ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
UNIVERSITY OF CYPRUS

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΙΣΤΟΡΙΑΣ ΚΑΙ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ - ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΩΝ - ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

ΔΙΑΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ - ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Ενορχηστρώνοντας την μαθηματική απόδειξη μέσω της λογικής της διερεύνησης σε DGE: Μια μελέτη περίπτωσης στην τριτοβάθμια εκπαίδευση

Βώβος Μάριος
Α.Μ. 7112122200002

Επιβλέπων Συμβουλευτικής Επιτροπής:
Χρόνης Κυνηγός

Αθήνα

Φεβρουάριος 2025

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία
εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών
για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης
που απονέμει το
Διιδρυματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στη
«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την 11η Φεβρουαρίου 2025 από **Εξεταστική Επιτροπή** αποτελούμενη από τους :

	Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪	Χρόνης Κυνηγός (Επιβλέπων)	Καθηγητής
▪	Δέσποινα Πόταρη	Καθηγήτρια
▪	Γεώργιος Ψυχάρης	Αναπληρωτής Καθηγητής

Η εκπόνηση της παρούσας Διπλωματική Εργασία πραγματοποιήθηκε υπό την καθοδήγηση της **Συμβουλευτικής Επιτροπής** αποτελούμενη από τους:

	Ονοματεπώνυμο	**Βαθμίδα**
▪	Χρόνης Κυνηγός (Επιβλέπων)	Καθηγητής
▪	Δέσποινα Πόταρη	Καθηγήτρια
▪	Γεώργιος Ψυχάρης	Αναπληρωτής Καθηγητής

… αφιερώνεται στην οικογένεια μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Χ. Κυνηγό για την καθολική υποστήριξη του στην εκπόνηση της παρούσας εργασίας, καθώς και για το εναρκτήριο λάκτισμα του στον κόσμο της Έρευνας της Διδακτικής των Μαθηματικών. Ταυτόχρονα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές μου κα. Δ. Πόταρη και κ. Γ. Ψυχάρη, για τη συμμετοχή τους στην τριμελή Συμβουλευτική Επιτροπή της παρούσας εργασίας, για τη σημαντική στήριξη τους σε όλη την διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών και για την υποστήριξη και τροφή που μου έδωσαν στις ερευνητικές αναζητήσεις μου. Παράλληλα, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους διδάκτορες και υποψήφιους διδάκτορες του Εργαστηρίου Εκπαιδευτικής Τεχνολογίας (E.T.L.) για την βοήθεια τους και τις εμπειρίες που απέκτησα.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται τα αποτελέσματα μιας μελέτης περίπτωσης γύρω από την αλληλεπίδραση δύο προπτυχιακών φοιτητών με μια παιγνιο-δραστηριότητα σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας (DGE). Η παιγνιο-δραστηριότητα είναι ένα σημασιολογικό παίγνιο, όπως όρισε ο Hintiika και σκοπός της είναι η ανακάλυψη της εγκυρότητας μιας μαθηματικής πρότασης και η εν δυνάμει απόδειξη της μέσω παικτών που ο ένας προσπαθεί να νικήσει τον άλλον. Η ενσωμάτωση και μελέτη της λογικής της διερεύνησης στη διδακτική των μαθηματικών είναι περιορισμένη και ακόμα λιγότερη είναι η σύνδεση της με την τριτοβάθμια εκπαίδευση. Στόχος είναι η γεφύρωση της πειραματικής φάσης με την τυπική φάση κατά την δημιουργία απόδειξης από τους μαθητές. Η βιβλιογραφία έχει δείξει ότι κατά την είσοδο των μαθητών στα μαθηματικά της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, αλλά και προηγουμένως κατά την δευτεροβάθμια εκπαίδευση οι δύο φάσεις έχουν επιστημολογικό και γνωστικό κενό. Σημαντικό γνωστικό κενό κατά την δημιουργία απόδειξης είναι η παραγωγή έμμεσων αποδείξεων. Με την παρούσα μελέτη προσπαθούμε να συμβάλουμε στη συζήτηση σχετικά με τη δυνατότητα γνωστικής και επιστημολογικής γεφύρωσης των ανωτέρω φάσεων και να μελετήσουμε τους τρόπους με τους οποίους η λογική της διερεύνησης συμβάλλει στην ανάπτυξη έμμεσων αποδείξεων και στην μαθηματική γνώση που παράγεται.

Λέξεις κλειδιά: λογική της διερεύνησης, απόδειξη, έμμεση απόδειξη, επιχειρηματολογία, σημασιολογικά παίγνια, δυναμική γεωμετρία, ψηφιακά περιβάλλοντα.

ABSTRACT

This paper presents the results of a case study on the interaction of two undergraduate students with a game-like activity in a dynamic geometry environment (DGE). The game activity is a semantic game, as defined by Hintiika, and its purpose is to discover the validity of a mathematical proposition and its potential proof through players who each try to defeat the other. The integration and study of the logic of inquiry in mathematics teaching is limited, and its connection to higher education is even less. The aim is to bridge the experimental phase with the formal phase in creating proofs. The literature has shown that when students enter higher education mathematics, but also previously during secondary education, the two phases have epistemological and cognitive gaps. A vital part of synthesizing proofs is the production of indirect proofs. In this study, we will contribute to the discussion regarding the possibility of cognitive and epistemological bridging of the above phases and study how the logic of inquiry contributes to the development of indirect proofs and their mathematical context.

Keywords: logic of inquiry, proof, indirect proof, argumentation, semantic games, dynamic geometry, digital environments.

Πίνακας περιεχομένων

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ 8

2. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ 17

2.1 Η ΛΟΓΙΚΗ ΤΗΣ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ 17
2.2 ΈΜΜΕΣΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ 22
2.3 ΑΠΑΓΩΓΗ 25
2.4 ΑΠΑΓΩΓΙΚΟΣ ΣΥΛΛΟΓΙΣΜΟΣ ΕΝΤΟΣ ΠΛΑΙΣΙΟΥ ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗΣ 33

3. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΡΕΥΝΑΣ 37

3.1 Η ΠΑΙΓΝΙΟ-ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΕΝΤΟΣ ΤΟΥ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ GEOGEBRA® 42

4. ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ 48

4.1 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΑΙΓΝΙΟΥ ΣΤΗΝ ΠΕΙΡΑΜΑΤΙΚΗ ΦΑΣΗ 48
4.2 ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΠΑΙΓΝΙΟΥ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΛΟΓΙΟΥ ΚΑΙ ΑΠΑΓΩΓΩΝ 51

5. ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ 61

6. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ 68

6.1 ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ 68
6.2 ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ 80

1. Εισαγωγή

Το νόημα της απόδειξης στην εκπαίδευση των μαθηματικών εισήγαγε ο Reid (2005), ο οποίος έθεσε ένα βασικό ερώτημα: "*Υπάρχει κάποιο πρωτότυπο της απόδειξης*;". Οι περισσότεροι ερευνητές μαθηματικοί και καθηγητές μαθηματικών πρέπει να συμβιβαστούν με έναν άτυπο και έμμεσο ορισμό, βασισμένο σε εμπειρίες που είχαν με πρωτότυπα παραδείγματα αποδείξεων. Ο όρος *πρωτότυπο* εισάγεται στην έρευνα της διδακτικής των μαθηματικών από τον Reid, χρησιμοποιώντας τον από την γλωσσολόγο Eleanor Rosch[1]. Σύμφωνα με την ανάλυση που πραγματοποιήθηκε στην εργασία του Reid, όταν οι συμμετέχοντες ήρθαν αντιμέτωποι με συγκεκριμένα παραδείγματα αποδείξεων, απέρριψαν ορισμένα επιχειρήματα ως αποδείξεις και αποδέχθηκαν άλλα, παρόλο που γενικά δεν ήταν σε θέση να ορίσουν τα χαρακτηριστικά μιας *πρωτότυπης* απόδειξης. Έτσι, φάνηκε ότι, ανεξάρτητα από τις διαφορετικές επιστημολογικές θέσεις που μπορεί να είχαν οι συμμετέχοντες, όταν τους ζητείται να κρίνουν επιχειρήματα ως αποδείξεις, βρίσκουν κοινό έδαφος. Παρ' όλα αυτά, αυτό το κοινό έδαφος δεν φάνηκε να αντιστοιχεί σε κάποιο συγκεκριμένο κοινό σύνολο χαρακτηριστικών της απόδειξης, και δεν αποτελεί έκπληξη το γεγονός ότι κατέστη επίσης σαφές ότι δεν υπήρχε κοινός τόπος όσον αφορά τις διδακτικές προσεγγίσεις απέναντι στην απόδειξη (Mariotti et al., 2018).

Η απόδειξη βρίσκεται στο επίκεντρο της οντολογίας και της επιστημολογίας των μαθηματικών (Ernest, 2018). Η απόδειξη έχει περιγραφεί ότι παίζει "ένα ξεχωριστό ρόλο" μέσα στη μαθηματική κοινότητα, "διαχωρίζοντας τα μαθηματικά από τις εμπειρικές επιστήμες" (Hoyles, 1997, σ. 7). Η απόδειξη είναι η «ψυχή» των μαθηματικών (Schoenfeld, 2009). Ορίζεται δε από διάφορες οπτικές γωνίες. Ο Rav (1999) ορίζει την απόδειξη ως τον τρόπο που οι μαθηματικοί επιδεικνύουν τον μηχανισμό για την επίλυση προβλημάτων και τεκμηριώνουν μια προτεινόμενη λύση

[1] Η Rosch (Varela et al., 1991) ανέλυσε τον τρόπο με τον οποίο οι κατηγορίες περιγράφονται στη γλώσσα και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι δεν έχουμε στο μυαλό μας έναν ορισμό για τις λέξεις που χρησιμοποιούμε για να ταξινομήσουμε τις εμπειρίες μας. Αντ' αυτού έχουμε αυτό που η ίδια αποκαλεί *πρωτότυπα* παραδείγματα, τα οποία περιγράφει χρησιμοποιώντας το εξής παράδειγμα: Έστω ότι μας ζητείται να σκεφτούμε ένα πουλί. Είναι πιθανό να σκεφτούμε ένα κοινό πουλί που ζει εκεί που ζούμε καί' μεις. Κατά την Rosch είναι απίθανο να σκεφτούμε έναν πιγκουίνο ή μια στρουθοκάμηλο. Για τα πτηνά που μοιάζουν με το *πρωτότυπο* μας τα αναγνωρίζουμε ως πτηνά χωρίς να καταφεύγουμε σε ορισμό. Για τα πουλιά που απέχουν πολύ από το *πρωτότυπό* μας, βασιζόμαστε στις γνώμες των ειδικών για να καθορίσουμε τα όρια των κατηγοριών μας. Για παράδειγμα, οι ειδικοί μας λένε ότι οι πιγκουίνοι είναι πτηνά, παρόλο που δεν πετούν και συμπεριφέρονται πολύ σαν φώκιες, επειδή γεννούν αυγά. Αλλά από την άλλη πλευρά, μας λένε ότι οι πλατύποδες δεν είναι πουλιά, παρόλο που γεννούν αυγά και συμπεριφέρονται με πολλούς τρόπους όπως οι πάπιες.

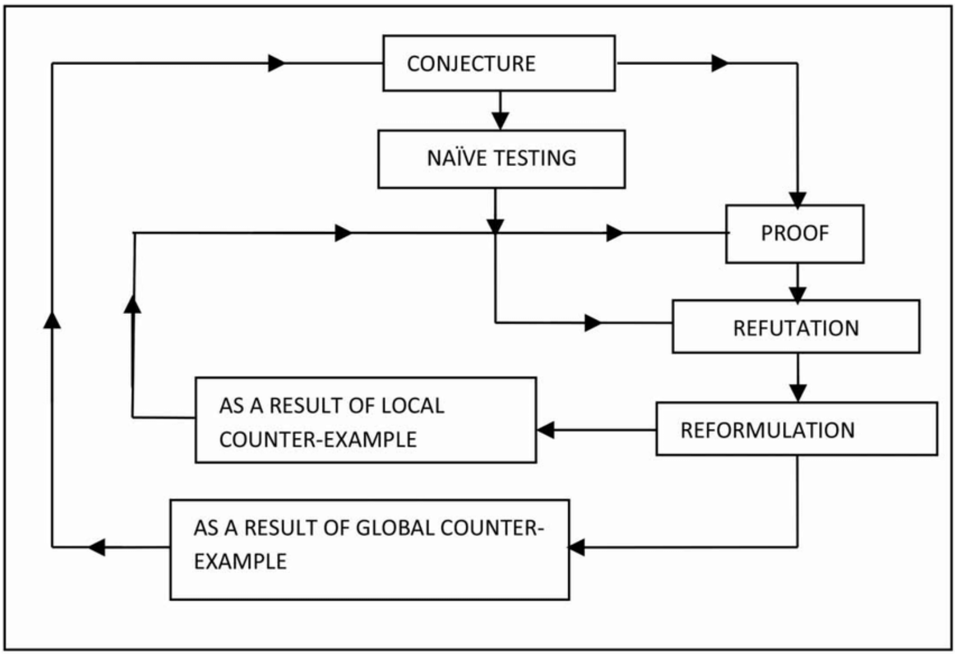
σε ένα πρόβλημα ως έγκυρη λύση. Η απόδειξη δείχνει το *γιατί* ισχύει το θεώρημα επομένως μεταδίδει περισσότερη γνώση από τη διατύπωση του θεωρήματος (Steiner, 1978; Hanna, 1989; Weber & Verhoeven, 2002; Lange 2016). Για τον Devlin (1995) η απόδειξη είναι συχνά ένα επιχείρημα το οποίο έχει γίνει αποδεκτό από ειδικούς στη συγκεκριμένη περιοχή και δεν έχει δειχθεί ότι είναι λανθασμένο. Η αποδεικτική διαδικασία προκύπτει ως απάντηση σε γνωστικοκοινωνικές ανάγκες (Cobb et al., 2012). Σύμφωνα με τον Manin (1981), ένα επιχείρημα είναι απόδειξη έπειτα από την κοινωνική πράξη αποδοχής της ως τέτοιας. Οι Harel & Sowder (2007) αναφέρουν ότι η απόδειξη εγκαθιδρύει την αλήθεια για ένα άτομο ή μια κοινότητα. Η απόδειξη της αλήθειας ενός ισχυρισμού είναι ένα επιχείρημα που είναι *γενικό*, *έγκυρο* και *προσπελάσιμο* στα μέλη μιας κοινότητας (Stylianides & Stylianides, 2009).

Η απόδειξη ήταν πάντα μια από τις δυσκολότερες διαδικασίες στην διδασκαλία και στην μάθηση των μαθηματικών: η τυπικότητα της και τα αυστηρά δομικά της στοιχεία συγκρούονται με την σφαλερότητα και τις εικασίες της διαδικασίας που την παράγει (Hanna, 2020; Hanna & de Villiers, 2012). Η έρευνα έχει δείξει ότι η έννοια της τυπικής απόδειξης είναι πέρα από τις δυνατότητες των μαθητών, καθώς και ότι οι άνθρωποι επεξεργάζονται την γνώση της καθημερινότητας και την επιστημονική γνώση με τέτοιο τρόπο που έρχεται σε αντίθεση με την μαθηματική ιδέα της απόλυτης βεβαιότητας (Fischbein, 1982). Η έρευνα των Reiss, Klieme και Heinze (2001) έδειξε την σύγχυση των μαθητών για την ορθότητα της τυπικής απόδειξης. Συγκεκριμένα, το 57% των συμμετεχόντων κατάφερε να απαντήσει ότι η δοθείσα τυπική απόδειξη ήταν ορθή, ποσοστό που μειώθηκε στη συνέχεια στο 42% όταν η απόδειξη ήταν προφορική. Η έρευνα των Healy και Hoyles (2000) ασχολήθηκε με τις αντιλήψεις των μαθητών γύρω από την απόδειξη στην άλγεβρα σε δείγμα 2500 μαθητών 15-16 ετών με μαθηματικές ικανότητες. Τα αποτελέσματα τους ήρθαν σε συμφωνία με την δυσκολία των μαθητών στην απόδειξη. Οι μαθητές εξέφρασαν δύο αντιλήψεις για τα αποδεικτικά επιχειρήματα: (α) τα επιχειρήματα που λάμβαναν βαθμολογία με άριστα και (β) τα επιχειρήματα που τα αποδέχονταν οι ίδιοι ως ορθά. Η έρευνα της Dvora (2012), μελετώντας 182 μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης στην γεωμετρία, έδειξε ότι πολλές από τις αποδείξεις τους ήταν λανθασμένες και το 88% των λαθών εμπεριείχαν μη τεκμηριωμένες υποθέσεις. Έτσι, κατέληξε στο συμπέρασμα ότι τα περισσότερα λάθη των μαθητών δεν είναι από απροσεξία, αλλά φαίνεται να έχουν μια λογική βάση, που βασίζεται στις νοητικές διαδικασίες που δημιουργεί ο μαθητής.

Αντίστοιχα αποτελέσματα με αυτά των Δυτικών ερευνών, ανέδειξε και παλαιότερη έρευνα που πραγματοποίησε ο Davydov στη Σοβιετική Ένωση. Ο Davydov τοποθέτησε τους μαθητές σε 3 επίπεδα ανάλογα με τις επιδόσεις τους. Ήταν δύσκολο στους μαθητές του πρώτου επιπέδου να κατανοήσουν την ουσία μιας γεωμετρικής απόδειξης, η οποία κατά τον Davydov είναι μία απόδειξη για μία συγκεκριμένη γεωμετρική περίπτωση, ένα συγκεκριμένο σχήμα, γενικεύει και αποδεικνύει ότι όλες οι ανάλογες περιπτώσεις έχουν αποδειχθεί. Μια ασυνήθιστη αναπαράσταση ενός σχήματος δημιούργησε δυσκολίες στους μαθητές, οι οποίοι στη συνέχεια δεν μπορούσαν να αποδείξουν ένα γνωστό σε αυτούς θεώρημα (Davydov, 1990). Ο Davydov (1990) συνεχίζει αναφέροντας ότι οι μαθητές του δεύτερου επιπέδου προσέγγισαν τη γενίκευση μέσω της επίλυσης παραδειγμάτων κάνοντας χρήση εμπειρικών επαγωγικών συλλογισμών. Από την απλή στην πολύπλοκη απόδειξη περνούσαν από ενδιάμεσα στάδια, τα οποία αν αυτά δεν δομούνταν σταδιακά δημιουργούσαν παρανοήσεις και δυσκολίες κατά την αποδεικτική διαδικασία. Παρόλο που οι μαθητές του τρίτου επιπέδου κατάφεραν να διατυπώσουν με μεγαλύτερη ευκολία πλήρη και σωστή επιχειρηματολογία, γενικεύοντας σωστά και αποδεικνύοντας με τυπικό τρόπο τις επιμέρους προτάσεις, η απόδειξη δεν ήρθε ως μία άμεση και εύκολη διεργασία, αλλά εμπεριείχε προσεκτική ανάλυση από την μεριά τους των επιμέρους βημάτων και στρατηγικών επίλυσης προβλήματος.

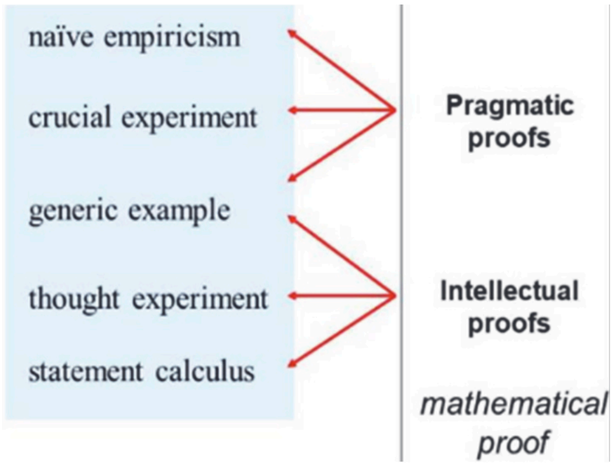
Η απόδειξη δεν είναι «προφανώς διαισθητική» με την έννοια ότι δεν είναι κοινά αποδεκτή από μέρους μας σαν κάτι φυσικό, αυτονόητο, σαν απλό δεδομένο γεγονός (Fischbein, 1982). Ο Fischbein συνεχίζει υποστηρίζοντας ότι η διδασκαλία της απόδειξης είναι επίσης δύσκολη και το κύριο μέλημα του διδάσκοντα πρέπει να είναι η μετατροπή των νοητικών διαδικασιών (επιχειρήματα, ιδέες, συμβολισμούς, κ.ά.) σε διαισθητικά αποτελεσματικά εργαλεία για την ανάδειξη της απόδειξης. Στο βιβλίο *Proof and Refutations* ο φιλόσοφος Imre Lakatos διατύπωσε την οπτική του περί των μαθηματικών δηλώσεων, βασιζόμενος στο παράδειγμα του Euler όταν ο δεύτερος υπέπεσε σε λάθη κατά την έρευνα του για την τοπολογική κατηγοριοποίηση των πολυέδρων (Lakatos, 1976). Ο Lakatos έδειξε ότι οι ορισμοί δεν είναι δεδομένοι a priori, αλλά συχνά πρέπει να αναδιαμορφωθούν υπό το πρίσμα μεταγενέστερων γνώσεων και ειδικότερα σε σφαλερές αποδείξεις. Ταυτόχρονα, ανέλυσε τη δραστηριότητα των μαθηματικών ως μια διαδικασία εικασίας ως δημόσιας έκφρασης της σκέψης και επακόλουθης εμπλοκής σε έναν κύκλο διάψευσης, αναδιατύπωσης και νέων αποδείξεων (Kynigos, 2015; Davis & Hersh, 2012), όπως φαίνεται στην Εικόνα

1. Μάλιστα στο Κυνηγός (2011) αναδεικνύεται ο ρόλος των μαθηματικών αποδείξεων στην κατασκευή θεωρίας, ως μια διαπροσωπική κατασκευή νοημάτων μέσα από συνεχή λάθη, αναθεωρήσεις και διατυπώσεις.



Εικόνα 1: Σχηματική αναπαράσταση της μεθόδου του Lakatos (Davis & Hersh, 2012, σ. 347)

Ο Balacheff (1988) συμφωνεί με αυτήν την οπτική του Lakatos. Κατηγοριοποιεί τις αποδείξεις και εισάγει τις *πραγματολογικές (pragmatic) αποδείξεις* που βασίζονται στην πράξη και *διανοητικές (intellectual) αποδείξεις* τις αποδείξεις που χρησιμοποιούν ρητές διατυπώσεις των ιδιοτήτων των αντικειμένων και των σχέσεων τους (Εικόνα 2). Συνεχίζει, αναφέροντας ότι η μετάβαση από τις πραγματιστικές αποδείξεις στις διανοητικές αποδείξεις απαιτεί μια γνωστική και γλωσσική βάση. Η αδιαφορία για την πολυπλοκότητα αυτού του περάσματος θα μπορούσε να είναι ένας από τους κύριους λόγους για την αποτυχία της διδασκαλίας της μαθηματικής απόδειξης. Ειδικότερα στη γεωμετρία, η διδασκαλία αυτή λαμβάνει χώρα σε ένα εννοιολογικό πεδίο το οποίο για τους μαθητές δεν έχει ακόμη συγκροτηθεί ως θεωρία. Έτσι, η διδασκαλία της απόδειξης συνδέεται με αυτό που θα μπορούσε να περιγραφεί ως μια *γνωστική ρήξη* (*cognitive break*) στη δραστηριότητα των μαθητών, που σχετίζεται με τη διδακτική ρήξη που αντιπροσωπεύει η νέα απαίτηση για μαθηματικές αποδείξεις.



Εικόνα 2: Κατηγορίες αποδείξεων κατά Balacheff (1988)

Από τα παραπάνω προκύπτει ένα διπλό κενό όταν εξετάζονται αποδείξεις στην τάξη: (1) το επιστημολογικό κενό μεταξύ του τι εμπειρικά πιστεύεται ότι είναι αληθές και τι είναι λογικά επαληθεύσιμο εντός ενός κατάλληλου θεωρητικού πλαισίου (Balacheff, 1988) και (2) ένα γνωστικό κενό μεταξύ μιας πρώτης φάσης επιχειρηματολογίας των μαθητών και την φάση απόδειξης. Η φάση επιχειρηματολογίας περιλαμβάνει τον πειραματισμό των μαθητών με καταστάσεις και την διατύπωση εικασιών, ενώ η φάση απόδειξης περιλαμβάνει την απόδειξη των εικασιών τους σε μια πιο τυπική γλώσσα. Σημαντικό αποτέλεσμα αυτών των κενών είναι ο παραγκωνισμός της διδασκαλίας αποδείξεων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ή η δημιουργία νέων, καινοτόμων τρόπων διδασκαλίας της απόδειξης για την ανάπτυξη των μαθηματικών επιχειρημάτων που αυτή στηρίζεται. Πολλαπλές έρευνες έχουν τονίσει την σημασία της ύπαρξης πειραματικής/εμπειρικής και λογικής/τυπικής φάσης ως μέρος της αποδεικτικής διαδικασίας (Balacheff, 1988; Hanna & de Villiers, 2012). Οι μαθητές υποστηρίζεται ότι είναι σημαντικό να βιώσουν τρεις φάσεις: (1) επεξήγησης, (2) εξερεύνησης και (3) αιτιολόγησης.

Το πανεπιστημιακό πλαίσιο μπορεί να αποτελέσει πρόκληση για τους πρωτοετείς φοιτητές, καθώς "οι λέξεις δεν βγάζουν πολύ νόημα" (Sfard, 2014) όσον αφορά το πλαίσιο των διαλέξεων, τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ μαθητών και καθηγητών, καθώς και τα ίδια τα μαθηματικά. Παράλληλα, όπως υποστηρίζει η Biza (2021), οι προηγούμενες εμπειρίες των πρωτοετών φοιτητών επηρεάζουν τη μετέπειτα ενασχόλησή τους με τα μαθηματικά. Για παράδειγμα, οι Thoma και Nardi (2018), μελετώντας τη μετάβαση από το σχολείο στο πανεπιστήμιο, ανέδειξαν μια σύγκρουση μεταξύ της άλγεβρας των μαθητών και του πανεπιστημιακού λόγου (discourse) για τη θεωρία συνόλων, καθώς οι φοιτητές ανακάλεσαν τη σχολική άλγεβρα σε μια εργασία θεωρίας συνόλων στο πανεπιστήμιο. Η μετάβαση στην τριτοβάθμια εκπαίδευση από την δευτεροβάθμια εκπαίδευση είναι μια αρκετά δύσκολη διαδικασία στα μαθηματικά μιας και υπάρχουν ισχυρά επιστημολογικά και γνωστικά κενά κατά την εμπλοκή με ανώτερες μαθηματικές δραστηριότητες (Tall, 1991, 1992, 2008). Οι δύο φάσεις (πειραματική/εμπειρική, λογική/τυπική) πολλές φορές παραγκωνίζονται ή αλλοιώνονται. Σε μακρο-επίπεδο, οι διαλέξεις έχουν χαρακτηριστεί ως *παραδοσιακές* (Petropoulou et al., 2020; Weber, 2004), *chalk & talk* (Artemeva & Fox, 2011; Viirman, 2015) ή *διαβιβαστικές* (Pritchard, 2010). Έχουν προκαθορισμένη δομή, που ακολουθεί το παράδειγμα Definition-Theorem-Proof (DTP) (Weber, 2004). Όταν παρουσιάζουν αποδείξεις, οι διδάσκοντες συχνά γράφουν στον μαυροπίνακα ενώ συζητούν και σχολιάζουν το μαθηματικό περιεχόμενο (Melhuish et al., 2022; Weber, 2004). Μερικές φορές, προσφέρουν ένα μετα-σχολιασμό και προβληματισμό σχετικά με το μαθηματικό περιεχόμενο μετά την παρουσίασή του (Artemeva & Fox, 2011; Melhuish et al., 2022). Η εμπλοκή των φοιτητών κατά την εμπειρική φάση είναι ελάχιστη ή δεν υφίσταται καθόλου. Ο Weber (2012) εντόπισε την πρόθεση των λεκτόρων να παράσχουν αποδείξεις κυρίως για λόγους επεξήγησης. Ωστόσο, οι διδάσκοντες είχαν περιορισμένες παιδαγωγικές προσεγγίσεις για τη διευκόλυνση των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων, την ανάγνωση και την κατανόηση της απόδειξης. Ο Weber (2001) αναφέρει ότι η αδυναμία κατασκευής απόδειξης που συμβαίνει κατά την τριτοβάθμια εκπαίδευση ενός φοιτητή στηρίζεται σε δύο επίπεδα: Οι φοιτητές (1) δεν έχουν ακριβή αντίληψη του τι συνιστά μαθηματική απόδειξη (Harel & Sowder, 1998) και (2) μπορεί να μην κατανοούν ένα θεώρημα ή μια έννοια και να την εφαρμόζουν λανθασμένα (Harel, 1998). Καταλήγει ότι η ανάπτυξη στρατηγικής σκέψης από τους φοιτητές είναι απαραίτητη για την καλύτερη κατανόηση και δημιουργία αποδείξεων.

Πολλοί προπτυχιακοί φοιτητές αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες κατά τη μελέτη του λογισμού, ιδίως όταν πρέπει να αντιμετωπίσουν πολυποσοτικές προτάσεις (Dubinsky & Yiparaki 2000; Selden & Selden 1995; Chellougui, 2003). Ένα ευρύ φάσμα δυσκολιών αφορά την περίπτωση δηλώσεων του τύπου “για όλα τα x, υπάρχει y, τέτοιο ώστε F(x, y)” όπου F είναι μια δυαδική σχέση, οι λεγόμενες δηλώσεις AE σύμφωνα με την ονοματολογία του Dubinsky. Οι Durand-Guerrier & Arsac (2005), έδειξαν ότι οι δυσκολίες των φοιτητών συνδέονται στενά με έναν συγκεκριμένο κανόνα συλλογισμού, ο οποίος καλείται *κανόνας εξάρτησης*, που συνδέεται με την επαναλαμβανόμενη χρήση μιας δήλωσης AE, ενώ παράλληλα ανέδειξαν την δυσκολία των φοιτητών να εντοπίσουν την αλληλοεξάρτηση των μεταβλητών των επιμέρους ποσοδεικτών (Durand-Guerrier, 2008).

Πολλές μελέτες απεικονίζουν τη σημασία της χρήσης λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας (DGEs) όχι μόνο για να πειστούν οι μαθητές για την αλήθεια ενός γεωμετρικού θεωρήματος αλλά και για να αντιληφθούν τη διαφορά μεταξύ των εικονικών και των εννοιολογικών πτυχών των γεωμετρικών αντικειμένων (Fischbein, 1987). Τα δυναμικά σχήματα, επιτρέπουν στους μαθητές να ασχοληθούν με όλα τα σχήματα που χαρακτηρίζονται από τις ίδιες ιδιότητες γεωμετρικής κατασκευής. Λόγω αυτής της ποικιλίας στο ίδιο γεωμετρικό αντικείμενο, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα να αντιληφθούν το αναλλοίωτο στη γεωμετρική κατασκευή, κάτι που αποτελεί κεντρικό κομμάτι στην κατανόηση της γεωμετρικής έννοιας (Κυνηγός 2011, Jones 2000). Η διερεύνηση, η εξερεύνηση, η γενίκευση, η επαλήθευση και η διάψευση των ιδιοτήτων αποτελούν βασικά στοιχεία της μελέτης και της διδασκαλίας της Ευκλείδειας γεωμετρίας (de Villiers, 2020). Τα DGEs είναι χρήσιμα εργαλεία για την υποστήριξη αυτών των λειτουργιών. Προηγούμενες έρευνες έχουν δείξει ότι τα DGEs είναι ιδιαίτερα κατάλληλα για την ενεργοποίηση μιας διερευνητικής προσέγγισης στη γεωμετρία (Κυνηγός 2011, Yerushalmy, Chazan & Gordon 1990, Arzarello et al. 2002, Olivero & Robutti 2007, Baccaglini & Mariotti 2010, Sinclair & Robutti 2013). Στην περίπτωση των DGEs, η Hollebrands (2007) διαπίστωσε ότι οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι λύτες κατά τη διάρκεια μιας δυναμικής εξερεύνησης συνδέονται στενά με αυτό που πολύ γενικά ονομάζεται *ικανότητα πρόβλεψης* (σελ. 184), το αποτέλεσμα μιας συγκεκριμένης ενέργειας στο δυναμικό αντικείμενο (artifact) και τη γεωμετρική ερμηνεία αυτού του αποτελέσματος. Κατά συνέπεια, η ανατροφοδότηση του DGE προτρέπει τους λύτες σε επόμενες ενέργειες και τους οδηγεί τελικά να *αλλάξουν τη στρατηγική τους* (σελ. 188). Παρά τη μακρά παράδοση της έρευνας στη γεωμετρική επιχειρηματολογία και το αυξανόμενο ενδιαφέρον για τις διαδικασίες και τα αποτελέσματα πρόβλεψης (Kasmer & Kim, 2012; Lim et al., 2010), υπάρχουν ακόμη πολύ λίγες έρευνες σχετικά με την αμοιβαία επιρροή της γεωμετρικής πρόβλεψης και των διερευνήσεων σε DGE. Δεδομένου ότι, σύμφωνα με την Laborde (2003), η αλληλεπίδραση με δυναμικά αντικείμενα σε ένα DGE μπορεί να προκαλέσει *πνευματική περιέργεια* που μπορεί να πυροδοτηθεί από μια ορισμένη “σύγκρουση μεταξύ αυτού που ο μαθητής πιστεύει ή προβλέπει και αυτού που πραγματικά συμβαίνει” (σελ. 27). Καταλήγουμε, λοιπόν, στο ότι η αμοιβαία επιρροή μεταξύ προβλέψεων και δυναμικών εξερευνήσεων μπορεί να προσφέρει στον λύτη μια νέα εικόνα για ένα δεδομένο γεωμετρικό πρόβλημα, κάτι που είναι και επαληθεύσιμο από μέρος έρευνας (Miragliotta, 2023; Miragliotta & Baccaglini-Frank, 2021).

Οι ανακαλύψεις των μαθητών αρχικά διατυπώνονται με τη μορφή εικασιών και αργότερα αξιολογούνται και ελέγχονται μαθηματικά. Όπως έγραψε ο J. Dewey (1938):

> [...] όλες οι λογικές μορφές προκύπτουν εντός ενός πλαισίου διερεύνησης και αφορούν τον έλεγχο της διερεύνησης (σελ. 3).

Η αναφορά του Dewey είναι σημαντική, γιατί αναδεικνύει ότι οι λειτουργίες της διερεύνησης ενεργοποιούν την κριτική σκέψη των μαθητών, δημιουργώντας γέφυρα μεταξύ εμπειρικής και θεωρητικής προσέγγισης της γεωμετρίας. Η οπτική του Dewey για την διερευνητική μάθηση θεωρεί τον μαθητή όχι απλά ως δέκτη πληροφορίας, αλλά ως ένα άτομο που διερευνά την πληροφορία και εξάγει συμπεράσματα, υποστηρίζοντας τα όπως ένας επιστήμονας (Κυνηγός 2011). Η έρευνα της διδακτικής των μαθηματικών έχει ασχοληθεί εκτενώς με την μαθηματική διερευνητική μάθηση και έχει επεκτείνει την θεωρία της από διάφορες οπτικές (Jaworski & Potari, 2021; Artigue et al., 2020; Artigue, & Blomhøj, 2013). Η έρευνα έχει αναδείξει ότι η ανάλυση των συλλογισμών σε περιπτώσεις διερεύνησης γίνεται κατά βάση με εξέταση της *απαγωγικής* (*abductive*) δομής τους (Meyer, 2023; Ernest 2023; de Freitas, 2022; Magnani, 2011; Baccaglini-Frank 2010a, 2021; Pedemonte & Reid, 2011; Antonini & Mariotti, 2010; Pedemonte, 2007; Arzarello et al., 2002; Cifarelli, 1999). Αντίστοιχα, αποτελέσματα έχει αναδείξει η έρευνα της διδακτικής των θετικών επιστημών (Adúriz-Bravo & Pinillos, 2023; Shook, 2021; Magnani, 2011).

Στο πλαίσιο των DGEs, διερευνώνται διαφορετικά είδη μαθηματικών αναπαραστάσεων κατά τη διάρκεια του διερευνητικού παίγνιου. Ο Duval (2006) υπογραμμίζει τον κεντρικό ρόλο των σημειωτικών αναπαραστάσεων (semiotic representations), οι οποίες αποτελούν "ουσιαστική προϋπόθεση για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης" (σελ. 107), καθώς επιτρέπουν "όχι μόνο τον σχεδιασμό μαθηματικών αντικειμένων ή την επικοινωνία μέσα στο περιβάλλον", αλλά και "την ενασχόληση των μαθητών με αυτά τα μαθηματικά αντικείμενα και να παράγουν άλλα" (σελ. 107). Ειδικότερα, ο Duval (2006) τονίζει τη διαλεκτική σχέση μεταξύ λεκτικής γλώσσας και οπτικοποίησης:

> Στη γεωμετρία είναι απαραίτητο να συνδυάζεται η χρήση τουλάχιστον δύο συστημάτων αναπαράστασης, το ένα αφορά τη λεκτική έκφραση των ιδιοτήτων ή

> αριθμητικών εκφράσεων μεγεθών και το άλλο για την οπτικοποίηση. Αυτό που αποκαλείται «γεωμετρικό σχήμα» συνδέει πάντοτε τόσο τις λεκτικές όσο και τις οπτικές αναπαραστάσεις [...] (σελ. 108)

Ο Duval (2006) επισημαίνει ακόμη ότι:

> Η ικανότητα αλλαγής από ένα σύστημα αναπαράστασης σε ένα άλλο είναι πολύ συχνά το κρίσιμο όριο για την πρόοδο στη μάθηση και την επίλυση προβλημάτων (σελ. 10).

Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιούμε την οπτική του Duval για την δημιουργία της παιγνιο-δραστηριότητας εντός του DGE συστήματος αναπαράστασης, καθώς και του συστήματος λεκτικών (γραπτών και προφορικών) εκφράσεων. Η εργασία των μαθητών σε ένα DGE θα μπορούσε να διευκολύνει το πέρασμα από την εικονική οπτικοποίηση στη μη εικονική οπτικοποίηση, όπως ορίζεται από τον Duval (1995). Αυτό σημαίνει να αντιληφθούν ότι ένα σχέδιο είναι αναπαράσταση ενός γεωμετρικού αντικειμένου (Mithalal & Balacheff, 2019), και για την περίπτωση του DGE, ότι οι δυναμικές εικόνες στην οθόνη της συσκευής είναι αναπαραστάσεις ενός θεωρητικού γεωμετρικού σχήματος (Sinclair & Yurita, 2008). Οι μαθητές που υιοθετούν μια εικονική απεικόνιση αναγνωρίζουν ένα αντικείμενο επειδή το σχήμα του είναι παρόμοιο με ένα ήδη γνωστό αντικείμενο και καθοδηγούνται από την αντιληπτική αναγνώριση των ομοιοτήτων και των διαφορών μεταξύ σχημάτων και πρωτοτυπικών εικόνων (Duval, 2017).

Η ανάπτυξη μιας πρότασης ή θεωρήματος δεν βασίζεται κατά μοναδικό τρόπο στον πειραματισμό και την παρατήρηση. Το αξιωματικό σύστημα που βασίζεται στην λογική και η δυνατότητα των μαθητών να χειρίζονται κατάλληλα τους κανόνες/νόμους της είναι απαραίτητο συστατικό για την κατασκευή της απόδειξης (Hanna, 1991). Η αξιολόγηση της αλήθειας και του ψεύδους ακόμη και πολύ απλών μαθηματικών δηλώσεων προϋποθέτει σύνθετη γνωστική δραστηριότητα. Ένα άτομο δεν χρειάζεται να έχει συνειδητή γνώση των λογικών αρχών που χρησιμοποιούνται στα επιχειρήματα, αλλά οι αρχές πρέπει να χρησιμοποιούνται για να είναι έγκυρος ο συλλογισμός. Η έρευνα έχει δείξει ότι οι μαθητές, πρέπει να γνωρίζουν πως να αποδείξουν την αλήθεια μιας πρότασης ή γενικά μιας δήλωσης με ένα επιχείρημα, δηλαδή, χρειάζεται να αναπτυχθεί διαίσθηση (intuition) που αφορά δύο επίπεδα: (1) τη δομή της απόδειξης μέσω εις άτοπο απαγωγής, (2) την ιδιότητα ότι μια υπό συνθήκη δήλωση και το αντιθετοαντίστροφο (contrapositive) της είναι λογικά ισοδύναμα (Epp, 2003). Η Epp αναφέρει χαρακτηριστικά ότι καθώς δίδασκε το μάθημα (διακριτά μαθηματικά), διαπίστωσε ότι οι δυσκολίες των μαθητών της ήταν πολύ πιο βαθιές από αυτό που είχε φανταστεί. Ήταν έκπληκτη από την κακή ποιότητα των προσπαθειών τους να αποτυπώσουν έμμεσες αποδείξεις. Συχνά οι προσπάθειές τους συγκεντρωνόντουσαν σε ελάχιστα περισσότερα από μερικούς ασύνδετους υπολογισμούς και ασαφώς ή λανθασμένα χρησιμοποιούμενες λέξεις και φράσεις που δεν προωθούσαν καν την ουσία των υποθέσεών τους. Κατέληξε ότι οι μαθητές της έμοιαζαν να ζουν σε έναν διαφορετικό λογικό και γλωσσικό κόσμο από αυτόν που κατείχε εκείνη, έναν κόσμο που τους δυσκόλευε πολύ να εμπλακούν στο είδος της αφηρημένης μαθηματικής σκέψης που προσπαθούσε να τους βοηθήσει να μάθουν. Παράλληλα, όμως, υπάρχει δυσκολία σε προσεγγίσεις που συνδέουν τις τρεις φάσεις που περιγράφτηκαν με την φάση επιχειρηματολογίας και την φάση της ανάπτυξης της απόδειξης. Η ευρύτερη αποδοχή ότι η τυπική απόδειξη δεν είναι διαισθητική δημιουργεί επιστημονικό και γνωσιακό κενό το οποίο πρέπει να ξεπεραστεί (Soldano & Arzarello, 2016).

Η παρούσα εργασία προσπαθεί να συμπληρώσει το παραπάνω κενό κατά την ανάπτυξη έμμεσων αποδείξεων, που δεν έχει μελετηθεί αρκετά στην διδακτική των μαθηματικών (Antonini & Mariotti, 2008) και ειδικότερα στην περίπτωση της *εις άτοπο απαγωγής*, μέσα από την ανάλυση μιας διδακτικής πρότασης που στηρίζεται στην οπτική της λογικής δομής της τυπικής μαθηματικής επιχειρηματολογίας με έναν διαφορετικό τρόπο: την *λογική διερεύνησης* που αναπτύχθηκε από τον λογικιστή Jaakko Hintikka.

Με βάση τα παραπάνω τα ερευνητικά ερωτήματα που διαμορφώνονται είναι:

1. Πώς ενεργοποιούν οι μαθητές τη λογική της διερεύνησης πειραματιζόμενοι με το παίγνιο;

2. Ποιος είναι ο ρόλος του παίγνιου στην ανάπτυξη των μαθηματικών ιδεών των μαθητών και πως συνδέεται με την απόδειξη που δίνουν;

2. Θεωρητικό πλαίσιο

2.1 Η λογική της διερεύνησης

Η *λογική διερεύνησης* (LI) αναπτύχθηκε από τον Φινλανδό ερευνητή της Λογικής Jaakko Hintikka, προκειμένου να ξεπεραστεί η στατική προσέγγιση της συλλογιστικής που αντιπροσώπευε η προηγούμενη μαθηματική λογική (π.χ. Ταρσκϊανή οπτική). Ο Hintikka την ανέπτυξε ως αποτέλεσμα μιας συνεχιζόμενης έρευνας από το 1976 και μετά. Η προσέγγιση αυτή τον οδήγησε να εξηγήσει την πολυπλοκότητα της LI μέσω της βασικής διάκρισης μεταξύ δύο τύπων *κανόνων*, οι οποίοι την διέπουν, των *ορισμένων κανόνων* και των *στρατηγικών κανόνων* (οι στρατηγικοί κανόνες δεν είναι πάντα αλγοριθμικά καθορισμένοι):

> […] οι *ορισμένοι* κανόνες του σκακιού σας λένε πώς μπορούν να μετακινηθούν οι σκακιστές στο ταμπλό, τι μετράει ως τσεκ και ματ, κ.λ.π. οι *στρατηγικοί* κανόνες του σκακιού σας λένε πώς να κάνετε τις κινήσεις, με την έννοια του να αναγνωρίζουμε ποια από τις πολλές κινήσεις που μπορούμε να πραγματοποιήσουμε είναι η καταλληλότερη να πραγματοποιηθεί. [...] (Hintikka 1999, σελ.2)

Μια δεύτερη πτυχή της LI είναι η σύνδεσή της με τη θεωρία των παιγνίων μέσω των στρατηγικών κανόνων. Υπό αυτή την σκοπιά, ο Hintikka μιλά επίσης για μια *παιγνιο-θεωρητική λογική* (ως άλλη πτυχή της LI).

> Αυτή η διάκριση [μεταξύ ορισμένων και στρατηγικών κανόνων] μπορεί προφανώς να γενικευτεί σε όλες τις δραστηριότητες, οι οποίες μπορούν να εννοηθούν ως παίγνια με την έννοια της μαθηματικής θεωρίας των παιγνίων. [...] Η κρίσιμη έννοια στη θεωρία παιγνίων είναι η έννοια της στρατηγικής, η οποία εκεί σημαίνει κάτι που στην καθομιλουμένη θα ονομαζόταν *πλήρης* στρατηγική. [...] Οι στρατηγικοί κανόνες επομένως αφορούν κατ' αρχήν την επιλογή τέτοιων πλήρη στρατηγικών. (p.3)

Ο Hintikka εξηγεί με αυτόν τον τρόπο τη σχέση μεταξύ της LI και της *παραγωγικής λογικής*[2]. Ο Hintikka αναφέρει (σελ. 3) ότι οι λεγόμενοι *κανόνες συμπερασμού* (π.χ. modus ponens, modus tollens) είναι ορισμένοι κανόνες, όχι στρατηγικοί. Σε κάθε στάδιο ενός επαγωγικού επιχειρήματος, υπάρχουν συνήθως αρκετές προτάσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως προϋποθέσεις έγκυρων παραγωγικών

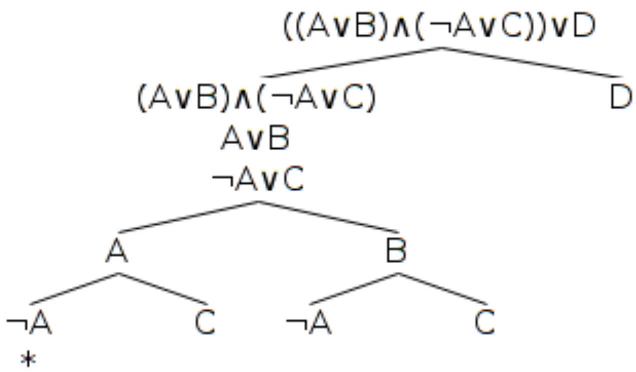
---

[1] Περιληπτικά, αναφέρουμε ότι η παραγωγική λογική (deductivism) λέει ότι μια μαθηματική πρόταση *s* θα πρέπει να εκλαμβάνεται ως έκφραση του ισχυρισμού ότι η *s* προκύπτει παραγωγικά από τα κατάλληλα αξιώματα. Για παράδειγμα, οι παραγωγιστές (deductivists) μπορούν να ερμηνεύσουν ότι η πρόταση *s*: *2+2=4* είναι αληθής με την παραγωγική χρήση των αξιωμάτων της αριθμητικής. Η παραγωγική λογική αποτυπώνει την αρκετά διαδεδομένη ιδέα ότι τα μαθηματικά έχουν να κάνουν με το «τι μπορεί να συναχθεί από τα αξιώματα» - αποφεύγει μια οντολογία αφηρημένων μαθηματικών αντικειμένων και υποστηρίζει ότι η πρόσβασή μας στις μαθηματικές αλήθειες δεν απαιτεί τίποτα παραπάνω πέρα από την ικανότητά μας να κάνουμε λογικά συμπεράσματα (Maddy, 2022).

συμπερασμάτων. Αυτοί οι κανόνες θα πουν ποιες από αυτές τις εναλλακτικές εφαρμογές των κανόνων συμπερασμού είναι αποδεκτές. Δεν λένε τίποτα σχετικά με το ποιες από αυτές τις εφαρμογές των κανόνων πρέπει να κάνει κανείς ή ποιες είναι καλύτερες από άλλες (Hintikka, 1998). Για το σκοπό αυτό χρειάζονται κανόνες ενός εντελώς διαφορετικού είδους, δηλαδή στρατηγικούς κανόνες. Η λογική της διερεύνησης και η παγνιο-θεωρητική λογική είναι οι δύο όψεις του ίδιου νομίσματος, δηλαδή του μοντέλου συλλογισμού που δίνει ο Hintikka.

Από τη μία πλευρά, η παιγνιο-θεωρητική λογική έχει νόημα σύμφωνα με μια προσέγγιση που βασίζεται στην καθαρή λογική. Στο βιβλίο του “The Principles of Mathematics revisited” ο Hintikka (1998), δείχνει πώς αυτή η προσέγγιση διευρύνει το πλαίσιο της καθαρής λογικής σε ένα ευρύτερο. Η παιγνιο-θεωρητική λογική συνίσταται στην επανεξέταση όλων των προτασιακών πτυχών της λογικής και έτσι ανατρέπει τη συνήθη προσέγγιση του ορισμού της αλήθειας που βασίζεται στον Tarski (Sher, 1999). Ο συνήθης ορισμός του Tarski (1983) ξεκινά από τη συνθήκη αλήθειας των απλούστερων προτάσεων και προχωρά αναδρομικά στις σύνθετες προτάσεις – ας πούμε με μια προσέγγιση από κάτω προς τα πάνω (Εικόνα 3). Αντίθετα, η προσέγγιση της θεωρίας παιγνίων ξεκινά από τις σύνθετες προτάσεις και προχωρεί μέσα σε αυτές, προς τις απλούστερες σε μια προσέγγιση από πάνω προς τα κάτω (Εικόνα 3). Ο Hintikka (1995) επαναλαμβάνει την ιδέα των γλωσσικών παιγνίων του Wittgenstein και ορισμένες πτυχές της Θεωρίας Παιγνίων, αναπτύσσοντας μια θεωρία όπου το κέντρο είναι μια πορεία προς τη διατύπωση μιας αλήθειας που, αντί να προχωρά αναδρομικά από τους ατομικούς προς τους σύνθετους τύπους, αντιστρέφει την προσέγγιση και προχωρά από τους πιο σύνθετους προς τα απλούστερα συστατικά τους. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε μια πρόταση: για όλα τα ε, υπάρχει ένα δ, τέτοιο ώστε... $(\forall\varepsilon\exists\delta)$. Ένα τυπικό παράδειγμα είναι αυτό της συνέχειας σε ένα σημείο x_0. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^2$ και ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής στο $x_o=1$. Για να το δείξει αυτό στους μαθητές ένας καθηγητής, μπορεί να φανταστεί δύο παίκτες, ο πρώτος, που ονομάζεται επαληθευτής (Ε), που ισχυρίζεται την πρόταση και ο αντίπαλος/παραποιητής (Π) που την αμφισβητεί. Ως εκ τούτου, ο καθηγητής δείχνει ότι είναι αδύνατον ο Π να έχει δίκιο: στην πραγματικότητα, ακόμη και αν ο Π επιλέξει ένα πολύ μικρό δ_o, ας πούμε δ_o=0,001, ο Ε μπορεί κατά συνέπεια να βρει ένα κατάλληλο ε, ας πούμε ε_o=0,0001, το οποίο ικανοποιεί τις απαιτούμενες ανισότητες. Το κρίσιμο βήμα σε αυτή τη δυναμική συλλογιστική συνίσταται στο να συλλάβουμε και να καταστήσουμε ρητή τη λειτουργική εξάρτηση του δ από το ε, δηλαδή ότι δ=$\delta(\varepsilon)$, ως αποτέλεσμα της συζήτησης μεταξύ Ε και Π. Αυτό ακριβώς είναι αυτό που ο Hintikka αποκαλεί παιγνιο-θεωρητικά semantics, δηλαδή την ερμηνεία των μαθηματικών καταστάσεων μέσω της λογικής της θεωρίας παιγνίων.

Στη παρούσα εργασία ενδιαφερόμαστε για την επαλήθευση μιας δήλωσης που εκφράζεται με τη προαναφερθείσα μορφή $\forall\varepsilon\exists\nu S(\varepsilon,\nu)$. Ο επαληθευτής (Ε) ελέγχει τη μεταβλητή $\nu \in \mathbb{N}$ και ο παραποιητής (Π) ελέγχει τη μεταβλητή $\varepsilon>0$. Ο Π ξεκινάει το παίγνιο επιλέγοντας μια τιμή $\varepsilon_o > 0$ για τη μεταβλητή ε και στη συνέχεια σειρά παίρνει ο Ε ο οποίος θα πρέπει να βρει μια τιμή $\nu_o \in \mathbb{N}$ για την ν τέτοια ώστε η πρόταση $S(\varepsilon,\nu)$ να είναι αληθής. Σύμφωνα με τον Hintikka, η ανακάλυψη του ν_o από τον Ε είναι ένας αξιόπιστος έλεγχος αλήθειας εάν η επιλογή του ε_o από τον Π γίνεται με σκοπό τη δημιουργία μιας κατάστασης *χειρότερου σεναρίου* για τον Ε.



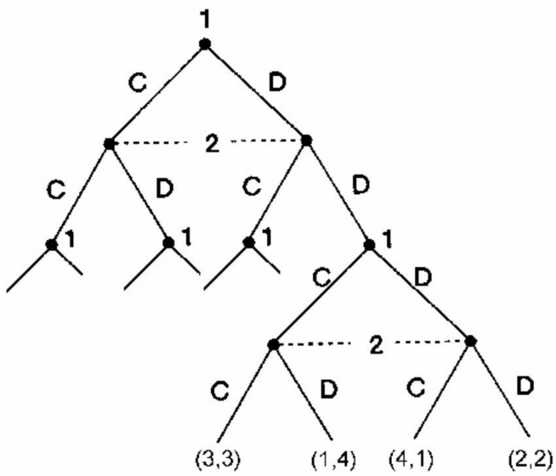
Εικόνα 3: Παράδειγμα δέντρου με βάση τον τύπο της προτασιακής λογικής, ((A∨B)∧(¬A∨C))∨D. Η αλήθεια κατά Tarski ξεκινά από την εγκυρότητα των προτάσεων από κάτω προς τα πάνω.

Από την άλλη πλευρά, το μοντέλο του, θα το αναφέρουμε ως ερωτοαπαντητικό[3], όταν ερμηνεύεται κατά μήκος του σκέλους της LI, αποτυπώνει τη δυναμική μιας θεωρίας με βάση την ανακάλυψη, η οποία είναι εξαιρετικά σημαντική στη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών, καθώς και στην έρευνα (Arzarello & Soldano, 2019). Το μοντέλο βασίζεται στην ακολουθία ερωτήσεων – απαντήσεων μεταξύ των δύο παικτών, του επαληθευτή (Ε) και του παραποιητή (Π). Έτσι περιλαμβάνεται εντός του μοντέλου η έννοια της διερεύνησης (Κυνηγός 2011; Artigue & Blomhøj, 2013).

[3] Προτιμήθηκε η λέξη «ερωτοαπαντητικό» από την λέξη «ανακριτικό» για την μετάφραση της αγγλικής λέξης interrogative, λόγω του δικαστικού – αστυνομικού χαρακτήρα της δεύτερης.

Μάλιστα, αυτή η *λογική της διερεύνησης* βασίζεται θεμελιωδώς στο σύνολο των απαντήσεων που αυτός που δέχεται την ερώτηση μπορεί να απαντήσει. Με αυτόν τον τρόπο, η παραγωγική λογική κρίνεται ανεπαρκής. Η μεγάλη αξία του μοντέλου αυτού στην επιχειρηματολογία αναδεικνύεται σαφέστερα από τον Hintikka (1991) στο απόσπασμα της ιστορίας *Silver Blaze* του διάσημου ντεντέκτιβ Sherlock Holmes. Στην ιστορία αυτή το διάσημο άλογο Silver Blaze απαγάγεται από τον στάβλο στην μέση της νύχτας και το επόμενο πρωί ο προπονητής του βρίσκεται νεκρός με βίαιο θάνατο. Αναδεικνύονται πολλοί ύποπτοι, όμως κανείς δεν ξέρει τι ακριβώς έγινε και ποιος είναι ο δολοφόνος, κάτι που ο διάσημος ντεντέκτιβ καλείται να βρει. Ακολουθεί ο διάλογος μεταξύ του επιθεωρητή Gregory και του Sherlock Holmes:

Επ. Gregory:	Υπάρχει κάποιο άλλο σημείο στο οποίο θα θέλατε να επιστήσετε την προσοχή μου;
Sh. Holmes:	Στο περίεργο περιστατικό με τον σκύλο κατά την διάρκεια της νύχτας.
Επ. Gregory:	Το σκυλί δεν έκανε τίποτα κατά την διάρκεια της νύχτας.
Sh. Holmes:	Αυτό ήταν το αξιοπερίεργο επεισόδιο.



Εικόνα 4: Παράδειγμα δέντρου απόφασης (decision tree) για ένα παίγνιο.

Ο Hintikka θεώρησε πως οι λογικές παραγωγές του Sherlock Holmes μπορούν να ξαναγραφτούν μέσα από το ερωτοαπαντητικό μοντέλο. Έτσι, ο Hintikka αναδιατύπωσε τον παραπάνω διάλογο χρησιμοποιώντας την διαδικασία της *διερεύνησης* μέσα από την κατασκευή τριών ερωτήσεων με τις αντίστοιχες απαντήσεις τους.

Ερώτηση 1: Υπήρχε φύλακας στους στάβλους όταν το άλογο το απήγαγαν;
Απάντηση: Ναι, μας είπαν ότι υπήρχε το σκυλί.

Ερώτηση 2: Γάβγισε το σκυλί κατά την διάρκεια της κλοπής του αλόγου;
Απάντηση: Όχι, κανένας δεν ξύπνησε, ούτε καν τα παιδιά του στάβλου που μένουν στην σοφίτα.

Ερώτηση 3: Ποιος ήταν και ένα εκπαιδευμένο σκυλί δεν γάβγισε στην μέση της νύχτας;
Απάντηση: Ο ιδιοκτήτης του, ο σταβλάρχης προφανώς. Έτσι, το άλογο το απήγαγε ο σταβλάρχης.

Η LI μπορεί να εντοπίσει τις διαδοχικές παραγωγές συμπερασμάτων που προκύπτουν μέσα από ένα φάσμα ερωτήσεων και απαντήσεων (φάση διερεύνησης). Έτσι, η LI είναι μια επιστημική λογική, που μπορεί να επεξεργαστεί δύο ταυτόχρονες διαδικασίες: την *διερευνητική* και την *παραγωγική*. Η LI μας επιτρέπει να χειριζόμαστε ακριβέστερα την επιστημική σχέση μεταξύ των επιχειρηματολογιών και των κλασικών λογικών παραγωγών και μέσα από αυτή μπορούμε να ορίσουμε ένα συνεκτικό και συνεπή πρόγραμμα για την διδακτική και την εκμάθηση της απόδειξης στην τάξη (Arzarello & Soldano, 2019).

2.2 Έμμεση απόδειξη

Στην παρούσα εργασία, εστιάζουμε στη σχέση μεταξύ των διαδικασιών επιχειρηματολογίας και απόδειξης στη συγκεκριμένη περίπτωση της απόδειξης μέσω αντίφασης (εις άτοπο απαγωγή) που περιλαμβάνει DGEs. Η βιβλιογραφία χρησιμοποιεί διαφορετική ορολογία για τον χαρακτηρισμό της έμμεσης απόδειξης, όπως: “απόδειξη μέσω αντιθετοαντίστροφου”, “απόδειξη μέσω αντίφασης”, “απόδειξη reductio ad absurdum”, κ.λ.π. Δεδομένης μιας δήλωσης S, μια *απόδειξη μέσω αντίφασης* είναι μια άμεση απόδειξη της δήλωσης $\neg S \Rightarrow r \wedge \neg r$, όπου r είναι ένα προηγουμένως αποδεδειγμένο θεώρημα, ένα αξίωμα ή μια πρόταση. Αν η πρόταση S μπορεί να εκφραστεί ως $p \Rightarrow q$, αφού το $p \Rightarrow q$ είναι λογικά ισοδύναμο με το $\neg p \vee q$

(αποτελούν ταυτολογία), τότε η άρνηση του $p \Longrightarrow q$ μπορεί να αντικατασταθεί από το $\neg(\neg p \vee q)$ που είναι ισοδύναμο με το $p \wedge \neg q$ (αποτελούν ταυτολογία): τότε η άρνηση της S είναι η $p \wedge \neg q$. Σε αυτή την περίπτωση, μια απόδειξη μέσω αντίφασης του S είναι μια άμεση απόδειξη του $p \wedge \neg q \Rightarrow r \wedge \neg r$. Μια *απόδειξη μέσω αντιθετοαντίστροφου* του S είναι μια άμεση απόδειξη του $\neg q \Rightarrow \neg p$. Αναφερόμαστε στην *έμμεση απόδειξη* ως την απόδειξη μιας πρότασης της οποίας η υπόθεση περιέχει την άρνηση του συμπεράσματος. Έτσι, τόσο οι αποδείξεις μέσω αντίφασης όσο και οι αποδείξεις μέσω αντιθετοαντιστρόφου είναι έμμεσες αποδείξεις. Η υπάρχουσα βιβλιογραφία χρησιμεύει, για να εξηγήσει πώς ορισμένες διαδικασίες επιχειρηματολογίας ενδεχομένως συμβάλλουν στην παραγωγή αποδείξεων μέσω αντιφάσεων από τους μαθητές (π.χ. Leung and Lopez-Real 2002, Baccaglini-Frank et al. 2013). Η έρευνα έχει αναδείξει ότι η απόδειξη μέσω αντίφασης είναι μια πολύ περίπλοκη δραστηριότητα για τους μαθητές (Leron 1985; Wu Yu et al. 2003; Antonini & Mariotti 2008; Mariotti & Antonini 2009). Οι δυσκολίες αυτές αφορούν κυρίως τη διατύπωση και την ερμηνεία μιας άρνησης, τη διαχείριση μη-κατασκευάσιμων μαθηματικών αντικειμένων και την αποδοχή της εγκυρότητας – αλήθειας μιας δήλωσης όταν έχει επιτευχθεί αντίφαση μέσω της άρνησης της. Η έρευνα του Brown (2018) ανέδειξε μια άλλη δυσκολία των μαθητών με τις έμμεσες αποδείξεις: η έμμεση απόδειξη δεν έπειθε τους μαθητές για την εγκυρότητα της, καθώς και την δομή της. Ταυτόχρονα, μελέτες έχουν επίσης δείξει ότι οι μαθητές παράγουν αυθόρμητα επιχειρήματα που μοιάζουν πολύ με τις αποδείξεις μέσω αντίφασης:

> Η έμμεση απόδειξη είναι μια πολύ συνηθισμένη δραστηριότητα: “Ο Πέτρος δεν είναι στο σπίτι του, αφού διαφορετικά η πόρτα δεν θα ήταν κλειδωμένη”. Ένα παιδί που αφήνεται μόνο του με ένα πρόβλημα αρχίζει να επιχειρηματολογεί αυθόρμητα “... αν δεν ήταν έτσι, θα συνέβαινε ότι ...”. (Freudenthal 1973, σελ. 629)

Σε συμφωνία τόσο με τον Freudenthal όσο και με τον ορισμό της έμμεσης απόδειξης που δόθηκε παραπάνω, ορίζουμε την έμμεση επιχειρηματολογία ως την ανάπτυξη ενός επιχειρήματος, που απορρέει από υποθέσεις που περιέχουν την άρνηση της δήλωσης που πρόκειται να επιχειρηματολογήσουμε ή την άρνηση μέρους αυτής της δήλωσης: δηλαδή ένα επιχείρημα με δομή ως εξής: “... αν δεν ήταν έτσι, θα συνέβαινε ότι ...”.

Στην παρούσα εργασία επικεντρωνόμαστε όχι μόνο στην λογική δομή δηλώσεων που αφορούν τον προτασιακό λογισμό, όπως προαναφέρθηκε, αλλά στην λογική δομή και εγκυρότητα δηλώσεων που εμπεριέχουν κατηγορήματα και αφορούν την κατηγορηματική λογική. Έτσι, προσπαθούμε να μελετήσουμε δηλώσεις της μορφής $\forall\varepsilon\exists\nu S(\varepsilon,\nu)$.

Βασιζόμενοι στις ερευνητικές και διδακτικές τους εμπειρίες, οι Durand–Gurerrier, Arsac (2005, 2009) και Epp (2009) υποστηρίζουν τον ισχυρισμό ότι η διδασκαλία των βασικών κανόνων της κατηγορηματικής λογικής παρέχει στους μαθητές το κατάλληλο εργαλείο για επιτυχή μαθηματική δραστηριότητα. Η γνώση αυτών των κανόνων καθιστά δυνατό για τους μαθητές να απαντήσουν στις ερωτήσεις: "Τι θα σήμαινε αν αυτό είναι αληθές; Τι θα έπρεπε να κάνω για να αποδείξω ότι είναι αληθές; Τι θα έπρεπε να κάνω για να δείξω ότι είναι ψευδές;" Οι απαντήσεις σε αυτά τα ερωτήματα εξαρτώνται εξ ολοκλήρου από τους κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων της κατηγορηματικής λογικής και τη συντακτική δομή των σχετικών ορισμών. Η γνώση του τρόπου απάντησής τους δίνει στους μαθητές ένα μέσο για να επικεντρωθούν στο εν λόγω μαθηματικό αντικείμενο. Έτσι, η συμπερίληψη της διδασκαλίας των λογικών κανόνων ως ένα μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης παρέχει μια ισορροπία μεταξύ δύο ακραίων θέσεων: ότι ο έλεγχος της εγκυρότητας μιας απόδειξης απαιτεί την πλήρη τυποποίησή της, και ότι η επιτυχία στην απόδειξη δεν απαιτεί ρητή γνώση των λογικών κανόνων (Durand–Guerrier et al., 2012).

Στην παρούσα εργασία, προσπαθούμε να γεφυρώσουμε το γνωσιολογικό κενό όχι μόνο της δημιουργίας απόδειξης μέσω αντίφασης, αλλά και της έκφρασης της άρνησης μιας έκφρασης στην κατηγορηματική λογική, μέσω της λογικής της διερεύνησης, από τους μαθητές. Ειδικότερα, υποστηρίζουμε ότι οι δραστηριότητες – παίγνια εντός της LI μπορούν να γεφυρώσουν το επιστημολογικό άλμα από την έκφραση μιας πρότασης στη μορφή $\forall\varepsilon\exists\nu S(\varepsilon,\nu)$ στην άρνηση της $\exists\varepsilon\forall\nu S^{*}(\varepsilon,\nu)$. Το κενό αυτό υποστηρίζεται από μέρος της έρευνας (Inglis & Simpson, 2008). Η δράση[4] της άρνησης είναι πολύ σημαντική στην κατασκευή αποδείξεων μέσω αντίφασης ή στην αναζήτηση αντιπαραδειγμάτων. Σε εννοιολογικό επίπεδο, όταν χρησιμοποιούνται σύνθετες λογικές δηλώσεις για τον ορισμό μιας έννοιας, μπορεί να ειπωθεί ότι για να κατανοήσουμε τι *είναι* κάτι, είναι απαραίτητο να κατανοήσουμε τι *δεν είναι*. Αναδεικνύεται, λοιπόν, μια μέθοδος άρνησης κατά την οποία ο μαθητής έχει μια νοητική αναπαράσταση ενός συνόλου καταστάσεων που αντιστοιχούν στο ότι η δήλωση είναι αληθής και μπορεί στη συνέχεια, να θεωρήσει το συμπληρωματικό

[4] Αναφερόμαστε με τον όρο *δράση* που προέρχεται από την κονστρουκτιβιστική θεωρία δράσης του Jean Piaget.

σύνολο καταστάσεων που αντιστοιχεί στο ψεύδος της. Αυτή η άρνηση εκφράζεται στη συνέχεια και τυπικά, αν είναι επιθυμητό. Για παράδειγμα, αν μια δήλωση εξαρτάται από μια μεταβλητή, τότε η άρνησή της είναι μια δήλωση που εξαρτάται από την ίδια μεταβλητή και έχει την ιδιότητα ότι για κάθε τιμή της μεταβλητής, η τιμή αλήθειας της άρνησης είναι η αντίθετη της τιμής αλήθειας της αρχικής δήλωσης (Dubinsky, Elterman & Gong, 1988).

2.3 Απαγωγή

Η απαγωγή αναπτύχθηκε ως το τρίτο θεμελιώδες είδος συμπερασμού από τον Αμερικανό φιλόσοφο Charles Sanders Peirce. Κατά τη διάρκεια της φιλοσοφικής του σκέψης, ο Peirce προσέφερε αρκετές διαφορετικές μορφές και περιγραφές της απαγωγής και της επαγωγής (Meyer, 2023). Ο Peirce ήθελε να προσφέρει ένα γενικό σχήμα για την κατηγοριοποίηση της λογικής. Στην προσπάθειά του για πληρότητα, ο Peirce διέκρινε τρεις μορφές λογικού συλλογισμού: την παραγωγή, την επαγωγή και την απαγωγή. Μια σύντομη σκιαγράφηση των πρώτων δύο σύμφωνα με τον Ernest (2023), όπως αφορούν τα μαθηματικά, έχει ως εξής:

— Η *παραγωγή* είναι καλά κατανοητή και αφορά τους κανόνες για την εξαγωγή των αναγκαίων συμπερασμάτων από τις προϋποθέσεις. Υπάρχουν πολλά συστήματα παραγωγικής λογικής, από τις μορφές συλλογισμού του Αριστοτέλη μέχρι τα σύγχρονα συστήματα μαθηματικής λογικής, συμπεριλαμβανομένης της φυσικής παραγωγής.

— Η *επαγωγή* έχει δύο έννοιες. Η μαθηματική επαγωγή είναι μια μορφή επαγωγικής συλλογιστικής που περιορίζεται στην εφαρμογή της στα μαθηματικά. Η μαθηματική επαγωγή έχει την ακόλουθη μορφή. Έστω P για οποιαδήποτε ιδιότητα των φυσικών αριθμών. Αν μπορεί να αποδειχθεί ότι, από την υπόθεση ότι η P(n) ισχύει για όλες τις τιμές του n μέχρι k και ταυτόχρονα ισχύει η P(k + 1), τότε για όλους τους φυσικούς αριθμούς n, η P(n) είναι αληθής[5]. Αντίθετα, στην άλλη της σημασία, η *επαγωγή* είναι ένα σχήμα για την εξαγωγή μιας υπόθεσης ή ενός υποτιθέμενου γενικού κανόνα από την παρατήρηση ενός πεπερασμένου αριθμού περιπτώσεων. Για παράδειγμα,

[5] Διατυπωμένη κατ' αυτόν τον τρόπο, η αρχή της μαθηματικής επαγωγής δεν απαιτεί την προϋπόθεση P(0), όπως συμβαίνει σε ορισμένες εκδοχές, επειδή περιλαμβάνεται στην προϋπόθεση που αναφέρθηκε παραπάνω.

παρατηρώντας ότι 1 + 3 = 4, 1 + 3 + 5 = 9 και 1 + 3 + 5 + 7 = 16, η διαδικασία της εικασίας της υπόθεσης ότι $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n + 1 = (n + 1)^2$ είναι μια περίπτωση επαγωγής. Το γεγονός ότι αυτός ο γενικός τύπος περιγράφει σωστά το μοτίβο ενός πεπερασμένου αριθμού περιπτώσεων σε μια γενίκευση δεν αποτελεί εγγύηση ότι ισχύει για όλες τις περαιτέρω περιπτώσεις. Στην πραγματικότητα, στα μαθηματικά, αν έχουμε μια πεπερασμένη ακολουθία αριθμών, όπως σε αυτό το παράδειγμα, τότε αυτή μπορεί να συνεχιστεί με άπειρο αριθμό διαφορετικών τρόπων. Ωστόσο, η επαγόμενη γενίκευση σε αυτή την περίπτωση είναι ίσως ο απλούστερος και πιο κομψός τρόπος γενίκευσης της αρχικής ακολουθίας. Αυτή η διαδικασία, η επαγωγή μιας γενικότητας από μια ακολουθία παραδειγμάτων, είναι μια στρατηγική ή ευρετική, ένα μοτίβο συλλογιστικής (Ernest, 2023). Ως εκ τούτου, δεν υπάρχει καμία εγγύηση ότι ο επαγόμενος τύπος θα είναι σωστός. Φυσικά, το σχήμα της επαγωγής χρησιμοποιείται επίσης ευρέως στην επιστήμη, και άτυπα στην κατάκτηση της γλώσσας και στο σχηματισμό εννοιών, αλλά πάντα ως υποθετική τεχνική και όχι ως μέσο παραγωγής επικυρωμένης γνώσης. Παρά τις προσπάθειες που έχουν γίνει για να τυποποιηθεί η επαγωγή ως λογικό αξίωμα (Lakatos, 1968), είναι ευρέως αποδεκτό ότι η επαγωγή δεν αποτελεί αξιόπιστο θεμέλιο για την επιστήμη (Popper, 1959). Ένα συνηθισμένο παράδειγμα που αναφέρεται στη φιλοσοφία της επιστήμης αφορά τους μαύρους κύκνους. Η παρατήρηση οποιουδήποτε αριθμού ενδημικών κύκνων στο Ηνωμένο Βασίλειο μπορεί να υποδηλώνει την επαγωγική γενίκευση ότι όλοι οι κύκνοι είναι λευκοί. Ωστόσο, οι μαύροι κύκνοι βρίσκονται στην Αυστραλία και έχουν πλέον εισαχθεί και στο Ηνωμένο Βασίλειο. Έτσι, η γενίκευση «Όλοι οι κύκνοι είναι λευκοί», που προκύπτει επαγωγικά με βάση έναν πεπερασμένο αριθμό παρατηρήσεων στο Ηνωμένο Βασίλειο, είναι λανθασμένη.

Η τρίτη μορφή συλλογισμού του Peirce είναι η *απαγωγή*. Όπως και η επαγωγή, πρόκειται για μια μορφή εύλογης συλλογιστικής, η οποία δεν εγγυάται την ορθότητα των αποτελεσμάτων. Ο Peirce θεωρούσε την απαγωγή ως τη μόνη λογική πράξη που εισάγει οποιαδήποτε νέα ιδέα στη συλλογιστική. Έτσι, προφανώς, δεν θεωρούσε την απαγωγή ως μια λογική πράξη ισότιμη με την παραγωγή και την επαγωγή, διότι εμπεριέχει ένα *μυστηριώδες άλμα*, που καταλήγει σε κάτι που δεν έχει έρθει από a priori γνώση ή έστω προβλεφθεί. Ο Peirce έδωσε διαφορετικές περιγραφές της απαγωγής σε διαφορετικές χρονικές στιγμές της μακράς σταδιοδρομίας του. Οι περισσότεροι συγγραφείς σχετικά με τη θεωρία του Peirce για την απαγωγή χωρίζουν τη σκέψη του Peirce περίπου σε δύο περιόδους. Αυτές αποτελούνται από το πρώιμο και μεσαίο έργο του έναντι του μεταγενέστερου έργου του, από το 1900 περίπου και μετά. Η προγενέστερη περίοδος προσεγγίζει την απαγωγή από θεωρητική οπτική που βασίζεται στη λογική μορφή του συλλογισμού, και δίνεται έμφαση στην απαγωγή ως πιθανολογική μορφή συλλογισμού. Εκείνη την εποχή, αναφερόταν στην απαγωγή ως *υπόθεση* και τη χαρακτήριζε με αυτόν τον ακόλουθο συλλογισμό (Peirce, 1867, σ. 285):

Υπόθεση

Οποιοδήποτε *M* είναι, για παράδειγμα, *P′ P″ P‴*,…

S είναι *P′ P″ P‴*,…

∴ Το *S* είναι πιθανότατα το *M*.

Εδώ το *S* είναι το υποκείμενο, μια συγκεκριμένη περίπτωση που μας ενδιαφέρει, και τα *P′, P″ P‴* είναι ένας αριθμός χαρακτηριστικών του *S*. Η λέξη «*πιθανώς*» στο συμπέρασμα υποδηλώνει ένα βασικό χαρακτηριστικό της απαγωγής. Το επιχείρημα δίνει στο συμπέρασμα αληθοφάνεια, αλλά όχι βεβαιότητα. (Reid, 2018, σελ. 2). Σε αυτό το παράδειγμα, αν το *M* χαρακτηρίζεται πλήρως από έναν πεπερασμένο κατάλογο ιδιοτήτων, *P′ P″ P‴*,…, και το *S* ικανοποιεί επίσης αυτόν τον κατάλογο, τότε μπορεί κανείς να συμπεράνει έγκυρα ότι το *S* είναι το *M* (Ernest, 2023). Αυτή η προηγούμενη εκδοχή της απαγωγής δημοσιεύθηκε όταν η συλλογιστική του Αριστοτέλη ήταν ακόμη η κυρίαρχη μορφή αναγνωρισμένης λογικής σκέψης.

Το προηγούμενο έργο του Peirce σχετικά με την απαγωγή βασιζόταν σε μεγάλο βαθμό στην Αριστοτελική λογική, την οποία απέρριψε. Το κύριο ενδιαφέρον της έννοιας της απαγωγής για τα μαθηματικά, εκτός από το ιστορικό, είναι ο επιδιωκόμενος ρόλος της ως λογική της ανακάλυψης και όχι ως μορφή λογικού συλλογισμού. Στο Peirce (1903, σελ. 188-189), προσέφερε την ακόλουθη μορφή για την απαγωγή:

Το ενδιαφέρον γεγονός Β, παρατηρείται,

Αλλά αν το Α ήταν αληθές, το Β θα ήταν αυτονόητο,

Επομένως, υπάρχει λόγος να υποπτευθούμε ότι το Α είναι αληθές.

Ο Magnani (2004) περιγράφει την απαγωγή γενικά ως εξής:

"Η διαδικασία εξαγωγής συμπερασμάτων για ορισμένα γεγονότα ή/και νόμους και υποθέσεις που καθιστούν εύλογες κάποιες προτάσεις, που εξηγούν ή ανακαλύπτουν κάποιο (ενδεχομένως νέο) φαινόμενο ή παρατήρηση, είναι η διαδικασία συλλογισμού κατά την οποία σχηματίζονται και αξιολογούνται επεξηγηματικές υποθέσεις." (σελ. 879)

Έτσι, η απαγωγή είναι ένα μοτίβο εύλογου συλλογισμού, μια στρατηγική, αν όχι για τη δημιουργία, τότε για την επιλογή πιθανών υποθέσεων για την εξήγηση ενός γεγονότος. Στα μαθηματικά αυτό θα μπορούσε να είναι ένα κοινό μοτίβο σε μια ακολουθία παραδειγμάτων ή μια σχέση μεταξύ εννοιών (Ernest, 2023). Στον πίνακα που ακολουθεί (Πίνακας 1) παρουσιάζεται ένα παράδειγμα συλλογισμού διατυπωμένο με τις τρεις μορφές συλλογισμού, που αναλύθηκαν.

Deduction	Induction	Abduction
Rule: All the beans from this bag are white. *Case:* These beans are from this bag. *therefore* *Result:* These beans are white.	*Case:* These beans are from this bag. *Result:* These beans are white. *therefore* *Rule:* All the beans from this bag are white.	*Rule:* All the beans from this bag are white. *Result:* These beans are white. *therefore* *Case:* These beans are from this bag.

Πίνακας 1: Χαρακτηρισμός των συλλογισμών της απαγωγικής συμπερασματολογίας, σε αντιδιαστολή με την παραγωγή και την επαγωγή.

Ο Hintikka (2007, σ. 38), χαρακτηρίζει διεξοδικά την Πεϊρσιανή έννοια της απαγωγής, με βάση τις ακόλουθες τέσσερις θέσεις.

1. Συμπερασματική θέση: Η απαγωγή είναι ή περιλαμβάνει συμπερασματική διαδικασία ή διαδικασίες.
2. Θέση σκοπού: Ο σκοπός της «επιστημονικής» απαγωγής είναι τόσο η δημιουργία νέων υποθέσεων όσο και η επιλογή υποθέσεων για περαιτέρω εξέταση. Ως εκ τούτου, ένας κεντρικός σκοπός μιας τέτοιας απαγωγής είναι «να κατασκευάσει μια πορεία δράσης».
3. Θέση κατανόησης: Η επιστημονική απαγωγή περιλαμβάνει όλες τις πράξεις με τις οποίες δημιουργούνται θεωρίες.

4. Θέση αυτονομίας: Η απαγωγή είναι, ή ενσωματώνει, συλλογισμό που διαφέρει και δεν μπορεί να αναχθεί είτε στην παραγωγή είτε στην επαγωγή.

Κοντά στις παραπάνω θέσεις τοποθετήθηκαν για τον επεξηγηματικό συλλογισμό και οι Hempel και Oppenheim (1948) αρκετά προγενέστερα του Hintikka. Κατά τους ίδιους και βασιζόμενοι στην θεωρία του Popper, η αναζήτηση της επεξήγησης "επεξηγήσεις – γιατί", ανήκουν στην επιχειρηματολογία του *γιατί ένα παρατηρούμενο φαινόμενο προκύπτει* σε αντίθεση με την παραγωγική επιχειρηματολογία, όπου κάποιος πρέπει να αιτιολογήσει *γιατί κάποιος να πιστέψει ότι το φαινόμενο προκύπτει.* Η επεξηγηματικότατα βασίζεται σε τέσσερις προϋποθέσεις (Hempel & Oppenheim, 1948, σ. 137):

Π1: Αυτά «που πρέπει να εξηγηθούν» (explanandum) θα πρέπει να μπορούν να προκύψουν λογικά από αυτά «που περιέχουν την επεξήγηση» (explanans).

Π2: Τα explanans πρέπει να περιέχουν τουλάχιστον ένα γενικό κανόνα.

Π3: Τα explanans πρέπει να μπορούν να επαληθευτούν εμπειρικά.

Π4: Οι προτάσεις που ανήκουν στα explanans πρέπει να είναι αληθείς.

Οι Π1 και Π2 είναι σημαντικές στην μαθηματική εκπαίδευση (Meyer, 2023). O Peirce αναφέρει σε προηγούμενα γραπτά του (CP 2.623, 1878) ότι η ύπαρξη ενός τέτοιου γενικού κανόνα στη Π2 εμπλέκεται με την απαγωγή. Παράλληλα, ξεκινώντας από την παρατήρηση ενός φαινομένου, η απαγωγή είναι το συμπέρασμα που δημιουργεί μια πιθανή επεξήγηση: ένας κανόνας και μια περίπτωση συνάγονται (Meyer, 2023). Με αυτή την τελευταία έννοια, η απαγωγή συχνά ονομάζεται επίσης "Inference to the Best Explanation" (Douven, 2021). Έτσι, ο τροποποιημένος ορισμός του Peirce, μπορεί να διαμορφωθεί ως ένας συμπερασμός από τα παρατηρούμενα φαινόμενα στις επεξηγηματικές περιπτώσεις:

Φαινόμενο (αποτέλεσμα):	$R(x_0)$
κανόνας:	$\forall i: C(x_i) \Rightarrow R(x_i)$
περίπτωση:	$C(x_0)$

Ο κανόνας της απαγωγής συνδέεται με την υπόθεση και άρα, ο κανόνας δεν δίνεται πριν από την απαγωγή. Η απαγωγή μπορεί να χαρακτηριστεί ανάλογα με το ποιος κάνει την απαγωγή, για παράδειγμα, ένας μαθηματικός που γνωρίζει έναν τέτοιο κανόνα ή ένας μαθητής που δεν γνώριζε τον κανόνα a priori. Η κατηγοριοποιήσει με βάση την παραπάνω οπτική έγινε από τον Eco (1983). Ο Eco θεώρησε ότι η απαγωγή χωρίζεται σε τρία είδη. Αν ο κανόνας μιας απαγωγής εφευρίσκεται *ex novo*, ο Eco μιλάει για *δημιουργικές απαγωγές* (σ. 207). Οι δημιουργικές απαγωγές περιέχουν νέους κανόνες και, επομένως, νέες ανακαλύψεις (Meyer, 2023; Ernest, 2023). Εάν ο κανόνας μιας απαγωγής είναι γνωστός εκ των προτέρων, ο Eco διακρίνει μεταξύ *υπερκωδικοποιημένων* και *υποκωδικοποιημένων* απαγωγών. Ο Eco αποκαλεί μια απαγωγή υπερκωδικοποιημένη αν η συσχέτιση του γνωστού κανόνα "δίνεται αυτόματα ή ημιαυτόματα" (Eco, 1983, σ. 206). Εάν η συσχέτιση ενός γνωστού κανόνα είναι σχεδόν προφανής, η απαγωγή θα ήταν υπερκωδικοποιημένη. Για παράδειγμα, αν κάποιος κοιτάξει έξω από το παράθυρο και δει έναν βρεγμένο δρόμο, η συσχέτιση «Αν έχει βρέξει πρόσφατα, οι δρόμοι είναι βρεγμένοι.» θα ήταν προφανής. Αυτές οι απαγωγές είναι υπερκωδικοποιημένες. Σε αντίθεση με τις υπερκωδικοποιημένες απαγωγές, η συσχέτιση του γνωστού κανόνα δεν είναι προφανής στις υποκωδικοποιημένες απαγωγές. Αυτοί οι δύο τύποι απαγωγών, οι υπερκωδικοποιημένες και οι υποκωδικοποιημένες, ονομάζονται από τον Magnani (2011) *επιλεκτικές απαγωγές*. Στην επιλεκτική απαγωγή η σωστή ή καλύτερη επεξηγηματική υπόθεση επιλέγεται από ένα δεδομένο σύνολο πιθανών εξηγήσεων. Τα είδη απαγωγής του Eco καθιστούν σαφές ότι η υπόθεση μπορεί να προκύψει απαγωγικά μόνο μαζί και μέσω της συσχέτισης (υπερκωδικοποιημένη και υποκωδικοποιημένη απαγωγή) ή της δημιουργίας (δημιουργική απαγωγή) ενός κανόνα.

Είδη απαγωγής: / Ανακάλυψη:	Υπερκωδικοποιημένη	Υποκωδικοποιημένη	Δημιουργική
Περίπτωσης ως επεξήγηση για τα παρατηρούμενα φαινόμενα	**X**	**X**	**X**
Σχέσης μεταξύ κανόνα και παρατηρούμενων φαινομένων	**X**	**X**	**X**
Κανόνα	—	—	**X**

Εικόνα 5

Μερικές φορές οι απαγωγές ρυθμίζουν τις ενέργειες που κάνουν οι παίκτες για να κερδίσουν και παράγονται στο πλαίσιο μορφών προς τα πίσω συλλογιστικής (Gómez Chacón 1992; Shachter & Heckerman 1987; Beaney, 2021). Στη θεωρία παιγνίων αυτός ο τρόπος συλλογισμού ονομάζεται επίσης *προς τα πίσω επαγωγή* (αντιστοιχεί σε αυτό που στο σκάκι ονομάζεται προς τα πίσω ανάλυση). Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται, για παράδειγμα, σε αυτοματοποιημένα αποδεικτικά λογισμικά θεωρημάτων και τα λογικά χαρακτηριστικά της διατυπώθηκαν από τον Hintikka (1998) και αποτελούν τον λογικό πυρήνα της LI.

Οι Arzarello et al. (1998) χρησιμοποιούν την απαγωγή για να περιγράψουν τη διαδικασία μετακίνησης μεταξύ μιας λογικής ανακάλυψης και μιας λογικής επεξήγησης, χρησιμοποιώντας μια ευρετική που μεταβαίνει από τους τρόπους (modalities) εικασίας σε μεθόδους απόδειξης της αλήθειας των μαθηματικών ισχυρισμών. Χαρακτηρίζουν αυτή τη διαδικασία ως διαλεκτική, όπου η απαγωγή συνεπάγεται μια “αποφασιστική κίνηση” μεταξύ εικασιών, επιτρέποντας τη σύγκλιση προς μια επικυρωμένη μορφή γνώσης. Πρόκειται για ένα μοντέλο λογικής σκέψης που βλέπει να ανεβαίνει και να κατεβαίνει μια σκάλα σχέσεων εικασιών/συμπερασμάτων. Η Knipping δείχνει επίσης πώς η επίλυση προβλημάτων και η απόδειξη περιλαμβάνουν μια διαδικασία όπου η απαγωγή παράγει τον κανόνα και στη συνέχεια η προς τα πίσω λογική επιτρέπει μια επαγωγική απόδειξη για την επιβεβαίωση της αλήθειας των ισχυρισμών (de Freitas, 2022). Οι συνδέσεις με το έργο του Imre Lakatos σχετικά με τις μεθόδους μαθηματικής εφεύρεσης και απόδειξης είναι σαφείς. Οι Arzarello et al. (1998) εξετάζουν τον μηχανισμό απόδειξης και διάψευσης του Lakatos (1976), στον οποίο αναλύει την εικασία του Euler σχετικά με τη σχέση μεταξύ ακμών, κορυφών και όψεων πολυέδρων. Υποστηρίζουν ότι στο έργο του Lakatos, η απαγωγή λειτουργεί ως μια *λογική του όχι*, όπου δημιουργούνται αντιπαραδείγματα που προκαλούν κάποια έκπληξη ή παραφωνία και στη συνέχεια δημιουργούνται πρόσθετες απαγωγές για να εξηγηθεί το αντιπαράδειγμα. Προτείνονται νέες έννοιες, τροποποιούνται οι αναλλοίωτες, επεκτείνονται ή συρρικνώνονται οι τομείς συνάφειας, και ούτω καθεξής.

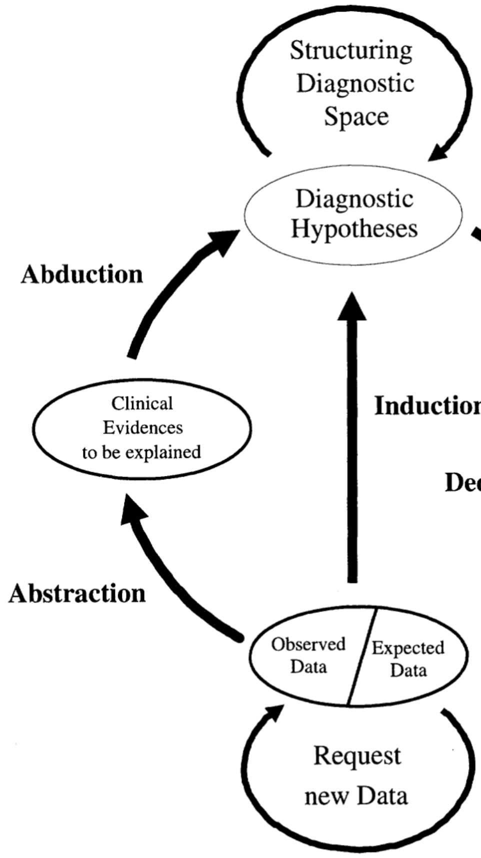
2.4 Απαγωγικός συλλογισμός εντός πλαισίου διερεύνησης

Η μαθηματική εκπαίδευση που βασίζεται στη διερεύνηση (IBME) αναφέρεται σε ένα μαθητοκεντρικό παράδειγμα διδασκαλίας των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών, στο οποίο οι μαθητές καλούνται να εργαστούν με τρόπους παρόμοιους με τον τρόπο που εργάζονται οι μαθηματικοί και οι επιστήμονες. Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να παρατηρούν φαινόμενα, να θέτουν ερωτήματα, να αναζητούν μαθηματικούς και επιστημονικούς τρόπους για το πώς να απαντήσουν σε αυτά τα ερωτήματα (όπως η διεξαγωγή πειραμάτων, ο συστηματικός έλεγχος των μεταβλητών, η σχεδίαση διαγραμμάτων, ο υπολογισμός, η αναζήτηση μοτίβων και σχέσεων και η διατύπωση εικασιών και γενικεύσεων), να ερμηνεύουν και να αξιολογούν τις λύσεις τους και να επικοινωνούν και να συζητούν αποτελεσματικά τις λύσεις τους (Dorier & Maass, 2020; Κυνηγός 2011). Η διδασκαλία αυτή βασίζεται στις ιδέες του Dewey (1938). Θεμελιώδες στοιχείο της διερεύνησης είναι ο πειραματισμός. Ο πειραματισμός μπορεί να συμβάλει την IBME στα διάφορα στάδιά της, όπως γίνεται όλο και πιο εμφανές χάρη στις δυνατότητες των ψηφιακών τεχνολογιών, και το κάνει με μια ποικιλία μορφών που η τυπική θεώρηση του πειραματισμού δεν είναι σε θέση να συλλάβει (Artigue & Blomhøj, 2013). Μάλιστα, καταλήγουν σε 10 προβληματισμούς που πρέπει που είναι πιθανά χρήσιμοι κατά την διδασκαλία μέσω διερεύνησης (Κυνηγός, 2011; Artigue & Blomhøj, 2013, σελ. 13). Η IBME είναι πολυεπίπεδη (Jaworski & Potari, 2021; Jaworski, 2019): (α) *διερεύνηση* στα *μαθηματικά*, στις αλληλεπιδράσεις εκπαιδευτικών – μαθητών, (β) *διερεύνηση* στη *διδασκαλία*, από τους εκπαιδευτικούς και τους εκπαιδευτικούς/παιδαγωγούς, που διερευνούν και, ως εκ τούτου, αναπτύσσουν τη δική τους πρακτική, (γ) *διερεύνηση* κατά την ερευνητική διαδικασία, κατά την οποία οι ερευνητές (συμπεριλαμβανομένων των εκπαιδευτικών/ερευνητών) διεξάγουν *ερευνητική διερεύνηση* στο πλαίσιο μιας συστηματικής μεθοδολογίας.

Σημαντική είναι η χρήση της τεχνολογίας (π.χ. ψηφιακά περιβάλλοντα) στα οποία οι μαθητές μπορούν να πειραματιστούν και να εμπλακούν με διερευνητικό τρόπο σε διάφορα συνεργατικά πλαίσια, όπως projects (Χρυσαφίδης, 2005). Η ψηφιακή τεχνολογία αξιοποιείται ως εργαλείο *έκφρασης* και *δημιουργίας* με έμφαση στις διαφορετικές αναπαραστάσεις με χρήση δυναμικών χειρισμών (Κυνηγός, 2011, Kynigos, 1995).

Η έρευνα στηρίζεται αποφασιστικά στην απαγωγή, έτσι ώστε οι προτεινόμενες υποθέσεις να μπορούν να γίνουν πιστευτά γεγονότα (Magnani, 2011). Η απαγωγή, από μόνη της, είναι μια κραυγαλέα πλάνη, αλλά δεν φαίνεται να υπάρχει τρόπος να την αποφύγουμε (Shook, 2021). Ούτε η παραγωγή (αναγκαίο συμπέρασμα) ούτε η επαγωγή (πιθανό συμπέρασμα) μπορούν να αυξήσουν την πραγματική ποσότητα πληροφοριών πέρα από αυτό που είναι ήδη αποδεκτό, αλλά η απαγωγή (πιθανό συμπέρασμα) μπορεί – παράγει νέα γνώση. Αν αυτοί είναι οι τρεις πρωταρχικοί τρόποι συμπερασμού, με την απαγωγή να παίζει έναν αναγκαίο αλλά ανεπαρκή ρόλο, τότε η απαγωγή μπορεί να υπερβαίνει την απλή πλάνη μέσω της εφαρμογής της σε συνδυασμό με την αφαίρεση ή/και την επαγωγή (Shook, 2021). Ο Peirce, τοποθέτησε τυπικά την απαγωγή μαζί με την παραγωγή και την επαγωγή στην ορθή λειτουργία της επιστημονικής διερεύνησης (inquiry).

Ο Paavola (2015) δίνει συνοπτικά μια περιγραφή των σταδίων που εμπλέκεται το άτομο κατά την διερεύνηση. Η διερεύνηση ξεκινάει με την παρατήρηση, ιδίως όταν υπάρχουν κάποια εκπληκτικά ή ανώμαλα (rationale) φαινόμενα που αντιβαίνουν σε κάποιες συνηθισμένες προσδοκίες, και οι ανωμαλίες κάνουν τον ερευνητή να προβληματιστεί για τα φαινόμενα και να αναζητήσει τρόπους να συμβιβαστεί με την απορία. Ο διερευνητής αναζητά μια λύση, δηλαδή μια εικασία ή μια υπόθεση που μπορεί εύλογα να λύσει την απορία. Η απαγωγή είναι μια χαρακτηριστική μορφή συλλογισμού σε αυτό το «πρώτο στάδιο της έρευνας», δηλαδή *συλλογισμός από το επακόλουθο στο προηγούμενο*. Η απαγωγή είναι μια αδύναμη μορφή συλλογισμού με την έννοια ότι δεν οδηγεί στη βεβαιότητα: τα αποτελέσματά της πρέπει να ελεγχθούν. Ο έλεγχος ξεκινά με μια παραγωγική διαδικασία που αποσαφηνίζει τις υπό όρους, βιωματικές συνέπειες της υπόθεσης: αν τα πράγματα είναι όπως ισχυρίζεται η υπόθεση, τι είδους συνέπειες θα πρέπει να ακολουθήσουν σχετικά με άλλα παρεμφερή φαινόμενα; Έπειτα είναι ο πραγματικός έλεγχος, όπου επικρατεί η επαγωγική συλλογιστική. Πρόκειται για την εξακρίβωση του κατά πόσο οι συνέπειες (που αναμένονται με βάση την υπόθεση) συμφωνούν με την εμπειρία, και την απόφαση εάν η υπόθεση απαιτεί κάποιες τροποποιήσεις ή πρέπει να απορριφθεί. Συνοπτικά, λοιπόν, μπορούμε να πούμε ότι η απαγωγή έχει κεντρική θέση στο πρώτο στάδιο της έρευνας, όπου παράγονται και υιοθετούνται προσωρινά οι υποθέσεις, οι οποίες γίνονται σαφέστερες με την παραγωγή στο δεύτερο στάδιο και ελέγχονται μέσω της επαγωγής στο τρίτο στάδιο (Εικόνα, 6).



Εικόνα 6: Το επιστημολογικό μοντέλο του διερευνητικού συλλογισμού (Magnani, 2011).

Τελευταία, υπάρχει αυξανόμενο ενδιαφέρον για την μελέτη της απαγωγής στην εκπαίδευση των μαθηματικών. Η θεωρία του Peirce έχει επηρεάσει αρκετές σχολές. Πρώτον, οι ερμηνείες των μαθητών σε φαινόμενα κατά την αλληλεπίδραση τους στην τάξη υποστηρίχθηκαν από την απαγωγική θεωρία του Peirce (Meyer, 2008). Δεύτερον, η απαγωγή αναφέρθηκε από φιλοσοφική άποψη ως το *καθοριστικό* συμπέρασμα για την ανακάλυψη των συνδέσεων με τις μαθηματικές έννοιες (Hoffmann, 2001). Ακόμη, ορισμένοι ερευνητές κατασκευάζουν απαγωγές από τα σχόλια των μαθητών. Για παράδειγμα, η Pedemonte (2007) χρησιμοποιεί την αρχική θεωρία του Peirce για την απαγωγή και την επαγωγή για την ανάλυση της σχέσης μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης. Η Knipping (2003, σ. 131) αναλύει την απαγωγή στο πλαίσιο της κατασκευής ενός επιχειρήματος. Και οι δύο ερευνήτριες χρησιμοποιούν το δομικό μοντέλο επιχειρηματολογίας του Toulmin (1958) ως πλαίσιο στο οποίο τοποθετούν τις απαγωγές και τις ανακατασκευάζουν. Σε άλλη έρευνα, αναδεικνύεται ότι ο απαγωγικός συλλογισμός είναι απαραίτητος στο στάδιο όπου τα άτομα αναπτύσσουν μια πρόβλεψη σχετικά με μια εύλογη γενίκευση σε αλγεβρικές καταστάσεις (Rivera & Becker, 2007). Ο Reid (2004) κάνει χρήση όλων των διαφορετικών μορφών απαγωγής που περιέγραψε ο Peirce κατά τη διάρκεια της φιλοσοφίας του. Η Ferrando (2005) καθιερώνει ένα *απαγωγικό σύστημα* (σ. 80). Αναλύει τις διαδικασίες εικασίας και απόδειξης και χρησιμοποιεί όρους όπως *υπόθεση* και *εικασία* για την ταξινόμηση των ρητών δηλώσεων των μαθητών. Ο Cifarelli (1999) ενδιαφέρεται για δραστηριότητες επίλυσης προβλημάτων στις οποίες ο μαθητής πρέπει να ανακαλύψει μαθηματικές νοηματοδοτήσεις για να λύσει το πρόβλημα. Ο Cifarelli συνδέει την απαγωγή με τις ευρετικές στρατηγικές επίλυσης προβλήματος (Pólya, 1945; Burton, 1984). Ο Magnani (2004, σελ. 880) εισάγει τη *χειριστική* (*manipulative*) *απαγωγή*, ως ένα είδος *ανακάλυψης μέσω του πράττειν* (*discovering through doing*), περιπτώσεις στις οποίες νέες και ακόμα ανέκφραστες πληροφορίες κωδικοποιούνται μέσω χειρισμών κάποιων εξωτερικών αντικειμένων. Η χειριστική απαγωγή συμβαίνει όταν σκεφτόμαστε *μέσα* από την πράξη και όχι μόνο *για* την πράξη. Αναφέρεται σε μια πολυ-θεωρητική συμπεριφορά που αποσκοπεί στη σύνδεση και ενσωμάτωση των νέων πληροφοριών με τα ήδη υπάρχοντα συστήματα πειραματικών και γλωσσικών (θεωρητικών) πρακτικών. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό αυτό, αναλύοντας τα είδη απαγωγής κατά Eco (1983) και ενσωματώνοντας το θεωρητικό πλαίσιο της *εργαλειακής προσέγγισης* (Vérillon & Rabardel, 1995; Rabardel & Samurçay, 2001), η Baccaglini-Frank (2010a, 2019) εισάγει την *εργαλειακή (instrumental) απαγωγή* και την χρησιμοποιεί για να υποστηρίξει ότι ένας συγκεκριμένος τρόπος συρσίματος το *σύρσιμο διατήρησης* (*maintaining dragging*) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία εικασιών σε ανοικτού τύπου προβλήματα (Arsac 1991; Silver, 1995).

Τέλος, η απαγωγή έχει απασχολήσει συνολικά την έρευνα στη διδακτική των θετικών επιστημών (Adúriz-Bravo & Pinillos, 2023; Shook, 2021; Magnani, 2011). Οι Adúriz-Bravo & Pinillos (2023) αναφέρουν ότι η απαγωγή θα πρέπει να έχει κεντρική σημασία στη διδασκαλία των φυσικών επιστημών: στη μετάδοση των *κανονιστικών* επιστημονικών εξηγήσεων, στη διδασκαλία της επιστημονικής εξήγησης και της μοντελοποίησης ως ικανοτήτων και στην αντιμετώπιση αυτού που ονομάζεται *φύση της επιστήμης*, ιδίως όσον αφορά την *απόκτηση μιας σωστής κατανόησης της φύσης της εξήγησης* (McCain, 2015: 827).

3. Μεθοδολογία και σχεδιασμός έρευνας

Στην παρούσα μελέτη αναπτύχθηκε μία δραστηριότητα βασισμένη σε μορφή παίγνιου ενός εναντίον ενός παίκτη και χρησιμοποιήθηκε σε ένα πείραμα σε μία ομάδα δύο φοιτητών. Ο σχεδιασμός της έρευνας βασίστηκε στην οπτική της *έρευνας σχεδιασμού* (Cobb & Steffe, 2011). Σημαντική ήταν η σύνδεση της LI με την ανάπτυξη της μαθηματικής γνώσης των μαθητών. Κατά την έρευνα σχεδιασμού ο ερευνητής μπορεί να έχει και τον ρόλο του διδάσκοντα, που παρατηρεί την κατασκευή της μαθηματικής γνώσης από τους μαθητές (εδώ φοιτήτριες) κατά την διάρκεια της διδασκαλίας. Ταυτόχρονα, οι εμπειρίες που αποκτούν οι μαθητές μέσω της αλληλεπίδρασης με τους συμμαθητές και τους εκπαιδευτικούς επηρεάζουν σε μεγάλο βαθμό την οικοδόμηση της μαθηματικής τους γνώσης. Η έρευνα σχεδιασμού έχει κυκλικό χαρακτήρα (κύκλος σχεδιασμού), όπου τα πειράματα σκέψης και τα πειράματα διδασκαλίας εναλλάσσονται (Doorman et al., 2018). Στην παρούσα μελέτη πραγματοποιήθηκαν δύο κύκλοι σχεδιασμού. Κάθε κύκλος διαιρέθηκε σε τρεις φάσεις: (1) τη φάση του προκαταρκτικού σχεδιασμού, (2) τη φάση του διδακτικού πειράματος και (3) τη φάση της ανάλυσης (Gravemeijer, & Cobb, 2006). Οι δύο κύκλοι σχεδιασμού αφορούσαν την κατασκευή της δραστηριότητας με βάση την LI, την εφαρμογή της στην τάξη και την ανάλυση των δεδομένων, τον αναστοχασμό επί των ευρημάτων και την προετοιμασία για τον επόμενο κύκλο. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε την τροποποίηση του ερωτηματολογίου, που αναφέρεται αναλυτικά παρακάτω, για την καλύτερη σύνδεση της φάσης πειραματισμού των μαθητών με την απόδειξη μέσα από την επιχειρηματολογία τους στην LI, καθώς και την αλλαγή του συστήματος αναφοράς της παιγνιο-δραστηριότητας στο περιβάλλον του GeoGebra, δηλαδή την τροποποίηση του μικρόκοσμου. Ταυτόχρονα, προέκυψαν τεχνικές δυσκολίες των μαθητών με το ψηφιακό περιβάλλον, όπως αδυναμία φόρτωσης του μικρόκοσμου (Mariotti, 2007; Laborde, 1996; Edwards, 1995) του GeoGebra® με λύση την ανακατασκευή του μικρόκοσμου, και τους κανόνες της δραστηριότητας, όπως ποιος θα παίξει πρώτος και το χρονικό όριο που θα υπάρχει για να αναδειχθεί ο νικητής από την εναλλαγή των γύρων, που διορθώθηκαν μέσα από του κύκλους σχεδιασμού. Τα αποτελέσματα είναι από τον δεύτερο κύκλο σχεδιασμού.

Πριν από την εισαγωγή του παίγνιου, προηγήθηκε ένα εισαγωγικό μάθημα στο οποίο παρουσιάστηκε μια διερευνητική προσέγγιση των μαθηματικών μέσω της ανάλυσης του αποσπάσματος διαλόγου του Sherlock Holmes, που προαναφέρθηκε στο θεωρητικό πλαίσιο, καθώς και ένα εισαγωγικό μάθημα πειραματισμού των βασικών λειτουργιών του ψηφιακού περιβάλλοντος GeoGebra®. Εντός του εισαγωγικού μαθήματος διερεύνησης του λογισμικού χρησιμοποιήθηκαν εισαγωγικά βίντεο εκμάθησης των λειτουργιών του[6] και ειδικότερα επιλέχθηκαν αυτά τα οποία είχαν περιεχόμενο το 2D επίπεδο, καθώς και αρκετές λειτουργίες από την εργαλειοθήκη *Άλγεβρα* του λογισμικού, που κρίθηκαν ουσιαστικές για την εισαγωγή της παιγνιο-δραστηριότητας. Οι συμμετέχοντες ήταν συνολικά 2 προπτυχιακές φοιτήτριες τμήματος Μαθηματικού. Οι φοιτήτριες γνώριζαν ότι το παίγνιο είχε σκοπό να τους καθοδηγήσει στην ανακάλυψη ενός θεωρήματος και ότι θα έπρεπε να συμπεριφέρονται ως ντετέκτιβ στο περιβάλλον του DGE.

Μια δραστηριότητα "βασισμένη σε παίγνιο" (παιγνιο-δραστηριότητα) αποτελείται από ένα παίγνιο που παίζουν οι μαθητές σε ομάδες των δύο ατόμων, χρησιμοποιώντας την εφαρμογή GeoGebra® και ένα σύνολο ερωτήσεων σε μορφή φύλλου εργασίας. Ο διδάσκων/ερευνητής σχημάτισε την εν λόγω ομάδα συγκεντρώνοντας 2 μαθητές που έχουν παρόμοιες μαθηματικές επιδόσεις στο πρώτο τετράμηνο σπουδών τους και ίδια ηλικία. Κάθε ομάδα είχε στη διάθεσή της έναν υπολογιστή και εκτυπωμένο το φύλλο εργασίας. Πριν από την έναρξη της δραστηριότητας, ο διδάσκων έβαλε τους μαθητές να διαβάσουν τους κανόνες του παιγνίου και στη συνέχεια έλυσε όποιες απορίες υπήρχαν από αυτούς. Οι κανόνες είχαν σχεδιαστεί έτσι ώστε να ενεργοποιούν τη δυναμική των σημασιολογικών παιγνίων (semantical games) του Hintikka, όπως περιγράφεται στο θεωρητικό πλαίσιο. Το φύλλο εργασίας σχεδιάστηκε για να καθοδηγήσει τους μαθητές στη μαθηματική ερμηνεία του παιγνίου, στην ανακάλυψη του θεωρήματος που βασίζεται το παίγνιο και στην προσπάθεια δημιουργίας απόδειξης του θεωρήματος αυτού.

Στο παίγνιο, δύο παίκτες, ένας επαληθευτής (Ε) και ένας παραποιητής (Π), παίζουν ο ένας εναντίον του άλλου κάνοντας τις κινήσεις τους εναλλάξ, σύμφωνα με δύο αντίθετους στόχους. Ο καθένας ελέγχει το ίδιο δυναμικό αντικείμενο, αλλά με διαφορετικό τρόπο και πρέπει να φτάσει σε έναν συγκεκριμένο στόχο. Όταν ο επαληθευτής επιτυγχάνει τον στόχο του, παράγει μια διαμόρφωση του παιγνίου που παρουσιάζει ένα συγκεκριμένο αναλλοίωτο[7], για παράδειγμα, στο παίγνιο που θα

[6] Ο σύνδεσμος ήταν ο εξής: https://youtube.com/playlist?list=PLqZ0eZtMcAlugmcomSSvjPBfewVbX35L7&si=8ojLJH5wE1zLhU0o

[7] Δεν αναφερόμαστε με τη λέξη *αναλλοίωτο* σε robust κατασκευές στο περιβάλλον του DGE.

περιγράψουμε παρακάτω, δημιουργεί πάντα επικαλύψεις χωρίων και σχέση μεταξύ των ν και ε. Ο παραποιητής, μέσω των κινήσεων του, προσπαθεί να πραγματοποιήσει τον αντίθετο στόχο: να καταστρέψει το αναλλοίωτο που παρήγαγε ο επαληθευτής και να δημιουργήσει μια νέα διαμόρφωση χωρίς αυτό: στο παράδειγμα, ο παραποιητής δημιουργεί μη επικαλυπτόμενα χωρία και προσπαθεί να μπερδέψει τον επαληθευτή για τη σχέση των ν και ε. Ξεκινώντας ξανά από την αρχική διαμόρφωση που έχει τεθεί στους μαθητές, ο επαληθευτής μετακινεί ένα αντικείμενο προκειμένου να παράγει μια νέα διαμόρφωση που εμφανίζει και πάλι την αναλλοίωτη ιδιότητα. Σε άλλα παίγνια της βιβλιογραφίας περί LI, τόσο ο επαληθευτής όσο και ο παραποιητής μπορούν πάντα να επιτυγχάνουν τους στόχους τους, επομένως το τέλος του παιγνίου καθορίζεται σε αυτά από ένα χρονικό όριο κλεψύδρας (Soldano & Arzarello, 2018). Στην παρούσα εργασία δεν είναι αναγκαίο αυτό μιας και κάθε γύρος ολοκληρώνεται με την νίκη πάντα του ενός παίκτη, μιας και έτσι αναδεικνύεται η καθολική εγκυρότητα του θεωρήματος που θέλουμε οι μαθητές να εμπλακούν. Οι παίκτες δεν γνωρίζουν το αναλλοίωτο που δημιουργούν και αλλάζουν – καταστρέφουν μέσω των κινήσεών τους.

Ο σχεδιασμός του παιγνίου προσπάθησε να ικανοποιεί εκπαιδευτικούς σκοπούς με τους οποίους οι μαθητές να εμπλέκονται εντός του προγράμματος σπουδών (του Μαθηματικού τμήματος που οι μαθητές κοινά φοιτούσαν) και έτσι να μπορούν να εμπλακούν με το παίγνιο πιο άμεσα και σε προσωπικό επίπεδο. Συγκεκριμένα, η πρόταση που θέλαμε να εμπλακούν ήταν μέρος του υποχρεωτικού μαθήματος Απειροστικός Λογισμό Ι. Ο σχεδιασμός των παιγνίων κάνει τους μαθητές να αντιληφθούν γεωμετρικές ιδιότητες και υπό συνθήκη συνδέσεις μεταξύ των ιδιοτήτων και να βιώσουν την αδυναμία εύρεσης αντιπαραδείγματος για την ύπαρξή τους. Τα παίγνια όχι μόνο βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν με φυσικό τρόπο τη λογική των ποσοδεικτών αλλά και να κάνουν τα μαθηματικά πιο ενδιαφέροντα, ελκυστικά και παρακινητικά (Soldano & Arzarello, 2016). Οι μαθήτριες είχαν παρακολουθήσει το μάθημα *Θεμέλια Μαθηματικής Ανάλυσης* του Μαθηματικού Αθήνας, που περιλαμβάνει βασικά στοιχεία Θεωρίας Συνόλων (π.χ. μεθόδους απόδειξης, είδη και ιδιότητες συνόλων, επαγωγή, σχέσεις ισοδυναμίας, δομή και ιδιότητες των φυσικών και ακεραίων, πληθάριθμοι, αριθμήσιμα και υπεραριθμήσιμα σύνολα, κ.ά.). Το εν λόγω μάθημα προσπαθεί να γεφυρώσει το χάσμα μεταξύ της δευτεροβάθμιας και τριτοβάθμιας εκπαίδευσης και παρέχεται στο 1^{ο} εξάμηνο.

Το θεώρημα στο οποίο βασίζεται το παίγνιο δεν αποτελεί κομμάτι της γνώσης των μαθητών (κάτι που φάνηκε και από τα δεδομένα), με την έννοια ότι οι μαθητές δεν γνώριζαν για αυτό a priori. Οι μαθητές έπρεπε να το ανακαλύψουν ενεργώντας ως ντετέκτιβ στο DGE: έπρεπε να διερευνήσουν ποιες ιδιότητες ελέγχουν οι δρομείς, τι αντιπροσωπεύουν οι τιμές που εμφανίζονται και να τις χρησιμοποιήσουν για να κατανοήσουν το νόημα του παιγνίου. Ο διδακτικός σκοπός της δραστηριότητας που βασίζεται στο παίγνιο είναι διττός: από τη μία πλευρά, η απόκτηση γνώσεων και από την άλλη, η έκφραση της καθολικής αλήθειας του θεωρήματος, που ανακαλύπτεται μέσω της δυναμικής του παιγνίου.

Κατά την ενασχόληση των μαθητών με την παιγνιο-δραστηριότητα καταγράφτηκε η οθόνη τους και ηχογραφήθηκε ο διάλογος τους. Σκοπός των μαθητών ήταν να απαντήσουν στις ερωτήσεις που τους δόθηκαν. Για να απαντήσουμε στο ερώτημα (1) της παρούσας μελέτης έγιναν τα εξής: (1) Οι διάλογοι αναλύθηκαν σύμφωνα με τις διάφορες λειτουργίες του παιγνίου κατά τη διάρκεια των ενεργειών των μαθητών: διακρίνουμε μεταξύ *παιγμένων παίγνιων* (*played games*), που αποσκοπούν στην ήττα του αντιπάλου, και *αναστοχαστικών παίγνιων* (*reflective games*), που αποσκοπούν στη διατύπωση γεωμετρικών εικασιών και στην εξακρίβωση της εγκυρότητας τους (Soldano & Arzarello, 2015, 2016). Στο πρώτο είδος παιγνίου, οι φοιτήτριες παίζουν μεταξύ τους και στόχος τους είναι η νίκη. Στο δεύτερο είδος παιγνίου, το παίγνιο λειτουργεί με τέτοιον τρόπο, ώστε να βοηθήσει τις φοιτήτριες στην ανακάλυψη και την δημιουργία νέας γνώσης – οι φοιτήτριες δεν είναι πλέον αντίπαλοι και παίζουν το παίγνιο συνεργατικά. Κατά την ανάλυση των διαλόγων, δόθηκε προσοχή στους τύπους *στρατηγικού συλλογισμού*, συμπεριλαμβανομένης του *προβλεπόμενου συλλογισμού* (*anticipatory thinking*) (Harel, 2001), κατά την οποία προβλέπει κανείς το αποτέλεσμα της κίνησης του αντιπάλου και του *αντίστροφου τύπου συλλογισμού* (*reversed type of reasoning*) (Gómez Chacón, 1992), (2) τα δεδομένα που συλλέχθηκαν αναλύθηκαν χρησιμοποιώντας ένα γνωστικό μοντέλο που χαρακτηρίζει την ακολουθία *εξερεύνηση-εικασία-έλεγχος* (ΕΕΕ) χαρακτηρίζοντας το από έξι τρόπους: *ανοδικός, καθοδικός, ουδέτερος, αποστασιοποιημένος, λογικού ελέγχου* και *παραγωγικός*. Οι ανοδικοί και καθοδικοί τρόποι βασίζονται στο ψυχολογικό μοντέλο που αναπτύχθηκε από τον Saada-Robert (1989) και χρησιμοποιείται για την ανάλυση μαθηματικών δραστηριοτήτων που περιλαμβάνουν αλληλεπίδραση με DGEs (Arzarello et al., 2002). Προκειμένου να προσδιορίσουμε σωστά τους διαφορετικούς τρόπους, εξετάστηκαν δηλώσεις των μαθητών, ενέργειες στο περιβάλλον DGE και αναπαραστάσεις.

- Ο *ανοδικός τρόπος* χαρακτηρίζει τις γνωστικές διεργασίες κατά τη φάση της διερεύνησης προς τη διατύπωση μιας εικασίας: η κατάσταση στην οθόνη διερευνάται με τη χρήση του εργαλείου συρσίματος (εδώ δρομείς) με στόχο την εύρεση καταστάσεων και ιδιοτήτων, που κρίνεται πως έχουν ενδιαφέρον. Ο ανοδικός τρόπος, αφορά την μετάβαση από τα εμπειρικά δεδομένα και τον πειραματισμό στη τυπική θεωρία, προκειμένου να διερευνηθεί ελεύθερα μια κατάσταση, αναζητώντας κανονικότητες, αναλλοίωτες καταστάσεις κ.λπ.
- Ο *καθοδικός τρόπος* χαρακτηρίζει τις γνωστικές διεργασίες κατά τη φάση του ελέγχου, είναι διαφορετικός από τη διατύπωση της εικασίας, καθώς αφορά τον έλεγχο της εικασίας, δηλαδή η όποια κατάσταση στην οθόνη διερευνάται με τους δρομείς με στόχο τον έλεγχο της εικασίας. Ο καθοδικός τρόπος αφορά την μετάβαση από τη τυπική θεωρία στα εμπειρικά δεδομένα, προκειμένου να επικυρωθούν ή να διαψευστούν εικασίες, να ελεγχθούν ιδιότητες κ.λ.π.
- Ο *ουδέτερος τρόπος* χαρακτηρίζει τις γνωστικές διεργασίες κατά τη διαμόρφωση μιας εικασίας, ενδεχομένως ως απαγωγή (Arzarello et al., 1998). Χαρακτηρίζει το πέρασμα από τον ανοδικό στον καθοδικό τρόπο, σηματοδοτώντας την εξέλιξη του τρόπου με τον οποίο το υποκείμενο εξετάζει την κατάσταση, από μια "ανακαλυπτική διερεύνηση" σε μια "ελεγκτική διερεύνηση".

Οι ανοδικοί και καθοδικοί τρόποι που παρουσιάζονται από τις πρακτικές συρσίματος των δρομέων στο Geogebra® αποκαλύπτουν γνωστικές αλλαγές από το εμπειρικό επίπεδο στο θεωρητικό και πίσω στη μαθηματική δραστηριότητα των μαθητών (Arzarello et al., 2002). Οι ανοδικοί και καθοδικοί τρόποι ποικίλλουν κατά τη διάρκεια της εμπλοκής του μαθητή με τον μικρόκοσμο και σηματοδοτούν επίσης τον τρόπο με τον οποίο τα υποκείμενα εξετάζουν αυτό που θεωρείται δεδομένο και αυτό που υποτίθεται ότι πρέπει να βρεθεί, δηλαδή το ζητούμενο (Arzarello et al., 2002). Και στους δύο τρόπους, η μετάβαση διέπεται από την εμφάνιση απαγωγής – αλλά ενώ στο πρώτο οι απαγωγές παράγονται λόγω της ευρηματικότητας των μαθητών, στο Geogebra® η διαδικασία συρσίματος των δρομέων μπορεί να τις δημιουργήσει.

Για τον λόγο αυτό, το τελικό στάδιο ανάλυσης μετά την ανάλυση των τρόπων είναι η εύρεση των απαγωγικών συλλογισμών των μαθητών, από την εναλλαγή των τρόπων (ανοδικός – καθοδικός). Οι απαγωγές αναλύθηκαν με βάση το θεωρητικό πλαίσιο και κωδικοποιήθηκαν με τα είδη απαγωγής που όρισε ο Eco (1963).

Ο *λογικός έλεγχος* είναι μια μορφή *καθοδικού τρόπου* στην οποία ο έλεγχος της εικασίας είναι περισσότερο λογικός/τυπικός και λιγότερο εμπειρικός: δεν περιλαμβάνει τη συγκεκριμένη χρήση του παιγνίου, αλλά απλώς μια επεξεργασία των γεγονότων που είχαν παρατηρηθεί προηγουμένως στο πλαίσιο του παίγνιου. Ο *παραγωγικός τρόπος* είναι μια άλλη μορφή καθοδικού τρόπου κατά την οποία ο έλεγχος της εικασίας γίνεται με την εκάστοτε θεωρία (π.χ. Ευκλείδεια, θεωρία αριθμών, κ.τ.λ.) και όχι με την απλή εμπειρία ή την επεξεργασία της απλής εμπειρίας που γίνεται εντός του παιγνίου.

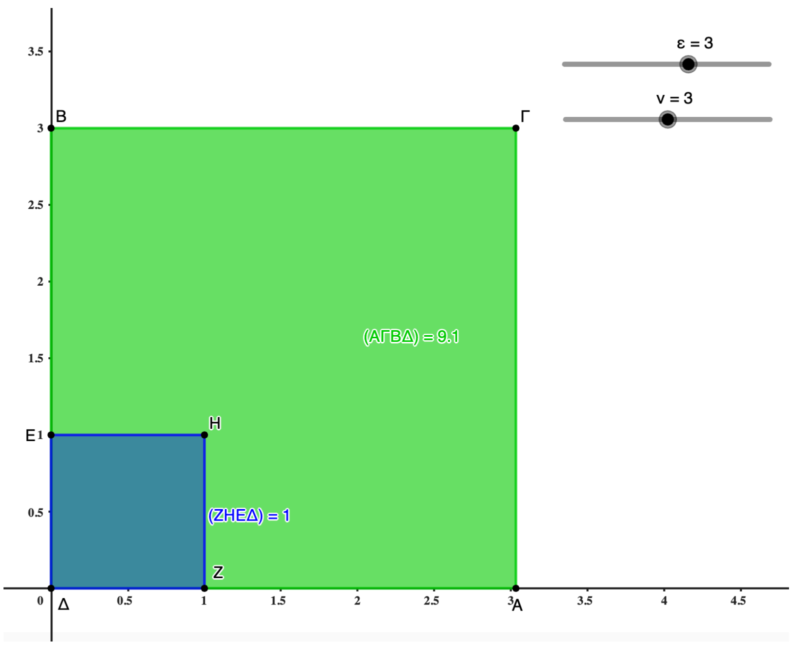
Οι Arzarello και Soldano (2018) για να διαχωρίσουν την δημιουργία μιας εικασίας ουδέτερου τρόπου (παρατήρηση καταστάσεων στην οθόνη), από την εικασία που είναι αποτέλεσμα νοητικής επεξεργασίας γεγονότων που παρατηρήθηκαν σε διαφορετική χρονική στιγμή, εισήγαγαν τον *αποστασιοποιημένο τρόπο*.

Οι παραπάνω τρόποι μας βοηθούν να αναλύσουμε την γνωστικές διαδικασίες των μαθητών κατά την διάρκεια του παίγνιου μέσα από την οπτική της LI. Κατά ακολουθία μπορούμε να διερευνήσουμε αν και πώς η παιγνιο-δραστηριότητα επηρέασε τους μαθητές στην ανάπτυξη των μαθηματικών ιδεών τους.

3.1 Η παιγνιο-δραστηριότητα εντός του περιβάλλοντος GeoGebra®

Η παρούσα εργασία περιλαμβάνει μια δραστηριότητα “μαθητή εναντίον μαθητή” σε μορφή παίγνιου. Η δραστηριότητα είναι σχεδιασμένη με τρόπο τέτοιον, ώστε να εμπλακούν οι φοιτήτριες μέσω του πειραματισμού στο δυναμικό περιβάλλον του GeoGebra®, δημιουργώντας νέες γνώσεις μέσω της εμπειρικής διερεύνησης, να οπτικοποιήσουν βασική πρόταση των μαθηματικών, να δημιουργήσουν εικασία και να προσπαθήσουν να την αποδείξουν. Η δραστηριότητα αναπτύσσεται σε μορφή παίγνιου με τους κανόνες που έχει ένα παίγνιο. Αναπτύσσονται έτσι, στρατηγικοί και ορισμένοι κανόνες εντός του παιγνίου. Σκοπός της δραστηριότητας είναι οι φοιτήτριες παίζοντας το παίγνιο: (1) να εκφράσουν την πρόταση και (2) να κατανοήσουν την καθολική αλήθεια της πρότασης από εμπειρική και θεωρητική σκοπιά. Η εμπειρική επαλήθευση μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσα από την διαπίστωση ότι δεν υπάρχει στρατηγική που να επιτρέπει στον παραποιητή να κατασκευάσει ένα αντιπαράδειγμα στον ισχυρισμό του επαληθευτή, ενώ η θεωρητική επαλήθευση μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσα από την αιτιολόγηση των επιμέρους ερωτήσεων που τους δίνονται. Με αυτόν τον τρόπο, ο δυναμικός χειρισμός των δρομέων και οι στόχοι των παικτών αλληλοσυνδέονται. Η δραστηριότητα εμπλέκει τις φοιτήτριες με την Αρχιμήδεια ιδιότητα: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}^*$ τέτοιο, ώστε $\nu\varepsilon > 1$. Η μετατροπή της Αρχιμήδειας πρότασης με βάση την γεωμετρική της ερμηνεία στο $\mathbb{R}^2$ ως το εμβαδό ενός ορθογωνίου ΒΓΑΔ με διαστάσεις ν, ε σε σύγκριση με το τετράγωνο πλευράς 1, έχει σκοπό την οπτική αναπαράσταση της πρότασης για τον πειραματισμό των μαθητών. Για τον λόγο αυτό, επιλέχθηκε για την αναπαράσταση του ορθογωνίου ΒΓΑΔ εύπλαστη (soft) κατασκευή (Healy, 2000), η ρύθμιση της οποίας γίνεται μέσω δύο δρομέων που αλλάζουν τις διαστάσεις του ορθογωνίου, ενώ για την αναπαράσταση του τετραγώνου επιλέχθηκε συμπαγής (robust) κατασκευή, όπως φαίνεται στην Εικόνα 7. Ο επαληθευτής ελέγχει τον δρομέα ε, ενώ ο παραποιητής ελέγχει τον δρομέα ν, δηλαδή καθένας από τους δύο παίκτες ελέγχει τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΒΓΑΔ.

Εικόνα 7: Στιγμιότυπο του παίγνιου



Σκοπός του παραποιητή είναι να εμποδίσει τον επαληθευτεί να πετύχει τον στόχο του. Ο στόχος του επαληθευτή είναι να κάνει το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΓΑΔ να είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΗΖΔ. Οι κανόνες του παίγνιου φαίνονται στον Πίνακα 2 (Μέρος Α).

Πίνακας 2: Κανόνες παίγνιου – ερωτήσεις

Παίγνιο

ΜΕΡΟΣ Α

Μεταξύ σας, ορίστε έναν επαληθευτή Ε, που μετακινεί το δρομέα ε και έναν παραποιητή Π, που μετακινεί το δρομέα ν. Κάθε γύρος του παίγνιου γίνεται με δύο κινήσεις και η πρώτη γίνεται πάντα από τον παραποιητή. Οι παίκτες δεν μπορούν να παίζουν ταυτόχρονα, δηλαδή κάθε παίκτης παίζει στον γύρο του. Ο στόχος του επαληθευτή είναι να κάνει το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΓΑΔ να είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΗΖΔ, ενώ ο στόχος του παραποιητή είναι να εμποδίσει τον επαληθευτή να επιτύχει τον στόχο του. Ο νικητής του αγώνα είναι ο παίκτης που φτάνει στον στόχο στο τέλος της κίνησης του επαληθευτή. Μετά από κάθε αγώνα επαναφέρετε την αρχική διαμόρφωση των δρομέων στο GeoGebra. Παίξτε μερικούς γύρους και σημειώστε με Χ στον ακόλουθο πίνακα, που αντιστοιχεί στον νικητή κάθε αγώνα.

	Επαληθευτής (Ε)	Παραποιητής (Π)
Γύρος 1		
Γύρος 2		
Γύρος 3		
…		

Ανταλλάξτε τους ρόλους σας και παίξτε ξανά.

	Επαληθευτής (Ε)	Παραποιητής (Π)
Γύρος 1		
Γύρος 2		
Γύρος 3		
…		

ΜΕΡΟΣ Β

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις που ακολουθούν μόνο αν πιστεύετε ότι ο παίκτης Ε μπορεί πάντα να νικήσει.

(1) Με ποιον τρόπο πρέπει να επιλέγει ο Π κάθε φορά τον αριθμό ν, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΓΑΔ να είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΗΖΔ;

(2) Μπορείτε να διατυπώσετε μια μαθηματική πρόταση – εικασία που να συμπεραίνει τα αποτελέσματα σας στο παίγνιο;

(3) Ποια είναι η σχέση της πρότασης που διατυπώσατε με την πρόταση που ακολουθεί; *«Υπάρχει* $\varepsilon > 0$ *τέτοιο, ώστε για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$ *το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΓΑΔ να είναι μικρότερο ή ίσο από το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΗΖΔ.»*

(4) Μπορείτε να δώσετε μια απόδειξη της παραπάνω πρότασης – εικασίας του ερωτήματος (2);

Οι ερωτήσεις να απαντηθούν με τη σειρά που αναγράφονται.

Να απαντήσετε στις ερωτήσεις που ακολουθούν μόνο αν πιστεύετε ότι υπάρχει πάντα ένας θετικός αριθμός ν, που εμποδίζει τον παίκτη Ε από το να κάνει το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΓΑΔ να είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΗΖΔ.

(1) Με ποιον τρόπο πρέπει να επιλέγει ο Π κάθε φορά τον αριθμό ν, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΓΑΔ να μην είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΗΖΔ;

(2) Μπορείτε να διατυπώσετε μια μαθηματική πρόταση – εικασία που να συμπεραίνει τα αποτελέσματα σας στο παίγνιο;

(3) Ποια είναι η σχέση της πρότασης που διατυπώσατε με την πρόταση που ακολουθεί; *«Υπάρχει* $\varepsilon > 0$ *τέτοιο, ώστε για κάθε* $\nu \in \mathbb{N}$ *το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΓΑΔ να είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΗΖΔ.»*

(4) Μπορείτε να δώσετε μια απόδειξη της παραπάνω πρότασης – εικασίας του ερωτήματος (2);

Οι ερωτήσεις να απαντηθούν με τη σειρά που αναγράφονται.

Αφού οι φοιτήτριες ασχολήθηκαν με το παίγνιο, όπως ανέφερε το Μέρος Α του φύλλου εργασίας, στη συνέχεια τους ζητήθηκε να ασχοληθούν με τα ερωτήματα του Μέρους Β και να προσπαθήσουν να τα απαντήσουν τεκμηριώνοντας τις απαντήσεις τους. Ταυτόχρονα, τους ζητήθηκε να ακολουθήσουν την ροή των ερωτήσεων μιας και η σειρά των ερωτημάτων ήταν τέτοια ώστε κάθε ερώτημα να συνεισφέρει στο επόμενο και φυσικά στο τελικό ερώτημα.

Οι ερωτήσεις που τους δόθηκαν είχαν σκοπό να οδηγήσουν τους μαθητές στην ανάπτυξη εικασιών προς την Αρχιμήδεια Ιδιότητα, καθώς και να μπορέσουν να κινηθούν προς την απόδειξη της. Δίνουμε την απόδειξη που τέθηκε σαν βάση για την ανάπτυξη των ερωτημάτων. Η απόδειξη βασίστηκε στο ότι το $\mathbb{N}$ δεν είναι άνω φραγμένο σύνολο. Η γενικότερη απόδειξη που δεν χρησιμοποιεί το εν λόγω συμπέρασμα, χρησιμοποιεί την αρχή της καλής διάταξης και παραλείφθηκε μιας και ο σκοπός δεν ήταν η ανακάλυψη και χρήση των τεχνικών που χρειάζονται γι' αυτήν την οπτική (π.χ. ιδιότητες supremum συνόλου).

Απόδειξη Αρχιμήδειας Ιδιότητας

Μπορούμε να γράψουμε την Αρχιμήδεια πρόταση p ως: $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \nu\varepsilon > 1$. Με χρήση απόδειξης μέσω αντίφασης, τα λογικά βήματα που πρέπει να πραγματοποιηθούν είναι να υποθέσουμε ότι αληθεύουν ταυτόχρονα οι προτάσεις p και ¬p, βασιζόμενοι στο ότι η πρόταση p ∧ ¬p αποτελεί ταυτολογία (αρχή του αποκλειόμενου μέσου). Επομένως, υποθέτουμε ότι ισχύει η πρόταση

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \nu\varepsilon \leq 1$$

και ισοδύναμα ότι:

$$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \nu \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

Επομένως, το $\frac{1}{\varepsilon}$ αποτελεί άνω φράγμα των φυσικών αριθμών κάτι που είναι άτοπο και άρα η αρχική μας υπόθεση είναι λανθασμένη.

Η επιλογή της Αρχιμήδειας πρότασης έγινε, επίσης, και για την ανάδειξη της δύναμης της LI στην εύρεση της εγκυρότητας τέτοιων προτάσεων, όπως προαναφέραμε, συγκριτικά με τον ορισμό αλήθειας κατά Tarski. Έτσι, από την σκοπιά της κατηγορηματικής λογικής (FOL) χρησιμοποιώντας την πρωτοτάξια γλώσσα της στοιχειώδους θεωρίας αριθμών η Αρχιμήδεια πρόταση μπορεί να γραφτεί με τύπο ως εξής

$$\forall\varepsilon\big(\varepsilon > \mathbf{0} \Rightarrow \exists\nu(\nu \cdot \varepsilon > \mathbf{S0})\big)$$

όπου υπάρχει ένα σύμβολο κατηγορήματος για διάταξη $>$, ένα μονοθέσιο σύμβολο συνάρτησης για τον διάδοχο $\mathbf{S}$, ένα σύμβολο μηδενικής σταθεράς $\mathbf{0}$, ένα διθέσιο σύμβολο συνάρτησης $(\cdot)$ για τον πολλαπλασιασμό (Enderton, 2001). Η εγκυρότητα του παραπάνω τύπου δεν μπορεί να προκύψει μέσω του τυπικού συστήματος αληθείας του Tarski (Chang & Keisler, 1990), ενώ η LI μπορεί μέσω μιας μπρος–πίσω διαδικασίας για την κατασκευή της απόδειξης (Durand–Guerrier et al., 2012). Μέσω της LI μπορούμε να αποφανθούμε (με στρατηγικό τρόπο) την εγκυρότητα προτάσεων και επαγωγών που δεν θα μπορούσαμε να αποφανθούμε με χρήση μόνο της προτασιακής, ακόμα και της κατηγορηματικής λογικής, με χρήση για παράδειγμα του αξιωματικού συστήματος αληθείας του Tarski.

Οι ερωτήσεις χωρίστηκαν σε δύο ομάδες. Η πρώτη ομάδα ερωτήσεων έπρεπε να απαντηθεί από αν οι φοιτήτριες επιχειρηματολογούσαν ότι ο επαληθευτής είναι πάντα νικητής και η δεύτερη ομάδα ερωτήσεων έπρεπε να απαντηθεί αν πίστευαν ότι ο παραποιητής μπορεί να νικήσει κάποια στιγμή τον επαληθευτεί. Οι δύο διαχωρισμοί των ερωτήσεων ήταν, δηλαδή, λογικά αντίθετοι. Η δεύτερη ομάδα ερωτήσεων ουσιαστικά δεν μπορούσε να ικανοποιηθεί ως προς την εγκυρότητα των προτάσεων που ήταν πίσω από τις ερωτήσεις, εφόσον οι μαθητές είχαν αντιληφθεί σωστά τον τρόπο με τον οποίο παίζεται το παίγνιο με τους κανόνες του. Έτσι, οι μαθητές κατευθύνονταν στην πρώτη ομάδα ερωτήσεων.

Η ερώτηση (1) είχε σκοπό να τις μετατοπίσει από την πειραματική ενασχόληση τους με το παίγνιο, στην αναζήτηση του τρόπου με τον οποίο ο παραποιητής μπορεί να επιλέγει τον αριθμό ν, για να απαντήσει στον επαληθευτή που κινεί τον αριθμό ε. Μέσα από την αναζήτηση των τρόπων, θέλαμε οι μαθητές να αναζητήσουν και να εκφράσουν ιδέες γύρω από τις αντιστοιχίσεις των ν και ε μεταξύ τους, καθώς και για την αποδοχή της καθολικότητας του ε, έναντι του ν, με το ν όμως να μπορεί να βρεθεί πάντα, αρκεί να μην είναι μηδέν.

Η ερώτηση (2) είχε σκοπό να τις οδηγήσει στην διατύπωση της μαθηματικής πρότασης που αναδεικνύεται από το παίγνιο και από την ενασχόληση με το ερώτημα (1), ενώ η ερώτηση (2) δόθηκε για την σύνδεση του ερωτήματος (2) και (3) ως αντίθετες. Σκοπός της επιλογής των ερωτημάτων σε αυτή τη φάση του φύλλου εργασίας ήταν η ομαλή μετάβαση των φοιτητριών από την διατύπωση της πρότασης με μορφή $\forall\varepsilon\ \exists\nu\ S(\varepsilon,\nu)$

στην άρνηση της $\exists\varepsilon\ \forall\nu\ S^*(\varepsilon,\nu)$, όπου S^* η άρνηση της πρότασης S, του ερωτήματος (2), με χρήση των γεωμετρικών αναπαραστάσεων.

Τέλος, η ερώτηση (4) δόθηκε για την σύνδεση της επιχειρηματολογίας των φοιτητριών με την απόδειξη της ερώτησης (2) που είχαν ήδη εκφράσει, δηλαδή την Αρχιμήδεια Ιδιότητα. Οι φοιτήτριες μέσα από την ερώτηση αυτή, μπορούσαν να γεφυρώσουν την πειραματική διαδικασία με την χρήση της LI, τελικά, με την απόδειξη της Αρχιμήδειας Ιδιότητας.

Η επιλογή των ερωτημάτων (3) και (4) ήταν βασική για να στρέψει τις φοιτήτριες προς την μέθοδο απόδειξης της εις άτοπου απαγωγής.

4. Ανάλυση δεδομένων

Η ανάλυση οργανώθηκε στις ακόλουθες δύο φάσεις: (1) το παίγνιο και (2) το ερωτηματολόγιο μαζί με την δομή και τα είδη των απαγωγικών συλλογισμών που ανέπτυξαν οι φοιτήτριες. Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται τα ευρήματα από την απομαγνητοφώνηση των διαλόγων δύο φοιτητριών (M1, M2) και δειγμάτων από τη καταγραφή της οθόνης των ενεργειών των φοιτητριών στον υπολογιστή. Το καθένα ρίχνει φως σε διαφορετικές πτυχές της μαθησιακής διαδικασίας μέσα από τον πειραματισμό και την διερεύνηση τους.

4.1 Ανάλυση του παίγνιου στην πειραματική φάση

Το πρώτο μέρος του φύλλου εργασίας ήταν καθαρά πειραματικό με την έννοια της εμπλοκής των φοιτητριών με το παίγνιο. Το περιβάλλον DGE δρα εδώ ως ένα μέσο, που επιτρέπει στους χρήστες να παίζουν ελεύθερα. Οι φοιτήτριες είχαν παίξει το παίγνιο για 30΄ και είχαν ξεκινήσει να συμπληρώνουν το Μέρος Α (Πίνακας 2) του φύλλου εργασίας με τον νικητή του κάθε γύρου.

Οι φοιτήτριες κινούνταν αρχικά εμπειρικά, πειραματιζόμενες με το παίγνιο και τους κανόνες του. Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω απόσπασμα, που αναδεικνύει την διατύπωση και αναζήτηση των *ορισμένων κανόνων* του παίγνιου.

M1: Εγώ δεν το πειράζω καθόλου το ε, δηλαδή το αφήνω εκεί και απλά η M2 κουνάει το ν;

M2: Ο κανόνας έλεγε ότι πρώτα το ν πειράζεται και μετά το ε. Δεν το κάνουμε σωστά τόση ώρα. Εγώ, ο παραποιητής, πρώτα μετακινώ το ν και μετά η Μ1, ο επαληθευτής, μετακινεί το ε για να αυξηθεί το εμβαδόν. Θα το παίξουμε σωστά τώρα.

Πρώτα η Μ1 ρωτάει τον διδάσκοντα για την ορθότητα του τρόπου που μπορεί να παίξει το παίγνιο και αμέσως η Μ2 συμμετέχει και απαντά στην Μ1, δίνοντας την εξήγηση που έχει αντιληφθεί για τους κανόνες του παίγνιου. Στην φάση αυτή έχουν αντιληφθεί ότι οι κανόνες που αναφέρουν και αναφέρονται στο φύλλο εργασίας (ορισμένοι) δεν είναι αρκετοί, για να τους οδηγήσουν στον τρόπο νίκης.

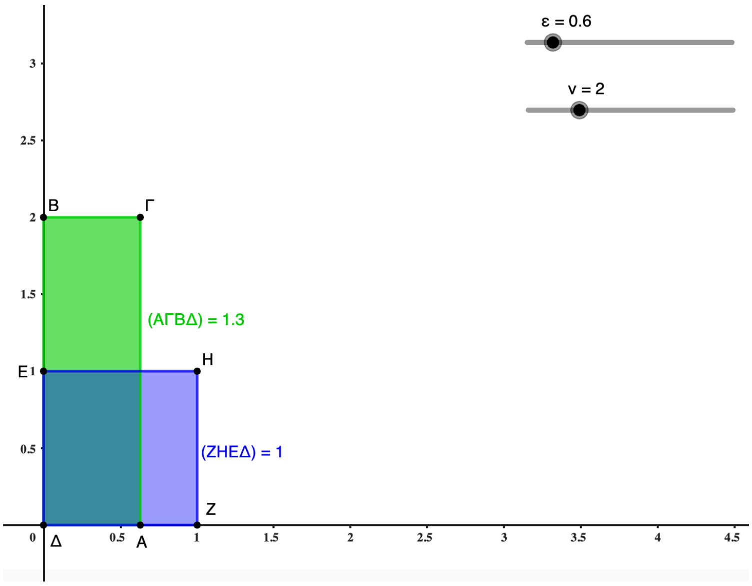
Ο παρακάτω διάλογος των φοιτητριών αναδεικνύει την ανακάλυψη και στρατηγικών κανόνων για την δημιουργία νίκης στα πλαίσια της LI. Στο σημείο αυτό πρέπει να αναφέρουμε ότι οι φοιτήτριες είχαν αλλάξει τον τρόπο που αντιμετώπιζαν το παίγνιο και έτσι μεταβλήθηκε και το είδος του παίγνιου. Από ένα *παιγμένο παίγνιο (played game)*, που προσπαθούσαν να βρουν τρόπο η κάθε μια να νικήσει, σε ένα *αναστοχαστικό παίγνιο (reflective game)*, μιας και σταμάτησαν να λειτουργούν ως αντίπαλοι παίκτες και ξεκίνησαν να συνεργάζονται για να βρουν με ποιον τρόπο μπορούν να νικήσουν το παίγνιο. Έτσι, αποφάσισαν ότι η Μ1 πρέπει να κινεί και τους δύο δρομείς των ν και ε, και η Μ2 συμμετείχε στον διάλογο με την Μ1, αλληλοεπιδρώντας και ανατροφοδοτώντας την συζήτηση. Παράλληλα, και οι δύο φοιτήτριες είχαν κάνει την εικασία ότι ο επαληθευτής μπορεί να νικήσει πάντα, και έτσι προσπάθησαν να την καταρρίψουν μέσω αντιπαραδείγματος.

Μ1: Άμα βάλουμε το ε=2, μπορείς μετά για όλα τα ν να είναι μεγαλύτερο το πράσινο από το μπλε εμβαδόν. Αν το βάλουμε στο 0.68 εκεί μπορείς να βρεις κάποιο ν που να το εμποδίσει να γίνει μεγαλύτερο.

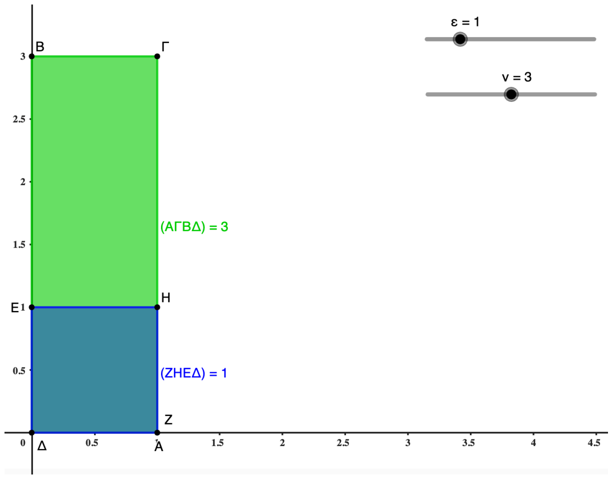
Μ2: Γενικά όσο μικρότερες τιμές για το ε, τόσο το καλύτερο.

Μ1: Αν το ε<1 τότε μπορείς να βρεις ένα ν, που να το μεγαλώνει. Άρα, μάλλον η οριακή τιμή του είναι στο 1. Άρα, το ε πρέπει να είναι κάτω από το 1, για να μπορούμε να παίξουμε το παίγνιο και να έχει ενδιαφέρον.

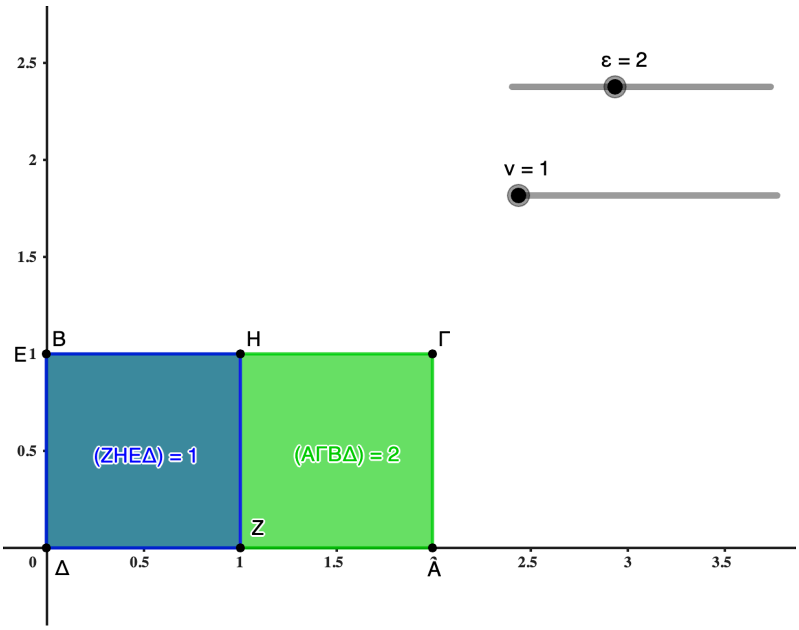
Οι δύο φοιτήτριες αντιλαμβάνονται ότι για να μπορέσουν να νικήσουν το ίδιο το παίγνιο έχει νόημα το ε να είναι μικρότερο του 1 (Εικόνες 8, 9) και η στρατηγική τους αλλάζει από εκεί και μετά και προσαρμόζεται με βάση αυτήν την παρατήρηση. Στο σημείο αυτό οι φοιτήτριες ενεργοποιούν *στρατηγικής μορφής συλλογισμό* (Hintikka, 1999) εντός της LI. Οι φράσεις "Αν το βάλουμε στο 0.68 εκεί μπορείς να βρεις κάποιο ν που να το εμποδίσει να γίνει μεγαλύτερο." (Εικόνα 8) από την Μ1 και πάλι από την ίδια "Αν το ε<1 τότε μπορείς να βρεις ένα ν, που να το μεγαλώνει." αναδεικνύουν την ενεργοποίηση *προβλεπόμενου συλλογισμού (anticipatory thinking)* (Harel, 2001) που βοηθάει στην πρόβλεψη της κίνησης του αντίπαλου παίκτη. Επίσης, αυτή η φράση της Μ1 αναδεικνύει έναν *αντίστροφου τύπου συλλογισμό (backword reasoning)* (Gómez Chacón, 1992) με την έννοια ότι γυρίζει προς τα πίσω και αλλάζει τον τρόπο με τον οποίο παίζει και επιλέγει το ε, έτσι ώστε να καταφέρει να νικήσει την αντίπαλο.



Εικόνα 8: Πειραματισμός των μαθητών στη φάση του *αναστοχαστικού παίγνιου* με ε<1. και δεξιά ο εντοπισμός της οριακής τιμής του ε=1.



Εικόνα 9: Εντοπισμός της οριακής τιμής του ε=1.



Εικόνα 10: Εντοπισμός της οριακής τιμής του ν=1.

4.2 Ανάλυση του παίγνιου μέσω του ερωτηματολογίου και απαγωγών

Οι φοιτήτριες είχαν παίξει το παίγνιο για 60΄ και έτσι αποφάσισαν ότι έπρεπε να συνεχίσουν απαντώντας το ερωτηματολόγιο που τους είχε δοθεί στο φύλλο εργασίας (Πίνακας 2, Μέρος Β). Ο πειραματισμός του Μέρους Α, τους οδήγησε στο να αποφασίσουν ότι πάντα ο επαληθευτής μπορεί να νικήσει και έτσι επέλεξαν την Ομάδα Α΄ των ερωτημάτων.

M1: Και μετά παίζει ο επαληθευτής. Αν πάρουμε ν=1, ο άλλος [εννοεί τον επαληθευτή] μπορεί να νικήσει αν κάνει το ε>1.

M2: Όμως εμείς δεν θέλουμε να κρατήσουμε σταθερό το ν, αλλά το ε.

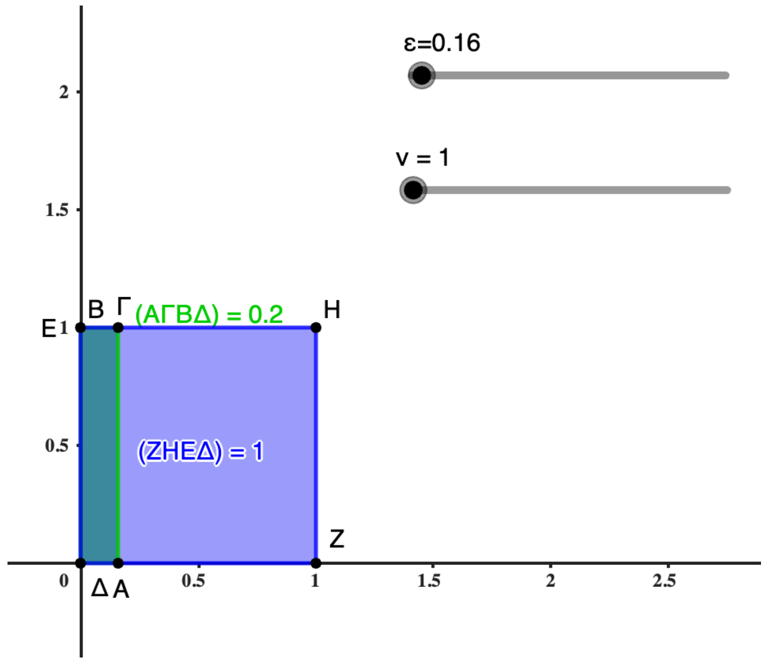
M1: Αν στο αρχικό παίγνιο [εννοεί για ε=1.25] βάλουμε ν=3, ο Ε πάλι μπορεί να κερδίσει. Αν βάλεις το ν=5 ο άλλος πάλι μπορεί να κερδίσει. Ναι! Για ό,τι ν και να βάλεις ο Ε πάλι μπορεί να κερδίσει. Άρα, μάλλον την πρώτη ομάδα [ερωτήσεων] επιλέγουμε. Ο Ε πάντα μπορεί να κερδίσει.

Είναι πλέον ξεκάθαρο από την ανάλυση των διαλόγων ότι οι δύο φοιτήτριες δεν είναι αντίπαλοι, αλλά συνεργάζονται για να ανακαλύψουν τα γεωμετρικά αναλλοίωτα, η δραστηριότητα έχει πάρει μορφή *αναστοχαστικού παίγνιου*. Στο πρώτο μέρος του παίγνιου είχαν σταθεροποιήσει το ε και προσπαθούσαν να βρουν ένα ν που να λειτουργεί ως αντιπαράδειγμα ("M1: Μήπως το ε να παραμείνει σταθερό;"). Τώρα, αλλάζουν στρατηγική επιλέγοντας να σταθεροποιήσουν το ν και να μεταβάλουν το ε και να παρατηρήσουν τι συμβαίνει ("M1: Άμα πάρουμε ν=1, ο άλλος [εννοεί τον επαληθευτή] μπορεί να νικήσει αν κάνει το ε>1") (Εικόνα 10). Με αγκύλη βρίσκονται συμπληρώσεις των φράσεων των φοιτητριών για πληρότητα τους με βάση τα συμφραζόμενα και τις κινήσεις τους κατά την καταγραφή της οθόνης του υπολογιστή τους.

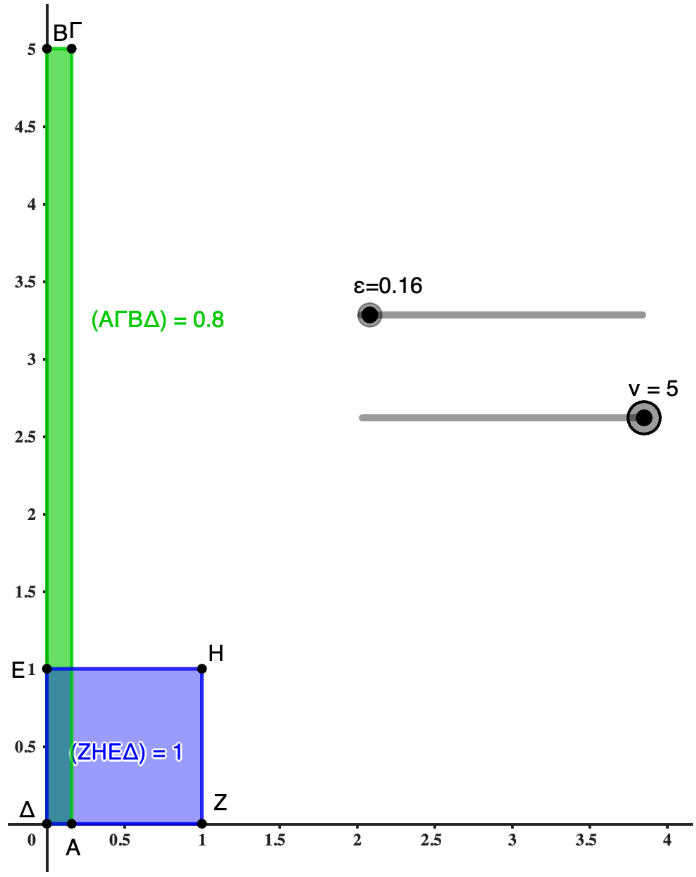
Η φοιτήτρια M1 βρίσκεται στον *ανοδικό τρόπο*. Διερευνά με πυκνότητα και ταχύτητα την οθόνη του υπολογιστή της μετακινώντας τους δύο δρομείς των δύο μεταβλητών ν και ε. Η κατάσταση στην οθόνη διερευνάται με τη χρήση του εργαλείου συρσίματος με στόχο την διατύπωση της εικασίας ότι ο επαληθευτής (Ε) μπορεί πάντα να νικήσει, για οποιαδήποτε επιλογή του ν. Η αλλαγή της στρατηγικής τους (σταθεροποιώντας το ε) τους οδηγεί στην έκφραση μιας εικασίας η οποία απαντά και το δεύτερο ερώτημα που δεν είχαν μέχρι και εκείνη τη στιγμή ασχοληθεί. Η M2 δεν συμφωνεί με την M1 και της υπενθυμίζει τους κανόνες του παίγνιου αναφέροντας ότι "Όμως εμείς δεν θέλουμε να κρατήσουμε σταθερό το ν, αλλά το ε." Η M2 βρίσκεται στον *αποστασιοποιημένο τρόπο* μιας και θυμάται γεγονότα (κανόνες) και τον τρόπο με τον οποίο έπαιζαν το παίγνιο σε προηγούμενη χρονική στιγμή και το συνδέει με την κατάσταση που αναπτύσσει η M1 στην οθόνη τους. Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το παίγνιο χρησιμοποιείται από τις φοιτήτριες ως μέσο για την διατύπωση και έλεγχο των εικασιών, αποκαλύπτοντας τις γνωστικές διαδικασίες των μαθητών και μια περισσότερο θεωρητική/τυπική προσέγγιση σε αυτό.

Απαντώντας το ερώτημα (1) οι μαθήτριες έχουν απαντήσει τελικά και το ερώτημα (2). Η διατύπωση της πρότασης τους είναι σύμφωνα με την Μ2 “Για κάθε ε>0, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός ν, που εξαρτάται από το ε, ν(ε) το γράφουμε…” και συμπληρώνει η Μ1 “Ώστε το εμβαδόν του [πράσινου χωρίου] να είναι μεγαλύτερο του 1.” Αυτήν την φορά η Μ1 προσπαθεί να ελέγξει την εικασία που μόλις διατύπωσε από κοινού με την Μ2. Για να το κάνει αυτό, αναφέρει ότι “Αλλά αν πάρεις ένα ε<0.16, τότε δεν μπορούμε να βρούμε τέτοιο ν.” και αναπαριστά την κατάσταση με τους δρομείς στο GeoGebra® (Εικόνα 11, 12).

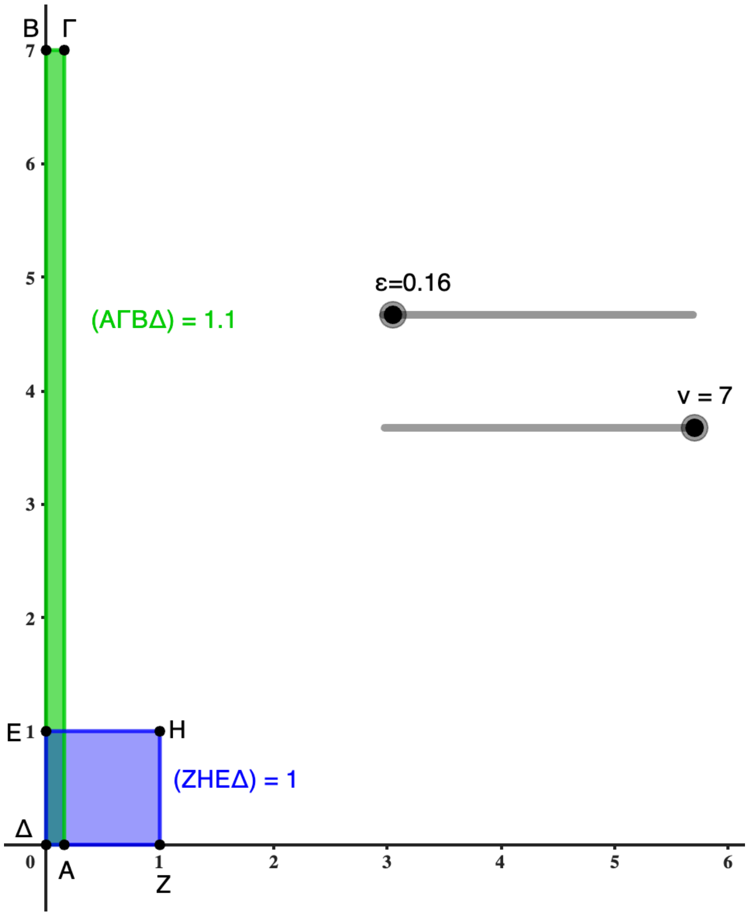
Εικόνα 11: Εντοπισμός της ελάχιστης τιμής του ν=1 και τοποθέτηση ε=0.16.



Εικόνα 12: Εντοπισμός της μέγιστης τιμής του ν=5 και σταθεροποιήσει του ε=0.16.



Η Μ2 βρίσκεται στον *καθοδικό τρόπο* μιας και προσπαθεί να ελέγξει την εγκυρότητα της εικασίας της, με χρήση του ψηφιακού εργαλείου του παίγνιου, χωρίς να προσπαθεί να διατυπώσει μια νέα εικασία. Τότε, η Μ1 απαντά ότι “Μπορούμε [να βρούμε τέτοιο ν]. Απλά δεν υπάρχει στις τιμές του ν δρομέα που μας δίνεται. Αν για παράδειγμα ν=7, τότε θα το ξεπεράσει [εννοεί ότι το πράσινο χωρίο θα έχει ξανά εμβαδόν μεγαλύτερο από το μπλε].” (Εικόνα 12).



Εικόνα 13: Εντοπισμός της καινούργιας μέγιστης τιμής του ν=7 και σταθεροποίηση του ε=0.16.

Η Μ1 βρίσκεται σε *καθοδικό τρόπο* και μάλιστα στην φάση του *λογικού ελέγχου* μιας και ο δρομέας στο ψηφιακό περιβάλλον έχει πάρει την μέγιστη τιμή του, όπως αυτές οι τιμές είχαν οριστεί από την κατασκευή του μικρόκοσμου (το ν είναι φραγμένο από το 1 και το 5, αρχικά), και εμπειρικά δεν φαίνεται να μπορεί να ικανοποιηθεί η εικασία που ανέφεραν και οι δύο φοιτήτριες. Η αλλαγή των τρόπων από ανοδικό σε καθοδικό σηματοδοτεί την εμφάνιση απαγωγής (Arzarello et al., 2002), όπως φαίνεται στην Εικόνα 14. Οι προηγούμενες παρατηρήσεις της την οδηγούν στο λογικό συμπέρασμα, ότι μπορεί να υπάρξει τέτοιο ν, αρκεί να μεγαλώσει και άλλο η τιμή που μπορεί να πάρει ο δρομέας ν. Μάλιστα, η Μ2 επιλέγει να αλλάξει μέσω της εργαλειοθήκης του GeoGebra® το πεδίο τιμών του δρομέα ν [συγκεκριμένα τοποθετεί την μέγιστη τιμή του ν, να ισούται με 10].

Φαινόμενο:	Για (ε,ν)=(1.25,3) ή (1.25,5) ή (ε,1) με ε>1, … ο επαληθευτής φαίνεται να νικά.
Κανόνας:	Ο επαληθευτής μπορεί να νικά πάντα.
Περίπτωση:	Για κάποιο συγκεκριμένο ε<0.16, αν ν=7, τότε ο επαληθευτής νικά και ο δρομέας πρέπει να μεγαλώσει τιμές.

Εικόνα 14

Η απαγωγή που παρουσιάζεται στην Εικόνα 14 χαρακτηρίζεται ως *αναλαμπή ιδιοφυΐας* (Meyer, 2023, σ. 556). Ο κανόνας εφευρίσκεται *ex novo* και έτσι η παραπάνω απαγωγή χαρακτηρίζεται ως δημιουργική. Η Μ2 φαίνεται να προσπαθεί να αλλάξει τον μικρόκοσμο που της έχει δοθεί, μιας και πλέον δεν την ικανοποιεί, αλλά είναι βέβαιη για την δυνατότητα ανακατασκευής του. Με αυτόν τον τρόπο η Μ2 φαίνεται ότι μέσα από την απαγωγή: (1) συνδέεται σε προσωπικό επίπεδο με τον μικρόκοσμο και (2) λαμβάνει θέση κατασκευαστή του μικρόκοσμου. Για εκείνη ο μικρόκοσμος πλέον θέλει αναδιαμόρφωση – επέκταση (Kynigos, 2007). Σημαντικό είναι ότι η κατασκευή της περίπτωσης ήταν και αυτή *ex novo*, όπως και ο κανόνας.

Στη συνέχεια, οι φοιτήτριες προσπάθησαν να απαντήσουν το ερώτημα (3) του φύλλου εργασίας.

Μ1:	Ωραία. Άρα πρέπει να παίρνεις πάντα μεγαλύτερο ν.
Μ2:	Ναι, αλλά δεν έχει περιορισμό, άρα το ν ανήκει στους φυσικούς, γιατί οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι [μεγαλώνει τις τιμές του δρομέα όσο θέλει για να το τονίσει].
Μ1:	Πάντα υπάρχει ένα ν που μπορείς να πάρεις. Άρα, μάλλον δεν είναι σωστή η ερώτηση (3), γιατί λέει το ανάποδο, δηλαδή ότι υπάρχει ε ώστε για κάθε ν το εμβαδόν να είναι μικρότερο ή ίσο… Η ερώτηση (3) λέει μάλλον το αντίθετο.
Μ2:	Μπράβο! Είναι ακριβώς το αντίθετο, γιατί λέει «υπάρχει» και εμείς είπαμε «για κάθε ε».
Μ1:	Θα μπορούσαμε να αποδείξουμε και το ερώτημα (4) αν ισχύει το αντίθετο τότε θα ισχύει και η άρνηση της. […] Να βάλουμε ε=1, γιατί τότε ό,τι και να γίνει [για το ν] θα είναι πάντα μεγαλύτερο από το 1. […] Ποτέ δεν θα είναι μικρότερο ή ίσο, […] γιατί οι φυσικοί όσο πάνε αυξάνονται.

Η Μ2 βρίσκεται αρχικά στον *ανοδικό τρόπο* με την διατύπωση της υπόθεσης ότι το ν δεν έχει περιορισμό στις τιμές του. Αμέσως, μετακινείται στον *καθοδικό τρόπο* προσπαθώντας να ελέγξει με τον δρομέα και τις τιμές που μπορεί αυτός να πάρει το ν. Η εναλλαγή από μια εμπειρική/ανακαλυπτική διερεύνηση σε μια ελεγκτική σηματοδοτεί ότι η Μ2 βρίσκεται στον *ουδέτερο τρόπο* και εκφράζει απαγωγή (Arzarello et al., 2002) (Εικόνα 15).

Φαινόμενο:	Ο δρομέας της μεταβλητής ν μπορεί να «μεγαλώνει» απεριόριστα και ο επαληθευτής να νικά.
Κανόνας:	Αν ο ν είναι φυσικός αριθμός, τότε η μεταβλητή ν παίρνει όλο και μεγαλύτερες (άπειρες) τιμές.
Περίπτωση:	Ο ν είναι φυσικός αριθμός.

Εικόνα 15

Η απαγωγή που παρουσιάζεται στην Εικόνα 15, αναδεικνύει την *a priori* γνώση που έχει η Μ2 γύρω από την μη ύπαρξη άνω φράγματος στο σύνολο των φυσικών αριθμών ("Ναι, αλλά δεν έχει περιορισμό, άρα το ν ανήκει στους φυσικούς, γιατί οι φυσικοί αριθμοί είναι άπειροι."). Έτσι, η εν λόγω απαγωγή χαρακτηρίζεται ως υπερκωδικοποιημένη, αφού ο κανόνας εκφράζεται με προφανή τρόπο. Η Μ2 εκφράζει την υπόθεση "Ο ν είναι φυσικός αριθμός" μέσω απαγωγής και όχι ως παραγωγή, όπως θα ήταν αναμενόμενο, δεδομένης της *a priori* γνώσης της Μ2 περί των ιδιοτήτων του συνόλου των φυσικών αριθμών. Ο λόγος της απαγωγής (Εικόνα 15) μέσα από την ανάλυση των προηγούμενων διαλόγων, φαίνεται να είναι ότι αρχικά η Μ2 εξέφραζε την πρόταση $\forall\varepsilon\exists\nu$ και την αντίθετη της, θεωρώντας ότι και οι δύο μεταβλητές ε,ν είναι θετικές, αλλά η έννοια της μη ύπαρξης άνω φράγματος φαίνεται να είναι ταυτισμένη, για εκείνη, με το σύνολο των φυσικών αριθμών. Ο κανόνας (Εικόνα 15) φαίνεται να προέρχεται από μια άλλη πιθανή απαγωγή της Μ2 (Εικόνα 16). Η απαγωγή (Εικόνα 16) είναι εσφαλμένη, μιας και παρόλο που ο κανόνας είναι αληθής, υπάρχουν άπειρα πραγματικά υποσύνολα που δεν είναι άνω φραγμένα, αλλά δεν ταυτίζονται με το σύνολο των φυσικών αριθμών. Ένα τέτοιο για παράδειγμα, είναι το σύνολο $[0,+\infty)$. Για το $[0, +\infty)$ ισχύει ότι $[0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$ και ότι δεν είναι άνω φραγμένο, αλλά το $[0,+\infty)$ προφανώς δεν είναι ίσο με το $\mathbb{N}$. Η απαγωγή (Εικόνα 16) είναι υπερκωδικοποιημένη μιας και ο κανόνας εκφράζεται με προφανή τρόπο.

Φαινόμενο:	Το $X \subseteq \mathbb{R}$ δεν είναι άνω φραγμένο.
Κανόνας:	Αν το $X = \mathbb{N}$, τότε το X δεν είναι άνω φραγμένο.
___________	
Περίπτωση:	Ισχύει ότι το $X = \mathbb{N}$.

Εικόνα 16

Η σφαλερότητα του κανόνα στην απαγωγή της Εικόνας 14, αναδεικνύει την έννοια της *αναλαμπής* (Meyer, 2023) που την χαρακτηρίζει κατά την δόμηση της:

"Η απαγωγική πρόταση μας έρχεται σαν αστραπή. Πρόκειται για μια πράξη αναλαμπής, αν και εξαιρετικά εσφαλμένη αναλαμπή. Είναι αλήθεια ότι τα διάφορα στοιχεία της υπόθεσης υπήρχαν στο μυαλό μας και προηγουμένως: αλλά είναι η ιδέα της του να συνθέσουμε όλα αυτά τα κομμάτια που ούτε που φανταζόμασταν ποτέ ότι θα μπορούσαμε να τα συνθέσουμε, που δημιουργεί αυτήν την αναλαμπή της νέας πρότασης μπροστά στα μάτια μας." (Peirce CP 5.181)

Η διατύπωση της απαγωγής (Εικόνα 15) φαίνεται να αποσαφηνίζει για την Μ2 ότι πλέον η μεταβλητή ν είναι φυσικός αριθμός κάτι που ήρθε ως εσφαλμένη απαγωγή (Εικόνα 16). Εντούτοις, η υπόθεση ότι "η μεταβλητή ν είναι φυσικός αριθμός" είναι έγκυρη. Αξιοσημείωτο είναι ότι η Μ2 επιλέγει να επεξήγηση την υπόθεση ότι "ο δρομέας λαμβάνει απεριόριστες (μεγάλες) τιμές" μέσα από την διατύπωση απαγωγής και όχι παραγωγής. Ο αντίστοιχος παραγωγικός συλλογισμός *modus ponens*, θα μπορούσε να δομηθεί ως εξής:

Ο δρομέας της μεταβλητής ν είναι φυσικός αριθμός.
Το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν έχει άνω φράγμα.
____
Επομένως, ο δρομέας μπορεί να λαμβάνει απεριόριστα μεγάλες τιμές.

Η επιλογή της υπόθεσης να εκφραστεί ως απαγωγή και όχι ως παραγωγή για την έκφραση της υπόθεσης περί "απεριόριστων τιμών του δρομέα της μεταβλητής ν" αναδεικνύει την παράκαμψη της Μ2 στο να αξιοποιήσει την πληροφορία που της δίνει ο βηματισμός (step) της μεταβλητής ν, που φαίνεται κατά το σύρσιμο του δρομέα εντός του δοσμένου μικρόκοσμου.

Στη συνέχεια, οι φοιτήτριες συνδέουν τις δύο παραπάνω απαγωγές με λογικό τρόπο με το ερώτημα (3) του ερωτηματολογίου. Παρατηρούν από την απαγωγή της Εικόνας 15 ότι υπάρχει ήδη ένα πεπερασμένο πλήθος νικών του επαληθευτή. Η υπόθεση ότι η πρόταση του ερωτήματος (3) είναι ψευδής φαίνεται να εκφράζεται μέσα από την a priori γνώση των φοιτητριών στην έννοια της αντίθετης μαθηματικής πρότασης. Έτσι, η απαγωγή που ακολουθεί στην Εικόνα 17 δομείται.

Φαινόμενο:	Η πρόταση $\forall \varepsilon_i \exists \nu_i$ (ΒΓΑΔ) $>$ (ΕΗΖΔ) είναι αληθής, για κάθε πεπερασμένο πλήθος δεικτών i.
Κανόνας:	Αν η πρόταση $\exists \varepsilon \forall \nu R(\varepsilon, \nu)$ είναι ψευδής, τότε η αντίθετη πρόταση $\forall \varepsilon \exists \nu \neg R(\varepsilon, \nu)$ είναι αληθής.
Περίπτωση:	(Μάλλον) η πρόταση $\exists \varepsilon \forall \nu$(ΒΓΑΔ) $\leq$ (ΕΗΖΔ) είναι ψευδής.

Εικόνα 17

Ταυτόχρονα, το παραπάνω απόσπασμα είναι βασικό για την εναλλαγή της εμπειρικής διερεύνησης σε μια πιο τυπική/φορμαλιστική ανάπτυξη επιχειρήματος. Έτσι, αναδεικνύεται η σύνδεση της ικανοποίησης της πρότασης που διατυπώνεται στο ερώτημα (3), με την περατότητα των φυσικών αριθμών, κάτι που τους βοηθάει τελικά να αποδείξουν την Αρχιμήδεια Ιδιότητα, δηλαδή το ερώτημα (4), που διατύπωσαν στο ερώτημα (2) και αυτό γιατί οι φοιτήτριες τελικά κατάλαβαν ότι οι δύο προτάσεις των ερωτημάτων (2) και (3) είναι αντίθετες ("Η ερώτηση (3) λέει το αντίθετο", "Μπράβο! Είναι ακριβώς το αντίθετο, γιατί λέει *υπάρχει* και εμείς είπαμε *για κάθε ε*."). Με αυτόν τον τρόπο οι τρεις απαγωγές (Εικόνες 13, 14, 15) φαίνεται να γενούν μια λογική αλυσίδα και να καθορίζουν την επιχειρηματολογία των φοιτητριών.

Οι φοιτήτριες συνδέοντας τα ερωτήματα (2) – (4), αντιλήφθηκαν ότι έπρεπε να δουλέψουν με εις άτοπο απαγωγή (αντίφαση). Καταλυτική ήταν η διαμόρφωση της απαγωγής στην Εικόνα 17. Η Μ2 έδωσε την απόδειξη της επιλέγοντας να σταθεροποίηση μία συγκεκριμένη τιμή για το ε (συγκεκριμένα ε=1) κάτι που χωρίς βλάβη της γενικότητας δεν αλλοιώνει το γενικότερο επιχείρημα της που βασίζεται στην αδυναμία περατότητας των φυσικών αριθμών ή ισοδύναμα στο ότι το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο. Η σύνδεση των ερωτημάτων με το παίγνιο ερμηνεύεται μέσα από τον τρόπο που χρησιμοποιούν τελικά και οι δύο φοιτήτριες, που είναι ο *αποστασιοποιημένος τρόπος*.

Οι φοιτήτριες από την παραπάνω διαδικασία φάνηκε ότι έχουν μετακινηθεί από τον έντονο πειραματισμό με το ψηφιακό εργαλείο σε έντονα λογικούς συλλογισμούς. Ενώ έχουν απαντήσει από το ερώτημα (3) και το ερώτημα (4) συνεχίζουν το ερώτημα (4) αναπτύσσοντας πάλι συλλογισμούς, για να επαληθεύσουν τις διαδικασίες που είχαν διατυπώσει. Η διαφορά με πριν ήταν ότι πλέον επικεντρώνονται στην μέθοδο απόδειξης που θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν και την αναφέρουν ρητά. Ταυτόχρονα, φαίνεται να μην είναι πεπεισμένες για την εγκυρότητα των συλλογισμών τους, πριν.

M1: Μπορούμε να αποδείξουμε το ερώτημα (3), που είναι το αντίθετο. Αν ισχύει το αντίθετο θα ισχύει και η άρνηση της…

M2: Με άτοπο, δηλαδή, να πάμε; […] Να πούμε "έστω ότι ισχύει το ερώτημα (3)" και να βρούμε την τιμή [του ε] που το αποκλείει και να το απορρίψουμε. [ψάχνει τιμές του ε στο GeoGebra®]

Η M1 αρχικά συνδέει τα ερωτήματα (3) και (4) μιας και έχουν αντιληφθεί από πριν ότι η πρόταση της ερώτησης (3) είναι αντίθετη της πρότασης που θέλουν να αποδείξουν, δηλαδή έχει διαμορφωθεί από την M1 ότι $\neg p \Longrightarrow q$ που είναι ταυτολογία, όπου:

p: Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\nu \in \mathbb{N}$, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΓΑΔ να είναι μικρότερο ή ίσο από το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΗΖΔ.

q: Υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο, ώστε για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ το εμβαδόν του ορθογωνίου ΒΓΑΔ να είναι μικρότερο ή ίσο από το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΗΖΔ.

Η ιδέα της M1 επηρεάζει την M2 η οποία με τη σειρά διαμορφώνει την εικασία ότι πρέπει να δουλέψουν με εις άτοπο απαγωγή (μέθοδος αντίφασης). Θεωρώντας, δηλαδή, ότι ισχύει η $\neg p$, δηλαδή η q, να καταλήξουν ότι δεν μπορεί να πραγματοποιείται αυτό, δηλαδή ότι δεν υπάρχει μια τέτοια γεωμετρική αναπαράσταση στο περιβάλλον του παίγνιου. Για να το πραγματοποιήσουν αυτό προσπαθούν να βρουν ένα ε για το οποίο να καταρρέει η πρόταση q. Ο τρόπος που λειτουργούν είναι μέσω αντιπαραδείγματος. Η εύρεση της ταυτολογίας $\neg p \Longrightarrow q$ φαίνεται να συμβαίνει μέσα από τον αποκλεισμό κάθε άλλης δυνατής περίπτωσης, όπου κάθε άλλη δυνατή περίπτωση έκφρασης της άρνησης της πρότασης απορρίφθηκε μέσω του ψηφιακού εργαλείου GeoGebra® εντός του πλαισίου της LI. Σημαντικό είναι ότι η προηγούμενη απόδειξη που είχαν δώσει στο ερώτημα (3) φαίνεται εδώ ότι δεν τους ικανοποιεί και δεν είναι αποδεκτή ως λογικά ορθή και πλήρης, ενώ το αντιπαράδειγμα είναι αποδεκτός τρόπος απόδειξης. Οι παραπάνω διεργασίες συλλογισμού των φοιτητριών συνδυάζουν τρόπους *λογικού ελέγχου*, καθώς και *ουδέτερου τρόπου*.

Οι φοιτήτριες κατάφεραν να μετακινηθούν από την πειραματική/εμπειρική σε πιο τυπική/φορμαλιστική φάση μέσα από την εμπλοκή τους με το *σημασιολογικό παίγνιο* που τους δόθηκε. Αξιοσημείωτο είναι ότι κατάφεραν να συνδέσουν λογικά την Αρχιμήδεια Ιδιότητα με την πρόταση (λογικό ισοδύναμο):

P: Το σύνολο των φυσικών αριθμών δεν είναι άνω φραγμένο.

Οι Μ1 και Μ2 διατύπωσαν τελικά την πρόταση P, η οποία όμως θεωρήθηκε ως *διαισθητικά προφανής* και *αναπόδεικτη*. Θα λέγαμε, ότι η P έχει τον ρόλο *αξιώματος* για εκείνες.

5. Συζήτηση – Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία διαμορφώνεται επί ενός πειράματος διδασκαλίας με μαθητές τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, σε περιβάλλον DGE (χρήση του λογισμικού GeoGebra®) που είχε ως στόχο την προσέγγιση ενός βασικού γεωμετρικού θεωρήματος που διδάσκεται σε εισαγωγικά μαθήματα Απειροστικού Λογισμού (Αρχιμήδεια Ιδιότητα). Η λογική της διερεύνησης του Hintikka (1991), έχει χρησιμοποιηθεί στην βιβλιογραφία για την μελέτη/ανάπτυξη προτασιακών λογικών δομών των μαθητών (Asenova, 2022; Barrier, Durand-Guerrier & Mesnil, 2019; Nicolas & Gascón, 2018; Barrier et al., 2009; Blossier et al., 2009) καθώς και για την μετάβαση από την πειραματική στην πιο τυπική μορφή απόδειξης (Soldano & Arzarello, 2016, 2018; Arzarello & Soldano, 2019) στην γεφύρωση του κενού μεταξύ πειραματικής/εμπειρικής φάσης και λογικής/τυπικής φάσης, σε κομμάτι της διδακτικής της γεωμετρίας, στην δευτεροβάθμια εκπαίδευση εντός περιβάλλοντος δυναμικής γεωμετρίας. Στην τριτοβάθμια εκπαίδευση δεν υπάρχουν πολλές αναφορές, παρόλο που το επιστημολογικό και γνωστικό κενό των μαθητών μεταξύ των δύο φάσεων μεγεθύνεται περισσότερο: γνωστικές δυσκολίες με προχωρημένες μαθηματικές έννοιες έχουν αναφερθεί (Weber, 2001; Tall, 2008).

Ταυτόχρονα, τα εκπαιδευτικά ιδρύματα δυσκολεύονται ολοένα και περισσότερο να βρουν τρόπους που να άρουν το κενό αυτό. Μάλιστα, αρκετοί ερευνητές εντοπίζουν ένα χάσμα μεταξύ του σχολικού και του πανεπιστημιακού περιεχομένου των μαθηματικών (Luk, 2005; Kajander & Lovric, 2005; Winsløw, 2013), ενώ άλλοι εντοπίζουν σημαντικές αλλαγές που επηρεάζουν τους μαθητές κατά τη μετάβαση από τη δευτεροβάθμια στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Αυτές περιλαμβάνουν το νέο ακαδημαϊκό και κοινωνικό περιβάλλον καθώς και τη στροφή που απαιτείται σε έναν διαφορετικό μαθηματικό τρόπο σκέψης και μελέτης (Cherif & Wideen, 1992; Tall, 1992).

Μια συχνή μορφή απόδειξης των μαθητών και στην δευτεροβάθμια και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση είναι η έμμεση απόδειξη κατά την οποία δημιουργούνται σημαντικά γνωστικά και επιστημολογικά ζητήματα (Mariotti & Antonini, 2009). Στην παρούσα εργασία πέρα από την μελέτη του εμπειρικού προς λογικού κενού της απόδειξης, επικεντρωθήκαμε στην απόδειξη μέσω αντίφασης, εντός του πρίσματος της LI, εντός του πλαισίου της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης σε φοιτήτριες του πρώτου έτους. Η γεφύρωση αυτή επιχειρήθηκε μέσα από την εμπλοκή δύο φοιτητριών με παιγνιο-δραστηριότητα κατάλληλα κατασκευασμένη, ώστε να αναδεικνύει τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του προβλήματος και να ενεργοποιεί την λογική της διερεύνησης του Hintikka. Τα εργαλεία ανάλυσης χωρίστηκαν σε δύο επίπεδα όπως χρησιμοποιήσαν οι Arzarello και Soldano (2018, 2019).

Με το πρώτο επίπεδο εξετάστηκε αν και πως ενεργοποίησαν οι μαθητές την λογική της διερεύνησης. Τα αποτελέσματα έδειξαν ότι οι δύο φοιτήτριες ενεργοποίησαν την LI μέσα από την ανάπτυξη μορφών στρατηγικών συλλογισμών του Hintikka (1999), όπως στρατηγικός και αντίστροφου τύπου συλλογισμός καθ' όλη τη διάρκεια εμπλοκής τους με την παιγνιο-δραστηριότητα, η οποία λειτούργησε με τέτοιον τρόπο, που κατάφεραν να διατυπώσουν ακριβείς, ορθές μαθηματικές προτάσεις και λογικά συμπεράσματα. Μέσα από την ανάδειξη αυτών των στρατηγικών τρόπων συλλογισμού μπόρεσαν να βρουν αυτή την στρατηγική που τους οδηγούσε στην νίκη του παιχνιδιού και στην κατάρρευση του παραποιητή. Αυτό οφείλεται και στην κατασκευή του task σε δύο μέρη: (1) το μέρος του παιχνιδιού και (2) το μέρος των ερωτήσεων. Τα μέρη αυτά τελικά έπαιξαν αλληλένδετο ρόλο. Οι στρατηγικοί τρόποι συλλογισμού που αναπτύχθηκαν από τις φοιτήτριες ανέδειξαν την αλλαγή των αναπαραστάσεων στην γεωμετρία που αναφέρει ο Duval (2006). Στην πειραματική φάση οι φοιτήτριες αλληλοεπιδρούσαν μεταξύ των γεωμετρικών και αριθμητικών αναπαραστάσεων που περιέγραφαν την Αρχιμήδεια Ιδιότητα. Αναπτύχθηκε όμως και μία τρίτη αναπαράσταση μέσω παιχνιδιού (*παιγνιο-αναπαράσταση*). Οι γεωμετρικές ή αριθμητικές μεταβολές συνδέθηκαν με τους στρατηγικούς και ορισμένους κανόνες της παιγνιο-δραστηριότητας ευρήματα που συμφωνούν με έρευνα των Soldano και Arzarello (2016, 2018, 2019).

Με το δεύτερο επίπεδο ανάλυσης αναδείχθηκαν αποτελέσματα που έδειξαν τον ρόλο με τον οποίο αναπτύχθηκαν οι μαθηματικές ιδέες των φοιτητριών στο παιχνίδι που δούλεψε ως περιβάλλον αναφοράς (Soldano & Arzarello, 2018) και ήταν σε άμεση σύνδεση και με τα δύο μέρη του task. Κατά την ενασχόληση των μαθητών με το δεύτερο μέρος του ερωτηματολογίου παρατηρήθηκε σημαντική αλλαγή των τρόπων γνωστικού χαρακτηρισμού του μοντέλου ΕΕΕ. Έτσι, οι φοιτήτριες ενεπλάκησαν έντονα με τις φάσεις πειραματισμού, εικασίας και επικύρωσης των εικασιών τους εντός του πλαισίου της LI με την LI να λειτουργεί ως συνδετικός κρίκος που καθοδηγεί τις τρεις φάσεις. Ο Tall (1991) αναφέρει:

> "Τα προχωρημένα μαθηματικά, από τη φύση τους, περιλαμβάνουν έννοιες που διαφέρουν διακριτικά από την απλή εμπειρία. Τέτοιες ιδέες απαιτούν μια τεράστια προσωπική αναδόμηση, για να δημιουργηθεί ο γνωστικός μηχανισμός που θα τις χειριστεί αποτελεσματικά. Πρόκειται για έναν αγώνα... και μια άμεση αντιμετώπιση αναπόφευκτων συγκρούσεων, οι οποίες απαιτούν επίλυση και αναδόμηση" (σελ. 252)

Το πλαίσιο που αναπτύχθηκε εντός της LI είναι σε συνάρτηση με την παραπάνω αναφορά του Tall. Οι συγκρούσεις φάνηκαν από την έντονη αλλαγή των διαφόρων *τρόπων* (καθοδικός, ουδέτερος, ανοδικός, αποστασιοποιημένος, λογικός έλεγχος). Οι φοιτήτριες διαμόρφωσαν όλους τους παραπάνω *τρόπους*. Η επίλυση, επίσης, διαμορφώθηκε από την μετατροπή των καθοδικών/ουδέτερων/ανοδικών τρόπων σε αποστασιοποιημένων/λογικού ελέγχου. Οι αλλαγές αυτές δηλώνουν, ταυτόχρονα, και την γεφύρωση από τους εμπειρικούς σε λογικούς τρόπους, δίνοντας ένα πλαίσιο που καλύπτει το επιστημολογικό κενό που αναφέρει ο Balacheff (1988) για την εγκυρότητα της απόδειξης και της λογικής επαλήθευσης, ενώ παράλληλα φάνηκε να γεφυρώνουν τους δύο κόσμους (γλωσσικούς, λογικούς) της Epp (2003). Ο συνδυασμός των μερών του task φάνηκε να συνδέει φυσιολογικά την πειραματική με την τυπική διαδικασία απόδειξης, εντός του πλαισίου της LI. Ταυτόχρονα, φάνηκε να είναι ισχυρός για την εννοιολογική κατανόηση των αποδείξεων, πληρώντας τα επίπεδα που αναφέρει η Hanna (1991), για τις έμμεσες αποδείξεις, αφού οι φοιτήτριες κατάφεραν να κατασκευάσουν απόδειξη και μέσω αντίφασης, αναλύοντας τις επιμέρους λογικές δομές και εγκυρότητες για την παραγωγή της απόδειξης. Η παραγωγή μαθηματικής απόδειξης προέκυψε από ισχυρές αλλαγές στους τρόπους, ενώ τα αποτελέσματα έδειξαν ένα κυκλικό μοτίβο τρόπων (ανοδικός → ουδέτερος → καθοδικός).

Οι Durand-Guerrier et al. (2012), για τον ρόλο της λογικής στην απόδειξη, αναφέρουν ότι:

> "Οι μαθητές που μαθαίνουν ένα νέο μαθηματικό αντικείμενο στερούνται της πλούσιας γνωστικής βάσης των καθηγητών τους. […] οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση τόσο να αντλούν δηλώσεις από άλλες καταστάσεις μέσω λογικών κανόνων, όσο και να εξετάζουν αντιπαραδείγματα, να διερευνούν υποστηρικτικά παραδείγματα, να εργάζονται με ένα γενικό παράδειγμα κ.ο.κ."

Καταλήγουν ότι θα ήταν καλό να αναπτυχθεί ένα *πλαίσιο* για την ολοκληρωμένη μελέτη της πολυπλοκότητας της διαδικασίας απόδειξης στο σύνολό της και να δοθεί το εκπαιδευτικό υπόβαθρο για την προώθηση της ικανότητας των μαθητών στην επιχειρηματολογία και την απόδειξη, συμπεριλαμβανομένων ζητημάτων που αφορούν τη λογική και τη γλώσσα, που είναι βασικές πτυχές της απόδειξης και της απόδειξης στη μαθηματική εκπαίδευση. Με βάση τα αποτελέσματα μας, ισχυριζόμαστε ότι η LI μπορεί να προσφέρει αυτό το πλαίσιο, σημαντικό κομμάτι του οποίου θεωρούμε ότι είναι η έννοια της οπτικοποίησης. Ακόμη, συμπεραίνουμε από τα αποτελέσματα ότι το πλαίσιο αυτό της LI είναι ισχυρό για την γεφύρωση των γνωστικών κενών των μαθητών κατά την έκφραση αρνήσεων κατηγορηματικών προτάσεων της μορφής $\forall a \exists b\ S(a,b)$, όπως είχαν διαπιστώσει οι Inglis & Simpson (2008). Η γεφύρωση αυτή πραγματοποιήθηκε μέσα από τον αποκλεισμό κάθε άλλης δυνατής περίπτωσης, όπου κάθε άλλη δυνατή περίπτωση έκφρασης της άρνησης της πρότασης απορρίφθηκε μέσω του ψηφιακού εργαλεία εντός της LI. Επιπλέον, αναδείχθηκε το επιστημολογικό πρόβλημα των μαθητών γύρω από την έννοια της έμμεσης απόδειξης: οι φοιτήτριες αδυνατούσαν να αποδεχθούν πλήρως την εγκυρότητα της απόδειξης μέσω αντίφασης, προσπαθώντας (ενώ είχαν ήδη δώσει ορθή απόδειξη της πρότασης) να κατασκευάσουν αντιπαράδειγμα σε συνάρτηση με το ψηφιακό περιβάλλον. Το αποτέλεσμα αυτό έρχεται σε συμφωνία με αντίστοιχη βιβλιογραφία στο πεδίο των έμμεσων αποδείξεων (π.χ. Antonini & Mariotti, 2008; Antonini, 2019).

Η οπτικοποίηση έχει μελετηθεί εκτενώς στην βιβλιογραφία (Suwarsono, 1982; Razel & Eylon, 1990; Hershkowitz & Markovits, 1992; Whiteley, 2004; Hanna & Sidoli, 2007; Giaquinto, 2007; Presmeg, 2008a; Nardi, 2014). Ισχυριζόμαστε ότι η ανάγκη οπτικοποίησης των επιμέρους λογικών θεωρημάτων είναι (όπου είναι δυνατό) επιτακτική για την καλύτερη κατανόηση τους όχι μόνο στο καθαρό περιβάλλον

Ευκλείδειας γεωμετρίας, αλλά και γενικότερα και ότι το παραπάνω πλαίσιο εντός της LI μπορεί να είναι καθοριστικό σε αυτήν την πορεία. Οι Mancosu et al. (2005) κατέληξαν ότι η συμβολή των οπτικών αναπαραστάσεων κατά την ανάπτυξη της μαθηματικής απόδειξης είναι σημαντική. Συμπληρώνουμε ότι η λογική της διερεύνησης εντός των DGEs και οι εναλλαγές των *τρόπων* που περιγράφτηκαν σε συνδυασμό με την οπτικοποίηση των μαθηματικών εννοιών που εμπλέκονται στην παιγνιο-δραστηριότητα λειτουργούν ως ένα πλαίσιο που μπορεί να αξιοποιηθεί για την ανάπτυξη αποδείξεων και ειδικότερα έμμεσων.

Η παιγνιο-δραστηριότητα που αναπτύχθηκε στην παρούσα μελέτη φάνηκε να δημιουργεί μια ομαλή γέφυρα μεταξύ εμπειρικής/πειραματικής και λογικής/τυπικής φάσης κατά την δημιουργία απόδειξης από τους μαθητές. Μάλιστα, οι μαθητές ήταν φοιτήτριες τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Έτσι, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι παιγνιο-δραστηριότητες εντός της LI μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στην τριτοβάθμια εκπαίδευση προσθέτοντας ένα ακόμα εργαλείο στους διδάσκοντες. Η παραπάνω λογική δεν αναιρεί την ανάγκη λογικά ορθών εκφράσεων από τους μαθητές, εντός ενός αξιωματικού πλαισίου. Μάλιστα, ο τρόπος που αναπτύχθηκε το task ανέδειξε την άμεση σύνδεση και αλληλεπίδραση της παιγνιο-δραστηριότητας με το αξιωματικό σύστημα θεμελίωσης (π.χ. ιδιότητες συνόλου φυσικών αριθμών). Ταυτόχρονα, τα αποτελέσματα (ανάλυση των *τρόπων*) ήρθαν σε συμφωνία με άλλα αποτελέσματα της βιβλιογραφίας (Soldano & Arzarello, 2018) για την σημαντικότητα της σωστής ανάπτυξης του φύλλου εργασίας, χωρισμένο σε δύο μέρη: πειραματισμού και ερωτηματολογίου λογικής/τυπικής ανάπτυξης. Η ανάπτυξη της λογικής/τυπικής φάσης μέσω του ερωτηματολογίου φάνηκε να είναι σημαντική για την ομαλή διασύνδεση.

Η ενεργοποίηση της LI μέσω των στρατηγικών τρόπων συλλογισμού και η συμμετοχή της στην γεφύρωση των εμπειρικών – τυπικών φάσεων απόδειξης υποστηρίχθηκε επιπλέον μέσα από την ανάπτυξη απαγωγικής επιχειρηματολογίας, απαραίτητο συστατικό της διερευνητικής μάθησης μιας και όπως αναφέρει ο Peirce:

“Η απαγωγή είναι ο μόνος τρόπος συμπερασμού που νέα γνώση προκύπτει.” (Peirce CP 5.171)

Όμως, δεν είναι όλα τα είδη απαγωγών το ίδιο ικανά για να διαμορφώσουν την διερευνητική μάθηση. Η έννοια της *έκπληξης* και της *διαίσθησης* είναι σημαντικές σε αυτήν την κατεύθυνση (Meyer, 2023; Ernest, 2023). Αυτές με την σειρά τους αναδεικνύονται μέσα από τις υποκωδικοποιημένες και τις δημιουργικές απαγωγές, μιας και στις υπερκωδικοποιημένες απαγωγές το παρατηρούμενο φαινόμενο είναι προφανώς γνωστό από πριν. Έτσι, η σύνδεση του γνωστού κανόνα με το φαινόμενο είναι λίγο πολύ αυτόματη. Τα αποτελέσματα ανέδειξαν την ύπαρξη όλων των μορφών απαγωγής συνιστώντας έτσι την δημιουργία νέας γνώσης από τις φοιτήτριες κατά την εμπλοκή τους με την παιγνιο-δραστηριότητα και το ερωτηματολόγιο εντός του πλαισίου της LI. Ταυτόχρονα, παρατηρήθηκε ότι όταν η επιχειρηματολογία αναπτύχθηκε μέσω δημιουργικής απαγωγής (Εικόνα 51), η αλληλεπίδραση της φοιτήτριας με το μικρόκοσμο του ψηφιακού περιβάλλοντος GeoGebra® ώθησε την ίδια να τροποποιήσει τον μικρόκοσμο με τρόπο τέτοιον ώστε, να δράσει κονστρουκτιονιστικά, λαμβάνοντας την θέση κατασκευαστή (Harel & Papert, 1991; Ackermann, 2001; Kynigos, 2015). Αναδεικνύεται έτσι, ότι κατά την αλληλεπίδραση με τους μικρόκοσμους των DGEs σημαντική είναι η κατασκευαστική διάσταση, ενώ η ανάπτυξη των δημιουργικών απαγωγών πιθανά έχει σημαντικό ρόλο σε αυτήν σε συνέργεια με την LI.

Τα αποτελέσματα ανέδειξαν τη συνέργεια της εμπειρικής και τυπικής φάσης της παιγνιο-δραστηριότητας. Οι φοιτήτριες κατάφεραν να αναπτύξουν μετα–γνώση γύρω από την απόδειξης της έμμεσης απόδειξης: ανάπτυξη όχι μόνο της γνώσης των επιμέρους προτάσεων, της εις άτοπο απαγωγής και των εφαρμογών της, αλλά και της παραγωγικής απόδειξης και της επίγνωσης κρίσιμων μετα-γνώσεων σχετικά με την Αρχιμήδεια Ιδιότητα, όπως είναι ο ρόλος των ποσοδεικτών και ο ρόλος των έγκυρων και αντίστροφων προτάσεων. Οι Boero & Turiano (2019) θέτουν το ερώτημα αν είναι δυνατόν να μειωθούν οι δυσκολίες των μαθητών στην απόδειξη με τη νομιμοποίηση ορισμένων τρόπων επίλυσης προβλημάτων γεωμετρίας και επικύρωσης προτάσεων αυθόρμητα. Καταλήγουν πως αυτό που έχει σημασία είναι να υπάρχει *γνωστική ενότητα* (*cognitive unity*) που να στηρίζεται στην γνωστικής συνέχεια μεταξύ των φάσεων της παραγωγής εικασιών (εμπειρική φάση) και της κατασκευής αποδείξεων (τυπική φάση). Η Pedemonte (2007) ανέφερε ότι η γνωστική ενότητα βασίζεται σε δύο επίπεδα: (α) το *σύστημα αναφοράς*, που αποτελείται από το σύστημα αναπαράστασης (π.χ. η γλώσσα, οι ευρετικές μέθοδοι και τα διαγράμματα) και το σύστημα γνώσης (π.χ. έννοιες και θεωρήματα) της επιχειρηματολογίας και της απόδειξης, καθώς και (β) τη *δομή* που επιτρέπει τη λογική γνωστική σύνδεση μεταξύ των δηλώσεων (π.χ. δομές παραγωγής, απαγωγής και επαγωγής). Τα αποτελέσματα ανέδειξαν την δομική συνέχεια μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης αφού τα συμπεράσματα στην επιχειρηματολογία και την απόδειξη συνδέθηκαν με απαγωγές, που δημιούργησαν με τη σειρά τους λογική αλυσίδα, με περιεχόμενο που παρέμενε στο πλαίσιο της απόδειξης. Οι Garuti, Boero & Lemut (1998, σελ. 345) αναφέρουν:

«Κατά τη διάρκεια της παραγωγής της εικασίας, ο μαθητής επεξεργάζεται προοδευτικά τη δήλωσή του μέσα από μια εντατική επιχειρηματολογική δραστηριότητα που περιπλέκεται λειτουργικά με την αιτιολόγηση της αληθοφάνειας των επιλογών του. Κατά τη διάρκεια του επόμενου σταδίου της απόδειξης της πρότασης, ο μαθητής συνδέεται με αυτή τη διαδικασία με συνεκτικό τρόπο, οργανώνοντας ορισμένα από τα επιχειρήματα που παρήγαγε προηγουμένως σύμφωνα με μια λογική αλυσίδα.»

Με βάση το παραπάνω και τα αποτελέσματα, συμπεραίνουμε ότι η συνεκτικότητα και η οργάνωση των επιχειρημάτων σε λογική αλυσίδα βασίζεται στην συνεκτικότητα και την οργάνωση των απαγωγών που έχουν εκφραστεί, προσπαθώντας να μετατραπούν οι απαγωγικοί συλλογισμοί σε παραγωγικούς, κατά την τυπική φάση. Με αυτόν τον τρόπο, οι απαγωγές είναι αυτές που «οδηγούν» την νέα επιχειρηματολογία, ενώ κλειδί είναι να παραμένουν συνεκτικές (κανόνας και φαινόμενο) στην εκάστοτε θεωρία (Mariotti, 2001), ακόμη και αν είναι σφαλερές. Το πείραμα υποδηλώνει ότι ο προσεκτικός σχεδιασμός μπορεί να επιτρέψει στους φοιτητές να αναπτύξουν έναν καλό τρόπο μελέτης των θεωρημάτων στα πλαίσια της LI, καθώς θα μπορούσαν να εμπλακούν σε διαδικασίες επιχειρηματολογίας που μπορούν να υποστηρίξουν τη διαμόρφωση εικασιών, έτσι ώστε οι φοιτητές να μην διαβάζουν και να μην ακολουθούν απλώς προκατασκευασμένες αποδείξεις (Alcock et al., 2015). Γνωρίζουμε, ωστόσο, ότι απαιτείται περαιτέρω έρευνα για να δοθεί μια πληρέστερη απάντηση στο ζήτημα του πώς και σε ποιο βαθμό οι παιγνιο-δραστηριότητες ενθαρρύνουν την ενοποίηση της παραγωγής εικασιών και της κατασκευής αποδείξεων από τους μαθητές.
Τέλος, τα αποτελέσματα ανέδειξαν και την χρήση των απαγωγών ως ένα εργαλείο εντοπισμού σφαλερών συλλογισμών. Όπως αναφέρουν και οι Rivera & Becker (2007) η απαγωγή είναι πολλές φορές σφαλερός συλλογισμός. Η απαγωγή της Εικόνας 14 είναι μια τέτοια περίπτωση, όπου αναδεικνύονται παρανοήσεις της φοιτήτριας, γύρω από έννοια των φραγμένων συνόλων. Έτσι, η σφαλερές απαγωγές πιθανά μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως εργαλείο εύρεσης παρανοήσεων αναδιαμορφώνοντας και επηρεάζοντας τις πρακτικές διδασκαλίας του διδάσκοντα (Potari, 2018; Potari et al., 2011).

6. Βιβλιογραφία

6.1 Ξενόγλωσση

Ackermann, E. (2001). Piaget's constructivism, Papert's constructionism: What's the difference. Future of learning group publication, 5(3), 438.

Adúriz-Bravo, A., & Sans Pinillos, A. (2023). Abduction as a mode of inference in science education. Science & Education, 32(4), 993-1020.

Alcock, L., Hodds, M., Roy, S., & Inglis, M. (2015). Investigating and improving undergraduate proof comprehension. Notices of the AMS, 62(7), 742-752.

Antonini, S., & Mariotti, M. A. (2008). Indirect proof: what is specific to this way of proving?. *ZDM*, *40*(3), 401-412.

Antonini, S., & Mariotti, M. A. (2010). Abduction and the explanation of anomalies: The case of proof by contradiction. In *Proceedings of the 6th Conference of European Research in Mathematics Education* (pp. 322-331).

Antonini, S. (2019). Intuitive acceptance of proof by contradiction. *ZDM*, *51*(5), 793-806.

Arsac, G., Germain, G., & Mante, M. (1991). Problème ouvert et situation-problème. Université Claude Bernard Lyon I.

Artemeva, N., & Fox, J. (2011). The writing's on the board: The global and the local in teaching undergraduate mathematics through chalk talk. Written Communication, 28(4), 345-379.

Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. Zdm, 45, 797-810.

Artigue, M., Bosch, M., Doorman, M., Juhász, P., Kvasz, L., & Maass, K. (2020). Inquiry based mathematics education and the development of learning trajectories. Teaching Mathematics and Computer Science, 18(3), 63-89.

Arzarello, F., Andriano, V., Olivero, F., & Robutti, O. (1998). In: L. Magnani, N. J. Nersessian, & P. Thagard (Eds.), Abduction and Scientific Discovery, Special Issue of Philosophica, 61(1), 77–94.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *34*, 66-72.

Arzarello, F., & Soldano, C. (2019). Approaching proof in the classroom through the logic of inquiry. *Compendium for early career researchers in mathematics education*, 221-243.

Asenova, M. (2022). Non-classical approaches to logic and quantification as a means for analysis of classroom argumentation and proof in mathematics education research. *Acta Scientiae*, *24*(5), 404-428.

Baccaglini-Frank, A., & Mariotti, M. A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*, 225-253.

Baccaglini-Frank, A., Antonini, S., Leung, A., & Mariotti, M. (2013). Reasoning by contradiction in dynamic geometry. PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 7(2), 63–73.

Baccaglini-Frank, A. (2019). Dragging, instrumented abduction and evidence, in processes of conjecture generation in a dynamic geometry environment. ZDM, 51(5), 779-791.

Baccaglini-Frank, A. (2010). The maintaining dragging scheme and the notion of instrumented abduction. In Proceedings of the 10th Conference of the PME-NA (Vol. 6, pp. 607-615). USA.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. (In D.Pimm (Ed.), Mathematics, teachers and children. London: Hodder and Stoughton). 216–235.

Barrier, T., Durand-Guerrier, V. & Mesnil, Z. (2019). Using logical analysis as a tool for didactic studies in mathematics. Education & didactique, 13(1), 61–81.

Barrier, Th., Blossier Th., & Durand-Guerrier, V. (2009). Semantic and game-theoretical insight into argumentation and proof. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers, Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education (Vol. 1, pp. 77-82). The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Brown, S. A. (2018). Are indirect proofs less convincing? A study of students' comparative assessments. *The Journal of Mathematical Behavior*, *49*, 1-23.

Beaney, M. (2021). Analysis. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Zalta, E.N. (ed.), URL= <https://plato.stanford.edu/archives/sum2021/entries/analysis/>.

Biza, I. (2021). The discursive footprint of learning across mathematical domains: The case of the tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, *62*, 100870.

Blossier, T., Barrier, T., & Durand-Guerrier, V. (2009). Proof and quantification. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education (Vol. 1, pp. 83–88). Taiwan Normal University.

Boero, P., & Turiano, F. (2019, February). Integrating Euclidean rationality of proving with a dynamic approach to validation of statements: The role of continuity of transformations. In Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (No. 6). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

Brunström, M., Fahlgren., M (2015). Using slider tools to explore and validate. In K. Krainer & N. Vondrova Proceedings of the Ninth Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education (pp.2588-2589). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Burton, L. (1984). Thinking things through. Blackwell.

Chang, C. C., & Keisler, H. J. (1990). *Model theory*. Elsevier.

Chellougui, F. (2003). Approche didactique de la quantification dans la classe de mathematiques dans l'enseignement tunisien. Petit X, 61, 11–34.

Cherif, A. & Wideen, M. (1992). The problems of the transition from high school to university science. Catalyst, 36(1), 10–18.

Cifarelli, V. (1999). Abductive inference: Connections between problem posing and solving. In Proceedings of the conference of the international group for the psychology of mathematics education (pp. 646-653).

Cobb, P., & Steffe, L. P. (2011). The constructivist researcher as teacher and model builder. *A journey in mathematics education research: Insights from the work of Paul Cobb*, 19-30.

Cobb, P., Yackel, E., & McClain, K. (Eds.). (2012). *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools, and instructional design*. Taylor & Francis.

Davis, P. J., Hersh, R., & Marchisotto, E. A. (2012). *The mathematical experience, study edition*. Boston: Birkhäuser Boston.

Davydov, V. V. (1990). Soviet Studies in Mathematics Education Volume 2. Types of generalisation in instruction.

de Villiers, M. (2020). Proof as a means of discovery. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51(3), 451-455.

Devlin, K. J. (1995). *Logic and information*. Cambridge University Press.

Dewey, J. (1938). Logic: The theory of inquiry, (Vol. 12, The Later Works of John Dewey, 1925–1953). Carbondale: Southern Illinois University Press.

Doorman, M. (2018). Design-based research and local instruction theories in mathematics education.

Dorier, J. L., & Maass, K. (2020). Inquiry-based mathematics education. *Encyclopedia of mathematics education*, 384-388.

Douven, I. (2021). Abduction. The Stanford Encyclopedia of Philosophy. Zalta, E.N. (ed.), URL=<https://plato.stanford.edu/archives/sum2021/entries/abduction/>.

Dubinsky, E., Elterman, F., & Gong, C. (1988). The student's construction of quantification. *For the learning of mathematics*, *8*(2), 44-51.

Dubinsky, E., & Yiparaki, O. (2000). On students understanding of AE and EA quantification. Research in Collegiate Mathematics Education IV. CBMS Issues in Mathematics Education, 8, 239–289. American Mathematical Society, Providence.

Durand-Guerrier, V. (2008). Truth versus validity in mathematical proof. ZDM, 40, 373-384.

Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2005). An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. Educational studies in mathematics, 60, 149-172.

Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2009). Analysis of mathematical proofs: Some questions and first answers (Vol. 1, pp. 148–153).

Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2012). Examining the role of logic in teaching proof. *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study*, 369-389.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In Exploiting mental imagery with computers in mathematics education (pp. 142-157). Springer Berlin Heidelberg.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. Educational studies in mathematics, 61(1-2), 103-131.

Duval, R. (2017). Understanding the mathematical way of thinking-The registers of semiotic representations (pp. 28-43). Cham: Springer International Publishing.

Dvora, T. (2012). Unjustified assumptions in geometry made by high school students in Israel, PhD Dissertation, Tel Aviv University-The Jaime and Joan Constantiner School of Education.

Eco, U. (1983). Horns, hooves, insteps. In U. Eco & T. A. Sebeok (Eds.), The sign of the three. Dupin, Holmes, Peirce (pp. 198–220). Indiana UP.

Edwards, L. D. (1995). Microworlds as representations. In *Computers and exploratory learning* (pp. 127-154). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Enderton, H. B. (2001). *A mathematical introduction to logic*. Elsevier.

Epp, S. S. (2003). The role of logic in teaching proof. *The American Mathematical Monthly*, *110*(10), 886-899.

Epp, S. (2009). Proof issues with existential quantification (Vol. 1, pp. 154–159).

Ernest, P. (2018). The ethics of mathematics: Is mathematics harmful?. The philosophy of mathematics education today, 187-216.

Ernest, P. (2023). Abduction and Creativity in Mathematics. *Handbook of Abductive Cognition*, 585-611.

Ferrando, E. (2005). Abductive processes in conjecturing and proving. Unpublished Doctoral Dissertation. Submiited to Purdue University.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. For the Learning of mathematics, 3((2), 8–24.

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics. Dordrecht: Kluwer.

de Freitas, E. (2022). The Role of Abduction in Mathematics: Creativity, Contingency, and Constraint. In *Handbook of Abductive Cognition* (pp. 1-24). Cham: Springer International Publishing.

Freudenthal, H. (1973). Mathematics as an educational task. Dordrecht: D. Reidel.

Giaquinto, M. (2007). Visual thinking in mathematics. New York: Oxford University Press.

Gómez Chacón, I. M. (1992). Desarrollo de diversos juegos de estrategia para su utilización en el aula. Epsilon, 22, 77–88.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspective. In *Educational design research*(pp. 29-63). Routledge.

Hanna, G. (1989). Proofs that prove and proofs that explain. *Proceedings of the international group for the psychology of mathematics education*, *2*, 45-51.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Dordrecht: Springer Netherlands.

Hanna, G. (2020). Mathematical proof, argumentation, and reasoning. *Encyclopedia of mathematics education*, 561-566.

Hanna, G., & de Villiers, M. (2012). Proof and proving in mathematics education. The 19th ICMI Study. Series: New ICMI Study Series, Vol. 15. Berlin/New York: Springer.

Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39, 73–78.

Harel, G. (1998). Two dual assertions: The first on learning and the second on teaching (or vice versa). The American Mathematical Monthly, 105(6), 497-507.

Harel, G. Sowder. L.(1998). Students' proof schemes. *Manuscript. Purdue University and San Diego State University*.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, *2*, 805-842.

Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. In S. Campbell & R. Zazkis (Eds.), The learning and theaching of number theory (pp. 185–212). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Harel, I. E., & Papert, S. E. (1991). Constructionism. Ablex Publishing.

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra. Journal for Research in Mathematics Education, 31(4), 396–428.

Healy, L. (2000, July). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. In *PME CONFERENCE* (Vol. 1, pp. 1-103).

Hempel, C. G., & Oppenheim, P. (1948). Studies in the Logic of Explanation. Philosophy of science, 15(2), 135-175.

Hershkowitz, R., & Markovits, Z. (1992). Conquer math concepts by developing visual thinking. The Arithmetic Teacher, 39, 38–41.

Hintikka, J. (1998). The principles of mathematics revisited. Cambridge: Cambridge University Press.

Hintikka, J. (1999). Inquiry as inquiry: a logic of scientific discovery. Springer Science + Business Media Dordrecht.

Hintikka, K. J. J. (2007). Socratic epistemology: Explorations of knowledge-seeking by questioning.

Hoffmann, M. H. G. (2001). Skizze einer semiotischen Theorie des Lernens. Journal für Mathematik-Didaktik, 22, 231-251.

Hollebrands, K. F. (2007). The role of a dynamic software program for geometry in the strategies high school mathematics students employ. Journal for research in mathematics education, 38(2), 164-192.

Hoyles, C., Noss, R., & Sutherland, R. (1991). Evaluating a computer based microworld: What do pupils learn and why? In F. Furinghetti (Ed.), Proceedings of the 15th PME International Conference, 2, 197–204.

Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the learning of mathematics*, *17*(1), 7-16.

Inglis, M., & Simpson, A. (2008). Conditional inference and advanced mathematical study. *Educational Studies in Mathematics*, *67*, 187-204.

Jaworski, B., & Potari, D. (2021). Implementation of a developmental model of teachers' and didacticians' learning through inquiry: design, operationalisation and outcomes. ZDM–Mathematics Education, 53(5), 1073-1084.

Jones, K. (1998). Deductive and intuitive approaches to solving geometrical problems. In C. Mammana, & V. Villani, *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century* (pp. 78-83). Dordrecht: Kluwer Academid Publishers.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational studies in mathematics*, *44*, 55-85.

Kajander, A. & Lovric, M. (2005). Transition from secondary to tertiary mathematics: McMaster University experience. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36(2–3), 149–160.

Kasmer, L. A., & Kim, O. K. (2012). The nature of student predictions and learning opportunities in middle school algebra. Educational Studies in Mathematics, 79, 175-191.

Knipping, C. (2003). Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis—Vergleichende Analysen von mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich. Journal für Mathematik-Didaktik, 24, 65-66.

Kynigos, C. (1995). Programming as a means of expressing and exploring ideas: Three case studies situated in a directive educational system. In *Computers and exploratory learning* (pp. 399-419). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg. Lakatos, I. (Ed.). (1968). The problem of inductive logic. North Holland Publishing.

Kynigos, C. (2007). Half-baked logo microworlds as boundary objects in integrated design. *Informatics in Education-An International Journal*, *6*(2), 335-359.

Kynigos, C. (2015, July). Constructionism: Theory of learning or theory of design?. In Selected regular lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education (pp. 417-438). Cham: Springer International Publishing.

Lakatos, I. (1976). Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery. New York: Cambridge University Press.

Laborde, J. M. (1996). Intelligent microworlds and learning environments. In *Intelligent learning environments: The case of geometry* (pp. 113-132). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: two sides of the use of dynamic geometry environments. In H.-C. L.-C. Sung-Chi Chu, *Proceedings of the Tenth Asian Technology Conference in Mathematics* (pp. 22-35). South Korea: Advanced Technology Council in Mathematics, Incorporated.

Lange, M. (2016). Explanatory proofs and beautiful proofs. *Journal of Humanistic Mathematics*, *6*(1), 8-51.

Leron, U. (1985). A direct approach to indirect proofs. Educational Studies in Mathematics, 16(3), 321–325.

Leung, A., & Lopez-Real, F. (2002). Theorem justification and acquisition in dynamic geometry: A case of proof by contradiction. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7(2), 145–165.

Lim, K. H., Buendía, G., Kim, O. K., Cordero, F., & Kasmer, L. (2010). The role of prediction in the teaching and learning of mathematics. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(5), 595-608.

Luk, H.S. (2005). The gap between secondary school and university mathematics. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 36(2–3), 161–174.

Maddy, Penelope, 2022, A Plea for Natural Philosophy: And Other Essays, New York: Oxford University Press.

Magnani, L. (2004). Creative abduction as active shaping of knowledge. Epistemic and ethical mediators. In Proceedings of the Annual Meeting of the Cognitive Science Society (Vol. 26, No. 26).

Magnani, L. (2011). Abduction, reason and science: Processes of discovery and explanation. Springer Science & Business Media.

Mancosu, P., Jorgensen, K. F., & Pedersen, S. A. (Eds.) (2005). Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics. Dordrecht: Springer.

Manin, Y. I. (1981). A digression on proof. *The Two-year College Mathematics Journal*, *12*(2), 104-107.

Mariotti M.A. (2001). Introduction to proof: the mediation of a dynamic software environment. Educational Studies in Mathematics, 44 (1&2), 25–53.

Mariotti, M. A. (2007). Geometrical proof: the mediation of a microworld. In Theorems in School (pp. 285-304). Brill.

Mariotti, M., & Antonini, S. (2009). Breakdown and reconstruction of figural concepts in proofs by contradiction in geometry. In F.-L. Lin, F. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villers (Eds.), Proof and proving in mathematics education: ICMI Study 19 Conference Proceedings (Vol. 2, pp. 82–87). Taipei: National Taiwan Normal University.

Mariotti, M. A., Durand-Guerrier, V., & Stylianides, G. J. (2018). Argumentation and proof. In Developing research in mathematics education (pp. 75-89). Routledge.

Markopoulos, C., Kynigos, C., Alexopoulou, E., & Koukiou, A. (2010). Navigation in geographical space. *of the European Society for Research in Mathematics Education*, 1409.

McCain, K. (2015). Explanation and the nature of scientific knowledge. Science & Education, 24(7), 827-854.

Melhuish, K., Fukawa-Connelly, T., Dawkins, P. C., Woods, C., & Weber, K. (2022). Collegiate mathematics teaching in proof-based courses: What we now know and what we have yet to learn. The Journal of Mathematical Behavior, 67, 100986.

Meyer, M. (2008). Das Entdecken einer Entdeckung. Die Abduktion als Forschungsgegenstand und-logik. Der Blick nach innen: Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht, 2.

Meyer, M. (2023). Using Abduction for Characterizing the Process of Discovery. In *Handbook of Abductive Cognition* (pp. 557-583). Cham: Springer International Publishing.

Miragliotta, E., & Baccaglini-Frank, A. E. (2021). Enhancing the skill of geometric prediction using dynamic geometry. Mathematics, 9(8), 821.

Miragliotta, E. (2023). Prediction in Transition: Continuities and Discontinuities Moving from the Paper-and-Pencil to the Dynamic Geometry Environment. Digital Experiences in Mathematics Education, 9(1), 89-130.

Mithalal, J., & Balacheff, N. (2019). The instrumental deconstruction as a link between drawing and geometrical figure. Educational studies in mathematics, 100, 161-176.

Nardi, E. (2014). Reflections on visualization in mathematics and in mathematics education. *Mathematics & mathematics education: searching for common ground*, 193-220.

Nicolas, P., & Gascón, J. (2018, April). Inquiry-based learning and pre-service teachers education. In *INDRUM 2018*.

Noss, R., Hoyles, C., Mavrikis, M., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S., & Pearce, D. (2009). Broadening the sense of 'dynamic': a microworld to support students' mathematical generalisation. *ZDM*, *41*(4), 493-503.

Olivero, F., & Robutti, O. (2007). Measuring in dynamic geometry environment as a tool for conjecturing and proving. International Journal of Computer for Mathematics Learning, 12(2), 135-156.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed?. Educational studies in mathematics, 66(1), 23-41.Pedemonte, B., & Reid, D. (2011). The role of abduction in proving processes. *Educational studies in mathematics*, *76*, 281-303.

Peirce, C. S. (1867). On the natural classification of arguments.

Peirce, C.S. (1960) *Collected Papers*, II, Elements of Logic, Harvard, University Press.

Petropoulou, G., Jaworski, B., Potari, D., & Zachariades, T. (2020). Undergraduate mathematics teaching in first year lectures: Can it be responsive to student learning needs?. *International journal of research in undergraduate mathematics education*, *6*, 347-374.

Polya, G. (1945). How to solve it. Princeton University Press.

Popper, K. (1959). The logic of scientific discovery. Hutchinson.

Potari, D. (2018). Teachers' and students' perspectives in mathematics teaching and teacher education. Journal of Mathematics Teacher Education, 21(6), 541-543.

Potari, D., Psycharis, G., Kouletsi, E., & Diamantis, M. (2011). Prospective mathematics teachers' noticing of classroom practice through critical events. In Proceedings of the Seventh Congress of the European Mathematical Society for Research in Mathematics Education (pp. 2798-2807).

Presmeg, N. C. (2008a). An overarching theory for research on visualization in mathematics education. Plenary paper. In Proceedings of topic study group 20, visualization in the teaching and learning of mathematics 11th international Congress on mathematics education (ICME-11), Monterrey, Mexico, July 6–13, 2008. Published on the ICME-11 web site: http://tsg.icme11.org (TSG20). Accessed 6 June 2013.

Pritchard, D. (2010). Where learning starts? A framework for thinking about lectures in university mathematics. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(5), 609-623.

Rabardel, P., & Samurçay, R. (2001). From Artifact to Instrument-Mediated Learning. New Challenges to Research on Learning. International Symposium organized by the Center for Activity Theory and Developmental Work Research, University of Helsinki, March 21-23.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems?. *Philosophia mathematica*, *7*(1), 5-41.

Razel, M., & Eylon, B. (1990). Development of visual cognition: transfer effects of the Agam program. Journal of Applied Developmental Psychology, 11, 459–485.

Reid, D. A. (2003). Forms and uses of abduction. In Proceedings of the CERME 3 international conference (pp. 1-10).

Reid, D. (2005, February). The meaning of proof in mathematics education. In Proceedings of the 4th Conference of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 458-468).

Reid, D. A. (2018). Abductive reasoning in mathematics education: Approaches to and theorisations of a complex idea. Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 14(9), em1584.

Reiss, K., Klieme, E., & Heinze, A. (2001). Prerequisites for the understanding of proofs in the geometry classroom. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 4, pp. 97–104). Utrecht: PME.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2007). Abduction–induction (generalization) processes of elementary majors on figural patterns in algebra. The Journal of Mathematical Behavior, 26(2), 140-155.

Saada-Robert, M. (1989). La microgénèse de la rapresentation d'un problème. Psychologie Française, 34, 2–3.

Schoenfeld, A. H. (2009). The soul of mathematics. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.),

Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective (pp. xii–xvi). New York, NY: Routledge.

Selden, A., & Selden, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. Educational Studies in Mathematics, 29, 123–151.

Sfard, A. (2014). University mathematics as a discourse–why, how, and what for? Research in Mathematics Education, 16(2), 199–203.

Shachter, R. D., & Heckerman, D. (1987). Thinking backward for knowledge acquisition. AI Magazine, 8(3), 55–61.

Sher, G. (1999). What is Tarski's Theory of Truth? *Topoi 18*. p. 149-166.

Shook, J. R. (2021). Abduction, complex inferences, and emergent heuristics of scientific inquiry. In Abduction in Cognition and Action: Logical Reasoning, Scientific Inquiry, and Social Practice (pp. 177-206). Cham: Springer International Publishing.

Silver, E. A. (1995). The Nature and Use of Open Problems in Mathematics Education: Mathematical and Pedagogical Perspectives. Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik/International Reviews on Mathematical Education, 27(2), 67-72.

Sinclair, N., & Yurita, V. (2008). To be or to become: How dynamic geometry changes discourse. Research in Mathematics Education, 10(2), 135-150.

Sinclair, N., & Robutti, O. (2012). Technology and the Role of Proof: The Case of Dynamic Geometry. In M. K.-K. Clements, *Third international handbook of mathematics education* (S. 571-596). New York: Springer.

Soldano, C., Arzarello, F., & Robutti, O. (2015). Game approach with the use of technology: A possible way to enhance mathematical thinking. In *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2552-2558). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Soldano, C., & Arzarello, F. (2016). Learning with touchscreen devices: game strategies to improve geometric thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *28*, 9-30.

Soldano, C., & Arzarello, F. (2018). Approaching secondary school geometry through the logic of inquiry within technological environments. *Using Mobile Technologies in the Teaching and Learning of Mathematics*, 247-261.

Steiner M. (1978), 'Mathematical Explanation', Philosophical Stu pp. 135-151.

Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2009). Proof constructions and evaluations. *Educational Studies in Mathematics*, *72*, 237-253.

Suwarsono, S. (1982). Visual imagery in the thinking of seventh grade students. Unpublished Ph.D. dissertation, Monash University, Australia.

Tall, D. (1991). Reflections. In D. O. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 251–259). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 495–511). New York: Macmillan.

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. Mathematics Education Research Journal, 20(2), 5–24.

Tarski, A. (1983). In J. Corcoran (Ed.), Logic, semantics, metamathematics, papers from 1923 to 1938. Indianapolis: Hackett Publishing Company.

Tarski, A., & Givant, S. (1999). Tarski's system of geometry. *Bulletin of Symbolic Logic*, *5*(2), 175-214.

Thoma, A., & Nardi, E. (2018). Transition from school to university mathematics: Manifestations of unresolved commognitive conflict in first year students' examination scripts. International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4(1), 161–180.

Toulmin, S. E. (1958). The uses of argument. Cambridge: Cambridge UP.

Varela, F. J., Thompson, E., & Rosch, E. (2017). The embodied mind, revised edition: Cognitive science and human experience. MIT press.

Verillon, P., & Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of though in relation to instrumented activity. European journal of psychology of education, 77-101.

Viirman, O. (2015). Explanation, motivation and question posing routines in university mathematics teachers' pedagogical discourse: a commognitive analysis. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46(8), 1165-1181.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. Educational Studies in Mathematics, 48(1), 101–119.

Weber, E., & Verhoeven, L. (2002). Explanatory proofs in mathematics. *Logique et Analyse*, *45*(179/180), 299-307.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: A case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. The Journal of Mathematical Behavior, 23(2), 115-133.

Weber, K. (2012). Mathematicians' perspectives on their pedagogical practice with respect to proof. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 43(4), 463-482.

Whiteley, W. (2004). To see like a mathematician. In G. Malcolm (Ed.), Multidisciplinary approaches to visual representations and interpretations (Vol. 2, pp. 279–291). London: Elsevier.

Winsløw, C. (2013). The transition from university to high school and the case of exponential functions. In B.

Wu Yu, J.-Y., Lin, F.-L., & Lee, Y.-S. (2003). Students' understanding of proof by contradiction. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 2003 Joint Meeting of PME and PME-NA (Vol. 4, pp. 443–449). Honolulu: College of Education, University of Hawaii.

Yerushalmy, M., Chazan, D., & Gordon, M. (1990). Mathematical problem posing: Implications for facilitating student inquiry in classrooms. *Instructional Science*, *19*, 219-245.

6.2 Ελληνόγλωσση

Κυνηγός, Χ. (2011). Το Μάθημα της Διερεύνησης. Αθήνα: Εκδ. Τόπος.

Χρυσαφίδης, Κ. (2005). *Βιωματική-Επικοινωνιακή Διδασκαλία. Η εισαγωγή της Μεθόδου project στο Σχολείο*, Παιδαγωγική Σειρά. Αθήνα: Εκδ. Gutenberg.