιες όχι τόσο συχνές εσφαλμένες αντιλήψεις καθώς και την μεταβλητότητα των απαντήσεων. Αυτά τα ευρήματα δείχνουν ότι η κατανόηση των μαθητών γύρω από τα άπειρα σύνολα είναι δυναμική, και απαιτεί πιο λεπτομερή ανάλυση και στοχευμένη διδασκαλία για να ξεπεραστούν οι εσφαλμένες αντιλήψεις.

Συμπερασματικά, παρατηρούμε στις περισσότερες περιπτώσεις, να μην προκύπτουν σημαντικές διαφοροποιήσεις στις στρατηγικές σύγκρισης των άπειρων συνόλων στα διάφορα στάδια της σχολικής εκπαίδευσης, οι οποίες φαίνεται να έχουν ως αφετηρία τους τη διαίσθηση για την έννοια του απείρου καθώς όπως είδαμε από την ανάλυση των σχολικών εγχειριδίων οι μαθητές δεν έρχονται αντιμέτωποι με ανάλογα προβλήματα. Παρότι η έννοια υπεισέρχεται σε πολλά αντικείμενα της μαθηματικής εκπαίδευσης δεν φαίνεται να διδάσκεται οργανωμένα με αποτέλεσμα οι διαισθητικές αντιλήψεις να επικρατούν. Παρόλα αυτά ορισμένοι μαθητές όταν έρχονται αντιμέτωποι με την 1-1 και επί αντιστοίχιση φαίνεται να την κατανοούν με αποτέλεσμα να γεννάται το ερώτημα αν θα μπορούσε να εμπλουτίσει τη διδασκαλία των μαθηματικών στα σχολικά Μαθηματικά.

6.3 Σχολιασμός των αποτελεσμάτων σε σχέση με το 3ο ερευνητικό ερώτημα

6.3.1 Η ύπαρξη αναπτυξιακής πορείας στην αντίληψη της έννοιας του απείρου κατά τη διάρκεια των σχολικών σπουδών

Η αναπτυξιακή πορεία στην αντίληψη της έννοιας του απείρου κατά τη διάρκεια των σχολικών σπουδών δεν φαίνεται να είναι έντονη. Αν και παρατηρείται κάποια βελτίωση στην κατανόηση και στις επιδόσεις των μαθητών, αυτή η βελτίωση δεν είναι ιδιαίτερα σημαντική. Οι διαφοροποιήσεις στις αντιλήψεις των μαθητών μεταξύ των εκπαιδευτικών βαθμίδων (Δημοτικό, Γυμνάσιο, Λύκειο) είναι μικρές και πολλές φορές δεν είναι στατιστικά σημαντικές.

Τα κύρια χαρακτηριστικά αυτής της ασθενούς αναπτυξιακής πορείας, είναι:

Διατήρηση των πρωτογενών διαισθητικών αντιλήψεων: Παρότι παρατηρείται μια γενική βελτίωση, οι μαθητές σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες εξακολουθούν να επηρεάζονται έντονα από τις πρωτογενείς διαισθητικές τους αντιλήψεις για το άπειρο, οι οποίες συχνά αποκλίνουν από την τυπική μαθηματική έννοια.

Σταδιακή απομάκρυνση από την πεπερασμένη αντίληψη: Με την αύξηση της ηλικίας, οι μαθητές τείνουν να απομακρύνονται από την αντίληψη του απείρου ως ενός πολύ μεγάλου πεπερασμένου αριθμού, υιοθετώντας πιο διαδικαστικές αντιλήψεις. Στη ΣΤ΄ Δημοτικού, η πεπερασμένη αντίληψη για το άπειρο είναι έντονη. Οι μαθητές, λόγω της καθημερινής γλώσσας και των μεταφορικών χρήσεων της έννοιας, συχνά θεωρούν ως άπειρο κάτι πολύ μεγάλο αλλά πεπερασμένο που δεν μπορούμε να το μετρήσουμε. Στη Γ΄ Γυμνασίου, παρατηρείται μείωση της πεπερασμένης αντίληψης.

Δυσκολίες στην κατανόηση του πραγματικού απείρου: Η κατανόηση του πραγματικού απείρου παραμένει δύσκολη για τους μαθητές σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες.

Σταθερότητα των αντιλήψεων: Οι αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο τείνουν να είναι αρκετά σταθερές μετά το Δημοτικό. Η απουσία σημαντικών διαφορών μεταξύ Γυμνασίου και Λυκείου υποδηλώνει ότι οι αντιλήψεις έχουν διαμορφωθεί κυρίως από τη διαίσθηση και όχι τη διδασκαλία. Ειδικότερα, αντιλήψεις όπως η διαδικαστική και η πραγματική αντίληψη του απείρου, παραμένουν σταθερές καθώς οι μαθητές προχωρούν στις μεγαλύτερες τάξεις. Η διαδικαστική αντίληψη του απείρου, παραμένει η πιο συχνή σε όλες τις εκπαιδευτικές βαθμίδες.

Αντιλήψεις για τη σύγκριση άπειρων συνόλων: Οι αντιλήψεις σχετικά με τη σύγκριση άπειρων συνόλων παραμένουν σταθερές, με τους μαθητές να δυσκολεύονται να αιτιολογήσουν σωστά τις απαντήσεις τους, αν και παρατηρείται μια μικρή βελτίωση από το Δημοτικό στο Γυμνάσιο. Λανθασμένες αντιλήψεις, όπως η ιδέα ότι τα άπειρα σύνολα δεν μπορούν να συγκριθούν, παραμένουν ακόμη και στο Λύκειο.

Συμβατότητα απαντήσεων: Η συμβατότητα των απαντήσεων των μαθητών με την κυρίαρχη αντίληψή τους για το άπειρο βελτιώνεται στο Γυμνάσιο και είναι ακόμα μεγαλύτερη στο Λύκειο. Π.χ. όταν ένας μαθητής λέει ότι το άπειρο είναι κάτι που δεν τελειώνει ποτέ (διαδικαστική αντίληψη), ταυτόχρονα δίνει παραδείγματα που υποστηρίζουν αυτή την αντίληψη (π.χ., οι φυσικοί αριθμοί συνεχίζονται επ' άπειρον).

Επίδραση της σχολικής εκπαίδευσης-στατιστική σημαντικότητα: Η σχολική εκπαίδευση φαίνεται να έχει κάποια θετική επίδραση. Ωστόσο, η επίδραση αυτή δεν είναι πάντα στατιστικά σημαντική και οι διαισθητικές αντιλήψεις εξακολουθούν να υπάρχουν. Αυτό υποδηλώνει ότι η εξέλιξη στην κατανόηση του απείρου δεν είναι τόσο έντονη όσο θα μπορούσε να αναμένεται. Παρ’ όλα αυτά, σε συγκεκριμένα θέματα, όπως η διάκριση μεταξύ του «πολύ μεγάλου αλλά πεπερασμένου» και του «απείρου», η βελτίωση θεωρείται σημαντική.

Συνολικά, η έρευνα υποδεικνύει ότι η ανάπτυξη της αντίληψης του απείρου είναι μια μακροχρόνια και σύνθετη διαδικασία που επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες. Από την ποιοτική ανάλυση των δεδομένων είδαμε τους κυριότερους παράγοντες που επηρεάζουν την ανάπτυξη της αντίληψης:

Διδασκαλία: Η αποσπασματική διδασκαλία της έννοιας του απείρου στα μαθηματικά προγράμματα συμβάλλει στη διατήρηση των διαισθητικών αντιλήψεων.

Καθημερινές εμπειρίες και γλωσσικές επιρροές: Οι καθημερινές εμπειρίες επηρεάζουν τις αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο. Η καθημερινή χρήση της γλώσσας σε πολλές περιπτώσεις φαίνεται να είναι καθοριστική για τη διαμόρφωση των αντιλήψεων για το άπειρο.

Δυσκολίες εξαιτίας της φύσης της έννοιας: Η αφηρημένη φύση της έννοιας του απείρου καθιστά δύσκολη την κατανόησή της από τους μαθητές.

6.4 Η συνεισφορά της εργασίας

Η συγκεκριμένη εργασία διερευνά τις διαισθητικές αντιλήψεις των μαθητών για την έννοια του απείρου στην πρωτοβάθμια και δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Αρχικά, προτείνεται μια κατηγοριοποίηση των αντιλήψεων για το άπειρο, η οποία βοηθά τους εκπαιδευτικούς να αξιολογήσουν το επίπεδο κατανόησης των μαθητών. Επιπλέον, εντοπίζονται σπάνιες αντιλήψεις που συχνά περνούν απαρατήρητες, προσφέροντας νέα ερευνητικά δεδομένα.

Η εργασία συμπληρώνει ένα κενό στην υπάρχουσα βιβλιογραφία, μέσω της συγκριτικής στατιστικής ανάλυσης μεταξύ τριών διαφορετικών εκπαιδευτικών βαθμίδων, και επιβεβαιώνει τη σταθερότητα των διαισθητικών αντιλήψεων για το άπειρο κατά τη σχολική εκπαίδευση. Παράλληλα, εντοπίζονται οι πηγές προέλευσης αυτών των αντιλήψεων, παρέχοντας χρήσιμες πληροφορίες και προσφέροντας εφόδια για αντίστοιχες μελλοντικές έρευνες σε άλλες μαθηματικές έννοιες.

Επιπρόσθετα, τονίζεται η σημασία της πολυσημίας του όρου «άπειρο» στην καθημερινή γλώσσα και η ανάγκη για προσεκτική διδασκαλία που λαμβάνει υπόψη της τις διάφορες ερμηνείες. Η έρευνα αναδεικνύει επίσης τα κριτήρια με τα οποία οι μαθητές συγκρίνουν δύο άπειρα σύνολα, επισημαίνοντας τις εσφαλμένες αντιλήψεις που απορρέουν από αυτά.

Τα ευρήματα της εργασίας προσφέρουν πολύτιμη βάση για την ανάπτυξη αποτελεσματικότερων διδακτικών προσεγγίσεων, την αντιμετώπιση των λανθασμένων αντιλήψεων, και την επίτευξη μιας βαθύτερης κατανόησης της έννοιας του απείρου από τους μαθητές.

6.5 Περιορισμοί της έρευνας και προτάσεις για μελλοντικές έρευνες

Στη συγκεκριμένη έρευνα υπήρξαν ορισμένοι περιορισμοί. Αρχικά, τα ερωτηματολόγια δόθηκαν σε μαθητές της ΣΤ' Δημοτικού, της Γ' Γυμνασίου και της Γ' Λυκείου, οι οποίες αποτελούν τις τελευταίες τάξεις σε κάθε εκπαιδευτική βαθμίδα. Σκοπός ήταν να μελετηθούν οι διαφοροποιήσεις στα διαφορετικά στάδια της σχολικής εκπαίδευσης. Επιπλέον, διερευνήθηκε αν υπάρχει αναπτυξιακή πορεία στην αντίληψη της έννοιας κατά τη διάρκεια των σχολικών χρόνων και, αν ναι, ποια είναι τα κύρια χαρακτηριστικά της. Για να επιτευχθεί αυτό με μεγαλύτερη ακρίβεια, θα απαιτείτο διαχρονική έρευνα στους ίδιους μαθητές κατά τη διάρκεια των σχολικών χρόνων τους. Ωστόσο, κάτι τέτοιο δεν ήταν εφικτό λόγω του χρονικού περιορισμού για την ολοκλήρωση της διατριβής.

Επιπλέον, η έρευνα πραγματοποιήθηκε σε σχολεία τόσο σε αστικά κέντρα όσο και σε σχολεία της επαρχίας. Για να είναι, όμως, τα αποτελέσματα απολύτως γενικεύσιμα, θα έπρεπε να περιλαμβάνουν μεγαλύτερο δείγμα από περισσότερες περιοχές της χώρας. Αυτό θα είχε ενισχύσει την αντιπροσωπευτικότητα των ευρημάτων σε επίπεδο επικράτειας.

Όροι όπως η «διαίσθηση» ή η «αντίληψη» είναι σε πολλά σημεία διεπιστημονικοί και η περαιτέρω συνεργασία με επιστήμονες από άλλους κλάδους θα μπορούσε να αναδείξει ακόμα περισσότερο αυτούς τους όρους στο πεδίο της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Τέλος, σε συγκεκριμένα αντικείμενα, όπως η προέλευση των αντιλήψεων, παρατηρείται περιορισμένος όγκος προηγούμενης έρευνας. Αυτό δημιουργεί δυσκολίες στην ανάλυση και την ερμηνεία των αποτελεσμάτων.

Η παρούσα εργασία αποτελεί μια πρώτη προσπάθεια μελέτης των αντιλήψεων των μαθητών για το άπειρο σε διαφορετικές εκπαιδευτικές βαθμίδες. Πιθανές μελλοντικές μελέτες μπορούν να εμβαθύνουν σε διάφορες άλλες πτυχές του θέματος. Συγκεκριμένες προτάσεις για περαιτέρω έρευνα περιλαμβάνουν:

Επέκταση της έρευνας στο πανεπιστήμιο: Μια ενδιαφέρουσα κατεύθυνση θα ήταν η μελέτη της κατανόησης του άπειρου σε φοιτητές, ιδιαίτερα σε τμήματα με μαθηματικό χαρακτήρα. Η σύγκριση των αντιλήψεων των φοιτητών με αυτές των μαθητών σε προηγούμενες βαθμίδες εκπαίδευσης θα μπορούσε να αποκαλύψει σημαντικές διαφορές ή ομοιότητες. Επιπλέον, η διερεύνηση του τρόπου με τον οποίο η πανεπιστημιακή εκπαίδευση επηρεάζει την κατανόηση του απείρου θα προσέφερε σημαντικά δεδομένα για την αντίληψη της έννοιας σε πιο προχωρημένο επίπεδο.

Ανθεκτικότητα αντιλήψεων: Μια άλλη κατεύθυνση για μελλοντική έρευνα θα ήταν η περαιτέρω διερεύνηση των λόγων για τους οποίους οι αντιλήψεις των μαθητών για το άπειρο παραμένουν σταθερές με την πάροδο του χρόνου. Επιπλέον, η μελέτη του πώς οι διδακτικές μέθοδοι μπορούν να προωθήσουν την αλλαγή αυτών των αντιλήψεων και την ανάπτυξη μιας ορθής κατανόησης του απείρου, θα ήταν σημαντική για τη βελτίωση της μαθηματικής διδασκαλίας.

Χρήση της κατηγοριοποίησης της προέλευσης των αντιλήψεων: Η κατηγοριοποίηση της προέλευσης των αντιλήψεων θα μπορούσε να αξιοποιηθεί και για άλλες βασικές μαθηματικές έννοιες. Με τον τρόπο αυτό η συγκεκριμένη κατηγοριοποίηση θα μπορούσε να εμπλουτιστεί και να βελτιωθεί σημαντικά ώστε να αποτελέσει στο μέλλον ένα ερμηνευτικό πλαίσιο για την προέλευση των αντιλήψεων.

Μαθηματική κατανόηση και καθημερινή γλώσσα: Τέλος, θα ήταν χρήσιμο να εξερευνηθεί ο τρόπος με τον οποίο η μαθηματική κατανόηση του απείρου επηρεάζει τη χρήση του όρου στην καθημερινή γλώσσα. Αυτή η μελέτη θα μπορούσε να αναδείξει πώς οι μαθητές μεταφράζουν μαθηματικές έννοιες στις καθημερινές τους εκφράσεις.

Προεκτάσεις της έρευνας για τη χάραξη πολιτικής στα Μαθηματικά: Η διερεύνηση της έννοιας του απείρου στη μαθηματική εκπαίδευση και τη χάραξη της εκπαιδευτικής πολιτικής αποτελεί μια ενδιαφέρουσα πρόκληση με πολλαπλές συνδέσεις με διάφορες πτυχές του υπάρχοντος εκπαιδευτικού προγράμματος. Κρίσιμα ερωτήματα, όπως το πώς μπορεί η έννοια του απείρου να ενσωματωθεί αποτελεσματικά στο πρόγραμμα σπουδών και ποιοι είναι οι κεντρικοί στόχοι της μαθηματικής εκπαίδευσης που εξυπηρετούνται από τη διδασκαλία του, αποκτούν ιδιαίτερη σημασία. Συγκεκριμένες προεκτάσεις της έρευνας μπορούν να συνεισφέρουν προς αυτή την κατεύθυνση. Η επανεξέταση του τρόπου εισαγωγής της έννοιας στις μικρότερες τάξεις αποτελεί ένα βασικό βήμα, ενώ η διασύνδεσή του με άλλα επιστημονικά πεδία, όπως η φυσική (π.χ. κοσμολογία) και η φιλοσοφία, μπορεί να αναδείξει τη διεπιστημονική του σημασία. Επιπλέον, η ανάπτυξη εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων που καλλιεργούν τη διαισθητική κατανόηση του απείρου από τους μαθητές μπορεί να βελτιώσει τη μαθησιακή τους εμπειρία. Παράλληλα, είναι σημαντική η υλοποίηση προγραμμάτων επιμόρφωσης για τους εκπαιδευτικούς, για τη διδασκαλία της έννοιας και τη σχεδίαση κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού. Τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να συμβάλουν στην ανάπτυξη ενός δομημένου πλαισίου διδασκαλίας με πρακτική εφαρμογή στη Μαθηματική εκπαίδευση.

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

Adoniou, M., Qing, Y. (2014). Language, mathematics and English language learners. *Australian Mathematics Teacher, 70*(3), 3–13.

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.

Barwell, R. (2012). The academic and the everyday in mathematicians' talk: The case of the hyper-bagel. *Language and Education. 27*(3), 207–222.

Bolzano, B. (1950). *Paradoxes of the Infinite* (Fr. Prihonsky, Trans.). Yale University Press. (Original work published 1851)

Boyer, C. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development*. Dover Publications.

Carey, S. (2009). *The origin of concept*, Oxford University Press.

Clegg, B. (2003). *A Brief History of Infinity*. Robinson.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 153-166). Kluwer Academic Publishers.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 167-192.

Coope, U. (2012). Aristotle on the infinite. In C. Shield (Ed.), *The Oxford handbook of Aristotle* (pp. 267–286). Oxford University Press.

Cooper, J. (2016). Aristotelian Infinites, *Oxford Studies in Ancient Philosophy*, *51*, 161–206.

Cirillo, M., Bruna, R. K. & Herbel-Eisenmann, B. (2010). Acquisition of mathematical language: Suggestions and activities for English language learners. *Multicultural Perspectives*, *12*(1), 34–41.

Devitt, M. (1996). *Coming to Our Senses*. Cambridge University Press.

Dogan-Dunlap, H. (2007). Reasoning with metaphors and constructing an understanding of the mathematical function concept. In *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 209–216). PME.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M., Brown. A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics, 58* (5), 335–359.

Dubinsky, E., Weller, K., Stenger, C., & Vidakovic, D. (2008). Infinite iterative processes: The Tennis Ball Problem. *European Journal of Pure and Applied Mathematics, 1*(1), 99–121.

Falk, R. (1994). Infinity: A cognitive challenge, *Theory and Psychology, 4*(1), 35–60.

Fischbein, J., Tirosh, D., & Hess, P. (1979). The Intuition of Infinity. *Educational Studies in Mathematics, 10*, 3-40.

Fischbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 309–329.

Fischbein, E., D. Tirosh, U. Melamed. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics 12*, 491–512.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Reidel Publishing, Kluwer Academic Publishers

Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straser, & B. Winkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 231-245). Kluwer Academic Publishers.

Galilei, G. (1974). *Two New Sciences*. University of Wisconsin Press.

Gough, J. (2007). Conceptual complexity and apparent contradictions in mathematics language. *The Australian Mathematics Teacher 63*(2), 8-16.

Habaci, Ş. D., & Çetin, İ. (2023). High school students' metaphors regarding the concept of infinity. *Journal of Kirsehir Education Faculty*.

Halliday, M. A. K. (1978). *Language as social semiotic: The social interpretation of language and meaning*. University Park Press.

Huffman, C. (2005). *Archytas of Tarentum: Pythagorean, philosopher and mathematician king*. Cambridge University Press.

Inglis, M. (2015). Review of APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education, Arnon et al. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 1*(3), 413–417.

Jahnke, H. N. (2001). Cantor's cardinal and ordinal infinities: An epistemological and didactic view. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2), 175–197.

Jirotková, D., Littler, G. (2004). Insight into pupils' understanding of infinity in a geometrical context. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 97-104). Bergen University College.

Jullien, V. (2015). *Seventeenth-century indivisibles revisited*. Springer International Publishing.

Kant, I. (1998). *Critique of pure reason* (P. Guyer & A. W. Wood, Trans. & Eds.). Cambridge University Press.

Kline, M. (1980). *Mathematics: The loss of certainty.* Oxford University Press.

Kolar, V., Čadež T.H. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 389–412.

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics*. Basic Books.

Luis, E., Moreno, A., & Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 211-231.

Mamolo, A., Zazkis, R. (2008). Paradoxes as a window to infinity. *Research in Mathematics Education, 10*(2), 167–182

McFarlane, T. J. (1999). *Nicholas of Cusa and the infinite*. True Nature.

McKirahan, R. D. (2010). *Before Socrates: An introduction with texts and commentary (2nd ed.).* Hackett Publishing Company.

Monaghan, J. (2001).Young people's ideas of infinity, *Educational Studies in Mathematics 48*(2/3), 239–257.

Narli, S., & Baser, N.(2008). Cantorian set theory and teaching prospective teachers. *International Journal of Environmental & Science Education, 3*(2), 99–107.

Hannula, M. S., Pehkonen, E., Maijala, H., & Soro, R. (2006). Infinity of numbers: How students understand it. In *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 345). PME.

Prediger, S. (2019). Investigating and promoting teachers' expertise for language-responsive mathematics teaching. *Mathematics Education Research Journal, 31*(4), 367–392.

Prediger, S. (2022). Enhancing language for developing conceptual understanding: A research journey connecting different research approaches. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, & F. Ferretti (Eds.), *Proceedings of the twelfth congress of European research in mathematics education (CERME12)*. Free University of Bozen-Bolzano and ERME.

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology.* Columbia University Press.

Radu, I., & Weber, K. (2011). Refinements in mathematics undergraduate students' reasoning on completed infinite iterative processes. *Educational Studies in Mathematics, 78,* 165–180.

Rashed, M. (2009). Thabit ibn Qurra sur l'existence et l'infini: les Réponses aux questions posées par Ibn Usayyid. In R. Rashed (Ed.), *Thabit ibn Qurra, Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad* (pp. 619–673). Walter de Gruyter.

Robbins, S. P., & Judge, T. A. (2007). *Organizational behavior* (12th ed.). Pearson Prentice Hall.

Robitaille, D. F., & Travers, K. J. (1992). International studies of achievement in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 687–709). Macmillan

Russell, B. (1937), *The principles of mathematics* (2^{nd} ed.), London: Routledge. (Original work published 1903)

Saban, A. (2004). Metaphors put forward by entry-level classroom teacher candidates regarding the concept of teacher, *Turkish Institute, Eskişehir Journal of Educational Sciences, 2*(2), 131–155.

Sfard, A. (2015). Metaphors in education. In R. Gunstone (Ed.), *Encyclopedia of science education* (pp. 39–49). Springer.

Shuell, T. J. (1993). Toward an integrated theory of teaching and learning. *Educational Psychologist, 28*(4), 291–311

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits, *Educational Studies in Mathematics*, *18*(4), 371–397.

Singer, M., & Voica, C. (2003). Perception of infinity: Does it really help in problem solving? In A. Rogerson (Ed.), *Proceedings of the 6th International Conference of The Decidable and the Undecidable in Mathematics Education* (pp. 252-256). The Mathematics Education into the 21st Century Project

Singer, F. M., & Voica, C. (2008). Between perception and intuition: Learning about infinity. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*(3), 188–205.

Tall, D. (1999). Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking. In *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 148-155).

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2), 199–238.

Tall, D., Schwarzenberger, R.L.E. (1978). Conflicts in the learning of real numbers and limits, *Mathematics Teaching, 82*, 44–49.

Tall, D., & Tirosh, D. (2001). Infinity-the never-ending struggle. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2), 129–136.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12(2),* 151–169.

Thompson, D. R., & Rubenstein, R. N. (2000). Learning mathematics vocabulary: Potential pitfalls and instructional strategies. *The Mathematics Teacher*, *93*(7), 568–574.

Tirosh, D. (1991). The role of students' intuitions of infinity in teaching the Cantorian theory. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 199-214). Kluwer Academic Publishers.

Tirosh, D. (1999). Finite and infinite sets: Definitions and intuitions. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology, 30*(3), 341–349.

Tirosh, D., & Tsamir, P. (1996). The role of representations in student’s intuitive thinking about infinity. *Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 27*, 33–40.

Tirosh, D., & Tsamir, P. (2006). Learning and teaching infinities: A never-ending story. Tel Aviv University. http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/

Tsamir, P. (1999). The transition from comparison of finite to the comparison of infinite sets: Teaching prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics, 38*(1-3), 209–234.

Tsamir, P. (2001). When 'the same' is not perceived as such: The case of infinite sets. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 289–307.

Tsamir, P., & Dreyfus, T. (2002). Comparing infinite sets - a process of abstraction: The case of Ben. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(1), 1–23.

Tsamir, P., & Tirosh, D. (1999). Consistency and representations: The case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 213–219.

Ueno, Y. (2005). The basic metaphor of infinity and the concept of a point. *Academic Reports, 28*(1), 120–127. The Faculty of Engineering, Tokyo Polytechnic University.

Ugaglia, M. (2018). Existence vs Conceivability in Aristotle: Are straight lines infinitely extendible? In G. P. M. Piazza (Ed.), *Truth, Existence and Explanation, Boston Studies in the Philosophy and History of Science* (pp. 249–272). Springer.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., & Houang, R. T. (2002). *According to the book: Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks.* Springer Science & Business Media.

Vilenkin, N. Y. (1995). *In Search of Infinity*. Birkhäuser Boston.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 177-184). University of California.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Kluwer Academic Publishers.

Voorhees, B. (2004). Embodied mathematics. *Journal of Consciousness Studies, 11*, 83-88.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes.* Harvard University Press.

Wijaya, A., van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 89*(1), 41–65.

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2005). Locating irrational numbers on a number line. *Proceedings of the Conference for Psychology of Mathematics,* Education-North American chapter

Ελληνόφωνη Βιβλιογραφία

Αδαμόπουλος, Λ., Βισκαδουράκης, Β., Γαβαλάς, Δ., Πολύζος, Γ., & Σβέρκος, Α. *Μαθηματικά Β' Τάξης Ενιαίου Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης.* Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Αναπολιτάνος, Δ. (2005). *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Εκδόσεις Νεφέλη.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχουτάς, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., & Πολύζος, Γ. *Άλγεβρα Γ' Ενιαίου Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., & Σβέρκος, Α. *Άλγεβρα Α' Ενιαίου Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ., & Σβέρκος, Α. *Άλγεβρα Β' Ενιαίου Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Αργυράκης, Δ., Βουργάνας, Π., Μεντής, Κ., Τσικοπούλου, Σ., & Χρυσοβέργης, Μ. *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Αργυρόπουλος, Η., Βλάμος, Π., Κατσούλης, Γ., Μαρκάτης, Σ., & Σίδερης, Π. *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α' και Β' Ενιαίου Λυκείου*. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Βανδουλάκης, Ι., Καλλιγάς, Χ., Μαρκάκης, Ν., & Φερεντίνος, Σ. *Μαθηματικά Α' Γυμνασίου.* Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Βλάμος, Π., Δρούτσας, Π., Πρέσβης, Γ., & Ρεκούμης, Κ. *Μαθηματικά Β' Γυμνασίου*. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων.

Γιαννακούλιας, Ε. (2007). *Απειροστικός Λογισμός. Η ιστορική του εξέλιξη από τον 5ο π.Χ έως και τον 19ο αιώνα.* Εκδόσεις Συμμετρία.

Δρόσος, Κ. (1999). *Εισαγωγή στη Μαθηματική Σκέψη* (Τόμος 1ος). Μαθηματικές Περιηγήσεις.

Μπαμπίλη, Α. Χ. (2010). *Το μαθηματικό άπειρο, τα παράδοξα και ο νους. Μια διερεύνηση των διαδρομών που ακολουθεί ο νους προσπάθεια προσέγγισης του απείρου* (Διπλωματική εργασία). Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Μπαμπινιώτης, Γ. (2012). *Λεξικό της νέας ελληνικής γλώσσας: Με σχόλια για τη σωστή χρήση των λέξεων: Ερμηνευτικό, ετυμολογικό, ορθογραφικό, συνωνύμων-αντιθέτων, κύριων ονομάτων, επιστημονικών όρων, ακρωνυμίων.* Κέντρο Λεξικολογίας.

Στεργίου, Β. (2009). *Ιστορική εξέλιξη, ερμηνείες και διδακτικές προσεγγίσεις της έννοιας του απειροστού* (Διδακτορική διατριβή). Πανεπιστήμιο Πατρών.

Τσαμπουράκη, Α., & Καφούση, Σ. (2017). *Διερευνώντας τις πεποιθήσεις των μαθητών της ΣΤ' Δημοτικού για το άπειρο. Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, 9,* 43–57

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία μεταφρασμένη στα ελληνικά

Barrow, J.D. (2007). *Άπειρο, τα μαθηματικά της αθανασίας* (Μτφ. Έ. Πισσία). Εκδόσεις Τραυλός

Hilbert, D.(1998). *Για το Άπειρο* (Μτφ. Μ. Κωνσταντινίδης). Εκδόσεις Τροχαλία.

Mankiewicz, R. (2000). *Η ιστορία των μαθηματικών*. Εκδόσεις Αλεξάνδρεια

Rucker, R. (2004). *Το άπειρο και ο νους.* (Μτφ. Κ. Χατζηκυριάκου). Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Παράρτημα

Πίνακας 7.1: Συσχέτιση των αντιλήψεων στις ερωτήσεις 1α,1β,1γ,2 και 4

Αντίληψη		Ερ.1β	Ερ.1γ	Ερ.2
Ερ.1α	Correlation Coefficient	,201**	,211**	,060
	Sig. (2-tailed)	<,001	<,001	,266
	N	303	280	284
Ερ.1β	Correlation Coefficient		,259**	,089
	Sig. (2-tailed)		<,001	,106
	N			273
Ερ.1γ	Correlation Coefficient			,000
	Sig. (2-tailed)			1,000
	N			256

Πίνακας 7.2: Μέσες τάξεις των αντιλήψεων στις ερωτήσεις 1α,1β,1γ και 2

	1 ΣΤ΄ Δημοτικού 2 Γ΄ Γυμνασίου 3 Γ΄ Λυκείου	Mean Rank
Αντίληψη Ερ.1α	1	156,94
	2	176,86
	3	174,76
Αντίληψη Ερ.1β	1	147,38
	2	169,09
	3	181,47
Αντίληψη Ερ.1γ	1	135,12
	2	161,00
	3	163,90
Αντίληψη Ερ.2	1	141,39
	2	163,13
	3	158,58

Πίνακας 7.3: Kruskal-Wallis Test των αντιλήψεων στις ερωτήσεις 1α,1β,1γ και 2

	Αντίληψη Ερ.1α	Αντίληψη Ερ.1β	Αντίληψη Ερ.1γ	Αντίληψη Ερ.2
Kruskal-Wallis H	3,542	8,275	9,181	4,465
df	2	2	2	2
Asymp. Sig.	,170	,016	,010	,107

Πίνακας 7.4: Kruskal-Wallis Test των αντιλήψεων των μαθητών στις ερωτήσεις 1α,1β,1γ και στις απαντήσεις των ερωτήσεων 4,8α και 8β (αφορά τη ΣΤ΄ Δημοτικού)

	Αντίληψη Ερ.1α	Αντίληψη Ερ.1β	Αντίληψη Ερ.1γ	Ερ.4	Ερ.8α	Ερ.8β
Kruskal-Wallis H	2,811	6,476	1,206	7,369	,167	,174
df	2	2	2	2	2	2
Asymp. Sig.	,245	,039	,547	,025	,920	,917

Πίνακας 7.5: Kruskal-Wallis Test των αντιλήψεων των μαθητών στις ερωτήσεις 1α,1β,1γ και στις απαντήσεις των ερωτήσεων 4,8α και 8β (αφορά τη Γ΄ Γυμνασίου)

	Αντίληψη Ερ.1α	Αντίληψη Ερ.1β	Αντίληψη Ερ.1γ	Ερ.4	Ερ.8α	Ερ.8β
Kruskal-Wallis H	,523	5,742	2,297	9,831	5,736	,180
df	3	3	3	3	3	3
Asymp. Sig.	,914	,125	,513	,020	,125	,981

Πίνακας 7.6: Kruskal-Wallis Test των αντιλήψεων των μαθητών στις ερωτήσεις 1α,1β,1γ και στις απαντήσεις των ερωτήσεων 4,8α και 8β (αφορά τη Γ΄ Λυκείου)

	Αντίληψη Ερ.1α	Αντίληψη Ερ.1β	Αντίληψη Ερ.1γ	Ερ.4	Ερ.8α	Ερ.8β
Kruskal-Wallis H	2,253	,229	1,457	9,269	8,143	,762
df	3	3	3	3	3	3
Asymp. Sig.	,522	,973	,692	,026	,043	,859

Πίνακας 7.7: Kruskal-Wallis Test των κριτηρίων σύγκρισης στην ερώτηση 5

	Μη κατανόηση συμβολισμού	Μεγαλύτεροι αριθμοί άρα περισσότεροι	Το μέρος μικρότερο από το όλο	Δε μπορούν να συγκριθούν	Όλα τα άπειρα είναι ίδια	1-1 αντιστοίχιση
Kruskal-Wallis H	4,378	6,560	,123	11,359	5,775	2,766
df	2	2	2	2	2	2
Asymp. Sig.	,112	,038	,940	,003	,056	,251

Πίνακας 7.8: Kruskal-Wallis Test των κριτηρίων σύγκρισης στην ερώτηση 9α

	Μη κατανόηση συμβολισμού	Μεγαλύτεροι αριθμοί άρα περισσότεροι	Το μέρος μικρότερο από το όλο	Δε μπορούν να συγκριθούν	Όλα τα άπειρα είναι ίδια	1-1 αντιστοίχιση
Kruskal-Wallis H	4,988	5,974	2,996	2,479	,823	,062
df	2	2	2	2	2	2
Asymp. Sig.	,083	,050	,224	,289	,663	,970

.

Πίνακας 7.9: Kruskal-Wallis Test των κριτηρίων σύγκρισης στην ερώτηση 9β

	Μη κατανόηση συμβολισμού	Μεγαλύτεροι αριθμοί άρα περισσότεροι	Το μέρος μικρότερο από το όλο	Δε μπορούν να συγκριθούν	Όλα τα άπειρα είναι ίδια	1-1 αντιστοίχιση
Kruskal-Wallis H	5,996	4,829	1,959	6,636	2,753	5,592
df	2	2	2	2	2	2
Asymp. Sig.	,050	,089	,376	,036	,252	,061

Πίνακας 7.10: Kruskal-Wallis Test των κριτηρίων σύγκρισης στην ερώτηση 9γ

	Μη κατανόηση συμβολισμού	Μεγαλύτεροι αριθμοί άρα περισσότεροι	Το μέρος μικρότερο από το όλο	Δε μπορούν να συγκριθούν	Όλα τα άπειρα είναι ίδια	1-1 αντιστοίχιση
Kruskal-Wallis H	13,217	6,411	1,165	4,359	7,363	2,935
df	2	2	2	2	2	2
Asymp. Sig.	,001	,041	,558	,113	,025	,230

Πίνακας 7.11: Kruskal-Wallis Test των κριτηρίων σύγκρισης στην ερώτηση 9δ

	Μη κατανόηση συμβολισμού	Μεγαλύτεροι αριθμοί άρα περισσότεροι	Το μέρος μικρότερο από το όλο	Δε μπορούν να συγκριθούν	Όλα τα άπειρα είναι ίδια	1-1 αντιστοίχιση
Kruskal-Wallis H	2,226	7,171	,687	11,881	10,159	,979
df	2	2	2	2	2	2
Asymp. Sig.	,329	,028	,709	,003	,006	,613

Πίνακας 7.12: Kruskal-Wallis Test στις ερωτήσεις 4,6,7 και 8

	Ερ.4	Ερ.6	Ερ.7	Ερ.8α	Ερ.8β
Kruskal-Wallis H	,056	,556	19,540	15,278	3,334
df	2	2	2	2	2
Asymp. Sig.	,972	,757	<,001	<,001	,189