



Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Μαθηματικών
ΠΜΣ Θεωρητικά Μαθηματικά

Διπλωματική Εργασία

Spin Γεωμετρία και Ο Τελεστής Dirac

Κοτίνος Άγγελος

Επιβλέπων:
Γιαννιώτης Παναγιώτης

Αθήνα, 2025

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Παναγιώτης Γιαννιώτης, Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

*Ιάκωβος Ανδρουλιδάκης, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών,
ΕΚΠΑ*

*Διονύσιος Λάμπας, Αφυπηρετήσας Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μα-
θηματικών, ΕΚΠΑ*

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Γιαννιώτη που δέχτηκε να επιβλέψει την διπλωματική και για την συνεργασία που είχαμε καθ'όλη την διάρκεια. Ευχαριστώ πολύ τον κ. Λάππα που πρώτος με έφερε σε επαφή με την διαφορετική γεωμετρία και τα *springs*. Ένα ευχαριστώ επίσης, στον κ. Ανδρουλιδάκη, μέλος της τριμελούς επιτροπής, για τις παρατηρήσεις και την συζήτηση πάνω στο θέμα. Τέλος, ένα ευχαριστώ στο τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ και σε όλους τους καθηγητές που μου έδωσαν την δυνατότητα να προχωρήσω τις σπουδές μου πάνω στο αντικείμενο που αγαπώ.

Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία εστιάζει στη μελέτη της Spin γεωμετρίας και του τελεστή Dirac. Προσπαθώντας να είναι όσο το δυνατόν πιο αυτοτελής, ξεκινάμε με την παρουσίαση των βασικών ιδιοτήτων των τανυστών, καθώς και κάποιων χρήσιμων αλγεβρικών δομών, όπως οι τανυστικές και οι εξωτερικές άλγεβρες. Επίσης, παρουσιάζουμε όλα τα απαραίτητα εργαλεία που θα χρησιμοποιήσουμε από τις διαφορίσιμες πολλαπλότητες, τις ομάδες Lie και την γεωμετρία Riemann.

Αναπτύσσουμε διεξοδικά τις άλγεβρες Clifford, οι οποίες αποτελούν τη βάση για την ανάπτυξη της Spin γεωμετρίας. Μέσω της απόδειξης του θεωρήματος περιοδικότητας Bott, πετυχαίνουμε την πλήρη ταξινόμηση των αλγεβρών Clifford. Ακολουθεί η μελέτη των ομάδων Spin και των αναπαραστάσεών τους, οι οποίες παίζουν κεντρικό ρόλο στη σύνδεση των αλγεβρών Clifford με τη γεωμετρία Riemann.

Στην συνέχεια, αφιερώνουμε ένα κεφάλαιο για να αναπτύξουμε τη θεωρία των νηματικών δεσμών, επεκτείνοντας τις έννοιες και τα εργαλεία της γεωμετρίας Riemann σε ένα πιο γενικό και αφηρημένο πλαίσιο.

Τέλος, ορίζουμε τις Spin πολλαπλότητες και τις συνοχές που ορίζονται σε αυτές, προκειμένου να εισάγουμε τον τελεστή Dirac. Ολοκληρώνουμε με την απόδειξη του τύπου του Lichnerowicz, ο οποίος συνδέει τον τελεστή Dirac με την καμπυλότητα της πολλαπλότητας.

Abstract

This thesis focuses on the study of Spin geometry and the Dirac operator. Trying to be as self-contained as possible, we begin with the presentation of the basic properties of tensors, as well as some useful algebraic structures, such as tensor and exterior algebras. Additionally, we introduce all the necessary tools we will use from differentiable manifolds, Lie groups, and Riemannian geometry.

We delve into Clifford algebras, which form the basis for developing Spin geometry. Through the proof of the Bott periodicity theorem, we achieve the complete classification of Clifford algebras. The study of Spin groups and their representations follows, connecting Spin geometry with Riemannian geometry.

Furthermore, we dedicate a chapter to developing the theory of fiber bundles, extending the concepts and tools of Riemannian geometry into a more general and abstract framework.

Finally, we define Spin manifolds and the connections defined on them, in order to introduce the Dirac operator. We conclude with the proof of the Lichnerowicz formula, which links the Dirac operator to the curvature of the manifold.

Πρόλογος

Το 1928, ο Dirac [10] προσπαθούσε να γραμμικοποιήσει την εξίσωση Klein-Gordon για να περιγράψει τη συμπεριφορά του ηλεκτρονίου. Η εξίσωση Klein-Gordon δίνεται από:

$$\hbar^2 \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \psi = m^2 c^2 \psi.$$

Ο Dirac αντικατέστησε την εξίσωση δεύτερης τάξης με μια ισοδύναμη εξίσωση πρώτης τάξης, γνωστή ως εξίσωση Dirac:

$$i\hbar \left(\gamma^0 \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \gamma^1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \gamma^2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma^3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \psi = mc\psi,$$

όπου τα γ^μ είναι πίνακες 4×4 που ικανοποιούν τις εξής σχέσεις:

$$\gamma_0^2 = I, \quad \gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -I, \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 0, \quad \text{για } \mu \neq \nu.$$

Ο Dirac αυτούς τους 4×4 -πίνακες, γνωστοί πλέον ως πίνακες Dirac:

$$\gamma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Οι λύσεις της εξίσωσης Dirac είναι $\mathbb{C}^4$ -διανύσματα, γνωστά ως spinors $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)$.

Το πρόβλημα που ουσιαστικά προσπάθησε να λύσει ο Dirac ήταν να βρει την τετραγωνική ρίζα του τελεστή Laplace:

$$\Delta = - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Ο Dirac όρισε έναν τελεστή D έτσι ώστε $D^2 = \Delta$, όπου D έχει τη μορφή:

$$D = \sum_{i=1}^3 \gamma^i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Αυτό είναι εφικτό μόνο αν τα γ^i ικανοποιούν:

$$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = -1, \quad \text{και} \quad \gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 0, \quad \text{για } i \neq j.$$

Λύση στο πρόβλημα του Dirac, καθώς και η έννοια των spinors, είχαν ήδη ανακαλυφθεί νωρίτερα.

Το 1878-1982, ο William K. Clifford [8][9] εισήγαγε τον όρο "γεωμετρική άλγεβρα", γενικεύοντας τις ιδέες του Hamilton για τα quaternions και την εξωτερική άλγεβρα του Grassmann $\Lambda^* \mathbb{R}^n$. Όρισε ένα γινόμενο στην εξωτερική άλγεβρα, το οποίο, σε μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$, ικανοποιεί τη σχέση:

$$e_i e_j + e_j e_i = \pm 2\delta_{ij}.$$

Προς τιμήν του, αυτές οι άλγεβρες πήραν το όνομά του.

Στις αρχές του 20ού αιώνα, οι άλγεβρες Clifford γνώρισαν μεγάλη ανάπτυξη. Ένας από τους μαθηματικούς που συνέβαλαν καθοριστικά, ήταν ο Élie Cartan, ο οποίος μεταξύ άλλων περιέγραψε τις πραγματικές άλγεβρες Clifford ως άλγεβρες πινάκων και ανακάλυψε την περιοδικότητα-8 αυτών των αλγεβρών το 1908 [5]. Επιπλέον, το 1913, ο Cartan [6] ανακάλυψε την έννοια των spinors στην προσπάθειά του να ταξινομήσει τις μιγαδικές μη αναγώγιμες αναπαραστάσεις των απλών ομάδων Lie. Επίσης, όρισε την ομάδα $Spin_n$, που προκύπτει από μία άλγεβρα Clifford και είναι η διπλή επικάλυψη της ομάδας SO_n .

Το 1935, οι R. Brauer και H. Weyl [4] χρησιμοποίησαν τις άλγεβρες Clifford για να γενικεύσουν και να απλοποιήσουν την έννοια των spinors. Από τότε, οι άλγεβρες Clifford καθιερώθηκαν ως το βασικό πλαίσιο για τη μελέτη των spinors.

Το 1947, ο Marcel Riesz [26] ήταν ο πρώτος που θεώρησε τα spinors ως στοιχεία ενός ελαχίστου αριστερού ιδεώδους μιας άλγεβρα Clifford. Τελικά, το 1963, οι Atiyah, Bott και Shapiro [1] αναδιοργάνωσαν τη θεωρία των αλγεβρών Clifford, φέρνοντάς την στη μορφή που βρίσκεται σήμερα.

Σχεδόν ταυτόχρονα, αναπτύσσεται η θεωρία των νηματικών δεσμών. Μια νηματική δέσμη είναι ένας χώρος όπου "πάνω" από κάθε σημείο μιας πολλαπλότητας υπάρχει ένας διανυσματικός ή πιο γενικός χώρος, ο οποίος ονομάζεται "νήμα". Αυτή η δομή αποδείχθηκε εξαιρετικά χρήσιμη τόσο στα μαθηματικά όσο και στη φυσική.

Το 1935, ο Hassler Whitney [29] έθεσε τα θεμέλια της σύγχρονης θεωρίας των νηματικών δεσμών, προτείνοντας την ιδέα ότι κάθε σημείο μίας πολλαπλότητας, είναι το ίδιο ένας ολόκληρος χώρος. Μέχρι το 1950, είχε δοθεί ο τελικός ορισμός της νηματικής δέσμης που χρησιμοποιούμε μέχρι

σήμερα, από μαθηματικούς όπως οι Steenrod και Ehresmann. Το 1954, οι Yang και Mills [31] χρησιμοποίησαν τις νηματικές δέσμες για να αναπτύξουν τη θεωρία βαθμίδας (gauge theory), εισάγοντας ουσιαστικά τις νηματικές δέσμες στη φυσική. Η θεωρία αυτή παρέχει το μαθηματικό πλαίσιο για την περιγραφή των θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων, όπως η ηλεκτρομαγνητική και η ασθενής πυρηνική δύναμη.

Οι Spin πολλαπλότητες άρχισαν να εμφανίζονται τη δεκαετία του 1950 ως ένας τρόπος επέκτασης της εφαιπόμενης δέσμης ώστε να περιλαμβάνει τη διπλή επικάλυψη της ομάδας SO_n , δηλαδή την ομάδα $Spin_n$. Το 1956, ο André Haefliger [14] ανακάλυψε ότι η ύπαρξη μιας δομής spin εξαρτάται από την τοπολογία της πολλαπλότητας, θέτοντας τα θεμέλια για τη θεωρία της Spin γεωμετρίας. Το 1963, ο J. Milnor [24] έδωσε την πρώτη αναλυτική περιγραφή της spin δομής και της spin πολλαπλότητας. Την ίδια περίοδο, θεμελιώθηκε αυστηρά και αναπτύχθηκε η θεωρία του τελεστή Dirac από τους Atiyah-Singer [2] για τις ανάγκες του θεωρήματος δείκτη.

Σημαντική συνεισφορά στην θεωρία της Spin γεωμετρίας είχε ο André Lichnerowicz. Το 1963 [22], απέδειξε ότι ο τελεστής Dirac, που δρα πάνω σε spinors, συνδέεται με τον τελεστή Laplace–Beltrami. Αυτή η σύνδεση αποκάλυψε τη σχέση μεταξύ του τελεστή Dirac και της καμπυλότητας μιας πολλαπλότητας, παρέχοντας νέα εργαλεία για τη μελέτη της γεωμετρίας μέσω της ανάλυσης. Προς τιμήν του, ο τύπος πήρε το όνομα του.

Παρότι τα spinors χρησιμοποιούνταν από το 1920 στην φυσική, η σημασία των spin πολλαπλοτήτων και των πεδίων spinor αυξήθηκε το 1950-1970. Χρησιμοποιήθηκαν ευρέως στην γενική σχετικότητα, στην θεωρία βαθμίδας και στο καθιερωμένο μοντέλο σωματιδιακής φυσικής. Μία από τις σπουδαιότερες εφαρμογές τους είναι η απόδειξη του θεωρήματος θετικής μάζας (positive mass theorem) από τον Edward Witten το 1981 [30]. Χρησιμοποιώντας πεδία spinor και τον τύπο του Lichnerowicz, ο Witten έδωσε μια γεωμετρική απόδειξη που συνδέει τη συνολική ενέργεια ενός χώρου με την καμπυλότητα του. Αυτή η εργασία συνέβαλε καθοριστικά στη βράβευσή του με το Fields Medal.

Περιεχόμενα

1	Τανυστική και Εξωτερική Άλγεβρα	13
1.1	Διανύσματα και Διϊκός Χώρος	13
1.2	Τανυστές	17
1.3	Εξωτερική Άλγεβρα	18
2	Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες και Γεωμετρία Riemann	21
2.1	Ορισμός Διαφορίσιμης Πολλαπλότητας	21
2.2	Διαφορίσιμες Απεικονίσεις	22
2.3	Διανύσματα Σε Διαφορικές Πολλαπλότητες	23
2.4	Εφαπτόμενος Χώρος και Διανυσματικά Πεδία	24
2.5	Τανυστές σε Πολλαπλότητες	27
2.6	Ομάδες Lie και Άλγεβρες Lie	29
2.7	Μετρικός Τανυστής Riemann	32
2.8	Συνοχή	33
3	Άλγεβρες Clifford	37
3.1	Ορισμός της Άλγεβρας Clifford	37
3.2	Η Άλγεβρα Clifford ως Πηλίκο της Τανυστικής Άλγεβρας . .	38
3.3	Η Δομή της Άλγεβρας Clifford	41
4	Ταξινόμηση Αλγεβρών Clifford	47
4.1	Ισομορφισμοί Χαμηλής Διάστασης	47
4.2	Περιοδικότητα Bott	49
4.3	Άρτια Υποάλγεβρα Clifford	49
4.4	Μιγαδικές Άλγεβρες Clifford	50
5	Ομάδες Spin και οι Αναπαραστάσεις τους	55
5.1	Ομάδες Spin και η Σχέση τους με τη Γεωμετρία	55
5.2	Η Πραγματική Ομάδα Spin	60
5.3	Αναπαραστάσεις Ομάδων Spin	63
6	Νηματικές Δέσμες	71
6.1	Ορισμός Νηματικών Δεσμών	71
6.2	Κύριες Νηματικές Δέσμες	73

6.3	Συνοχές σε Νηματικές Δέσμες	75
6.4	Καμπυλότητα σε Νηματικές Δέσμες	79
7	Spin Γεωμετρία και τελεστές Dirac	81
7.1	Spin Πολλαπλότητες	81
7.2	Συνοχές σε Spinor Δέσμες	84
7.3	Τελεστής Dirac	89
7.4	Ο Τύπος Lichnerowicz	91
	Βιβλιογραφία	97

Κεφάλαιο 1

Τανυστική και Εξωτερική Άλγεβρα

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα παρουσιάσουμε βασικές έννοιες των διανυσματικών χώρων με σκοπό να εισαγάγουμε τους τανυστές και ορισμένες σημαντικές άλγεβρες. Αυτές οι άλγεβρες θα αποτελέσουν θεμελιώδη εργαλεία στην πορεία αυτής της διπλωματικής εργασίας. Θα επικεντρωθούμε στο αλγεβρικό μέρος, προετοιμάζοντας το έδαφος για τις γεωμετρικές εφαρμογές τους σε επόμενα κεφάλαια.

1.1 Διανύσματα και Διϊκός Χώρος

Ορισμός 1.1.1. Ένα **γραμμικό συναρτησοειδές** α είναι μια γραμμική απεικόνιση από έναν διανυσματικό χώρο V στο $\mathbb{R}$.

Έστω $v \in V$ και $\{e_i\}$ μια βάση του χώρου V . Ένα γραμμικό συναρτησοειδές α δρα στο v ως εξής:

$$\alpha(v) = \alpha\left(\sum_i e_i v^i\right) = \sum_i \alpha(e_i) v^i = \sum_i \alpha_i v^i,$$

όπου $\alpha(e_i) = \alpha_i$.

Πολλές φορές, θα χρησιμοποιούμε τη **σύμβαση Einstein** για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό. Αυτή η σύμβαση υποδηλώνει ότι κάθε φορά που ένας δείκτης επαναλαμβάνεται σε ένα γινόμενο, εννοείται η άθροιση σε αυτόν τον δείκτη:

$$u_i v^i = \sum_{i=1}^n u_i v^i.$$

Ορισμός 1.1.2. Το σύνολο όλων των γραμμικών συναρτησιακών α σε έναν διανυσματικό χώρο V λέγεται **διϊκός χώρος** του V και συμβολίζεται με V^* .

Τα στοιχεία του V^* ονομάζονται **δυϊκά ή συναλλοίωτα** διανύσματα. Αντίστοιχα, τα στοιχεία του αρχικού χώρου V μερικές φορές θα ονομάζονται **ανταλλοίωτα**.

Ο δυϊκός χώρος είναι επίσης ένας διανυσματικός χώρος με τις πράξεις:

$$(\alpha + \beta)(v) = \alpha(v) + \beta(v), \quad \alpha, \beta \in V^*, v \in V,$$

$$(c\alpha)(v) = c\alpha(v), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Η βάση του δυϊκού χώρου προκύπτει από τη βάση του αρχικού διανυσματικού χώρου με:

$$e^i(e_j) = \delta_j^i.$$

Από τη γραμμικότητα του e^i :

$$e^i(v) = e^i(e_j v^j) = e^i(e_j) v^j = \delta_j^i v^j = v^i.$$

Τα e^i αποτελούν τη βάση του δυϊκού χώρου. Φαίνεται ότι έχουν ίδια διάσταση, επομένως οι δύο χώροι είναι ισόμορφοι. Παρατηρούμε ότι η βάση του δυϊκού χώρου εξαρτάται από τη βάση του αρχικού διανυσματικού χώρου. Συνεχίζοντας, εφόσον ο δυϊκός χώρος είναι και αυτός διανυσματικός χώρος, μπορούμε να ορίσουμε τον δυϊκό του χώρο V^{**} .

Ορίζουμε το γραμμικό συναρτησοειδές $\xi_v : V^* \rightarrow \mathbb{R}$ ως:

$$\xi_v(\alpha) = \alpha(v).$$

Ο δεύτερος δυϊκός χώρος V^{**} είναι ισόμορφος με τον V . Πέραν του ότι έχουν την ίδια διάσταση, στη συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει κάτι πιο ισχυρό. Υπάρχει ένας **φυσικός ισομορφισμός** μεταξύ των V και V^{**} , ο οποίος δίνεται από την απεικόνιση $\xi : V \rightarrow V^{**}$, με:

$$\xi(v) = \xi_v, \quad \text{όπου } \xi_v(\alpha) = \alpha(v).$$

Αυτή η ταύτιση δηλαδή, δεν εξαρτάται από την επιλογή βάσης. Μέσω αυτής, τα διανύσματα $v \in V$ μπορούν επίσης να θεωρηθούν ως γραμμικές απεικονίσεις πάνω στον δυϊκό χώρο V^* , με:

$$v(\alpha) = \alpha(v).$$

Παρατήρηση 1.1.3. Η ύπαρξη αυτού του ισομορφισμού, ανεξαρτήτως βάσης, δεν ισχύει στην περίπτωση του πρώτου δυϊκού, όπως είδαμε πιο πάνω. Χρειάζεται μια επιπλέον δομή για να μπορέσουμε να έχουμε αντίστοιχη ταύτιση. Οι **διγγραμμικές συναρτήσεις**, δηλαδή οι συναρτήσεις που είναι γραμμικές ως προς τα δύο ορίσματά τους, θα μας βοηθήσουν σε αυτό.

Ορισμός 1.1.4. Μία **διγραμμική συνάρτηση** σε έναν διανυσματικό χώρο V είναι μια συνάρτηση

$$g : V \times V \rightarrow \mathbb{K},$$

όπου $\mathbb{K}$ είναι σώμα, και η οποία είναι γραμμική ως προς κάθε μεταβλητή. Δηλαδή:

1. Για κάθε $u, v, w \in V$ και $a, b \in \mathbb{K}$, ισχύει:

$$g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w),$$

2. Επίσης, για κάθε $w, u, v \in V$ και $a, b \in \mathbb{K}$, ισχύει:

$$g(w, au + bv) = ag(w, u) + bg(w, v).$$

Παράδειγμα 1.1.5. Το **Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο** σε έναν πραγματικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ είναι μία διγραμμική συνάρτηση. Ορίζεται ως:

$$g(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i v_i,$$

όπου $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ και $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{R}^n$.

Όταν $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, μας ενδιαφέρει εξίσου μία γενίκευση αυτής. Μια συνάρτηση που είναι γραμμική ως προς το πρώτο όρισμα και συζυγώς γραμμική ως προς το δεύτερο όρισμα.

Παράδειγμα 1.1.6. Το **Ερμητιανό γινόμενο** σε έναν μιγαδικό διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}^n$ ορίζεται ως:

$$g(u, v) = \sum_{i=1}^n u_i \overline{v_i},$$

όπου $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ και $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ είναι διανύσματα στο $\mathbb{C}^n$, και $\overline{v_i}$ είναι ο συζυγής του v_i .

Ορισμός 1.1.7. Μία διγραμμική συνάρτηση $g : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ θα λέγεται **συμμετρική** αν για κάθε $u, v \in V$ ισχύει:

$$g(u, v) = g(v, u).$$

Κάθε συμμετρική διγραμμική συνάρτηση θα την ονομάζουμε **διγραμμική μορφή**.

Ορισμός 1.1.8. Μία **τετραγωνική μορφή** είναι μία απεικόνιση $Q : V \rightarrow \mathbb{K}$ με τις εξής ιδιότητες:

1. $Q(au) = a^2 Q(u)$ για $a \in \mathbb{K}$, $u \in V$.

2. Η απεικόνιση $g : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ που ορίζεται από:

$$2g(u, v) = Q(u + v) - Q(u) - Q(v)$$

είναι συμμετρική και διγραμμική.

Αντίστροφα, κάθε τετραγωνική μορφή $Q : V \rightarrow \mathbb{K}$ ορίζεται μοναδικά από μία συμμετρική διγραμμική συνάρτηση.

$$Q(u) = g(u, u).$$

Μέσω μιας διγραμμικής μορφής, και κατ' επέκταση μέσω της αντίστοιχης τετραγωνικής μορφής, ο χώρος μας αποκτά μια αίσθηση γεωμετρίας, την οποία θα αναλύσουμε αργότερα. Στο εξής, θα χρησιμοποιούμε τις έννοιες της τετραγωνικής μορφής και της διγραμμικής μορφής χωρίς να κάνουμε διάκριση μεταξύ τους.

Σε έναν διανυσματικό χώρο με διγραμμική μορφή μπορούμε πλέον να αντιστοιχήσουμε κάθε $v \in V$ με ένα μοναδικό δυϊκό στοιχείο $\nu = g(v, \cdot) \in V^*$, έχοντας έτσι έναν φυσικό ισομορφισμό μεταξύ του V και του V^* . Αν συμβολίσουμε με g_{ij} τα στοιχεία της διγραμμικής μορφής, δηλαδή $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, αποκτούμε τη δυνατότητα να "ανεβάζουμε" και να "κατεβάζουμε" δείκτες, μεταβαίνοντας από τα διανύσματα στα δυϊκά τους και αντίστροφα.

Έστω ένα διάνυσμα $v = v^i e_i$ και το αντίστοιχο δυϊκό του $\nu = g(v, \cdot) = v_j e^j$. Ισχύει ότι:

$$\nu = v_j e^j = \nu(e_i) e^i = g(v, e_i) e^i = g(v^k e_k, e_i) e^i = v^k g_{ki} e^i.$$

Οι συντελεστές του δυϊκού διανύσματος σχετίζονται με τους συντελεστές του αρχικού διανύσματος μέσω του πολλαπλασιασμού $\nu_j = g_{ji} v^i$, και αντίστροφα οι συντελεστές των διανυσμάτων μπορούν να γραφτούν ως $v^i = g^{ij} \nu_j$. Το ίδιο ισχύει και για τις βάσεις, με $e^i = g^{ij} e_j$ για τη βάση του δυϊκού χώρου σε σχέση με την αρχική βάση. Παρόλο που αυστηρά μιλώντας, αυτές οι εξισώσεις δεν είναι απόλυτα δόκιμες, καθώς αναφερόμαστε σε διαφορετικούς χώρους, στην πράξη ακολουθούμε αυτή την αριθμητική σύμβαση, η οποία είναι ευρέως διαδεδομένη στη βιβλιογραφία.

Ορισμός 1.1.9. Μια βάση $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ ενός διανυσματικού χώρου V με εσωτερικό γινόμενο g λέγεται **ορθοκανονική**, αν ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

1. $g(e_i, e_j) = 0$, για κάθε $i \neq j$,
2. $g(e_i, e_i) = 1$, για κάθε i .

Παρατήρηση 1.1.10. Σε έναν Ευκλείδειο χώρο με ορθοκανονική βάση $\{e_i\}$, οι συνιστώσες του v και του v^* είναι αριθμητικά ίδιες. Συγκεκριμένα:

$$v = \sum_i v^i e_i \quad \text{και} \quad v^* = \sum_i v^i e^i,$$

αφού η δυϊκή βάση ικανοποιεί την $e^i(e_j) = \delta_j^i$. Επομένως, αριθμητικά είναι ίσες. Κάνοντας κατάχρηση του συμβολισμού, μπορεί να χρησιμοποιούμε το v τόσο για το διάνυσμα όσο και για το δυϊκό του. Από τα συμφοραζόμενα θα είναι πάντα ξεκάθαρο σε ποιο από τα δύο αναφερόμαστε.

1.2 Τανυστές

Ένας **τανυστής** είναι ένα στοιχείο του καρτεσιανού γινομένου διανυσματικών χώρων, είτε του V , είτε του δυϊκού του V^* , ή ένας συνδυασμός αυτών. Οι τανυστές παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην γεωμετρία των πολλαπλοτήτων και επίσης θα μας βοηθήσουν να ορίσουμε την εξωτερική άλγεβρα και την άλγεβρα Clifford.

Ορισμός 1.2.1. Ένας **τανυστής τάξης** (r, s) πάνω σε έναν διανυσματικό χώρο V είναι μία πολυγραμμική απεικόνιση:

$$T : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r \text{ φορές}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s \text{ φορές}} \rightarrow \mathbb{K},$$

Το σύνολο όλων των τανυστών τάξης (r, s) συμβολίζεται με $T_r^s(V)$, όπου $T^0 = T_0 = \mathbb{K}$.

Η πρόσθεση δύο τανυστών ίδιας τάξης (r, s) , γίνεται ανά συντεταγμένες. Για τανυστές οποιασδήποτε τάξης μπορούμε να ορίσουμε το **τανυστικό γινόμενο** μεταξύ τους ως εξής:

$$(T \otimes S)(v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s) = T(v_1, \dots, v_r)S(w_1, \dots, w_s).$$

Παρατήρηση 1.2.2. Αν θεωρήσουμε ένα διάνυσμα $v \in V$ ως γραμμική συνάρτηση που δρα πάνω σε στοιχεία του δυϊκού χώρου V^* και αντίστροφα ένα $\phi \in V^*$ ως γραμμική συνάρτηση επί των διανυσμάτων του V , τότε κάθε τανυστής μπορεί να γραφεί ως το τανυστικό γινόμενο διανυσμάτων και στοιχείων του δυϊκού. Δηλαδή, κάθε $T \in T_r^s(V)$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων της μορφής:

$$T = v_1 \otimes \cdots \otimes v_r \otimes \phi_1 \otimes \cdots \otimes \phi_s,$$

όπου $v_i \in V$ και $\phi_j \in V^*$.

Ορισμός 1.2.3. Η **άλγεβρα τανυστών** ενός διανυσματικού χώρου V , ορίζεται ως:

$$T(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} T_r(V).$$

Αντίστοιχα ορίζεται η **άλγεβρα τανυστών** για τον δυϊκό του V ως:

$$T^*(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} T^r(V).$$

1.3 Εξωτερική Άλγεβρα

Έστω μια μετάθεση π_{ij} στο σύνολο $\{1, 2, \dots, p\}$ που ανταλλάσσει τα στοιχεία i και j και αφήνει τα υπόλοιπα σταθερά. Ένας τανυστής θα λέγεται **αντισυμμετρικός αν**:

$$T(v_{\pi_{ij}(1)}, v_{\pi_{ij}(2)}, \dots, v_{\pi_{ij}(p)}) = -T(v_1, v_2, \dots, v_p),$$

για κάθε i, j .

Ορισμός 1.3.1. Ένα p -**διάνυσμα** είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής:

$$A_p \in \Lambda_p(V) = \bigwedge^p V = \{\text{αντισυμμετρικοί τανυστές τάξης } (p, 0)\}.$$

Αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσουμε τα p -διανύσματα στον δυϊκό χώρο:

$$A^p \in \Lambda^p(V) = \bigwedge^p V^* = \{\text{αντισυμμετρικοί τανυστές τάξης } (0, p)\}.$$

Έστω ότι $\dim V = n$. Τότε:

$$\dim \Lambda^p(V) = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!},$$

όλες οι πιθανές διατάξεις έως n στοιχείων, αφού για $p > n$, έχουμε ότι $\Lambda^p(V) = \{0\}$ λόγω της αντισυμμετρικότητας.

Έστω ένας τανυστής $A = v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_p \in T^p(V)$, και ορίζουμε την απεικόνιση Alt :

$$Alt(A) = \frac{1}{p!} \sum_{\sigma \in S_p} \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(p)},$$

όπου S_p είναι το σύνολο όλων των μεταθέσεων της τάξης p και $\text{sgn}(\sigma)$ η υπογραφή (πρόσημο) της μετάθεσης σ . Η $Alt(A)$ είναι ένας αντισυμμετρικός τανυστής. Με αυτή την απεικόνιση, ορίζεται μια προβολή:

$$Alt : T^p(V) \rightarrow \Lambda^p(V).$$

Τα στοιχεία του $\Lambda^p(V)$ θα τα ονομάζουμε p -**μορφές** ή απλώς p -διανύσματα.

Το τανυστικό γινόμενο $\otimes$ μεταξύ τανυστών δεν διατηρεί την αντισυμμετρικότητα. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας την Alt , μπορούμε να ορίσουμε το **εξωτερικό γινόμενο** $\wedge$ μεταξύ p - και q -διανυσμάτων.

Ορισμός 1.3.2. Το **εξωτερικό γινόμενο** ορίζεται ως:

$$\wedge : \Lambda^p(V) \times \Lambda^q(V) \rightarrow \Lambda^{p+q}(V)$$

με

$$A \wedge B = Alt(A \otimes B), \quad A \in \Lambda^p(V), B \in \Lambda^q(V).$$

Αυτό σημαίνει ότι για $A \in \Lambda^p(V)$ και $B \in \Lambda^q(V)$:

$$A \wedge B = \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \epsilon(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p+q)}.$$

Για δύο 1-διανύσματα v, u , το εξωτερικό τους γινόμενο είναι:

$$v \wedge u = \frac{1}{2}(v \otimes u - u \otimes v).$$

Μπορούμε πλέον να γράφουμε κάθε p -διάνυσμα ως:

$$A = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p.$$

Επιπλέον, ισχύει η σχέση:

$$A \wedge B = (-1)^{pq} B \wedge A.$$

Ορίζουμε μία ακόμα πράξη που θα μας φανεί χρήσιμη αργότερα.

Ορισμός 1.3.3. Έστω $v \in V$ και $A \in \Lambda^p(V)$. Το **εσωτερικό γινόμενο** ή **αλλιώς συστολή** $v \lrcorner A$ ορίζεται ως:

$$(v \lrcorner A)(v_1, \dots, v_{p-1}) = A(v, v_1, \dots, v_{p-1}).$$

Δηλαδή, μετατρέπει ένα p -διάνυσμα σε ένα $(p-1)$ -διάνυσμα. Στην περίπτωση που $A \in \Lambda^1(V)$:

$$v \lrcorner A = A(v).$$

Ορισμός 1.3.4. Η **εξωτερική άλγεβρα** $\Lambda^*(V)$ ενός διανυσματικού χώρου V διάστασης n ορίζεται ως:

$$\Lambda^*(V) = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda^p(V).$$

Η διάσταση της εξωτερικής άλγεβρας είναι:

$$\dim \Lambda^*(V) = \sum_{p=0}^n \dim \Lambda^p(V) = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n.$$

Η εξωτερική άλγεβρα είναι κλειστή ως προς το εξωτερικό γινόμενο. Δηλαδή, για δύο στοιχεία $A, B \in \Lambda(V)$, το $A \wedge B$ είναι επίσης στοιχείο της $\Lambda^*(V)$, αφού:

$$A \wedge B \in \Lambda^{p+q}(V), \quad \text{αν } A \in \Lambda^p(V), B \in \Lambda^q(V).$$

Αντίστοιχα ορίζεται και η εξωτερική άλγεβρα $\Lambda(V) = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda_p(V)$ και ισχύουν ακριβώς τα ίδια που αναφέραμε προηγουμένως.

Κεφάλαιο 2

Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες και Γεωμετρία Riemann

Μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M αποτελεί γενίκευση των καμπυλών και των επιφανειών. Επί της ουσίας, μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα είναι ένας τοπολογικός χώρος που "μοιάζει" τοπικά με τον Ευκλείδειο χώρο. Μέσω τοπικών ισομορφισμών, τους οποίους ονομάζουμε χάρτες, μπορούμε να μεταφέρουμε την ανάλυση από την M στον $\mathbb{R}^n$, επιτρέποντας έτσι στην πολλαπλότητα να κληρονομήσει τον διαφορικό λογισμό και άλλες έννοιες του Ευκλείδειου χώρου. Το ενδιαφέρον στις πολλαπλότητες είναι ότι δεν υπάρχει απαραίτητα καθολικός χάρτης αλλά αλλάζει από γειτονιά σε γειτονιά. Ο τρόπος με τον οποίο συνδέονται μεταξύ τους οι χάρτες, μας δίνει και την τελική εικόνα της πολλαπλότητας.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται συνοπτικά όλα τα βασικά εργαλεία από τη θεωρία των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων που θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα κεφάλαια. Η παρουσίαση δεν είναι εξαντλητική και οι περισσότερες αποδείξεις παραλείπονται. Για πιο αναλυτική μελέτη και τις πλήρεις αποδείξεις συνιστώνται τα βιβλία [21], [20].

2.1 Ορισμός Διαφορίσιμης Πολλαπλότητας

Έστω ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff M και μια οικογένεια ανοικτών συνόλων $\{U_k\}_{k \in I}$ τέτοια ώστε $\bigcup_{k \in I} U_k = M$. Υποθέτουμε ότι κάθε U_k είναι ομοιομορφικό με κάποιο ανοικτό υποσύνολο $V_k \subset \mathbb{R}^n$. Δηλαδή, υπάρχουν απεικονίσεις

$$\varphi_k : U_k \rightarrow V_k$$

που είναι αμφιμονοσήμαντες, δηλαδή 1-1, επί, συνεχείς και με αντίστροφη συνάρτηση συνεχή ως προς τις τοπολογίες των M και $\mathbb{R}^n$. Το ζεύγος (U_k, φ_k) ονομάζεται **χάρτης** της M , και η εικόνα ενός σημείου $p \in M$ μέσω της φ_k ,

22 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ RIEMANN

δηλαδή $\varphi_k(p) = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, καθορίζει τις συντεταγμένες του p στον $\mathbb{R}^n$ και ονομάζονται **τοπικές συντεταγμένες** του p .

Έστω δύο χάρτες (U_k, φ_k) και (U_l, φ_l) με $U_k \cap U_l \neq \emptyset$. Οι χάρτες αυτοί λέγονται C^r -**συμβιβαστοί** αν η απεικόνιση

$$\varphi_k \circ \varphi_l^{-1} : \varphi_l(U_k \cap U_l) \rightarrow \varphi_k(U_k \cap U_l)$$

είναι C^r -διαφορίσιμη. Αυτή η απεικόνιση είναι από τον $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^n$, οπότε η έννοια της διαφορισιμότητας εφαρμόζεται όπως στον Ευκλείδειο χώρο. Το σύνολο $\mathcal{A}$ που αποτελείται από όλους τους C^r -συμβιβαστούς χάρτες που καλύπτουν το M ονομάζεται C^r -**άτλας**.

Ορισμός 2.1.1. Μια **διαφορίσιμη πολλαπλότητα** είναι ένα ζεύγος $(M, \mathcal{A})$, όπου M είναι ένας τοπολογικός χώρος Hausdorff εξοπλισμένος με έναν C^r -άτλαντα $\mathcal{A}$.

Αν δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης για τον άτλαντα που ορίζει τη διαφορική δομή, γράφουμε απλά M .

Παρατήρηση 2.1.2. Αν όλοι οι χάρτες του $\mathcal{A}$ έχουν την ίδια διάσταση n , τότε το n ονομάζεται **διάσταση** της πολλαπλότητας και συμβολίζουμε την πολλαπλότητα ως M^n . Αποδεικνύεται ότι αν ο χώρος M είναι συνεκτικός, τότε όλοι οι χάρτες έχουν την ίδια διάσταση.

Παρατήρηση 2.1.3. Υπάρχουν προσεγγίσεις που δεν απαιτούν ο χώρος να είναι Hausdorff. Για τις ανάγκες αυτής της εργασίας, θα επικεντρωθούμε σε πολλαπλότητες που είναι Hausdorff.

2.2 Διαφορίσιμες Απεικονίσεις

Μια συνάρτηση $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται C^r -διαφορίσιμη σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων (U_k, φ_k) αν η σύνθεση

$$f \circ \varphi_k^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

είναι C^r -διαφορίσιμη. Λόγω της συμβιβαστότητας των χαρτών, η διαφορισιμότητα της f δεν εξαρτάται από την επιλογή του χάρτη. Αν (U_l, φ_l) είναι ένας άλλος χάρτης, τότε έχουμε

$$f \circ \varphi_l^{-1} = (f \circ \varphi_k^{-1}) \circ (\varphi_k \circ \varphi_l^{-1}),$$

η οποία είναι C^r -διαφορίσιμη ως σύνθεση C^r -συναρτήσεων. Η έννοια αυτή μπορεί να γενικευτεί και για συναρτήσεις μεταξύ πολλαπλοτήτων.

Έστω δύο πολλαπλότητες M^m και N^n και μια συνάρτηση $f : M \rightarrow N$. Θα λέμε ότι η f είναι C^r -απεικόνιση αν, για κάθε ζεύγος τοπικών συστημάτων συντεταγμένων (U, φ_U) στην M και (V, ψ_V) στην N , η σύνθεση

$$\psi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

είναι C^r - διαφορίσιμη. Επίσης εδώ, η διαφορισιμότητα δεν εξαρτάται από την επιλογή των χαρτών. Αν $(U', \varphi_{U'})$ και $(V', \psi_{V'})$ είναι άλλοι χάρτες, τότε

$$\psi_{V'} \circ f \circ \varphi_{U'}^{-1} = (\psi_{V'} \circ \psi_V^{-1}) \circ (\psi_V \circ f \circ \varphi_U^{-1}) \circ (\varphi_U \circ \varphi_{U'}^{-1}),$$

η οποία είναι C^r - διαφορίσιμη ως σύνθεση C^r - συναρτήσεων.

2.3 Διανύσματα Σε Διαφορικές Πολλαπλότητες

Η έννοια ενός διανύσματος v στον $\mathbb{R}^n$ είναι γνωστή και εύκολα κατανοητή. Μπορούμε να πούμε ότι είναι ένα "βέλος" που ξεκινάει από ένα σημείο p και καταλήγει στο σημείο $p+v$. Λόγω της γραμμικής φύσης του $\mathbb{R}^n$, τα σημεία και τα διανύσματα ταυτίζονται. Επίσης, τα διανύσματα μπορούν φυσικά να μεταφέρονται στο σημείο αναφοράς που έχουμε επιλέξει και να πραγματοποιούμε εκεί τις γνωστές πράξεις που ικανοποιούν τα αξιώματα ενός διανυσματικού χώρου.

Στις πολλαπλότητες δεν μπορούμε να ορίσουμε τόσο εύκολα την έννοια του διανύσματος. Καταρχάς, δεν υπάρχει τρόπος να προσθέσουμε δύο σημεία του χώρου. Επίσης, δεν μπορούμε να μιλήσουμε για "βέλη" που ξεκινούν από ένα σημείο, αφού ο χώρος μας δεν μοιάζει, παρά μόνο τοπικά, στον $\mathbb{R}^n$. Μπορεί να είναι καμπυλωμένος και οι έννοιες της ευθείας να είναι πολύ διαφορετικές. Αυτό που θα κάνουμε είναι να ορίσουμε σε κάθε σημείο p έναν διανυσματικό χώρο, τον **εφαπτόμενο διανυσματικό χώρο**, τον οποίο συμβολίζουμε συνήθως με $T_p M$.

Στον Ευκλείδειο χώρο, ξέρουμε ότι κάθε διάνυσμα μπορεί να λειτουργήσει ως διαφορικός τελεστής πάνω σε πραγματικές συναρτήσεις, δίνοντας την κατευθυνόμενη παράγωγο. Αντίστοιχα, ένα διάνυσμα μιας πολλαπλότητας θα πρέπει να οριστεί έτσι ώστε να λειτουργεί με παρόμοιο τρόπο, ορίζοντας έναν διαφορικό τελεστή πάνω σε μια πραγματική συνάρτηση f (επί της ουσίας χειριζόμαστε την $f \circ \varphi_U^{-1}$).

Έστω μια πολλαπλότητα M , ορίζουμε σε κάθε σημείο της πολλαπλότητας έναν γραμμικό χώρο. Έστω f μια πραγματική συνάρτηση από το M στο $\mathbb{R}$. Σε ένα τοπικό σύστημα συντεταγμένων κοντά σε ένα σημείο p , $f(p) = f(x^1, \dots, x^n)$. Αν X είναι ένα διάνυσμα στο p , ορίζουμε την παράγωγο της f ως προς το διάνυσμα :

$$X_p(f) := D(f) := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} \Big|_p X_U^j.$$

Αποδεικνύεται ότι η παράγωγος είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του χάρτη. Μάλιστα, αν ένα σημείο p ανήκει σε δύο χάρτες, $p \in U \cap V$, τότε:

$$X_V^i = \sum_j \frac{\partial x_V^i}{\partial x_U^j}(p) X_U^j$$

24 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ RIEMANN

Υπάρχει μια αντιστοιχία 1-1 μεταξύ των διανυσμάτων και των διαφορικών τελεστών που ορίσαμε πριν. Από εδώ και στο εξής δεν θα τα διαχωρίζουμε και κάθε διάνυσμα X_p θα το γράφουμε ως

$$X_p = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p.$$

Ένας άλλος τρόπος να δούμε τα διανύσματα είναι μέσω καμπυλών. Συγκεκριμένα, θεωρούμε μια καμπύλη $\gamma(t)$ στο M , με $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, η οποία ικανοποιεί $\gamma(0) = p$. Χρησιμοποιώντας έναν τοπικό χάρτη $\varphi : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}^n$, όπου $p \in U$, μπορούμε να εκφράσουμε την καμπύλη στις τοπικές συντεταγμένες $\varphi(\gamma(t)) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^n(t))$. Το διάνυσμα X στο σημείο p μπορεί να θεωρηθεί ως το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $\gamma(t)$ στο $t = 0$, και σε τοπικές συντεταγμένες γράφεται ως:

$$X_p = \sum_{j=1}^n \frac{dx^j(t)}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Με αυτή την ερμηνεία, η παράγωγος μιας συνάρτησης f ως προς το X ορίζεται ως:

$$X_p(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t) \Big|_{t=0}.$$

Επιπλέον, σε τοπικό σύστημα συντεταγμένων $(x^1, \dots, x^n)$, αν η καμπύλη $\gamma(t)$ γράφεται ως $\gamma(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$, τότε:

$$X_p(f) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} \Big|_p \frac{dx^j}{dt} \Big|_{t=0}.$$

Αυτή η προσέγγιση μέσω καμπυλών παρέχει μια γεωμετρική ερμηνεία των διανυσμάτων ως παραγώγους κατά μήκος καμπυλών.

2.4 Εφαπτόμενος Χώρος και Διανυσματικά Πεδία

Από τον τρόπο που ορίσαμε τα διανύσματα, διαπιστώνουμε ότι η πρόσθεση δύο διανυσμάτων ή ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος με έναν αριθμό παράγει επίσης διάνυσμα. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε τον εξής χώρο.

Ορισμός 2.4.1. Ο **εφαπτόμενος χώρος** του M στο σημείο p είναι ο διανυσματικός χώρος που περιέχει όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα του M στο p και συμβολίζεται $T_p M$.

Τοπικά, αφού επιλέξουμε σύστημα συντεταγμένων, η βάση του εφαπτόμενου χώρου είναι η n -άδα

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}.$$

Ορισμός 2.4.2. Έστω διαφορίσιμη πολλαπλότητα M διάστασης n και ένα σημείο $p \in M$ με τοπικούς χάρτες $\varphi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ και $\varphi_y : U_y \rightarrow \mathbb{R}^n$, όπου $U_x, U_y \subseteq M$ είναι περιοχές γύρω από το p , με $p \in U_x \cap U_y$. Έστω $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ και $\{\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}\}$ οι βάσεις του $T_p M$ στις συντεταγμένες x και y αντίστοιχα. Οι βάσεις αυτές συνδέονται μέσω του **Ιακωβιανού πίνακα** της αλλαγής συντεταγμένων, $J(x, y)$, δηλαδή:

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Θα λέμε ότι οι βάσεις $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ και $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\}$ έχουν το ίδιο **προσανατολισμό** αν η ορίζουσα του Ιακωβιανού πίνακα, $\det \left(\frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right)$, είναι θετική:

$$\det \left(\frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)} \right) > 0.$$

Μία πολλαπλότητα λέγεται **προσανατολίσιμη**, αν μπορούμε να επιλέξουμε με συνεχή τρόπο έναν προσανατολισμό για κάθε $T_p M$. Σε αυτή την περίπτωση, οι βάσεις συντεταγμένων των εφαπτόμενων χώρων μπορούν να δηλωθούν ως **θετικά προσανατολισμένες**. Η πολλαπλότητα M λέγεται επίσης **θετικά προσανατολισμένη**.

Αν "συγκεντρώσουμε" όλους τους εφαπτόμενους χώρους όλων των σημείων μιας πολλαπλότητας M , τότε δημιουργούμε έναν νέο χώρο, ο οποίος είναι επίσης πολλαπλότητα.

Ορισμός 2.4.3. Η **εφαπτόμενη δέσμη** TM ορίζεται ως η ξένη ένωση

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M,$$

οπότε, ένα στοιχείο της TM αποτελείται από ένα σημείο της πολλαπλότητας και από ένα διάνυσμα του αντίστοιχου εφαπτόμενου χώρου. Ορίζουμε την **προβολή** $\pi : TM \rightarrow M$ έτσι ώστε $\pi(X) = p$ αν και μόνο αν $X \in T_p M$. Η π είναι μια συνεχής απεικόνιση.

Η TM είναι διαφορίσιμη πολλαπλότητα με χάρτες που προκύπτουν από τους χάρτες (U, φ) της M . Συγκεκριμένα, ορίζουμε έναν χάρτη $(\pi^{-1}(U), \Psi)$ με

$$\Psi(W) = (\varphi \circ \pi(W), w_1, \dots, w_n),$$

για $p \in U$ και $W = w^i \frac{\partial}{\partial x^i} \big|_p$ έχουμε

$$\Psi(W) = (x^1(p), \dots, x^n(p), w^1, \dots, w^n).$$

Αντίστροφα, αν $x = (x^1, \dots, x^n) \in \varphi(U)$, τότε

$$\Psi^{-1}(x^1, \dots, x^n, w^1, \dots, w^n) = w^i \frac{\partial}{\partial x^i} \big|_{\varphi^{-1}(x)}.$$

Το σύνολο $\pi^{-1}(p)$ αποτελείται από όλα τα διανύσματα εφαπτόμενα στη M στο σημείο p και είναι ισόμορφο με τον διανυσματικό χώρο $T_p M \cong \mathbb{R}^n$. Αυτό το σύνολο ονομάζεται **νήμα** πάνω από το p .

Η εφαπτόμενη δέσμη TM φαίνεται να είναι το γινόμενο $M \times \mathbb{R}^n$, αλλά αυτό δεν ισχύει γενικά. Ένα σημείο στην TM αναπαριστά ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στη M σε ένα σημείο p , αλλά δεν είναι δυνατή η αναπαράσταση των συνιστωσών αυτού του διανύσματος μέχρι να οριστεί ένα σύστημα συντεταγμένων, ή μια βάση για τον $T_p M$, στο σημείο p όπου βρίσκεται το διάνυσμα.

Τοπικά, ωστόσο, μπορούμε να ορίσουμε μια τέτοια προβολή. Αν το σημείο βρίσκεται στην περιοχή $\pi^{-1}(U)$, τότε χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες του U μπορούμε να προσδιορίσουμε τις συνιστώσες του διανύσματος. Δεδομένου ότι η περιοχή $\pi^{-1}(U)$ είναι τοπολογικά ισόμορφη με το $U \times \mathbb{R}^n$, λέμε ότι η εφαπτόμενη δέσμη TM είναι τοπικά ένα τετριμμένο γινόμενο.

Παρατήρηση 2.4.4. Η βάση αυτή δεν είναι φυσική, καθώς εξαρτάται από τον χάρτη που έχουμε επιλέξει. Επίσης, είναι προφανές ότι οι εφαπτόμενοι χώροι σε δύο διαφορετικά σημεία δεν "επικοινωνούν" μεταξύ τους. Τα δύο αυτά ζητήματα αντιμετωπίζονται με την εισαγωγή ενός εσωτερικού γινομένου, το οποίο επάγει μια μετρική, τη μετρική Riemann, την οποία θα δούμε στη συνέχεια.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε και την έννοια του **διανυσματικού πεδίου**. Είναι ένας κανόνας που αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο $p \in M$ μιας λείας πολλαπλότητας ένα διάνυσμα από τον εφαπτόμενο χώρο $T_p M$.

Ορισμός 2.4.5. Ένα **διανυσματικό πεδίο** σε έναν χάρτη (U, ϕ_U) είναι μια απεικόνιση X που σε κάθε σημείο p του U αντιστοιχίζει ένα διάνυσμα X_p του $T_p M$. Σε τοπικές συντεταγμένες εκφράζεται ως

$$X = \sum_{j=1}^n X^j \frac{\partial}{\partial x^j},$$

όπου τα X^j είναι διαφορίσιμες πραγματικές συναρτήσεις. Θα συμβολίζουμε με $\mathfrak{X}(M)$ το σύνολο όλων των λείων διανυσματικών πεδίων στην M .

Ένα διανυσματικό πεδίο στην M μπορεί επίσης να θεωρηθεί ως συνάρτηση προς την εφαπτόμενη δέσμη TM . Υπό αυτή την οπτική, θα την ονομάζουμε **τομή**. Πιο συγκεκριμένα, ένα διανυσματικό πεδίο είναι μια συνεχής απεικόνιση

$$X : M \rightarrow TM, \quad p \mapsto X_p,$$

με την ιδιότητα:

$$\pi \circ X = Id_M,$$

όπου $X_p \in T_p M$ για κάθε $p \in M$. Όταν θέλουμε να τονίσουμε ότι τα διανυσματικά πεδία είναι τομές της εφαπτόμενης δέσμης, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\Gamma(TM)$ αντί για $\mathfrak{X}(M)$.

Παρατήρηση 2.4.6. Έστω μια πραγματική συνάρτηση $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, το $X_p(f)$ είναι πραγματικός αριθμός, άρα το $X(f)$ είναι και αυτό μια πραγματική συνάρτηση. Επομένως, έχει νόημα να πούμε ότι το διανυσματικό πεδίο μεταβάλλεται λείως από σημείο σε σημείο, παρά το ότι οι εφαπτόμενοι χώροι σε διαφορετικά σημεία δεν "επικοινωνούν".

2.5 Τανυστές σε Πολλαπλότητες

Οι τανυστές πάνω σε πολλαπλότητες μετασχηματίζονται με συγκεκριμένο τρόπο κάτω από μια αλλαγή βάσης και είναι ανεξάρτητες από τα συστήματα συντεταγμένων. Για αυτό τον λόγο είναι κατάλληλοι για να περιγράφουν φυσικές ποσότητες, αφού οι φυσικοί νόμοι πρέπει να ισχύουν σε όλα τα συστήματα αναφοράς.

Ορισμός 2.5.1. Έστω $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$. Το **διαφορικό** της f στο p είναι το συναλλοίωτο διάνυσμα df που ορίζεται ως

$$df(X_p) = X_p(f).$$

Δηλαδή, είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στην κατεύθυνση του X_p . Αν στη θέση της f βάλουμε τη συνάρτηση συντεταγμένης x^i , τότε έχουμε:

$$dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i,$$

$$dx^i \left(\sum_j v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \sum_j v^j dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = v^i.$$

Τα dx^i αποτελούν τη δυική βάση της φυσικής βάσης $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$. Οι συντεταγμένες μιας συνάρτησης f ως προς τη φυσική βάση είναι:

$$df \left(\frac{\partial}{\partial x^a} \right) = \frac{\partial f}{\partial x^a}.$$

Τελικά,

$$df = \sum_a \frac{\partial f}{\partial x^a} dx^a.$$

Ορισμός 2.5.2. Ένας **τανυστής** τάξης (k, l) πάνω σε έναν εφαπτόμενο χώρο $T_p M$ είναι μια πολυγραμμική απεικόνιση

$$T : \underbrace{T_p^* M \times \dots \times T_p^* M}_k \times \underbrace{T_p M \times \dots \times T_p M}_l \rightarrow \mathbb{R}.$$

Ορισμός 2.5.3. Ένα **τανυστικό πεδίο** T τάξης (k, l) είναι ένας κανόνας που σε κάθε σημείο p μιας πολλαπλότητας M αντιστοιχίζει έναν τανυστή T_p τάξης (k, l) .

Κλείνουμε ορίζοντας δύο πράξεις μεταξύ εφαπτόμενων διανυσματικών χώρων.

Ορισμός 2.5.4. Έστω $F : M \rightarrow N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων. Ορίζουμε την απεικόνιση **push-forward** της F ως

$$F_* : T_p M \rightarrow T_{F(p)} N,$$

ώστε για κάθε $Y \in T_p M$ και $f \in C^\infty(N)$,

$$(F_* Y)(f) = Y(f \circ F),$$

αφού $f \circ F \in C^\infty(M)$. Η απεικόνιση F_* θα ονομάζεται επίσης και διαφορικό.

Χρησιμοποιώντας τις καμπύλες, μπορούμε να ορίσουμε το **push-forward** μέσω της ακόλουθης διαδικασίας. Θεωρούμε μια καμπύλη $\gamma(t)$ στο M , με $\gamma(0) = p$, που έχει εφαπτόμενο διάνυσμα Y στο p . Η εικόνα της καμπύλης μέσω της F είναι η καμπύλη $F \circ \gamma(t)$ στο N , με $F \circ \gamma(0) = F(p)$. Ορίζουμε το $F_* Y$ στο $T_{F(p)} N$ ως το εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης $F \circ \gamma(t)$ στο $t = 0$:

$$F_* Y = \left. \frac{d}{dt} (F \circ \gamma)(t) \right|_{t=0}.$$

Επί της ουσίας, το F_* μεταφέρει ένα διάνυσμα $Y \in T_p M$ στο αντίστοιχο διάνυσμα $F_* Y \in T_{F(p)} N$.

Ορισμός 2.5.5. Έστω $F : M \rightarrow N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων και $f \in C^\infty(N)$ μια λεία συνάρτηση ορισμένη στην πολλαπλότητα N . Ορίζουμε το **pull-back** της f μέσω της F ως την συνάρτηση

$$F^* : C^\infty(N) \rightarrow C^\infty(M),$$

που αντιστοιχεί σε κάθε συνάρτηση $f \in C^\infty(N)$ τη συνάρτηση $F^* f = f \circ F$ στο M . Σε τοπικές συντεταγμένες, η απεικόνιση F γράφεται ως $y^j = F^j(x^i)$, όπου οι x^i είναι τοπικές συντεταγμένες στο M και οι y^j είναι τοπικές συντεταγμένες στο N .

Έστω τώρα X ένα διάνυσμα στο $T_p M$. Η δράση του X πάνω στο $F^* f$ δίνεται ως εξής:

$$X(F^* f) = X(f \circ F) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} [f(y(p))].$$

Αναλυτικά, αυτό υπολογίζεται ως:

$$X(F^* f) = X^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial y^j}.$$

Αυτό μπορεί επίσης να εκφραστεί ως:

$$X(F^*f) = (F_*X)(f) = df(F_*X),$$

όπου το F_*X είναι το *push-forward* του X .

Ορισμός 2.5.6. Έστω $F : M \rightarrow N$ μια διαφορίσιμη απεικόνιση μεταξύ διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων και α μια συνεφαπτόμενη p -μορφή ορισμένη στην πολλαπλότητα N . Ορίζουμε το **pull-back** της α μέσω της F ως τη p -μορφή $F^*\alpha$ στο M που δίνεται από τον τύπο:

$$(F^*\alpha)_p(v_1, \dots, v_p) := \alpha_{F(p)}(F_*v_1, \dots, F_*v_p),$$

για κάθε $p \in M$ και $v_1, \dots, v_p \in T_pM$.

2.6 Ομάδες Lie και Άλγεβρες Lie

Ορισμός 2.6.1. Μια **ομάδα Lie** είναι μια πολλαπλότητα G η οποία ταυτόχρονα είναι ομάδα, έτσι ώστε οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της αντιστροφής να είναι λείες απεικονίσεις. Δηλαδή, οι απεικονίσεις

$$m : G \times G \rightarrow G, \quad m(g, h) = g \cdot h$$

και

$$\iota : G \rightarrow G, \quad \iota(g) = g^{-1}$$

είναι λείες.

Οι ομάδες Lie συνδυάζουν αλγεβρική και γεωμετρική δομή, γεγονός που τις καθιστά πολύτιμες στην εργασία μας.

Παράδειγμα 2.6.2. Η ομάδα $GL(n, \mathbb{R})$ αποτελείται από όλους τους $n \times n$ πραγματικούς πίνακες X με $\det(X) \neq 0$, και σχηματίζει μία n^2 -διάστατη ανοικτή υποπολλαπλότητα του $\mathbb{R}^{n^2}$. Παρομοίως, η ομάδα $GL(n, \mathbb{C})$ αποτελείται από όλους τους αντιστρέψιμους $n \times n$ μιγαδικούς πίνακες και σχηματίζει μία $2n^2$ -διάστατη ανοικτή υποπολλαπλότητα του $\mathbb{C}^{n^2}$.

Παράδειγμα 2.6.3. Η ειδική γραμμική ομάδα $SL(n, \mathbb{R})$ είναι η υποομάδα της $GL(n, \mathbb{R})$ με $\det X = 1$. Είναι υποπολλαπλότητα διάστασης $n^2 - 1$.

Παράδειγμα 2.6.4. Η ορθογώνια ομάδα $O(n)$ περιλαμβάνει όλους τους πραγματικούς πίνακες $n \times n$ που ικανοποιούν $XX^T = I$ και επομένως $\det X = \pm 1$. Είναι υποομάδα της $GL(n, \mathbb{R})$ με διάσταση $n(n-1)/2$. Επίσης, δεν είναι συνεκτική, καθώς αποτελείται από δύο συνιστώσες: την ειδική ορθογώνια ομάδα SO_n , με $\det X = +1$, και την δεύτερη συνιστώσα με $\det X = -1$.

Γενικότερα, έστω $\mathbb{K}$ ένα σώμα από τα $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ ή $\mathbb{H}$, και έστω $s : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$ μια διγραμμική μορφή. Ορίζουμε την ομάδα

$$O(g) := \{A \in M(n, \mathbb{K}) \mid g(AX, AY) = g(X, Y), \forall X, Y \in \mathbb{K}^n\}.$$

30 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ RIEMANN

Η ομάδα $O(g)$ αποτελεί μια ομάδα Lie που περιλαμβάνει όλους τους γραμμικούς μετασχηματισμούς που διατηρούν τη μορφή g . Αντίστοιχα για $SO(g)$.

Παράδειγμα 2.6.5. Η μοναδιαία ομάδα $U(n)$ αποτελείται από τους $n \times n$ μιγαδικούς πίνακες Z που ικανοποιούν $z^\dagger z = I$, όπου $Z^\dagger = \overline{Z}^T$. Η $U(1)$ είναι η ομάδα μιγαδικών αριθμών της μορφής $Z = e^{i\theta}$, που είναι ισόμορφη με τον κύκλο S^1 . Αντίστοιχα, υπάρχει η ειδική μοναδιαία ομάδα $SU(n)$ αποτελεί υποομάδα της $U(n)$ με $\det Z = 1$. Η ομάδα αυτή έχει διάσταση $n^2 - 1$.

Ορισμός 2.6.6. Η **αριστερή μεταφορά** σε μια ομάδα Lie G ορίζεται για κάθε $g \in G$ ως η απεικόνιση

$$L_g : G \rightarrow G, \quad L_g(h) = g \cdot h.$$

Η απεικόνιση L_g είναι λεία, αφού η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι λεία. Επίσης, η L_g είναι διαφορομορφισμός με αντίστροφη την $L_{g^{-1}}$.

Ορισμός 2.6.7. Ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \mathfrak{X}(G)$ σε μια ομάδα Lie G λέγεται **αριστερά αναλλοίωτο** αν για κάθε $g, h \in G$ ισχύει

$$(L_g)_* X_h = X_{gh},$$

όπου $(L_g)_*$ είναι το *push-forward* της L_g . Αυτό σημαίνει ότι το X είναι αναλλοίωτο υπό την αριστερή μεταφορά, δηλαδή η μορφή του δεν εξαρτάται από το σημείο στο οποίο υπολογίζεται.

Αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσουμε τη **δεξιά μετάθεση** σε μια ομάδα Lie G . Για κάθε $g, h \in G$, η δεξιά μετάθεση είναι η απεικόνιση

$$R_g : G \rightarrow G, \quad R_g(h) = h \cdot g.$$

Η R_g είναι επίσης λεία απεικόνιση και διαφορομορφισμός, με αντίστροφη την $R_{g^{-1}}$. Ένα διανυσματικό πεδίο $X \in \mathfrak{X}(G)$ λέγεται **δεξιά αναλλοίωτο** αν για κάθε $g, h \in G$ ισχύει

$$R_{g*} X_h = X_{hg},$$

όπου $(R_g)_*$ είναι το *push-forward* της R_g .

Ο χώρος των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων σε μια ομάδα Lie G μπορεί να ταυτιστεί φυσiolογικά με τον εφαπτόμενο χώρο στο G στο μοναδιαίο σημείο e , $T_e G$. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία:

$$T_e G \rightarrow \{\text{αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία στο } G\}.$$

Για κάθε $X_e \in T_e G$, ορίζουμε το αριστερά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο X σε κάθε σημείο $g \in G$ ως

$$X_g = (L_g)_* X_e.$$

Αυτή η απεικόνιση είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων.

Ο εφαιπτόμενος χώρος μιας ομάδας Lie στο μοναδιαίο σημείο μπορεί να γίνει άλγεβρα εισάγοντας ένα γινόμενο, η οποία προκύπτει με φυσιολογικό τρόπο στη συνέχεια. Θα χρειαστούμε όμως κάποιους προκαταρκτικούς ορισμούς.

Ορισμός 2.6.8. Μια **άλγεβρα Lie** πάνω στο $\mathbb{R}$ είναι ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος V με μια διγραμμική απεικόνιση $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow V$ που είναι αντισυμμετρική και ικανοποιεί την ταυτότητα του Jacobi, δηλαδή:

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

και

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

για κάθε $X, Y, Z \in V$. Την απεικόνιση $[\cdot, \cdot]$ την ονομάζουμε **αγκύλη Lie**.

Ορισμός 2.6.9. Έστω X, Y δύο διανυσματικά πεδία σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M . Ορίζουμε την **αγκύλη Lie** των X και Y ως το διανυσματικό πεδίο $[X, Y]$, το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)),$$

για κάθε λεία συνάρτηση $f \in C^\infty(M)$ και ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. **Αντιμεταθετικότητα:** $[X, Y] = -[Y, X]$.

2. **Διγραμμικότητα:**

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z],$$

και

$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y],$$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και X, Y, Z διανυσματικά πεδία.

3. **Ταυτότητα Jacobi:** $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$.

Πρόταση 2.6.10. Αν X, Y είναι αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία μιας ομάδας Lie G , τότε η αγκύλη Lie $[X, Y]$ είναι επίσης αριστερά αναλλοίωτο.

Πρόταση 2.6.11. Έστω G μια ομάδα Lie. Ο χώρος των αριστερά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων στο G εφοδιασμένος με την αγκύλη Lie είναι μία άλγεβρα Lie και συμβολίζεται με $\mathfrak{g}$. Επιπλέον, ο εφαιπτόμενος χώρος στο μοναδιαίο στοιχείο e της G , δηλαδή $T_e G$, είναι ισόμορφος με τον $\mathfrak{g}$, δηλαδή:

$$T_e G \simeq \mathfrak{g}.$$

Η άλγεβρα $\mathfrak{g}$ ονομάζεται **άλγεβρα Lie** της ομάδας Lie G .

Παράδειγμα 2.6.12. Η άλγεβρα Lie της ομάδας Lie SO_n αποτελείται από τους αντισυμμετρικούς πίνακες $A \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R})$ που ικανοποιούν τη σχέση $A^T + A = 0$. Συμβολίζεται με $\mathfrak{so}_n$ και είναι διάστασης $\frac{n(n-1)}{2}$.

Επιπλέον, η άλγεβρα $\mathfrak{so}_n$ είναι ως διανυσματικός χώρος, ισόμορφη με την εξωτερική άλγεβρα $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$, μέσω της φυσικής αντιστοιχίας μεταξύ αντισυμμετρικών τελεστών και 2-μορφών.

Τα δεξιά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία σχηματίζουν επίσης μια Lie άλγεβρα, αλλά η αγκύλη Lie που επάγεται από τα δεξιά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία είναι αντίθετη αυτήν που επάγεται από τα αριστερά αναλλοίωτα διανυσματικά πεδία:

$$[X, Y]_R = -[X, Y]_L.$$

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με μια σύντομη αναφορά στην **εκθετική συνάρτηση** σε ομάδες Lie.

Ορισμός 2.6.13. Η **εκθετική συνάρτηση** σε μια ομάδα Lie G είναι μια απεικόνιση

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G,$$

όπου $\mathfrak{g}$ είναι η Lie άλγεβρα της G . Για ένα στοιχείο $X \in \mathfrak{g}$, η $\exp(X)$ ορίζεται ως η τιμή στο $t = 1$ της μοναδικής καμπύλης $\gamma(t)$ στο G που ικανοποιεί:

$$\gamma(0) = e \quad \text{και} \quad \gamma'(t) = L_{\gamma(t)*} X.$$

Σε μια γραμμική ομάδα Lie (υποομάδα της $GL(n, \mathbb{R})$), η εκθετική συνάρτηση ταυτίζεται με την εκθετική ενός πίνακα:

$$\exp(X) = e^X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}.$$

Η εκθετική συνάρτηση παίζει κεντρικό ρόλο στη μελέτη των ομάδων Lie και των αναπαραστάσεων τους, καθώς επιτρέπει τη σύνδεση μεταξύ των αλγεβρικών και γεωμετρικών ιδιοτήτων τους.

2.7 Μετρικός Τανυστής Riemann

Ορισμός 2.7.1. Μια **μετρική Riemann** g είναι μια απεικόνιση που αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο p μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας M ένα θετικά ορισμένο εσωτερικό γινόμενο στον εφαπτόμενο χώρο $T_p M$.

Έστω $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$ η φυσική βάση του $T_p M$. Θα συμβολίζουμε με g_{ij} :

$$g_{ij} = g \left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right).$$

Αν το εσωτερικό γινόμενο g είναι μη εκφυλισμένο, αλλά δεν είναι θετικά ορισμένο, τότε η g ονομάζεται **ψευδο-Riemann μετρική**.

Ορισμός 2.7.2. Μια πολλαπλότητα M λέγεται **(ψευδο-)Riemann** αν είναι εφοδιασμένη με μια (ψευδο-)Riemann μετρική.

Όπως έχουμε δει στο πρώτο κεφάλαιο, ένα εσωτερικό γινόμενο ορίζει έναν ισομορφισμό μεταξύ ενός διανυσματικού χώρου και του δυϊκού του. Για κάθε $v \in T_p M$ ορίζεται ένα μοναδικό συναλλοίωτο διάνυσμα $\nu = v^* \in T_p^* M$ με

$$\nu = g(v, \cdot).$$

Επομένως, οι συνιστώσες του συναλλοίωτου διανύσματος είναι

$$\nu_j = v^i g_{ij} = g_{ji} v^i.$$

Αφού

$$\begin{aligned} v &= \sum_j v_j dx^j = \sum_j v(e_j) dx^j \\ &= \sum_j \langle v, e_j \rangle dx^j \\ &= \sum_j \left\langle \sum_i v^i e_i, e_j \right\rangle dx^j \\ &= \sum_j \left(\sum_i v^i g_{ij} \right) dx^j. \end{aligned}$$

Για μία ορθοκανονική βάση ισχύει $g_{ij} = \delta_{ij}^i$, επομένως οι συνιστώσες ενός διανύσματος και του δυϊκού του είναι αριθμητικά ίδιες.

Με τη μετρική Riemann μπορούμε πλέον να ορίσουμε έννοιες όπως μήκος και απόσταση. Επίσης, όπως θα δούμε στη συνέχεια, προσδίδει "σχήμα" στην πολλαπλότητά μας, αφού μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της καμπυλότητας.

2.8 Συνοχή

Η συνοχή είναι ένα εργαλείο που μας επιτρέπει να ορίσουμε την έννοια της παράλληλης μετατόπισης ενός διανύσματος ή ενός τανυστή, πάνω σε μια καμπύλη που συνδέει δύο σημεία μιας πολλαπλότητας, λαμβάνοντας υπόψιν την καμπυλότητα του χώρου. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να συνδέσουμε δύο εφαπτόμενους διανυσματικούς χώρους $T_p M$ και $T_q M$. Οι διαδρομές όπου το εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο μετατοπίζεται παράλληλα προς τον εαυτό του είναι οι πιο σύντομες. Είναι δηλαδή οι "ευθείες" της πολλαπλότητας (γεωδαισιακές). Τέλος, χρησιμοποιώντας την έννοια της παράλληλης μετατόπισης κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής, μπορούμε να δώσουμε έναν συμφυή ορισμό της καμπυλότητας, ανεξάρτητα από τον περιβάλλοντα χώρο.

34 ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ RIEMANN

Ορισμός 2.8.1. Μια **γραμμική συσχετισμένη συνοχή** ορισμένη σε μια πολλαπλότητα M είναι μια απεικόνιση

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

που ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_XZ + g\nabla_YZ$,
2. $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_XY + \nabla_XZ$,
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_XY + (X \cdot \nabla f)Y$,

με $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ και $f, g \in C^\infty(M)$.

Το διάνυσμα $\nabla_X Y(p)$, με $p \in M$, λέγεται **συναλλοίωτη παράγωγος** του Y στην κατεύθυνση του X . Για συντομία, θα χρησιμοποιούμε

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_\alpha Y, & X &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \\ \nabla_X Y &= \frac{DY}{dt}, & X &= \frac{d}{dt}. \end{aligned}$$

Επεκτείνουμε τον ορισμό της συναλλοίωτης παραγώγου για τανυστές αυθαίρετης τάξης.

Ορισμός 2.8.2. Η **συναλλοίωτη παράγωγος** ενός τανυστικού πεδίου τάξης (k, l) στη διεύθυνση ενός διανυσματικού πεδίου X είναι μια διαδικασία που παράγει ένα νέο τανυστικό πεδίο τάξης (k, l) και ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. **Γραμμικότητα:** Η συναλλοίωτη παράγωγος είναι γραμμική τόσο ως προς το διανυσματικό πεδίο X όσο και ως προς το τανυστικό πεδίο T .
2. **Κανόνας Leibniz:** Για κάθε τανυστικό γινόμενο $T \otimes S$, ισχύει:

$$\nabla_X(T \otimes S) = (\nabla_X T) \otimes S + T \otimes (\nabla_X S).$$

Η συναλλοίωτη παράγωγος επεκτείνει τη συνήθη έννοια της παραγώγου σε καμπύλους χώρους, διατηρώντας τη γραμμική δομή και τη συμβατότητα με τη σύνθεση τανυστικών πεδίων.

Ορισμός 2.8.3. Έστω (M, g) μια Riemann πολλαπλότητα με συνοχή ∇ . Η συνοχή ∇ ονομάζεται **συμβατή με τη μετρική** g αν ισχύει:

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z),$$

για κάθε $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$.

Θεώρημα 2.8.4. Σε κάθε Riemann πολλαπλότητα (M, g) , υπάρχει μία και μοναδική συνοχή ∇ που ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

1. **Συμβατότητα με τη μετρική:** Για κάθε $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, ισχύει:

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z).$$

2. **Ελεύθερη στρέψης:** Η στρέψη του ∇ είναι μηδενική, δηλαδή για κάθε $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, ισχύει:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

όπου $[X, Y]$ είναι η αγκύλη Lie των διανυσματικών πεδίων.

Αυτή η συνοχή ονομάζεται **συνοχή Levi-Civita**.

Οι ορισμοί που έχουμε δώσει μοιάζουν μάλλον αυθαίρετοι αλλά η ανάγκη να ορίσουμε μια συναλλοίωτη παράγωγο κατά αυτόν τον τρόπο ξεκινά από το εξής πρόβλημα: η απλή παραγωγή ενός διανυσματικού πεδίου (ή ενός τανυστή) δεν παίρνει υπόψιν της το "σχήμα" της πολλαπλότητας. Για αυτόν τον λόγο, ορίζουμε τα σύμβολα Christoffel $\Gamma_{\alpha\rho\sigma}$, τα οποία θα μπορούσαμε να πούμε ότι είναι "διορθωτικοί" παράγοντες. Όπως είπαμε, σε κάθε Riemann πολλαπλότητα αντιστοιχεί μοναδική συνοχή. Αυτό συμβαίνει γιατί τα σύμβολα Christoffel ορίζονται μονοσήμαντα από τη μετρική μέσω του τύπου

$$\Gamma_{\alpha\rho\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\rho\alpha}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial g_{\sigma\alpha}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial g_{\rho\sigma}}{\partial x^\alpha} \right),$$

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = g^{\mu\alpha} \Gamma_{\alpha\rho\sigma}.$$

Τελικά καταλήγουμε στον εξής τύπο για τη συναλλοίωτη παράγωγο:

$$\nabla_\alpha V^\mu = \partial_\alpha V^\mu + \Gamma_{\rho\alpha}^\mu V^\rho.$$

Αντίστοιχα, η συναλλοίωτη παράγωγος ενός συναλλοίωτου διανύσματος είναι

$$\nabla_\alpha V_\mu = \partial_\alpha V_\mu - \Gamma_{\mu\alpha}^\rho V_\rho,$$

και για έναν τανυστή οποιασδήποτε τάξης έχουμε

$$\nabla_\gamma T_{\beta\dots}^{\alpha\dots} = \frac{\partial T_{\beta\dots}^{\alpha\dots}}{\partial x^\gamma} + \Gamma_{\gamma\lambda}^\alpha T_{\beta\dots}^{\lambda\dots} + \dots - \Gamma_{\gamma\beta}^\lambda T_{\lambda\dots}^{\alpha\dots} - \dots$$

Τέλος, ορίζουμε τον τανυστή καμπυλότητας. Με τον τανυστή καμπυλότητας μπορούμε να κατανοήσουμε το σχήμα της πολλαπλότητας χωρίς να χρειάζεται να την φανταστούμε εμβαπτισμένη στον $\mathbb{R}^n$. Για να μετρήσουμε την καμπυλότητα, εξετάζουμε ουσιαστικά πόσο αποκλίνει η μετρική μας από το να είναι επίπεδη.

Ορισμός 2.8.5. Η **καμπυλότητα** R σε μια πολλαπλότητα *Riemann* είναι μια απεικόνιση

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

που δίνεται από τον τύπο

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z.$$

Ο τανυστής καμπυλότητας R ως προς τη φυσική βάση δίνεται από τον τύπο:

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\delta} = \partial_{\beta} \Gamma_{\alpha\gamma}^{\delta} - \partial_{\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} + \Gamma_{\alpha\gamma}^{\mu} \Gamma_{\mu\beta}^{\delta} - \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \Gamma_{\mu\gamma}^{\delta},$$

όπου $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ είναι οι συντελεστές *Christoffel* της συνοχής ∇ . Από τον τανυστή καμπυλότητας μπορούμε να ορίσουμε:

1. Τανυστής Ricci:

$$Ric_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^{\alpha},$$

ή ως:

$$Ric(X, Y) = \sum_i g(R(u_i, X)Y, u_i).$$

2. Βαθμωτή καμπυλότητα:

$$S = g^{\mu\nu} Ric_{\mu\nu},$$

όπου $g^{\mu\nu}$ είναι ο αντίστροφος μετρικός τανυστής, ή ως:

$$S = \sum_i Ric(u_i, u_i).$$

Ο τελεστής καμπυλότητας που προκύπτει από μία συνοχή *Levi - Civita*, θα ονομάζεται **τελεστής καμπυλότητας Riemann**.

Πρόταση 2.8.6. Ο **τελεστής καμπυλότητας Riemann** ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1. Πρώτη ταυτότητα Bianchi: Για όλα τα $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, ισχύει:

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

2. Συμμετρία ως προς το εσωτερικό γινόμενο: Για όλα τα $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$, ισχύει:

$$g(R(X, Y)Z, W) + g(R(X, Y)W, Z) = 0,$$

όπου g είναι η *Riemann* μετρική της πολλαπλότητας M .

Κεφάλαιο 3

Άλγεβρες Clifford

Αρχικά, θα εισάγουμε τις άλγεβρες Clifford μέσω των Clifford απεικονίσεων, εμφυτεύοντας έναν τετραγωνικό διανυσματικό χώρο σε μια άλγεβρα όπου ο πολλαπλασιασμός της είναι συμβατός με τη δομή του διανυσματικού χώρου και την αντίστοιχη τετραγωνική μορφή. Στη συνέχεια, θα ορίσουμε την άλγεβρα Clifford ως πηλίκο της τανυστικής άλγεβρας, εξασφαλίζοντας έτσι την ύπαρξή της. Τέλος, θα εξετάσουμε παραδείγματα χαμηλής διάστασης, τα οποία θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα τις βασικές ιδιότητες και τη δομή των αλγεβρών Clifford.

3.1 Ορισμός της Άλγεβρας Clifford

Πριν ξεκινήσουμε την ανάλυση μας πρέπει να σημειώσουμε ότι, όπου δεν αναφέρεται ρητά, το σώμα $\mathbb{K}$ μπορεί να είναι είτε $\mathbb{R}$ είτε $\mathbb{C}$ χωρίς κάποια σημαντική διαφορά.

Ορισμός 3.1.1. Έστω V ένας $\mathbb{K}$ -διανυσματικός χώρος με μία τετραγωνική μορφή q . Θεωρούμε επίσης μια προσεταιριστική άλγεβρα A με μονάδα 1_A και μια γραμμική απεικόνιση $\gamma : V \rightarrow A$, που παράγεται από τα στοιχεία $\{\gamma(v) \mid v \in V\}$ και $\{a \cdot 1_A \mid a \in \mathbb{K}\}$. Το ζεύγος (A, γ) ονομάζεται **άλγεβρα Clifford** και η απεικόνιση γ ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$\gamma(v)\gamma(u) + \gamma(u)\gamma(v) = -2g(v, u) \cdot 1_A, \quad \text{για κάθε } v, u \in V. \quad (3.1)$$

Η απεικόνιση γ ονομάζεται **απεικόνιση Clifford**.

Η παραπάνω εξίσωση υποδηλώνει ότι για κάθε $v \in V$ ισχύει:

$$\gamma(v)^2 = -q(v) \cdot 1_A = -g(v, v) \cdot 1_A, \quad (3.2)$$

όπου $q(v) = g(v, v)$ είναι η τετραγωνική μορφή του V . Η απεικόνιση γ είναι κατά κάποιο τρόπο η "τετραγωνική ρίζα" της τετραγωνικής μορφής $q(v) = g(v, v)$.

Ορισμός 3.1.2. Έστω $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ μια βάση ενός τετραγωνικού χώρου (V, q) με μη εκφυλισμένη συμμετρική διγραμμική μορφή g . Η άλγεβρα Clifford (A, γ) , που παράγεται από τον V , ικανοποιεί τις εξής σχέσεις:

$$\gamma(e_i)\gamma(e_j) + \gamma(e_j)\gamma(e_i) = -2g(e_i, e_j) \cdot 1_A, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Αν η βάση είναι ορθοκανονική, τότε ισχύουν:

$$\gamma(e_i)\gamma(e_j) = -\gamma(e_j)\gamma(e_i), \quad \text{αν } i \neq j,$$

δηλαδή τα στοιχεία της βάσης $\{\gamma(e_i)\}$ αντιμετατίθενται.

$$\gamma(e_i)^2 = -q(e_i) \cdot 1_A \quad \text{αν } i = j.$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις, κάθε γινόμενο των στοιχείων $\gamma(e_i)$ μπορεί να αναδιαταχθεί και να γραφτεί ως:

$$\gamma(e_1)^{\mu_1} \gamma(e_2)^{\mu_2} \dots \gamma(e_n)^{\mu_n}, \quad \mu_i = 0, 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Επομένως, για την άλγεβρα Clifford A ισχύει:

$$A = \text{span} \{ \gamma(e_1)^{\mu_1} \gamma(e_2)^{\mu_2} \dots \gamma(e_n)^{\mu_n} \mid \mu_i = 0, 1 \}.$$

Από τον ορισμό, η διάσταση της άλγεβρας Clifford είναι:

$$\dim A = 2^n.$$

Μπορούμε να ορίσουμε άλγεβρες Clifford μικρότερης διάστασης αλλά αυτή η άλγεβρα Clifford μέγιστης διάστασης έχει μία ιδιότητα **καθολικότητας** και μοναδικότητας με την έννοια που θα δούμε αμέσως τώρα.

Ορισμός 3.1.3. Έστω (A, γ) μια άλγεβρα Clifford που παράγεται από τον τετραγωνικό χώρο (V, g) . Θα ονομάζεται **καθολική άλγεβρα Clifford** αν για οποιαδήποτε άλλη άλγεβρα Clifford (B, ρ) που παράγεται από τον (V, g) , υπάρχει ένας ομομορφισμός $\phi : A \rightarrow B$ τέτοιος ώστε $\rho = \phi \circ \gamma$ και $\phi(1_A) = 1_B$.

3.2 Η Άλγεβρα Clifford ως Πηλίκο της Τανυστικής Άλγεβρας

Θα περάσουμε τώρα στην κατασκευή της άλγεβρας Clifford ως πηλίκο της τανυστικής άλγεβρας και ενός ιδεώδους. Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε και μια απόδειξη ύπαρξης. Αυτός ο ορισμός-κατασκευή οφείλεται στον Chevalley [7].

Ορισμός 3.2.1. Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και q μια τετραγωνική μορφή με $q(v) = g(v, v)$. Έστω, επίσης, J το ιδεώδες της τανυστικής άλγεβρας $T(V)$ που παράγεται από τα στοιχεία της μορφής $v \otimes v + q(v) \cdot 1$, για όλα τα $v \in V$. Ονομάζουμε **άλγεβρα Clifford** την άλγεβρα πηλίκου

$$Cl(V, q) = T(V)/J.$$

Οι συμβολισμοί $Cl(V, q)$, $Cl(V, g)$ είναι ισοδύναμοι. Όταν δεν μας ενδιαφέρει η τετραγωνική μορφή, θα γράφουμε απλά $Cl(V)$.

Παρατήρηση 3.2.2. Από τον ορισμό προκύπτει ότι το ιδεώδες J παράγεται επίσης από τα στοιχεία

$$v \otimes u + u \otimes v + 2g(v, u) \cdot 1, \quad (3.3)$$

αφού

$$\begin{aligned} v \otimes u + u \otimes v + 2g(v, u) \cdot 1 &= (v + u) \otimes (v + u) - v \otimes v - u \otimes u \\ &\quad + q(v + u) \cdot 1 - q(v) \cdot 1 - q(u) \cdot 1. \end{aligned}$$

Ο πολλαπλασιασμός στην άλγεβρα Clifford ορίζεται ως

$$[A] \cdot [B] = [A \otimes B],$$

με $A, B \in T(V)$ και $[A], [B]$ οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας στην $Cl(V)$. Έστω $v, u \in V$, αν εκφράσουμε το τανυστικό τους γινόμενο ως

$$\begin{aligned} v \otimes u &= \frac{1}{2}(v \otimes u - u \otimes v) - g(v, u) \cdot 1 \\ &\quad + \frac{1}{2}[(v + u) \otimes (v + u) + q(v + u) \cdot 1 - v \otimes v - q(v) \cdot 1 - u \otimes u - q(u) \cdot 1], \end{aligned}$$

τα στοιχεία όμως που βρίσκονται μέσα στις αγκύλες ανήκουν στο J , οπότε

$$v \otimes u \sim \frac{1}{2}(v \otimes u - u \otimes v) - g(v, u),$$

δηλαδή

$$v \otimes u \sim v \wedge u - g(v, u).$$

Επομένως,

$$vu = v \wedge u - g(v, u). \quad (3.4)$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι το γινόμενο μεταξύ ενός διανύσματος και ενός p -διανύσματος, χρησιμοποιώντας επαγωγή στο βαθμό p , είναι

$$vA_{[p]} = v \wedge A_{[p]} - v^* \lrcorner A_{[p]}, \quad (3.5)$$

όπου $v^* \in V^*$ είναι το δυϊκό διάνυσμα του v και $\lrcorner$ συμβολίζει την αριστερή συστολή.

Για να απλουστεύσουμε τον συμβολισμό, το $\cdot$ θα παραλείπεται, επομένως θα γράφουμε

$$vu + uv = -2g(v, u) \quad (3.6)$$

για τη σχέση που καθορίζει το ιδεώδες J και

$$vA_{[p]} = v \wedge A_{[p]} - v^* \lrcorner A_{[p]}. \quad (3.7)$$

Εάν $V = \mathbb{R}^n$ και q η συνήθης τετραγωνική μορφή, με μία κατάχρηση του συμβολισμού θα ταυτίζουμε το δυικό με το αρχικό διάνυσμα και θα γράφουμε

$$vA_{[p]} = v \wedge A_{[p]} - v \lrcorner A_{[p]}.$$

Έστω μια ορθοκανονική βάση $\mathfrak{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ ενός διανυσματικού χώρου V και $Cl(V, g)$ η άλγεβρα Clifford που παράγεται από τον V και το εσωτερικό γινόμενο g . Από (3.4), έχουμε:

$$e_i e_j = -e_j e_i, \quad i \neq j,$$

και

$$e_i^2 = -g(e_i, e_i) \cdot 1.$$

Επιπλέον, για $i \neq j$, το γινόμενο $e_i e_j$ ταυτίζεται με το εξωτερικό γινόμενο:

$$e_i e_j = e_i \wedge e_j.$$

Συνεπώς, για οποιοδήποτε σύνολο δεικτών $i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_p$, έχουμε:

$$e_{i_1} e_{i_2} \dots e_{i_p} = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_p}.$$

Ένα γενικό στοιχείο της άλγεβρας Clifford είναι

$$A = \underbrace{A}_{\text{βαθμωτό}} + \underbrace{A^i e_i}_{\text{διάνυσμα}} + \underbrace{A^{ij} e_i e_j}_{\text{2-διάνυσμα}} + \dots + \underbrace{A^{i_1 \dots i_n} e_{i_1} \dots e_{i_n}}_{\text{n-διάνυσμα}}.$$

Με βάση όλα τα παραπάνω παίρνουμε την ισότητα:

$$Cl(V, g) \cong \Lambda^*(V),$$

ως διανυσματικοί χώροι. Προφανώς, η άλγεβρα Clifford εξαρτάται κάθε φορά από το εσωτερικό γινόμενο g , δηλαδή από την τετραγωνική μορφή q .

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η άλγεβρα Clifford που ορίσαμε με αυτόν τον τρόπο έχει την καθολική ιδιότητα που είδαμε σε προηγούμενο ορισμό.

Θεώρημα 3.2.3. Έστω $f : V \rightarrow A$ μια γραμμική απεικόνιση σε μια προσεταιριστική $\mathbb{K}$ -άλγεβρα με μονάδα, τέτοια ώστε

$$f(v) \cdot f(v) = -q(v) \cdot 1 \quad \text{για κάθε } v \in V. \quad (3.8)$$

Τότε, η f επεκτείνεται μοναδικά σε ένα $\mathbb{K}$ -ομομορφισμό αλγεβρών $\tilde{f} : Cl(V, q) \rightarrow A$. Επιπλέον, η $Cl(V, q)$ είναι η μοναδική προσεταιριστική $\mathbb{K}$ -άλγεβρα με αυτή την ιδιότητα. Δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\gamma} & Cl(V, q) \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & A \end{array}$$

Απόδειξη. Κάθε γραμμική απεικόνιση $f : V \rightarrow A$ επεκτείνεται μοναδικά σε έναν ομομορφισμό αλγεβρών $\tilde{f} : T(V) \rightarrow A$, όπου $T(V)$ είναι η τανυστική άλγεβρα του V , με

$$\tilde{f}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) = f(v_1) \cdots f(v_k).$$

Αφού

$$f(v) \cdot f(v) = -q(v) \cdot 1,$$

για κάθε $v \in V$, σημαίνει ότι η f μηδενίζεται στο ιδεώδες

$$J = \langle v \otimes v + q(v) \cdot 1 \mid v \in V \rangle$$

της $T(V)$. Άρα, η $\tilde{f}$ "πέφτει" στο πηλίκο $T(V)/J = Cl(V, q)$, δηλαδή υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός

$$\tilde{f} : Cl(V, q) \rightarrow A.$$

Για τη μοναδικότητα της $Cl(V, q)$, έστω ότι Cl' μια προσεταιριστική $\mathbb{K}$ -άλγεβρα με μονάδα και $i : V \rightarrow Cl'$ είναι μια ένθεση. Έστω ότι ισχύει επίσης, η Cl' έχει την ιδιότητα ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $f : V \rightarrow B$ που ικανοποιεί την (3.8) επεκτείνεται μοναδικά σε έναν ομομορφισμό αλγεβρών. Τότε, ο ισομορφισμός από το $V \subseteq Cl(V, q)$ στον $V \xrightarrow{i} Cl'$ επάγει έναν ισομορφισμό αλγεβρών $Cl(V, q)$ και Cl' . $\square$

3.3 Η Δομή της Άλγεβρας Clifford

Ορισμός 3.3.1. Μια πράξη που όταν εφαρμόζεται στον εαυτό της, επιστρέφει στο αρχικό αντικείμενο, ονομάζεται **ενέλιξη**.

Πρόταση 3.3.2. Κάθε άλγεβρα Clifford έχει μια ενέλιξη a τέτοια ώστε:

1. $a^2 = Id$,
2. $a(v) = -v$, για κάθε $v \in V$.

Απόδειξη. Ορίζουμε μια γραμμική απεικόνιση $a : V \rightarrow Cl(V)$ τέτοια ώστε $a(v) = -\gamma(v)$. Αφού

$$a^2(v) = (-\gamma(v))^2 = -q(v) \cdot 1,$$

η a είναι απεικόνιση Clifford. Από την καθολική ιδιότητα, μπορούμε να την επεκτείνουμε σε έναν αυτομορφισμό με τις ιδιότητες που ικανοποιούν την πρόταση. $\square$

Η ύπαρξη του αυτομορφισμού α επιτρέπει μια χρήσιμη διάσπαση της άλγεβρας Clifford $Cl(V, q)$:

$$Cl(V, q) = Cl^0(V, q) \oplus Cl^1(V, q),$$

όπου τα υποσύνολα $Cl^i(V, q) = \{x \in Cl(V, q) : \alpha(x) = (-1)^i x\}$ είναι οι ιδιοχώροι του α . Το $Cl^0(V, q)$ αποτελεί το **άρτιο μέρος** της άλγεβρας Clifford, ενώ το $Cl^1(V, q)$ το **περιττό μέρος**. Δεδομένου ότι $\alpha(x \cdot y) = \alpha(x) \cdot \alpha(y)$ και χρησιμοποιώντας τους δείκτες i, j με βάση το $\mathbb{Z}_2$, προκύπτει ότι

$$Cl^i(V, q) \cdot Cl^j(V, q) \subset Cl^{i+j}(V, q).$$

Αυτό καθιστά την $Cl(V, q)$ μία $\mathbb{Z}_2$ -graded άλγεβρα. Σημειώνουμε ότι το $Cl^0(V, q)$ είναι υποάλγεβρα, ενώ το $Cl^1(V, q)$ δεν είναι.

Ορισμός 3.3.3. Θα ονομάζουμε **άρτια υποάλγεβρα** την

$$Cl^0(V) = \{A \in Cl(V) \mid a(A) = A\}. \quad (3.9)$$

Ορισμός 3.3.4. Έστω $Cl(V, q)$ μια άλγεβρα Clifford και t μια απεικόνιση που δρα στα στοιχεία της $T(V)$ ως εξής:

$$t(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_k) = v_k \otimes v_{k-1} \otimes \cdots \otimes v_1,$$

όπου $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$. Η t διατηρεί το ιδεώδες J που ορίζει την άλγεβρα Clifford $Cl(V, q)$ και συνεπώς επάγει σε μία $\mathbb{K}$ -γραμμική απεικόνιση:

$$\tilde{t} : Cl(V, q) \rightarrow Cl(V, q),$$

που ονομάζεται **ανάστροφος**.

Παρατήρηση 3.3.5. Θα παραλείπουμε το σύμβολο $\sim$ αφού ουσιαστικά μιλάμε για την ίδια συνάρτηση. Επίσης, θα την γράφουμε συνήθως ως εκθέτη για να συμβαδίζουμε με την καθιερωμένη βιβλιογραφία.

Για την t ισχύει

1. Είναι αντι-αυτομορφισμός άλγεβρας, δηλαδή:

$$(x \cdot y)^t = y^t \cdot x^t, \quad \forall x, y \in Cl(V, q).$$

2. Είναι ενέλιξη, δηλαδή:

$$(x^t)^t = x, \quad \forall x \in Cl(V, q).$$

Θα κλείσουμε αυτή την ενότητα με παραδείγματα κάποιων "βασικών" αλγεβρών Clifford. Αυτά θα μας βοηθήσουν να κατανοήσουμε καλύτερα τη δομή μιας άλγεβρας Clifford και επίσης θα δούμε ότι είναι "δομικοί λίθοι" όλων των αλγεβρών Clifford. Πριν ξεκινήσουμε, θα ορίσουμε έναν νέο συμβολισμό.

Ορισμός 3.3.6. Έστω $q_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ η θετικά ορισμένη τετραγωνική μορφή, οριζόμενη ως:

$$q_n(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

Η άλγεβρα Clifford που παράγεται από τον $\mathbb{R}^n$ με βάση την q_n συμβολίζεται ως:

$$Cl_n = Cl(\mathbb{R}^n, q_n),$$

Έστω $q_n^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ η τυπική τετραγωνική μορφή:

$$q_n^{\mathbb{C}}(z) = \sum_{i=1}^n z_i^2, \quad z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Η μιγαδική άλγεβρα Clifford ορίζεται ως:

$$Cl_n = Cl(\mathbb{C}^n, q_n^{\mathbb{C}}).$$

Γενικότερα, για έναν διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$ με τετραγωνική μορφή:

$$q_{p,q}(x) = \sum_{i=1}^p x_i^2 - \sum_{j=p+1}^{p+q} x_j^2.$$

Ο διανυσματικός χώρος συμβολίζεται συνήθως ως $\mathbb{R}^{p,q}$ και οι διαστάσεις (p, q) , ονομάζονται υπογραφή του διανυσματικού χώρου. Ορίζουμε την άλγεβρα Clifford $Cl_{p,q}$ ως:

$$Cl_{p,q} = Cl(\mathbb{R}^{p,q}, q_{p,q}),$$

όπου $n = p + q$.

Η Άλγεβρα Clifford $Cl_{1,0}$

Έστω $V = \mathbb{R}^{1,0}$, δηλαδή έχουμε μία βάση που αποτελείται από ένα στοιχείο $\mathfrak{B} = \{e\}$ με $e^2 = -1$. Ένα τυχαίο στοιχείο της $Cl_{1,0}$ γράφεται ως

$$\psi = a + be, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Ο πολλαπλασιασμός δίνεται από

$$(a + be)(c + de) = (ac - bd) + (ad + bc)e,$$

και μας θυμίζει την άλγεβρα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$. Από την απεικόνιση $\rho : Cl_{1,0} \rightarrow \mathbb{C}$ με $\rho(1) = 1$ και $\rho(e) = i$, παίρνουμε ότι όντως είναι ισόμορφες:

$$Cl_{1,0} \cong \mathbb{C}. \quad (3.10)$$

Η Άλγεβρα Clifford $Cl_{0,1}$

Έστω $V = \mathbb{R}^{0,1}$, δηλαδή έχουμε πάλι μια βάση με ένα στοιχείο $\mathfrak{B} = \{e\}$, αλλά αυτή τη φορά $e^2 = 1$. Ένα τυχαίο στοιχείο της $Cl_{0,1}$ γράφεται επίσης ως

$$\psi = a + be, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

με τον πολλαπλασιασμό να είναι

$$(a + be)(c + de) = (ac + bd) + (ad + bc)e.$$

Έχουμε μια άλγεβρα με βάση $\{1, e\}$ η οποία δεν μας θυμίζει κάποια γνωστή. Φτιάχνουμε μια νέα βάση $\{f_1, f_2\}$ όπου $f_1 = \frac{1}{2}(1 + e)$ και $f_2 = \frac{1}{2}(1 - e)$. Βλέπουμε ότι $f_1^2 = f_1$, $f_2^2 = f_2$, $f_1 f_2 = f_2 f_1 = 0$. Τα f_1, f_2 παράγουν μονοδιάστατες ορθογώνιες υποάλγεβρες, καθεμία από τις οποίες είναι ισόμορφη με τον $\mathbb{R}$. Τελικά:

$$Cl_{0,1} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

Η Άλγεβρα Clifford $Cl_{2,0}$

Έστω $V = \mathbb{R}^{2,0}$ και μια ορθοκανονική βάση $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2\}$. Οι σχέσεις που παίρνουμε από την τετραγωνική μορφή είναι:

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = 1, \quad \text{και} \quad g(e_1, e_2) = 0.$$

Η άλγεβρα $Cl_{2,0}$ έχει βάση $\{1, e_1, e_2, e_1 e_2\}$ και ένα τυχαίο στοιχείο γράφεται:

$$\psi = a + b e_1 + c e_2 + d e_1 e_2, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Από τις σχέσεις της άλγεβρας Clifford έχουμε:

$$e_1^2 = e_2^2 = -1, \quad \text{και} \quad e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0.$$

Επίσης, υπολογίζουμε:

$$(e_1 e_2)^2 = -1.$$

Φαίνεται ότι η άλγεβρα $Cl_{2,0}$ είναι η άλγεβρα των κουατερνίων $\mathbb{H}$. Πράγματι, με τον ισομορφισμό $\rho : Cl_{2,0} \rightarrow \mathbb{H}$ να δίνεται από

$$\rho(1) = 1, \quad \rho(e_1) = i, \quad \rho(e_2) = j, \quad \rho(e_1 e_2) = k,$$

και τα i, j, k να είναι οι "φανταστικές" μονάδες της $\mathbb{H}$:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

καταλήγουμε ότι

$$Cl_{2,0} \cong \mathbb{H}. \quad (3.12)$$

Η Άλγεβρα Clifford $Cl_{0,2}$

Έστω $V = \mathbb{R}^{0,2}$ και μια ορθοκανονική βάση $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2\}$. Οι σχέσεις που παίρνουμε από την τετραγωνική μορφή είναι:

$$g(e_1, e_1) = g(e_2, e_2) = -1, \quad \text{και} \quad g(e_1, e_2) = 0.$$

Από τις σχέσεις της άλγεβρας Clifford έχουμε:

$$e_1^2 = e_2^2 = 1, \quad \text{και} \quad e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0.$$

Επίσης, υπολογίζουμε:

$$(e_1 e_2)^2 = -1.$$

Έστω $\mathbb{R}(2)$ η άλγεβρα των πραγματικών 2×2 πινάκων. Το σύνολο

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

αποτελεί βάση του $\mathbb{R}(2)$, και επιπλέον:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)^2, \quad \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right)^2 = - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Συγκρίνοντας τη $\mathbb{R}(2)$ με την $Cl_{0,2}$, φαίνεται ότι είναι ισόμορφες. Έστω $\rho : Cl_{0,2} \rightarrow \mathbb{R}(2)$ με

$$\begin{aligned} \rho(1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \rho(e_1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \rho(e_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \rho(e_1 e_2) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Η απεικόνιση ρ είναι ισομορφισμός, αφού αντιστοιχεί στοιχεία από τη μία βάση στην άλλη. Τελικά:

$$Cl_{0,2} \cong \mathbb{R}(2). \quad (3.13)$$

Η Άλγεβρα Clifford $Cl_{1,1}$

Η άλγεβρα $Cl_{1,1}$ είναι ισόμορφη με την $Cl_{2,0}$. Τα στοιχεία της $Cl_{1,1}$ γράφονται ως:

$$b_0 + b_1 f_1 + b_2 f_2 + b_{12} f_1 f_2 \in Cl_{1,1},$$

όπου $f_1^2 = -1$ και $f_2^2 = 1$. Αντίστοιχα, τα στοιχεία της $Cl_{2,0}$ εκφράζονται ως:

$$a_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_{12} e_1 e_2 \in Cl_{2,0},$$

όπου $e_1^2 = -1$ και $e_2^2 = -1$. Μπορούμε να ορίσουμε έναν γραμμικό ισομορφισμό $\phi : Cl_{2,0} \rightarrow Cl_{1,1}$, ο οποίος δίνεται από:

$$\phi(1) = 1,$$

$$\phi(e_1) = f_1,$$

$$\phi(e_2) = -f_1 f_2,$$

$$\phi(e_1 e_2) = -f_2.$$

Η απεικόνιση αυτή διατηρεί τη δομή της άλγεβρας Clifford καθιστώντας την ϕ έναν ισομορφισμό. Τελικά

$$Cl_{1,1} \cong \mathbb{R}(2). \quad (3.14)$$

Κεφάλαιο 4

Ταξινόμηση Αλγεβρών Clifford

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ταξινομήσουμε όλες τις πραγματικές και μιγαδικές άλγεβρες Clifford πεπερασμένης διάστασης. Θα ξεκινήσουμε με ορισμένους βασικούς ισομορφισμούς που θα μας βοηθήσουν στη διαδικασία. Κεντρικό αποτέλεσμα είναι ότι κάθε πραγματική ή μιγαδική άλγεβρα Clifford, είναι ισόμορφη με μία άλγεβρα πινάκων ή με το ευθύ άθροισμα δύο ίδιων αλγεβρών πινάκων. Για να καταλήξουμε σε αυτό το αποτέλεσμα, θα δούμε ότι υπάρχει ένα είδος περιοδικότητας που εμφανίζεται στους ισομορφισμούς, ανά 8 για τις πραγματικές άλγεβρες Clifford και ανα 2 για τις μιγαδικές. Θα κλείσουμε το κεφάλαιο με την ταξινόμηση της άρτιας υποάλγεβρας, μέσω της οποίας θα πάρουμε τα *spinors* στο επόμενο κεφάλαιο.

4.1 Ισομορφισμοί Χαμηλής Διάστασης

Ξεκινάμε με κάποιους βασικούς ισομορφισμούς που θα μας βοηθήσουν να συνδέσουμε μεταξύ τους τις άλγεβρες Clifford χαμηλής διάστασης.

Θεώρημα 4.1.1. Έστω $n, s, t \geq 0$, ισχύουν οι παρακάτω ισομορφισμοί:

$$Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0} \cong Cl_{n+2,0},$$

$$Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} \cong Cl_{0,n+2},$$

$$Cl_{s,t} \otimes Cl_{1,1} \cong Cl_{s+1,t+1},$$

όπου $\otimes$ είναι το τανυστικό γινόμενο.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τον πρώτο ισομορφισμό και οι υπόλοιποι αποδεικνύονται αντιστοίχως.

Θεωρούμε τον χώρο $\mathbb{R}^{n+2,0} = \mathbb{R}^{n,0} \oplus \mathbb{R}^{2,0}$. Έστω e_1, e_2 μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{2,0}$. Αν τα θεωρήσουμε στοιχεία της $Cl_{2,0}$ ισχύουν οι σχέσεις $e_1^2 = e_2^2 = -1$ και $e_1 e_2 = -e_2 e_1$. Ορίζουμε την γραμμική απεικόνιση

$$\phi : \mathbb{R}^{n+2,0} \rightarrow Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0}$$

ως εξής:

$$\phi(x) = x \otimes e_1 e_2, \quad \phi(e_i) = 1 \otimes e_i,$$

όπου $x \in \mathbb{R}^{n,0}$ και $i = 1, 2$. Η απεικόνιση ϕ είναι Clifford, καθώς επαληθεύονται οι ταυτότητες για $e_1 e_2$. Συγκεκριμένα:

$$\begin{aligned} \phi(x + \lambda e_1 + \mu e_2)^2 &= (x \otimes e_1 e_2 + \lambda 1 \otimes e_1 + \mu 1 \otimes e_2)^2 \\ &= -x^2 \otimes 1 - \lambda^2 1 \otimes 1 - \mu^2 1 \otimes 1 + \lambda \mu 1 \otimes (e_1 e_2 + e_2 e_1) \\ &= -(x^2 + \lambda^2 + \mu^2) 1 \otimes 1 = -q(x + \lambda e_1 + \mu e_2) 1 \otimes 1. \end{aligned}$$

Άρα, η ϕ είναι άλγεβρα Clifford και επεκτείνεται μοναδικά σε ομομορφισμό αλγεβρών

$$\Phi : Cl_{n+2,0} \rightarrow Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0}.$$

Η Φ είναι επιμορφισμός, αφού η εικόνα της περιέχει ένα σύνολο γεννητόρων. Λόγω διαστάσεων, συμπεραίνουμε ότι η Φ είναι ισομορφισμός. $\square$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη πρόταση χωρίς απόδειξη για να αποκτήσουμε επιπλέον ισομορφισμούς σε χαμηλές διαστάσεις μεταξύ χρήσιμων αλγεβρών. Οι αναλυτικές αποδείξεις και ο τρόπος με τον οποίο αξιοποιούνται, βρίσκονται στα [18], [19].

Πρόταση 4.1.2. Με $\mathbb{K}(n)$ συμβολίζουμε την άλγεβρα πινάκων $n \times n$ με $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Για κάθε $m, n \geq 1$ ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathbb{K}(m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{K}(n) &\cong \mathbb{K}(mn), \\ \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} &\cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}, \\ \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} &\cong \mathbb{C}(2), \\ \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} &\cong \mathbb{R}(4). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Έχοντας ήδη δει κάποιες άλγεβρες Clifford στο προηγούμενο κεφάλαιο και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (4.1.1.) και την προηγούμενη πρόταση, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον πίνακα 4.1 που βρίσκεται στο τέλος του κεφαλαίου. Όπως θα φανεί στη συνέχεια, αυτός ο πίνακας είναι αρκετός αφού υπάρχει ένα είδος περιοδικότητας, γνωστή ως **περιοδικότητα Bott**. Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε τα βασικά θεωρήματα αυτού του κεφαλαίου.

4.2 Περιοδικότητα Bott

Θεώρημα 4.2.1. Έστω $n, p, q \geq 0$. Τότε ισχύουν οι ακόλουθοι ισομορφισμοί:

$$\begin{aligned} Cl_{n+8,0} &\cong Cl_{n,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16), \\ Cl_{0,n+8} &\cong Cl_{0,n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16), \\ Cl_{p+4,q+4} &\cong Cl_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(16). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει άμεσα από επανειλημμένη εφαρμογή του Θεωρήματος 4.1.1., καθώς και από τους παρακάτω ισομορφισμούς:

$$Cl_{1,1}^{\otimes 4} \cong \mathbb{R}(16),$$

και

$$Cl_{2,0}^{\otimes 2} \otimes Cl_{0,2}^{\otimes 2} \cong \mathbb{R}(16),$$

αφού από (3.13) και (3.14) $Cl_{2,0} \cong Cl_{1,1} \cong \mathbb{R}(2)$. □

Με βάση τον πίνακα και την περιοδικότητα Bott, έχουμε το θεώρημα που ταξινομεί όλες τις άλγεβρες Clifford $Cl_{p,q}$.

Θεώρημα 4.2.2. Κάθε άλγεβρα Clifford $Cl_{p,q}$ είναι ισόμορφη με μια άλγεβρα πινάκων ή με το ευθύ άθροισμα δύο ίδιων αλγεβρών πινάκων με στοιχεία από $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, ανάλογα με τη διάστασή της, όπως δείχνει ο ακόλουθος πίνακας. Αν $n = p + q$:

$$Cl(n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}(2^{n/2}), & \text{αν } p - q \equiv 0 \pmod{8}, \\ \mathbb{C}(2^{(n-1)/2}), & \text{αν } p - q \equiv 1 \pmod{8}, \\ \mathbb{H}(2^{(n-2)/2}), & \text{αν } p - q \equiv 2 \pmod{8}, \\ \mathbb{H}(2^{(n-3)/2}) \oplus \mathbb{H}(2^{(n-3)/2}), & \text{αν } p - q \equiv 3 \pmod{8}, \\ \mathbb{H}(2^{(n-2)/2}), & \text{αν } p - q \equiv 4 \pmod{8}, \\ \mathbb{C}(2^{(n-1)/2}), & \text{αν } p - q \equiv 5 \pmod{8}, \\ \mathbb{R}(2^{n/2}), & \text{αν } p - q \equiv 6 \pmod{8}, \\ \mathbb{R}(2^{(n-1)/2}) \oplus \mathbb{R}(2^{(n-1)/2}), & \text{αν } p - q \equiv 7 \pmod{8}. \end{cases} \quad (4.3)$$

4.3 Άρτια Υποάλγεβρα Clifford

Σημαντικό ρόλο παίζουν οι άρτιες υποάλγεβρες και η ταξινόμησή τους. Ευτυχώς, υπάρχει ένας ισομορφισμός που διευκολύνει τη διαδικασία.

Θεώρημα 4.3.1. Έστω $Cl_{p,q}$ μια άλγεβρα Clifford για κάθε $p, q \geq 0$. Τότε ισχύει ο ακόλουθος ισομορφισμός για την άρτια υποάλγεβρά της:

$$Cl_{p,q}^0 \cong Cl_{p+1,q} \cong Cl_{p,q+1}.$$

Απόδειξη. Για τον ισομορφισμό $Cl_{p,q}^0 \cong Cl_{p+1,q}$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\phi : \mathbb{R}^{p,q} \rightarrow Cl_{p+1,q}^0$$

ως

$$\phi(x) = xe_{p+1}.$$

Η ϕ είναι Clifford απεικόνιση:

$$\phi(x)^2 = (xe_{p+1})(xe_{p+1}) = -x^2 e_{p+1}^2 = x^2 = -q(x),$$

αφού $e_{p+1}^2 = -1$. Επομένως, η ϕ είναι Clifford απεικόνιση και επεκτείνεται μοναδικά σε ομομορφισμό αλγεβρών

$$\Phi : Cl_{p,q} \rightarrow Cl_{p+1,q}^0.$$

Η Φ είναι επιμορφισμός, καθώς η εικόνα της περιέχει ένα σύνολο γεννητόρων. Λόγω διαστάσεων, συμπεραίνουμε ότι η Φ είναι ισομορφισμός.

Ανάλογα, μπορούμε να δείξουμε ότι $Cl_{p,q}^0 \cong Cl_{p,q+1}$, ολοκληρώνοντας την απόδειξη. $\square$

Από την προηγούμενη ανάλυσή μας, προκύπτει εύκολα η ταξινόμησή τους.

Θεώρημα 4.3.2. Για κάθε άρτια υποάλγεβρα Clifford $Cl_{p,q}^0$ με $n = p + q$, ισχύει:

$$Cl_{p,q}^0 \cong \begin{cases} \mathbb{R}(2^{(n-2)/2}) \oplus \mathbb{R}(2^{(n-2)/2}), & \text{αν } p - q \equiv 0 \pmod{8}, \\ \mathbb{R}(2^{(n-1)/2}), & \text{αν } p - q \equiv 1 \pmod{8}, \\ \mathbb{C}(2^{(n-2)/2}), & \text{αν } p - q \equiv 2 \pmod{8}, \\ \mathbb{H}(2^{(n-3)/2}), & \text{αν } p - q \equiv 3 \pmod{8}, \\ \mathbb{H}(2^{(n-4)/2}) \oplus \mathbb{H}(2^{(n-4)/2}), & \text{αν } p - q \equiv 4 \pmod{8}, \\ \mathbb{H}(2^{(n-3)/2}), & \text{αν } p - q \equiv 5 \pmod{8}, \\ \mathbb{C}(2^{(n-2)/2}), & \text{αν } p - q \equiv 6 \pmod{8}, \\ \mathbb{R}(2^{(n-1)/2}), & \text{αν } p - q \equiv 7 \pmod{8}. \end{cases} \quad (4.4)$$

4.4 Μιγαδικές Άλγεβρες Clifford

Ορισμός 4.4.1. Έστω V ένας πραγματικός διανυσματικός χώρος με $\dim V = n$. Ονομάζουμε **μιγαδοποίηση** του V τον μιγαδικό διανυσματικό χώρο $V_{\mathbb{C}}$ με στοιχεία της μορφής $v + iu$, όπου $v, u \in V$ και i η μιγαδική μονάδα. Οι πράξεις πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} (v_1 + iu_1) + (v_2 + iu_2) &= (v_1 + v_2) + i(u_1 + u_2), \\ (a + ib)(v + iu) &= (av - bu) + i(bv + au), \end{aligned}$$

όπου $a + ib \in \mathbb{C}$ και $v, u, v_i, u_i \in V$.

Παρατηρούμε δηλαδή ότι:

$$V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V. \quad (4.5)$$

Η διάσταση του $V_{\mathbb{C}}$ είναι $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = n$ ως προς το $\mathbb{C}$ και $\dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{C}} = 2n$ ως προς το $\mathbb{R}$. Αν επιπλέον ο χώρος V έχει μια συμμετρική διγραμμική μορφή g , μπορούμε να την επεκτείνουμε στον μιγαδοποιημένο χώρο $V_{\mathbb{C}}$. Θα τη συμβολίζουμε ως $g_{\mathbb{C}}$ και ορίζεται ως:

$$g_{\mathbb{C}}(v_1 + iu_1, v_2 + iu_2) = g(v_1, v_2) - g(u_1, u_2) + i[g(v_1, u_2) + g(u_1, v_2)].$$

Από αυτήν προκύπτει η νέα τετραγωνική μορφή $q_{\mathbb{C}}$.

Θεώρημα 4.4.2. Έστω (V, q) ένας διανυσματικός χώρος με τετραγωνική μορφή q και $Cl(V, q)$ η αντίστοιχη άλγεβρα Clifford. Αν $V_{\mathbb{C}}$ είναι η μιγαδοποίηση του V , τότε ισχύει:

$$Cl(V_{\mathbb{C}}, q_{\mathbb{C}}) \cong Cl(V, q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Πιο συγκεκριμένα:

$$Cl_{p,q} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong Cl(\mathbb{C}^{p+q}, q \otimes \mathbb{C}) \equiv Cl_n,$$

όπου $n = p + q$.

Απόδειξη. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\phi : V \times \mathbb{C} \rightarrow Cl(V, q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}, \quad \phi(v, z) = v \otimes z,$$

Από αυτήν, προκύπτει η $\mathbb{R}$ -γραμμική απεικόνιση

$$\phi : V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \rightarrow Cl(V, q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Για κάθε $v \in V$ και $z \in \mathbb{C}$, έχουμε

$$\phi(v \otimes z) = v \otimes z = (v \otimes 1)z = \phi(v \otimes 1)z,$$

οπότε η ϕ είναι και $\mathbb{C}$ -γραμμική. Επιπλέον, ισχύει

$$\phi(v \otimes 1)^2 = (v \otimes 1)^2 = -q(v)(1 \otimes 1),$$

άρα η ϕ είναι Clifford απεικόνιση και επεκτείνεται μοναδικά σε ομομορφισμό μιγαδικών αλγεβρών

$$\Phi : Cl(V_{\mathbb{C}}, q_{\mathbb{C}}) \rightarrow Cl(V, q) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

Η Φ είναι επιμορφισμός, καθώς η εικόνα της περιέχει τα $Cl(V, q) \otimes 1$ και $1 \otimes \mathbb{C}$, που είναι γεννήτορες. Λόγω διαστάσεων, συμπεραίνουμε ότι η Φ είναι ισομορφισμός.

□

Πόρισμα 4.4.3. Από το Θεώρημα, προκύπτει ότι η μιγαδοποίηση της $Cl_{1,0}$ είναι:

$$\begin{aligned} Cl_1 &\cong Cl_{1,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ &\stackrel{(3.10)}{\cong} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \\ &\stackrel{(4.1)}{\cong} \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι με τη μιγαδοποίηση χάνουμε την πληροφορία για την υπογραφή της τετραγωνικής μορφής, δηλαδή

$$Cl_{s,t} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong Cl_{s+t}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η άλγεβρες Clifford είναι πιο "απλές" κατά μία έννοια και αυτό θα φανεί και στην ταξινόμηση τους.

Πρώτα θα αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.4.4. Για κάθε μιγαδική άλγεβρα Clifford Cl_n με $n \geq 0$, ισχύει ο ισομορφισμός:

$$Cl_{n+2} \cong Cl_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(2),$$

όπου $\mathbb{C}(2)$ είναι η άλγεβρα των 2×2 μιγαδικών πινάκων.

Απόδειξη. Γράφουμε $\mathbb{C}^{n+2} = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}e_1 \oplus \mathbb{C}e_2$ και ορίζουμε τη μιγαδική γραμμική απεικόνιση

$$\phi : \mathbb{C}^{n+2} \rightarrow Cl_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(2),$$

ως εξής:

$$\phi(x) = x \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi(e_1) = 1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \phi(e_2) = 1 \otimes \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

όπου $x \in \mathbb{C}^n$. Η ϕ είναι Clifford απεικόνιση. Για κάθε $x \in \mathbb{C}^n$, e_1, e_2 , ισχύουν οι σχέσεις:

$$\phi(x)^2 = (x \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix})^2 = -q(x)(1 \otimes I),$$

$$\phi(e_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}^2 = -1 \otimes I, \quad \phi(e_2)^2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}^2 = -1 \otimes I.$$

Η ϕ λοιπόν είναι απεικόνιση Clifford και επεκτείνεται μοναδικά σε ομομορφισμό αλγεβρών

$$\Phi : Cl_{n+2} \rightarrow Cl_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(2).$$

Η Φ είναι επιμορφισμός, αφού η εικόνα της περιέχει ένα σύνολο γεννητόρων. Λόγω διαστάσεων, συμπεραίνουμε ότι η Φ είναι ισομορφισμός. $\square$

Η ταξινόμηση των μιγαδικών αλγεβρών πλέον είναι εύκολη. Γνωρίζοντας ότι $\mathbb{C}l_0 \cong \mathbb{C}$, $\mathbb{C}l_1 \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ και εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση όσες φορές χρειαστεί, έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.4.5. Για κάθε $n \geq 0$ ισχύει ο ισομορφισμός:

$$\mathbb{C}l_n \cong \begin{cases} \mathbb{C}(2^{n/2}), & \text{αν } n \text{ άρτιος,} \\ \mathbb{C}(2^{(n-1)/2}) \oplus \mathbb{C}(2^{(n-1)/2}), & \text{αν } n \text{ περιττός.} \end{cases} \quad (4.6)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
8	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16) \oplus \mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(32)$	$\mathbb{C}(64)$	$\mathbb{R}(128)$	$\mathbb{R}(128) \oplus \mathbb{R}(128)$	$\mathbb{R}(256)$
7	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8) \oplus \mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(64) \oplus \mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(128)$	$\mathbb{C}(128)$
6	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4) \oplus \mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{R}(32) \oplus \mathbb{R}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{C}(64)$	$\mathbb{H}(64)$
5	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16) \oplus \mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{H}(32)$	$\mathbb{H}(32) \oplus \mathbb{H}(32)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16) \oplus \mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(32)$
3	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(4) \oplus \mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8) \oplus \mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$
2	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(2) \oplus \mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$
1	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16) \oplus \mathbb{R}(16)$
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$

Πίνακας 4.1: Ισομορφισμοί Αλγεβρών Clifford μέχρι διάστασης 8×8

Κεφάλαιο 5

Ομάδες Spin και οι Αναπαραστάσεις τους

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ορίσουμε τις ομάδες Pin και Spin που προκύπτουν από τις άλγεβρες Clifford και τις αναπαραστάσεις τους. Αρχικά, θα εξετάσουμε απεικονίσεις που αφήνουν μια τετραγωνική μορφή αναλλοίωτη και θα μελετήσουμε τη σχέση αυτών των απεικονίσεων με τις ομάδες Pin και Spin. Αυτή η προσέγγιση συνδέει την άλγεβρα Clifford με τη γεωμετρία, αναδεικνύοντας τη θεμελιώδη σχέση τους.

5.1 Ομάδες Spin και η Σχέση τους με τη Γεωμετρία

Αρχικά, ορίζουμε το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων στοιχείων της άλγεβρας Clifford:

Ορισμός 5.1.1. Το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων μιας ομάδας Clifford, συμβολίζεται ως:

$$Cl^*(V, q) = \{x \in Cl(V, q) : \exists x^{-1}, x^{-1}x = xx^{-1} = 1\}.$$

Αυτή η ομάδα περιέχει όλα τα στοιχεία $v \in V$ με $q(v) \neq 0$ και αντίστροφο:

$$v^{-1} = -\frac{v}{q(v)}.$$

Ορίζουμε τη συζυγή απεικόνιση $Ad_v : V \rightarrow V$, η οποία για κάθε $x \in V$ ορίζεται ως:

$$Ad_v(x) = vxv^{-1}. \quad (5.1)$$

Με εύκολους υπολογισμούς, βλέπουμε ότι αυτή η απεικόνιση περιγράφει τη

συμμετρία του x ως προς το υπερεπίπεδο κάθετο προς το v .

$$\begin{aligned}
 Ad_v(x) &= v \cdot x \cdot v^{-1} \\
 &= -\frac{1}{q(v)} v \cdot x \cdot v \\
 &= -\frac{1}{q(v)} (-xv - 2g(x, v)1) \cdot v \\
 &= -x + \frac{2g(x, v)}{q(v)} v \\
 &= -R_v(x).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

όπου $R_v(x)$ συμβολίζει την ανάκλαση του x στο υπερεπίπεδο κάθετο προς το v . Για να "εξαφανίσουμε" το πρόσημο, ορίζουμε την *twisted* συζυγή αναπαράσταση ως:

$$\widetilde{Ad}_v(x) = \alpha(v)xv^{-1},$$

όπου α ενέλιξη. Γενικεύουμε για κάθε $a \in Cl^*$ και ορίζουμε την ομάδα:

$$P(V, q) = \{a \in Cl^*(V, q) : \widetilde{Ad}_a(V) \subset V\}.$$

Πρόταση 5.1.2. Έστω V ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος και q μια μη εκφυλισμένη μορφή. Τότε, ο πυρήνας του ομομορφισμού $\widetilde{Ad} : P(V, q) \rightarrow GL(V)$ είναι:

$$\ker(\widetilde{Ad}) = \mathbb{K} \cdot 1$$

.

Απόδειξη. Επιλέγουμε μια ορθοκανονική βάση $\{v_1, \dots, v_n\}$ για τον V , τέτοια ώστε $q(v_i) \neq 0$ για κάθε i . Έστω $\phi \in Cl^*(V, q)$ ένα στοιχείο στον πυρήνα του $\widetilde{Ad}$, δηλαδή:

$$\phi v = v\phi, \quad \forall v \in V. \tag{5.3}$$

Γράφουμε $\phi = \phi_0 + \phi_1$, όπου ϕ_0 είναι το άρτιο μέρος και ϕ_1 είναι το περιττό μέρος, οπότε η (5.3) γίνεται:

$$\phi_0 v = v\phi_0, \tag{5.4}$$

$$-\phi_1 v = v\phi_1. \tag{5.5}$$

Τα ϕ_0 και ϕ_1 μπορούν να γραφούν ως γραμμικός συνδυασμός των $\{v_1, \dots, v_n\}$ ως:

$$\phi_0 = a_0 + v_1 a_1,$$

όπου a_0 και a_1 είναι γραμμικός συνδυασμός των $v_2, \dots, v_n$. Επειδή ϕ_0 άρτιο, το a_0 είναι άρτιο και το a_1 περιττό. Θέτοντας $v = v_1$ στην σχέση (5.4), προκύπτει:

$$(a_0 + v_1 a_1)v_1 = v_1(a_0 + v_1 a_1).$$

Απλοποιώντας τα γινόμενα και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $v_1^2 = -q(v_1)$, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} a_0 v_1 + v_1 a_1 v_1 &= v_1 a_0 + v_1^2 a_1, \\ a_0 v_1 + v_1 a_1 v_1 &= v_1 a_0 - q(v_1) a_1. \end{aligned}$$

Εξισώνοντας τους αντίστοιχους όρους, προκύπτει:

$$\begin{aligned} v_1 a_1 v_1 &= -q(v_1) a_1, \\ -v_1^2 a_1 &= -q(v_1) a_1, \\ q(v_1) a_1 &= -q(v_1) a_1. \end{aligned}$$

Επομένως:

$$a_1 = 0.$$

Άρα, το ϕ_0 δεν περιέχει τον όρο v_1 , και έτσι:

$$\phi_0 = a_0,$$

όπου a_0 είναι ανεξάρτητο από το v_1 . Επαγωγικά, μπορούμε να δείξουμε ότι το ϕ_0 δεν περιέχει κανέναν από τους όρους $v_1, \dots, v_n$ και συνεπώς:

$$\phi_0 = t \cdot 1, \quad t \in \mathbb{K}.$$

Αντίστοιχα, για το ϕ_1 . □

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της ορθογώνιας ομάδας και θα αναφέρουμε ένα πολύ βασικό θεώρημα που χαρακτηρίζει τα στοιχεία της.

Ορισμός 5.1.3. Η ορθογώνια ομάδα $O(V)$ αποτελείται από τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς του διανυσματικού χώρου V και ορίζεται ως:

$$O(V) = \{a : V \rightarrow V \mid q(av) = q(v), \forall v \in V\},$$

όπου q είναι η τετραγωνική μορφή στον V . Αυτό σημαίνει ότι, για $a \in O(V)$, τότε $\det a = \pm 1$.

Η ειδική ορθογώνια ομάδα $SO(V)$ ορίζεται ως το υποσύνολο των στοιχείων της $O(V)$ με $\det a = 1$:

$$SO(V) = \{a \in O(V) \mid \det a = 1\}.$$

Θεώρημα 5.1.4 (Cartan–Dieudonné [12]). Έστω V ένας διανυσματικός χώρος εφοδιασμένος με μία μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή q . Κάθε στοιχείο $a \in O(V)$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πεπερασμένου αριθμού ανακλάσεων, δηλαδή:

$$a = R_{u_1} \circ R_{u_2} \circ \dots \circ R_{u_r},$$

όπου R_{u_i} είναι ανάκλαση στο υπερεπίπεδο κάθετο στο u_i . Επιπλέον, ισχύει ότι $r \leq \dim V$.

Θεώρημα 5.1.5. *Η απεικόνιση*

$$\widetilde{Ad} : P(V) \rightarrow O(V)$$

είναι επιμορφισμός.

Απόδειξη. Προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της $\widetilde{Ad}$ και το θεώρημα Cartan–Dieudonné. $\square$

Θα κανονικοποιήσουμε την ομάδα $P(V, q)$ ώστε να προκύψει μια υποομάδα της με μικρότερο πυρήνα, διατηρώντας την ιδιότητα της $\widetilde{Ad}$ να παραμένει επιμορφισμός. Για να συνεχίσουμε, θα χρειαστούμε την έννοια της νόρμας. Ορίζουμε $N : Cl(V, q) \rightarrow Cl(V, q)$ ως:

$$N(x) := x \cdot \alpha(x^t),$$

όπου α είναι η ενέλιξη και x^t ο ανάστροφος του x . Είναι φανερό ότι $N(v) = q(v)$, για κάθε $v \in V$, αφού $u^t = u$.

Πρόταση 5.1.6. *Η απεικόνιση N περιορισμένη στην $P(V, q)$ είναι ένας ομομορφισμός:*

$$N|_{P(V, q)} : P(V, q) \rightarrow \mathbb{K}^*.$$

Απόδειξη. Για κάθε $v \in V$ και $\phi \in P(V, q)$, έχουμε ότι $\widetilde{Ad}_\phi(v) \in V$. Επομένως, ισχύει:

$$\widetilde{Ad}_\phi(v) = (\widetilde{Ad}_\phi(v))^t.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι:

$$\begin{aligned} \alpha(\phi)v\phi^{-1} &= (\phi^t)^{-1}v\alpha(\phi^t), \\ \phi^t\alpha(\phi)v\phi^{-1}(\alpha(\phi^t))^{-1} &= v, \\ \alpha[\alpha(\phi^t)\phi]v(\alpha(\phi^t)\phi)^{-1} &= v, \\ \widetilde{Ad}_{\alpha(\phi^t)\phi}(v) &= v. \end{aligned}$$

Το οποίο σημαίνει ότι το $\alpha(\phi^t)\phi \in \mathbb{K}^*$ σύμφωνα με την πρόταση 5.1.2. Εφαρμόζοντας πάλι την ενέλιξη α στο $\alpha(\phi^t)\phi \Rightarrow \phi^t\alpha(\phi) = N(\phi)$ καταλήγουμε ότι $N(\phi) \in \mathbb{K}^*$. Τελικά, ισχύει ότι:

$$N(a \cdot b) = \alpha(b^t \cdot a^t) \cdot a \cdot b = \alpha(b^t) \cdot N(a) \cdot b = N(a) \cdot N(b).$$

Επομένως, η N είναι ομομορφισμός. $\square$

Οι υποομάδες της $P(V, q)$ που ψάχνουμε με μικρότερο πυρήνα, που διατηρούν την ιδιότητα της $\widetilde{Ad}$ να είναι επιμορφισμός, είναι οι παρακάτω.

Ορισμός 5.1.7. Η ομάδα Pin ορίζεται ως:

$$Pin(V, q) = \{v_1 \cdots v_r \in P(V, q) \mid q(v_j) = \pm 1, \quad j = 1, \dots, r\},$$

όπου $P(V, q)$ είναι το σύνολο των αντιστρέψιμων στοιχείων της άλγεβρας Clifford $Cl(V, q)$, και q η τετραγωνική μορφή στον διανυσματικό χώρο V .

Η ομάδα $Spin$ είναι η υποομάδα της ομάδας Pin που περιλαμβάνει τα στοιχεία που ανήκουν στην άρτια υποάλγεβρα Cl^0 της $Cl(V, q)$, και ορίζεται ως:

$$Spin(V, q) = \{v_1 \cdots v_r \in Pin(V, q) \mid q(v_j) = \pm 1, \quad j = 1, \dots, r\} \cap Cl^0.$$

Έχουμε πλέον όλα τα εργαλεία για να αποδείξουμε τα πιο σημαντικά θεωρήματα για την ομάδα Pin και $Spin$. Θα επικεντρωθούμε μόνο σε πραγματικούς και μιγαδικούς διανυσματικούς χώρους.

Ορισμός 5.1.8. Μια **ακριβής ακολουθία** είναι μια ακολουθία ομομορφισμών ομάδων ή διανυσματικών χώρων

$$\cdots \rightarrow A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \rightarrow \cdots$$

για την οποία ισχύει ότι:

$$Im(f_{i-1}) = ker(f_i), \quad \forall i.$$

Θεώρημα 5.1.9. Έστω V ένας πεπερασμένης διάστασης διανυσματικός χώρος πάνω από $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Έστω q μια μη εκφυλισμένη τετραγωνική μορφή στον V . Ισχύουν οι παρακάτω ακριβείς ακολουθίες:

$$1 \rightarrow \mathbb{F} \rightarrow Pin(V, q) \xrightarrow{\widetilde{Ad}} O(V, q) \rightarrow 1,$$

$$1 \rightarrow \mathbb{F} \rightarrow Spin(V, q) \xrightarrow{\widetilde{Ad}} SO(V, q) \rightarrow 1,$$

όπου

$$\mathbb{F} = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}, & \text{αν } i \notin \mathbb{K}, \\ \mathbb{Z}_4 = \{\pm 1, \pm i\}, & \text{αν } i \in \mathbb{K}. \end{cases}$$

Απόδειξη. Έστω $x = v_1 \cdots v_r \in Pin(V, q)$ με $x \in ker(\widetilde{Ad})$. Γνωρίζουμε ότι $x \in \mathbb{K}^*$ και επιπλέον ισχύει ότι:

$$x^2 = N(v_1) \cdots N(v_r) = \pm 1,$$

το οποίο χαρακτηρίζει πλήρως τον πυρήνα της $\widetilde{Ad}$ και στις δύο περιπτώσεις.

Για να αποδείξουμε ότι η απεικόνιση $\widetilde{Ad}$ είναι επί, παρατηρούμε ότι για κάθε $v \in V$ ισχύει ότι $q(tv) = t^2 q(v) = 1$. Επειδή $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, τουλάχιστον μία από τις εξισώσεις

$$t^2 = \pm q(v)^{-1}$$

έχει λύση στο $\mathbb{K}$. Επομένως, κάθε v μπορεί να κανονικοποιηθεί έτσι ώστε $q(v) = 1$. Παρατηρώντας ότι, $\widetilde{Ad}_{tv} = R_{tv} = R_v = \widetilde{Ad}_v$, σε συνδυασμό με το θεώρημα Cartan-Dieudonné, το οποίο διασφαλίζει ότι κάθε στοιχείο της $O(V, q)$ ή $SO(V, q)$ μπορεί να γραφεί ως σύνθεση πεπερασμένων ανακλάσεων, καταλήγουμε ότι η $\widetilde{Ad}$ είναι επί. $\square$

5.2 Η Πραγματική Ομάδα Spin

Θα αναλύσουμε τώρα λίγο περισσότερο την περίπτωση όπου η ομάδα $Spin$ προέρχεται από την πραγματική άλγεβρα Clifford Cl_n . Θα την συμβολίζουμε $Spin_n$.

Θεώρημα 5.2.1. Στην πραγματική περίπτωση ισχύει:

$$\ker \widetilde{Ad}|_{Pin_n} = \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2,$$

$$\ker \widetilde{Ad}|_{Spin_n} = \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2,$$

δηλαδή

$$Pin_n/\mathbb{Z}_2 \cong O_n,$$

$$Spin_n/\mathbb{Z}_2 \cong SO_n.$$

Λέμε ότι η ομάδα $Spin_n$ είναι ένα διπλό κάλυμμα της SO_n .

Απόδειξη. Προκύπτει από το θεώρημα 5.1.9.. $\square$

Παρατήρηση 5.2.2. Επειδή αναφερόμαστε στην $Spin_n \subseteq Cl^0$, $\widetilde{Ad} = Ad$.

Μπορούμε να βλέπουμε τις άλγεβρες Clifford και τις υποομάδες τους, ως πολλαπλότητες και να αρχίσουμε να εξετάζουμε την γεωμετρία αυτών των χώρων.

Παρατήρηση 5.2.3. Η άλγεβρα Clifford Cl_n είναι ισόμορφη με την εξωτερική άλγεβρα $\Lambda^*(V)$ ως διανυσματικοί χώροι. Αυτό συνεπάγεται ότι η Cl_n είναι λεία πολλαπλότητα διάστασης 2^n .

Επιπλέον, από γνωστό θεώρημα [21], κάθε αλγεβρική υποομάδα μιας ομάδας Lie που είναι τοπολογικά κλειστή είναι αυτόματα και η ίδια ομάδα Lie. Επομένως, η ομάδα $Spin_n$, η οποία ορίζεται ως μια τοπολογικά κλειστή ομάδα υποσύνολο της Clifford άλγεβρας, είναι μια Lie πολλαπλότητα.

Η ομάδα $Spin_n$ "ξεδιπλώνει" την τοπολογία της SO_n . Αφαιρεί όλους τους βρόγχους που δεν μπορούν να συρρικνωθούν σε σημείο, καθιστώντας την τοπολογία της πιο απλή από αυτή της SO_n . Με άλλα λόγια, η $Spin_n$ αφαιρεί τις "τρύπες" της SO_n και αποτελεί το καθολικό κάλυμμά της.

Η απόδειξη απαιτεί κάποιες γνώσεις ομοτοπίας, αλλά η βασική ιδέα είναι η εξής: γνωρίζουμε ότι η SO_n , για $n \geq 3$, έχει δύο διαφορετικές κλάσεις ισοδυναμίας βρόγχων. Επειδή η $Spin_n$ είναι μη τετριμμένο διπλό κάλυμμα της SO_n , χωρίς "τρύπες", καταφέρνει να "αφαιρέσει" αυτό το πρόβλημα.

Για μια αυστηρή απόδειξη ότι η $Spin_n$ είναι το καθολικό κάλυμμα της SO_n για $n \geq 3$, αρκεί να δείξουμε ότι η $Spin_n$ είναι απλά συνεκτική και ότι καλύπτει την SO_n .

Θεώρημα 5.2.4. Η ομάδα $Spin_n$ είναι συνεκτική για $n \geq 2$. Για $n \geq 3$ αποτελεί το καθολικό κάλυμμα της SO_n .

Απόδειξη. Ξέρουμε ήδη ότι:

$$Spin_n/\mathbb{Z}_2 \cong SO_n,$$

επομένως ομάδα $Spin_n$ είναι το διπλό κάλυμμα της SO_n και $\widetilde{Ad}_{-x} = \widetilde{Ad}_x$. Το μόνο που αρκεί τώρα, είναι δείξουμε ότι υπάρχει μία καμπύλη που ενώνει τα $1, -1 \in Spin_n$. Έστω τα μοναδιαία κάθετα μεταξύ τους διανύσματα $v = e_1$ και $w = e_2$, ορίζουμε την καμπύλη:

$$c : [0, \pi] \rightarrow Spin_n,$$

όπου

$$c(t) = (e_1 \sin t + e_2 \cos t) \cdot (e_1 \sin t - e_2 \cos t).$$

Αυτή η καμπύλη ικανοποιεί:

$$c(0) = 1, \quad c(\pi) = -1.$$

Αυτό δείχνει ότι τα 1 και -1 ανήκουν στην ίδια συνιστώσα του $Spin_n$, αποδεικνύοντας ότι το κάλυμμα δεν είναι τετριμμένο. Η δεύτερη πρόταση προκύπτει από το γεγονός ότι, για $n \geq 3$, ισχύει:

$$\pi_1(SO_n) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2,$$

επομένως, η $Spin_n$ είναι καθολικό κάλυμμα της SO_n . □

Παρατήρηση 5.2.5. Όταν θέλουμε να τονίσουμε τον χαρακτήρα της απεικόνισης Ad ως διπλή επικάλυψη, την συμβολίζουμε ως:

$$\xi := \widetilde{Ad} : Spin_n \rightarrow SO_n.$$

Πρόταση 5.2.6. Ο ομομορφισμός $ad := Ad_* : \mathfrak{spin}_n \rightarrow \mathfrak{so}_n \cong \Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ μεταξύ των αλγεβρών Lie που αντιστοιχούν στις $Spin_n$ και SO_n , είναι ισομορφισμός. Δίνεται από τη σχέση:

$$ad(e_i \cdot e_j)(y) = 2(e_i \wedge e_j)(y) = 2g(e_i, y)e_j - 2g(e_j, y)e_i,$$

για $1 \leq i, j \leq n$ και $i \neq j$.

Απόδειξη. Θεωρούμε την καμπύλη $c(t)$ που ορίζεται όπως στο θεώρημα 5.2.3. Δεδομένου ότι $c(0) = 1$ και $c'(0) = e_i e_j$, καθώς η $\mathfrak{spin}_n$ είναι ισομορφή με τον εφαπτόμενο χώρο $T_1 \mathfrak{Spin}_n$, το $e_i e_j$ ανήκει στη $\mathfrak{spin}_n$, με $1 \leq i, j \leq n, i \neq j$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} (ad(e_i \cdot e_j))(y) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (Ad_{\gamma(t)}(y)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\gamma(t) \cdot y \cdot \gamma^{-1}(t)) \\ &= \gamma'(0) \cdot y \cdot \gamma(0) + \gamma(0) \cdot y \cdot (\gamma^{-1})'(0) \\ &= e_i \cdot e_j \cdot y - y \cdot e_i \cdot e_j \\ &= e_i \cdot e_j \cdot y - (-e_i \cdot y - 2g(e_i, y)) \cdot e_j \\ &= e_i \cdot e_j \cdot y + e_i \cdot (-e_j \cdot y - 2g(y, e_j)) + 2g(e_i, y) e_j \\ &= 2(e_i \wedge e_j)(y) \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει τον τύπο και ότι η ad είναι επί. Εφόσον οι διαστάσεις των $\mathfrak{spin}_n$ και $\Lambda^2 \mathbb{R}^n$ είναι ίσες, η ad είναι ισομορφισμός. $\square$

Παράδειγμα 5.2.7. Για $n = 1$, έχουμε:

$$\mathfrak{Spin}_1 \subset \mathcal{Cl}_1^0 \cong \mathcal{Cl}_0 \cong \mathbb{R}.$$

Συνεπώς, η ομάδα $\mathfrak{Spin}_1$ είναι ισομορφή με το σύνολο $\{1, -1\}$, δηλαδή:

$$\mathfrak{Spin}_1 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Η απεικόνιση $\xi := \widetilde{Ad} : \mathfrak{Spin}_1 \rightarrow SO_1 \cong \{1\}$ δίνεται από τον κανόνα $t \mapsto t^2$, που στέλνει κάθε στοιχείο t της $\mathfrak{Spin}_1$ στο τετράγωνό του.

Παράδειγμα 5.2.8. Για $n = 2$, έχουμε:

$$\mathfrak{Spin}_2 \subset \mathcal{Cl}_2^0 \cong \mathcal{Cl}_1 \cong \mathbb{C}.$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι $\mathfrak{Spin}_2 \cong S^1 \cong U(1)$ μέσω της απεικόνισης:

$$e^{i\theta} \mapsto \left(\cos \frac{\theta}{2} e_1 + \sin \frac{\theta}{2} e_2 \right) \cdot \left(-\cos \frac{\theta}{2} e_1 + \sin \frac{\theta}{2} e_2 \right) = \cos \theta + \sin \theta e_1 e_2.$$

Η απεικόνιση $\xi : U(1) \cong \mathfrak{Spin}(2) \rightarrow SO(2)$ ορίζεται ως:

$$\xi(e^{i\theta}) = \widetilde{Ad}(e^{i\theta}) = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{bmatrix}.$$

Έτσι, υπό την ταύτιση $SO(2) \cong U(1)$, η $\widetilde{Ad}$ αντιστοιχεί στη "τετραγωνική" απεικόνιση:

$$U(1) \rightarrow U(1), \quad z \mapsto z^2.$$

5.3 Αναπαραστάσεις Ομάδων Spin

Οι αναπαραστάσεις των ομάδων Spin αποτελούν θεμελιώδη εργαλεία στη θεωρία της Spin γεωμετρίας. Τα spinors είναι στοιχεία διανυσματικών χώρων στους οποίους οι ομάδες Spin δρουν μέσω συγκεκριμένων γραμμικών μετασχηματισμών. Αυτή η δράση ορίζει τις αναπαραστάσεις των ομάδων Spin, παρέχοντας ένα πλαίσιο για τη μελέτη της δομής και των ιδιοτήτων τους.

Ορισμός 5.3.1. Έστω A μια πραγματική άλγεβρα και V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο σώμα $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Ονομάζουμε $\mathbb{K}$ -**αναπαράσταση άλγεβρας** μια γραμμική απεικόνιση από την άλγεβρα στο σύνολο των ενδομορφισμών του διανυσματικού χώρου V ,

$$\rho : A \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$$

με $\rho(1_A) = \text{Id}_V$ και $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$, $\forall a, b \in A$. Ο V ονομάζεται χώρος αναπαράστασης της A .

Ορισμός 5.3.2. 1. Έστω δύο αναπαραστάσεις $\rho : A \rightarrow \text{End}(V)$ και $\kappa : A \rightarrow \text{End}(W)$. Το ευθύ άθροισμά τους είναι η αναπαράσταση $\rho \oplus \kappa : A \rightarrow \text{End}(V \oplus W)$, που δίνεται από τη σχέση $(\rho \oplus \kappa)(x)(v + w) = \rho(x)(v) + \kappa(x)(w)$.

2. Μια αναπαράσταση $\rho : A \rightarrow \text{End}(V)$ λέγεται **αναγώγιμη** αν είναι ευθύ άθροισμα $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ με $V_i \neq \{0\}$, $i = 1, 2$. Δηλαδή, ο χώρος V διασπάται σε μη τετριμμένο ευθύ άθροισμα $V = V_1 \oplus V_2$ τέτοιο ώστε $\rho(x)(V_j) \subseteq V_j$ για κάθε $x \in A$ και $j = 1, 2$. Αν η ρ δεν είναι αναγώγιμη, την ονομάζουμε **μη αναγώγιμη** ή **ανάγωγη**, ή αλλιώς **απλή**.

3. Δύο αναπαραστάσεις $\rho : A \rightarrow \text{End}(V)$ και $\kappa : A \rightarrow \text{End}(W)$ ονομάζονται **ισοδύναμες** αν υπάρχει ισομορφισμός $\mathbb{K}$ -διανυσματικών χώρων $F : V \rightarrow W$ τέτοιος ώστε $\rho(x) = F^{-1} \circ \kappa(x) \circ F$ για κάθε $x \in A$.

Μια άλγεβρα A έχει και δομή διανυσματικού χώρου. Αν πάρουμε το σύνολο των ενδομορφισμών $\text{End}(A)$, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια αναπαράσταση $\rho : A \rightarrow \text{End}(A)$ με

$$\rho(a)(b) = ab, \quad a, b \in A. \quad (5.6)$$

Πράγματι, έχουμε ότι $\rho(1_A) = \text{Id}_A$ και $\rho(ab) = \rho(a)\rho(b)$. Αυτή η ρ ονομάζεται **κανονική αναπαράσταση**. Επίσης, αν $\rho(a) = \rho(b)$, τότε $\rho(a - b) = 0$, δηλαδή $a = b$. Επομένως, η ρ είναι 1-1, αλλιώς **πιστή** αναπαράσταση.

Λήμμα 5.3.3. Αν $\rho : A \rightarrow \text{End}(A)$ είναι οποιαδήποτε αναπαράσταση της A , τότε η ρ μπορεί να αναλυθεί σε ευθύ άθροισμα $\rho = \rho_1 \oplus \dots \oplus \rho_k$ ανάγωγων αναπαραστάσεων $\rho_i : A \rightarrow \text{End}(V_i)$.

Απόδειξη. Έστω B_1, B_2 υπόχωροι του A με $\rho(a)(B_j) \subseteq B_j$ για κάθε $a \in A$ και $j = 1, 2$. Μπορούμε να πάρουμε δύο νέες αναπαραστάσεις ρ_1, ρ_2 με $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$ και $\rho_j : A \rightarrow \text{End}(B_j)$. Συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία μέχρι να καταλήξουμε σε έναν υπόχωρο S του A και μια απεικόνιση $\rho : A \rightarrow \text{End}(S)$ τέτοια ώστε να μην υπάρχει άλλος αναλλοίωτος χώρος πέραν του S και του $\{0\}$. Από τον τρόπο που κατασκευάστηκε η ρ , είναι ανάγωγη. Δηλαδή, $\rho(a)(S) = aS \subseteq S, \forall a \in A$. Αυτό σημαίνει ότι το S είναι αριστερό ιδεώδες της A . Συγκεκριμένα, είναι ελάχιστο αριστερό ιδεώδες, δηλαδή δεν έχει άλλα υποϊδεώδη εκτός του S και του $\{0\}$. $\square$

Από το παραπάνω λήμμα προκύπτει το ακόλουθο συμπέρασμα.

Παρατήρηση 5.3.4. Ο χώρος αναπαράστασης V μιας ανάγωγης κανονικής αναπαράστασης μιας άλγεβρας είναι ένα ελάχιστο αριστερό ιδεώδες της.

Όπως είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο, κάθε άλγεβρα Cl_n είναι της μορφής $\mathbb{K}(2^m)$ ή $\mathbb{K}(2^m) \oplus \mathbb{K}(2^m)$, για $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Υπάρχει ένα κλασσικό θεώρημα που χαρακτηρίζει τις ανάγωγες αναπαραστάσεις των αλγεβρών πινάκων [18].

Θεώρημα 5.3.5. Έστω $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ και $\mathbb{K}(n)$ η πραγματική άλγεβρα των $n \times n$ $\mathbb{K}$ -πινάκων. Τότε η φυσική αναπαράσταση ρ του $\mathbb{K}(n)$ στον διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}^n$ είναι, μέχρι ισοδυναμίας, η μόνη ανάγωγη πραγματική αναπαράσταση του $\mathbb{K}(n)$.

Η άλγεβρα $\mathbb{K}(n) \oplus \mathbb{K}(n)$ έχει ακριβώς δύο κλάσεις ισοδυναμίας ανάγωγων πραγματικών αναπαραστάσεων, οι οποίες δίνονται από

$$\rho_1(\phi, \psi) = \rho(\phi),$$

και

$$\rho_2(\phi, \psi) = \rho(\psi),$$

που δρουν στον $\mathbb{K}^n$.

Πόρισμα 5.3.6. Κάθε άλγεβρα Clifford είναι ή απλή ή το ευθύ άθροισμα απλών αλγεβρών. Στη δεύτερη περίπτωση την ονομάζουμε ημιαπλή.

Για να απλοποιήσουμε την παρουσίαση, θα αξιοποιήσουμε το γεγονός ότι:

$$\text{Spin}_n \subset Cl_n^0 \subset Cl_n \subset \mathbb{C}l_n,$$

και θα ασχοληθούμε μόνο με τη μιγαδική περίπτωση.

Είναι γνωστό ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένας $n \times n$ μιγαδικός πίνακας. Αυτό σημαίνει ότι η άλγεβρα των $n \times n$ μιγαδικών πινάκων $\mathbb{C}(n)$ είναι ισόμορφη με τον χώρο των ενδομορφισμών του $\mathbb{C}^n$, δηλαδή:

$$\mathbb{C}(n) \cong \text{End}(\mathbb{C}^n).$$

Ορισμός 5.3.7. Έστω ο μιγαδικός διανυσματικός χώρος:

$$\Sigma_n := \mathbb{C}^{2^m} \cong \bigotimes^m \mathbb{C}^2, \quad n = 2m, 2m + 1.$$

Τα στοιχεία του ονομάζονται μιγαδικοί **spinors** ή αλλιώς **Dirac spinors**.

Θεώρημα 5.3.8.

$$\mathbb{C}l_n \cong \begin{cases} \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n), & \text{αν } n = 2m, \\ \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n) \oplus \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n), & \text{αν } n = 2m + 1. \end{cases}$$

Απόδειξη. Προκύπτει εύκολα από την παραπάνω ανάλυση και την ταξινόμηση των μιγαδικών αλγεβρών Clifford. $\square$

Θεώρημα 5.3.9. Κάθε μιγαδική άλγεβρα Clifford $\mathbb{C}l_n$ έχει:

1. Για n άρτιο, μια μοναδική μη εκφυλισμένη, ανάγωγη αναπαράσταση:

$$p_n : \mathbb{C}l_n \rightarrow \text{End}(\Sigma_n),$$

2. Για n περιττό, έχει δύο μη ισοδύναμες μη εκφυλισμένες, ανάγωγες αναπαραστάσεις, στην πρώτη ή στην δεύτερη συνιστώσα του $\text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n) \oplus \text{End}_{\mathbb{C}}(\Sigma_n)$, μηδενίζοντας αντίστοιχα την άλλη. Είναι προφανώς μη ισοδύναμες, αφού έχουν διαφορετικό πυρήνα. Τις συμβολίζουμε με:

$$p_n^{\pm} : \mathbb{C}l_n \rightarrow \text{End}(\Sigma_n).$$

Για να αναλύσουμε τις αναπαραστάσεις και να βρούμε τις δυο διαφορετικές αναπαραστάσεις, πρέπει να εισάγουμε την έννοια του μιγαδικού στοιχείου όγκου.

Ορισμός 5.3.10. Ονομάζουμε μιγαδικό στοιχείο όγκο το στοιχείο:

$$\omega_{\mathbb{C}} = i^{[(n+1)/2]} e_1 e_2 \cdots e_n \in \mathbb{C}l_n,$$

όπου $e_1, \dots, e_n$ είναι οι γεννήτορες της $\mathbb{C}l_n$ και $[n/2]$ το ακέραιο μέρος του $n/2$.

Κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις, προκύπτουν οι σχέσεις:

$$\omega_{\mathbb{C}}^2 = 1,$$

και

$$x \cdot \omega_{\mathbb{C}} = (-1)^{n-1} \omega_{\mathbb{C}} \cdot x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}l_n.$$

Για n περιττό, το $\omega_{\mathbb{C}}$ είναι κεντρικό, δηλαδή $x \cdot \omega_{\mathbb{C}} = \omega_{\mathbb{C}} \cdot x$, για κάθε $x \in \mathbb{C}l_n$.

Πρόταση 5.3.11. Για n περιττό, ισχύει:

$$\mathbb{C}l_n = \mathbb{C}l_n^+ \oplus \mathbb{C}l_n^-,$$

όπου

$$\mathbb{C}l_n^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \omega_{\mathbb{C}})\mathbb{C}l_n,$$

με $\mathbb{C}l_n^\pm$ ιδεώδη τα οποία ικανοποιούν:

$$\mathbb{C}l_n^+ \cdot \mathbb{C}l_n^+ = \mathbb{C}l_n^+, \quad \mathbb{C}l_n^- \cdot \mathbb{C}l_n^- = \mathbb{C}l_n^-, \quad \text{και} \quad \mathbb{C}l_n^+ \cdot \mathbb{C}l_n^- = 0.$$

Απόδειξη. Δεδομένου ότι $\omega_{\mathbb{C}}^2 = 1$, έχουμε:

$$\frac{1}{2}(1 + \omega_{\mathbb{C}}) + \frac{1}{2}(1 - \omega_{\mathbb{C}}) = 1,$$

και

$$\left(\frac{1}{2}(1 \pm \omega_{\mathbb{C}})\right)^2 = \frac{1}{2}(1 \pm \omega_{\mathbb{C}}),$$

που δείχνει ότι $\mathbb{C}l_n^+$ και $\mathbb{C}l_n^-$ είναι ιδεώδη της $\mathbb{C}l_n$. Αφού ο n είναι περιττός, το $\omega_{\mathbb{C}}$ είναι κεντρικό στην $\mathbb{C}l_n$. Επιπλέον, $\omega_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}l_n^1$, οπότε $\alpha(\omega_{\mathbb{C}}) = -\omega_{\mathbb{C}}$. Συνεπώς, η δράση της α πάνω στις υποάλγεβρες $\alpha(\mathbb{C}l_n^+) = \mathbb{C}l_n^-$ δείχνει ότι οι δύο υποάλγεβρες είναι ισόμορφες. Επομένως, έχουμε:

$$\mathbb{C}l_n = \mathbb{C}l_n^+ \oplus \mathbb{C}l_n^-.$$

Τελικά, $\mathbb{C}l_n^+$ και $\mathbb{C}l_n^-$ είναι δύο ιδεώδη που καλύπτουν την $\mathbb{C}l_n$, και οι δύο υποάλγεβρες είναι ισόμορφες. $\square$

Πρόταση 5.3.12. Έστω ρ_n μια μιγαδική ανάγωγη αναπαράσταση της $\mathbb{C}l_n$, με n περιττό. Τότε, ισχύει ότι:

$$\rho_n(\omega_{\mathbb{C}}) = Id, \quad \text{ή} \quad \rho_n(\omega_{\mathbb{C}}) = -Id.$$

Οι αναπαραστάσεις είναι μη ισοδύναμες.

Απόδειξη. Αρχικά, το στοιχείο όγκου $\omega_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}l_n$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\omega_{\mathbb{C}}^2 = 1.$$

Επομένως, οι ιδιοτιμές του $\omega_{\mathbb{C}}$ είναι ± 1 . Από την αναπαράσταση ρ_n , προκύπτει:

$$\rho_n(\omega_{\mathbb{C}})^2 = Id,$$

άρα ο διανυσματικός χώρος Σ_n , ο χώρος των spinors, μπορεί να γραφεί ως άθροισμα ιδιοχώρων:

$$\Sigma_n = \Sigma_n^+ \oplus \Sigma_n^-.$$

Το $\omega_{\mathbb{C}}$ είναι κεντρικό στοιχείο της $\mathbb{C}l_n$ για n περιττό, δηλαδή:

$$\omega_{\mathbb{C}} \cdot x = x \cdot \omega_{\mathbb{C}}, \quad \forall x \in \mathbb{C}l_n.$$

Αυτό σημαίνει ότι η δράση του $x \in \mathbb{C}l_n$ δεν μεταβάλλει τη σχέση ιδιοτιμής για το $\omega_{\mathbb{C}}$. Δηλαδή, αν $\psi \in \Sigma_n^+$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{C}l_n$, ισχύει:

$$\omega_{\mathbb{C}} \cdot (x \cdot \psi) = x \cdot (\omega_{\mathbb{C}} \cdot \psi) = x \cdot \psi,$$

δηλαδή, $x \cdot \psi \in \Sigma_n^+$. Ομοίως, αν $\psi \in \Sigma_n^-$, τότε $x \cdot \psi \in \Sigma_n^-$. Συμπεραίνουμε ότι οι υποχώροι Σ_n^+ και Σ_n^- είναι $\mathbb{C}l_n$ -αναλλοίωτοι. Επίσης, κάθε $\psi \in \Sigma_n$ μπορεί να γραφτεί ως $\psi = \psi^+ + \psi^-$, όπου $\psi^+ \in \Sigma_n^+$ και $\psi^- \in \Sigma_n^-$.

Η αναπαράσταση ρ_n είναι ανάγωγη, επομένως είτε $\Sigma_n = \Sigma_n^+$ είτε $\Sigma_n = \Sigma_n^-$. Δηλαδή, $\rho_n(\omega_{\mathbb{C}}) = +Id$ ή $\rho_n(\omega_{\mathbb{C}}) = -Id$. Οι δύο δυνατότητες $\rho_n(\omega_{\mathbb{C}}) = \pm Id$ αντιστοιχούν σε μη ισοδύναμες αναπαραστάσεις, καθώς οι χώροι ιδιοτιμών είναι διαφορετικοί. Συγκεκριμένα, η δράση του $\mathbb{C}l_n$ σε κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις ορίζει διαφορετική αναπαράσταση.

Θα συμβολίζουμε με ρ^+ την αναπαράσταση όπου $\rho_n(\omega_{\mathbb{C}}) = +Id$. Αντίστοιχα, για την ρ^- , $\rho_n(\omega_{\mathbb{C}}) = -Id$ $\square$

Ορισμός 5.3.13. Θα ονομάζουμε *μιγαδική spin αναπαράσταση της Άλγεβρας Clifford* $\mathbb{C}l_n$ την

$$\rho_n := \begin{cases} \rho_n, & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος,} \\ \rho_n^+, & \text{αν } n \text{ είναι περιττός.} \end{cases}$$

Ορισμός 5.3.14. Η απεικόνιση

$$m : \mathbb{C}l_n \times \Sigma_n \rightarrow \Sigma_n,$$

$$m(\sigma, \psi) \mapsto \rho_n(\sigma)(\psi) \equiv \sigma \cdot \psi,$$

ονομάζεται **πολλαπλασιασμός Clifford**.

Παρατήρηση 5.3.15. Υπάρχουν αρκετές διαφοροποιήσεις στη βιβλιογραφία όσον αφορά τον ορισμό του *spinor*. Όπως εύστοχα αναφέρεται στο βιβλίο των Vaz και Rocha [28], μιλάμε για τη "Βαβέλ των *spinors*". Εδώ, επί της ουσίας, ορίσαμε ως *spinors* τα στοιχεία του χώρου αναπαράστασης των κανονικών ανάγωγων αναπαραστάσεων των αλγεβρών Clifford και τους δώσαμε τον χαρακτηρισμό Dirac για να είναι ευδιάκριτοι. Στη βιβλιογραφία συναντώνται και ως αλγεβρικά *spinors*. Σε άλλο μέρος της βιβλιογραφίας, *spinors* ονομάζονται τα στοιχεία του διανυσματικού χώρου της κανονικής ανάγωγης αναπαράστασης, περιορισμένης στην ομάδα Spin. Εμείς θα χρησιμοποιήσουμε και αυτόν τον ορισμό, ελπίζοντας ότι θα είναι ευδιάκριτο σε ποια περίπτωση αναφερόμαστε κάθε φορά.

Περιορίζοντας την αναπαράσταση ρ_n από την άλγεβρα Clifford $\mathbb{C}l_n$ στην ομάδα $Spin_n$, προκύπτει ένας φυσικός ομομορφισμός:

$$\rho_n|_{Spin_n} : Spin_n \rightarrow End(\Sigma_n),$$

όπου Σ_n είναι ο χώρος των spinors. Επειδή τα στοιχεία της $Spin_n$ είναι κανονικοποιήσιμα, η δράση τους είναι αντιστρέψιμη. Αυτό σημαίνει ότι κάθε στοιχείο της $Spin_n$ αντιστοιχεί σε έναν αυτόμορφοισμό του Σ_n , δηλαδή σε έναν γραμμικό, αντιστρέψιμο μετασχηματισμό. Ως εκ τούτου, καταλήγουμε στον ομομορφισμό:

$$\rho_n|_{Spin_n} : Spin_n \rightarrow Aut(\Sigma_n) \cong GL(\Sigma_n).$$

Ορισμός 5.3.16. Ορίζουμε την **κανονική μιγαδική spin αναπαράσταση** ως

$$\rho_n := \begin{cases} \rho_n|_{Spin_n}, & \text{αν } n \text{ είναι άρτιος,} \\ \rho_n^+|_{Spin_n}, & \text{αν } n \text{ είναι περιττός.} \end{cases}$$

Πρόταση 5.3.17. 1. Για n άρτιο, ο περιορισμός της αναπαράστασης ρ_n στην ομάδα $Spin_n$ διασπάται σε

$$\Sigma_n \cong \Sigma_n^+ \oplus \Sigma_n^-,$$

με

$$\Sigma_{2m}^\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \omega_{\mathbb{C}}) \Sigma_{2m}$$

όπου $\omega_{\mathbb{C}}$ είναι το μιγαδικό στοιχείο όγκου του αλγεβρικού χώρου. Τα Σ_n^+ και Σ_n^- είναι μη ισοδύναμες, ανάγωγες, μιγαδικές αναπαραστάσεις του $Spin_n$.

2. Για περιττό n , ο περιορισμός της αναπαράστασης ρ_n στην ομάδα $Spin_n$ είναι ανάγωγος και ισοδύναμος.

Απόδειξη. Προκύπτει εύκολα από τον ισομορφισμό $Spin \subseteq \mathbb{C}l_n^0 \cong \mathbb{C}l_{n-1}$ και την προηγούμενη ανάλυση. $\square$

Πόρισμα 5.3.18. Η αναπαράσταση $spin$ δεν επάγεται από αναπαράσταση της SO_n μέσω της $\widetilde{Ad}$.

Απόδειξη. Για κάθε ομάδα $Spin_n$ έχουμε ότι $-1 \in Spin_n$ και μάλιστα $p_n(-1) = -Id_{\Delta_n}$, ενώ για κάθε αναπαράσταση $\rho : SO_n \rightarrow GL(V)$, έχουμε ότι $\rho(\widetilde{Ad}(-1)) = \rho(I_n) = Id_V$. $\square$

Κλείνουμε την ενότητα με δύο προτάσεις που μας δίνουν μία γενίκευση του κλασσικού ερμητιανού γινομένου από τον $\mathbb{C}^n$ στον Σ_n , που σέβεται την αναπαράσταση p_n .

Πρόταση 5.3.19. Υπάρχει ένα ερμητιανό εσωτερικό γινόμενο $(\cdot, \cdot)$ στον χώρο Σ_n , τέτοιο ώστε:

$$(x \cdot \psi_1, x \cdot \psi_2) = (\psi_1, \psi_2),$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$ με $\|x\| = 1$, και $\psi_1, \psi_2 \in \Sigma_n$.

Απόδειξη. Έστω Γ_n η υποομάδα του Cl_n^* που παράγεται πολλαπλασιαστικά από μία ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $(-1)^2 = 1$, $e_i^2 = -1$ και $e_i \cdot e_j = -e_j \cdot e_i$ για $i \neq j$, βλέπουμε ότι το Γ_n είναι πεπερασμένη και έχει πλήθος στοιχείων $|\Gamma_n| = 2^{n+1}$.

Επιλέγουμε ένα τυχαίο Ερμιτιανό εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ στον χώρο Σ_n και ορίζουμε, για $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma_n$,

$$(\sigma_1, \sigma_2) := \frac{1}{|\Gamma_n|} \sum_{\nu \in \Gamma_n} \langle \nu \cdot \sigma_1, \nu \cdot \sigma_2 \rangle.$$

Για κάθε $e_i \in \Gamma_n$, έχουμε:

$$\begin{aligned} (e_i \cdot \sigma_1, e_i \cdot \sigma_2) &= \frac{1}{|\Gamma_n|} \sum_{\nu \in \Gamma_n} \langle \nu \cdot e_i \cdot \sigma_1, \nu \cdot e_i \cdot \sigma_2 \rangle \\ &= \frac{1}{|\Gamma_n|} \sum_{\nu \in \Gamma_n} \langle \nu \cdot \sigma_1, \nu \cdot \sigma_2 \rangle \\ &= (\sigma_1, \sigma_2), \end{aligned}$$

Έπειτα, έστω $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ με $\sum x_i^2 = 1$. Τότε:

$$\begin{aligned} (x \cdot \sigma_1, x \cdot \sigma_2) &= \sum_i x_i^2 (e_i \cdot \sigma_1, e_i \cdot \sigma_2) + \sum_{i \neq j} x_i x_j (e_i \cdot \sigma_1, e_j \cdot \sigma_2) \\ &= \sum_i x_i^2 (\sigma_1, \sigma_2) + \sum_{i < j} x_i x_j [(e_i \cdot \sigma_1, e_j \cdot \sigma_2) + (e_j \cdot \sigma_1, e_i \cdot \sigma_2)] \\ &= (\sigma_1, \sigma_2), \end{aligned}$$

αφού για κάθε $i < j$, ισχύει:

$$\begin{aligned} (e_i \cdot \sigma_1, e_j \cdot \sigma_2) &= (e_i \cdot e_i \cdot \sigma_1, e_i \cdot e_j \cdot \sigma_2) \\ &= -(\sigma_1, e_i \cdot e_j \cdot \sigma_2) \\ &= -(e_j \cdot \sigma_1, e_j \cdot e_i \cdot e_j \cdot \sigma_2) \\ &= (e_j \cdot \sigma_1, e_i \cdot e_j \cdot e_j \cdot \sigma_2) \\ &= -(e_j \cdot \sigma_1, e_i \cdot \sigma_2). \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 5.3.20. Για όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$ και για όλα τα $\psi_1, \psi_2 \in \Sigma_n$, ισχύει:

$$(x \cdot \psi_1, \psi_2) = -(\psi_1, x \cdot \psi_2).$$

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Τότε ισχύει

$$(x \cdot \sigma_1, \sigma_2) = \left(x \cdot \frac{x}{\|x\|} \cdot \sigma_1, \frac{x}{\|x\|} \cdot \sigma_2 \right)$$

και

$$(x \cdot \sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{\|x\|^2} (x \cdot x \cdot \sigma_1, x \cdot \sigma_2) = -(\sigma_1, x \cdot \sigma_2).$$

□

Κεφάλαιο 6

Νηματικές Δέσμες

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα εξετάσουμε τη γεωμετρική δομή των νηματικών δεσμών, εστιάζοντας ιδιαίτερα στις κύριες και διανυσματικές δέσμες. Παράλληλα, θα αναπτύξουμε τη θεωρία των συνοχών στις νηματικές δέσμες, η οποία αποτελεί θεμελιώδες εργαλείο στη μελέτη της διαφορικής γεωμετρίας και της *Spin* γεωμετρίας.

6.1 Ορισμός Νηματικών Δεσμών

Πριν δώσουμε τον ακριβή ορισμό, σημειώνουμε ότι οι νηματικές δέσμες αποτελούν μια γενίκευση της εφαιπόμενης δέσμης. Πρόκειται για χώρους που τοπικά μοιάζουν με το γινόμενο μιας πολλαπλότητας με μια άλλη δομή, διανυσματικός χώρος, ομάδα κ.α., η οποία είναι επίσης πολλαπλότητα.

Ορισμός 6.1.1. Μια **νηματική δέσμη** είναι μια τετράδα (P, M, π, F) , όπου οι P, M και F είναι διαφορίσιμες πολλαπλότητες, $\pi : P \rightarrow M$ είναι ένας λείος επιμορφισμός, και υπάρχει μια ανοικτή κάλυψη $\{U_i\}$ του M με χάρτες $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$ τέτοιοι ώστε το παρακάτω διάγραμμα να μετατίθεται:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\phi_i} & U_i \times F \\ & \searrow \pi \quad \swarrow pr_1 & \\ & U_i & \end{array}$$

Ο χώρος P ονομάζεται ολικός χώρος, M η βάση και F το νήμα της δέσμης, με $F \cong P_x = \pi^{-1}(x)$ για κάθε $x \in M$.

Παράδειγμα 6.1.2. Έστω $P = M \times F$ και η προβολή $\pi : P \rightarrow M$. Τότε το (P, π, M, F) είναι μια **τετριμμένη δέσμη**.

Παρατήρηση 6.1.3. Τις περισσότερες φορές ο ολικός χώρος δεν είναι τετριμμένος. Τοπικά βεβαία, είναι ισόμορφος εξ ορισμού με ένα τετριμμένο γινόμενο $U_i \times F$.

Έστω δύο τοπικές τετριμμενοποιήσεις (U_i, ϕ_i) και (U_j, ϕ_j) με $x \in U_i \cap U_j$. Ορίζουμε τον μετασχηματισμό αλλαγής συντεταγμένων $g_{ij}(x) : F \rightarrow F$ μέσω της σύνθεσης:

$$g_{ij}(x) = \phi_j \circ \phi_i^{-1}|_{\{x\} \times F} : F \rightarrow F.$$

Αυτό μας δίνει μια συνάρτηση $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Diff}(F)$, όπου $\text{Diff}(F)$ είναι η ομάδα των διαφορομορφισμών του F . Οι συναρτήσεις g_{ij} ικανοποιούν τη συνθήκη του σύγκυκλου:

$$g_{ij}(x) \circ g_{jk}(x) = g_{ik}(x), \quad \forall x \in U_i \cap U_j \cap U_k,$$

και $g_{ii}(x) = Id_F$ για κάθε $x \in U_i$.

Ορισμός 6.1.4. Η ομάδα $G \subseteq \text{Diff}(F)$ που δημιουργείται από τους μετασχηματισμούς αλλαγής συντεταγμένων $\{g_{ij}\}$ ονομάζεται **δομική ομάδα** της νηματικής δέσμης.

Η δομική ομάδα καθορίζει τον τρόπο με τον οποίο οι τοπικές τετριμμενοποιήσεις "κολλούν" μεταξύ τους, διαμορφώνοντας τη συνολική δομή της δέσμης. Μπορούμε να κατασκευάσουμε τον ολικό χώρο P ως:

$$P = \left(\bigsqcup_i U_i \times F \right) / \sim, \quad \text{όπου} \quad (x, u) \sim (x, g_{ij}(x)(u)) \text{ για } x \in U_i \cap U_j.$$

Ορισμός 6.1.5. Μια λεία απεικόνιση $s : M \rightarrow P$ ονομάζεται **τομή** της νηματικής δέσμης $\pi : P \rightarrow M$ αν $\pi \circ s = Id_M$. Το σύνολο όλων των τομών συμβολίζεται με $\Gamma(P)$.

Μια τομή αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο $x \in M$ ένα στοιχείο του νήματος P_x . Σημειώνουμε ότι οι νηματικές δέσμες μπορεί να μην έχουν καθολικές τομές. Για παράδειγμα, οι κύριες νηματικές δέσμες (που θα δούμε παρακάτω) έχουν καθολική τομή αν και μόνο αν είναι τετριμμένες. Ωστόσο, τοπικές τομές υπάρχουν πάντα λόγω των τοπικών τετριμμενοποιήσεων.

Ορισμός 6.1.6. Μια **διανυσματική δέσμη** βαθμού n , είναι μια νηματική δέσμη $\pi : E \rightarrow M$ με νήμα $F = \mathbb{K}^n$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$.

Έστω δύο τοπικές τετριμμενοποιήσεις (ϕ_α, U_α) και (ϕ_β, U_β) , με $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, ορίζουμε τον μετασχηματισμό αλλαγής συντεταγμένων ως:

$$\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^n \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^n,$$

ο οποίος δίνεται από τον τύπο:

$$(x, u) \mapsto (x, \varphi_{\alpha\beta}(x)u),$$

όπου $\varphi_{\alpha\beta}(x) : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων και ικανοποιεί την ιδιότητα του σύγκυκλου.

Παράδειγμα 6.1.7. Ένα παράδειγμα ήδη γνωστό σε εμάς, είναι η **εφαπτόμενη δέσμη**. Έστω $\{U_i, \varphi_i\}$ ένας άτλας μιας πολλαπλότητας M διάστασης n . Η εφαπτόμενη δέσμη TM είναι μια διανυσματική δέσμη πάνω από το M , η οποία ορίζεται από τους μετασχηματισμούς αλλαγής συντεταγμένων $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : U_i \cap U_j \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$. Οι τομές της είναι τα διανυσματικά πεδία, δηλαδή $X(M) = \Gamma(TM)$.

Παράδειγμα 6.1.8. Από την εφαπτόμενη δέσμη TM μιας πολλαπλότητας M , μπορούμε να ορίσουμε την δυϊκή δέσμη T^*M , που ονομάζεται **συνεφαπτόμενη δέσμη** και συμβολίζεται με T^*M .

Παρατήρηση 6.1.9. Εξετάζουμε τη δέσμη $T^*M \otimes T^*M$. Ένα στοιχείο $g \in (T^*M \otimes T^*M)_x = T_x^*M \otimes T_x^*M$, για $x \in M$ μπορεί να θεωρηθεί ως διγραμμική μορφή. Συγκεκριμένα, αν $v, w \in T_xM$, τότε $g(v, w) \in \mathbb{R}$. Το g είναι συμμετρικό αν ισχύει:

$$g(v, w) = g(w, v), \quad \forall v, w \in T_xM,$$

και θετικά ορισμένο αν:

$$g(v, v) > 0, \quad \forall v \in T_xM \setminus \{0\}.$$

Μία μετρική Riemann g σε μία πολλαπλότητα M είναι ένα στοιχείο του $\Gamma(M, T^*M \otimes T^*M)$, το οποίο είναι σημειακά συμμετρικό και θετικά ορισμένο.

6.2 Κύριες Νηματικές Δέσμες

Οι κύριες, ή αλλιώς πρωτεύουσες, νηματικές δέσμες είναι ειδικές νηματικές δέσμες όπου το νήμα είναι μια ομάδα Lie G .

Ορισμός 6.2.1. Μια **κύρια δέσμη** είναι μια τετράδα (P, M, π, G) , όπου P και M είναι διαφορίσιμες πολλαπλότητες, G είναι μια ομάδα Lie, $\pi : P \rightarrow M$ είναι ένας λείος επιμορφισμός και υπάρχει μια λεία δεξιά δράση του G στον P :

$$R_g : P \rightarrow P, \quad R_g(p) = p \cdot g, \quad \forall g \in G, p \in P,$$

η οποία ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες:

1. $\pi(p \cdot g) = \pi(p), \quad \forall p \in P, g \in G,$
2. Η δράση είναι ελεύθερη, δηλαδή $p \cdot g = p \Leftrightarrow g = 1$, και μεταθετική στα νήματα $\pi^{-1}(x), x \in M$.

Επιπλέον, υπάρχει μια ανοικτή κάλυψη $\{U_i\}$ του M με τοπικές τετριμμενοποιήσεις $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times G$, λείες απεικονίσεις τέτοιες ώστε το παρακάτω

διάγραμμα να μετατίθεται:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\phi_i} & U_i \times G \\ & \searrow \pi \quad \swarrow pr_1 & \\ & U_i & \end{array}$$

και η δράση του G στον P να μεταφέρεται μέσω των ϕ_i στη δεξιά δράση πολλαπλασιασμού στον G , δηλαδή:

$$\phi_i(p \cdot g) = (\pi(p), \phi_i(p)g), \quad \forall p \in \pi^{-1}(U_i), g \in G.$$

Οι μετασχηματισμοί αλλαγής συντεταγμένων $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ ορίζονται μέσω:

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1}(x, g) = (x, g_{ij}(x)g), \quad \forall x \in U_i \cap U_j, g \in G.$$

Ο P ονομάζεται ολικός χώρος, M η βάση, και G η δομική ομάδα της κύριας δέσμης. Αυτή η τετράδα συχνά αναφέρεται ως κύρια G -δέσμη P .

Παράδειγμα 6.2.2. Μια κύρια G -δέσμη $P = M \times G$ με προβολή $\pi : P \rightarrow M$ είναι τετριμμένη. Τότε το (P, π, M, G) είναι μια **τετριμμένη κύρια δέσμη**.

Παράδειγμα 6.2.3. Έστω M μια λεία πολλαπλότητα και $F(M) = \bigcup_{x \in M} F_x(M)$, όπου $F_x(M)$ το σύνολο όλων των διατεταγμένων βάσεων του $T_x M$. Η δέσμη $F(M)$ ονομάζεται **δέσμη πλαισίων** του M . Η ομάδα $GL(n, \mathbb{R})$ δρα στο $F(M)$ από δεξιά μέσω:

$$(v_1, \dots, v_n) \cdot A = \left(\sum_{i=1}^n v_i A_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n v_i A_{in} \right), \quad A \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Τότε, το $(F(M), \pi, M, GL(n, \mathbb{R}))$ είναι μια κύρια $GL(n, \mathbb{R})$ -δέσμη με νήμα:

$$F_x(M) = \{\text{Οι διατεταγμένες βάσεις του } T_x M\}.$$

Το νήμα $F_x(M)$ στο σημείο x και η ομάδα $GL(n, \mathbb{R})$ είναι **ισόμορφες**, αφού κάθε πίνακας $A \in GL(n, \mathbb{R})$ αντιστοιχεί μονοσήμαντα σε έναν μετασχηματισμό που στέλνει μία διατεταγμένη βάση σε μία άλλη. Η δέσμη πλαισίων συχνά συμβολίζεται ως $F_{GL}(TM)$ ή $GL(M)$.

Ορισμός 6.2.4. Για μια διανυσματική δέσμη E πάνω από μια πολλαπλότητα M , μπορούμε να ορίσουμε τη **δέσμη πλαισίων** $F(E)$ ως την κύρια $GL(n, \mathbb{R})$ -δέσμη που αποτελείται από τις διατεταγμένες βάσεις των νημάτων $E_x, x \in M$.

Για την κατασκευή των *Spin* πολλαπλοτήτων, θα ασχοληθούμε με μία συγκεκριμένη δέσμη πλαισίων.

Ορισμός 6.2.5. Έστω μια προσανατολισμένη n -διάστατη πολλαπλότητα Riemann (M, g) . Ορίζουμε τη δέσμη των προσανατολισμένων ορθοκανονικών πλαισίων ως την κύρια SO_n -δέσμη:

$$SO(M) := F_{SO}(M) = \bigcup_{p \in M} \{(e_1, \dots, e_n) \in T_p M : g(e_i, e_j) = \delta_{ij}, \forall i, j\}$$

και $(e_1, \dots, e_n)$ θετικά προσανατολισμένη.

Ορισμός 6.2.6. Έστω P μια κύρια G -δέσμη και $\rho : G \rightarrow GL(V)$ μια αναπαράσταση της G σε έναν διανυσματικό χώρο V . Ορίζουμε τη δεξιά δράση του G στο $P \times V$ ως:

$$(e, v) \cdot g = (eg, \rho(g^{-1})v), \quad e \in P, v \in V, g \in G.$$

Ο χώρος πηλίκου $P \times_\rho V = (P \times V)/G$ ως προς αυτή τη δράση είναι μια διανυσματική δέσμη πάνω από το M με νήμα V . Αυτή ονομάζεται **συσχετιζόμενη διανυσματική δέσμη** που προκύπτει από το P μέσω της αναπαράστασης ρ .

Παράδειγμα 6.2.7. Η εφαπτόμενη δέσμη TM μιας Riemann πολλαπλότητας μπορεί να θεωρηθεί ως:

$$TM \simeq GL(M) \times_\rho \mathbb{R}^n.$$

Αν είναι προσανατολισμένη πολλαπλότητα, η GL_N μπορεί να "πέσει" στην SO_n , δηλαδή:

$$TM \simeq SO(M) \times_\rho \mathbb{R}^n,$$

όπου ρ είναι η συνηθισμένη αναπαράσταση των GL_n και SO_n στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή:

$$\rho : GL_n \rightarrow GL(\mathbb{R}^n), \quad g \mapsto (v \mapsto g \cdot v),$$

όπου g είναι ένας $n \times n$ πίνακας από την GL_n και $v \in \mathbb{R}^n$. Τελικά, η TM μπορεί να θεωρηθεί ως συσχετισμένη δέσμη είτε με τη γενική γραμμική ομάδα GL_n , είτε με την ειδική ορθογώνια ομάδα SO_n , ανάλογα με την επιλογή προσανατολισμού.

6.3 Συνοχές σε Νηματικές Δέσμες

Ορισμός 6.3.1. Έστω $\pi : P \rightarrow M$ μία διανυσματική δέσμη πάνω σε μια πολλαπλότητα M . Μια **συναλλοίωτη παράγωγος** στη δέσμη P είναι μια γραμμική απεικόνιση

$$\nabla : \Gamma(P) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes P),$$

η οποία ικανοποιεί τον κανόνα Leibniz:

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s,$$

για κάθε $f \in C^\infty(M)$ και $s \in \Gamma(P)$.

Η συνοχή ∇ μας επιτρέπει να συγκρίνουμε τομές της P σε διαφορετικά σημεία της πολλαπλότητας, καθορίζοντας ουσιαστικά την έννοια της "παράγωγισης" στη δέσμη.

Παρατήρηση 6.3.2. Ένα στοιχείο του $\Gamma(T^*M \otimes P)$ είναι μια λεία απεικόνιση $p \mapsto \omega_p \otimes e_p$ όπου ω_p είναι συνεφαπτόμενο διάνυσμα στο σημείο p και e_p είναι στοιχείο του P_p . Αυτό σημαίνει ότι η ∇s αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο $p \in M$ ένα συνεφαπτόμενο διάνυσμα $\omega_p \in T_p^*M$ που περιγράφει τον ρυθμό μεταβολής της s προς όλες τις κατευθύνσεις που ανήκουν στο T_pM . Όταν η ∇s τελικά ενεργήσει πάνω σε ένα διάνυσμα $X_p \in T_pM$, η απεικόνιση ω_p δρα στο X_p και το αποτέλεσμα είναι ένα στοιχείο του P_p . Συγκεκριμένα, μπορούμε να γράψουμε:

$$\nabla_X s(p) = \omega_p(X_p)e_p,$$

όπου $\nabla_X s$ είναι το αποτέλεσμα της συνάρτησης ∇s όταν δράσει πάνω στο διάνυσμα X_p . Αυτό περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο η τομή s αλλάζει κατά μήκος της κατεύθυνσης που ορίζεται από το X_p .

Η έννοια της συνοχής είναι πιο περίπλοκη στις κύριες νηματικές δέσμες. Στις διανυσματικές δέσμες, τα νήματα είναι διανυσματικοί χώροι, οι οποίοι διαθέτουν μία γραμμική δομή, πάνω στην οποία μπορεί να οριστεί η συνοχή με σχετική ευκολία. Στις κύριες νηματικές δέσμες, όμως, τα νήματα είναι ομάδες Lie , οι οποίες στερούνται γραμμικής δομής. Για αυτό το λόγο, αξιοποιείται η δομή της αντίστοιχης άλγεβρας Lie .

Μπορούμε να φανταστούμε μια νηματική δέσμη ως μια πολλαπλότητα M , στην οποία σε κάθε σημείο υπάρχει "από πάνω" ένα αντίστοιχο νήμα. Σε αυτήν τη δομή, μπορούμε να διακρίνουμε δύο ειδών κινήσεις: μία που αφορά την κίνηση μέσα στο νήμα και μία που αντιστοιχεί σε κίνηση πάνω στη βάση. Η κίνηση μέσα στο νήμα δεν επηρεάζει τη θέση στη βάση, δημιουργώντας έτσι τη διάκριση μεταξύ "οριζόντιας" και "κατακόρυφης" κίνησης, που είναι κεντρική για τον ορισμό της συνοχής στις κύριες νηματικές δέσμες.

Ορισμός 6.3.3. Έστω (P, M, π, G) μια G -κύρια νηματική δέσμη. Για κάθε σημείο $p \in P$ ορίζουμε την απεικόνιση $\sigma_p : \mathfrak{g} \rightarrow T_pP$

$$X \mapsto \sigma_p(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (p \exp(tX))$$

όπου $\mathfrak{g}$ είναι η άλγεβρα Lie της ομάδας G , και $\exp$ η εκθετική συνάρτηση. Η εικόνα της ονομάζεται **κατακόρυφος χώρος** V_p και είναι ο εφαπτόμενος χώρος του νήματος $\pi^{-1}(\pi(p))$ στο σημείο p . Συγκεκριμένα, ισχύει:

$$V_p = \ker(\pi_*),$$

όπου $\pi_* : T_pP \rightarrow T_{\pi(p)}M$ είναι το *push-forward* της απεικόνισης π .

Όταν θέλουμε να τονίσουμε ότι μιλάμε για ένα διάνυσμα στον T_pP "ανυψωμένο" από από ένα διάνυσμα $X \in \mathfrak{g}$, θα γράφουμε το $\sigma(X)$ ως $\tilde{X}$.

Ορισμός 6.3.4. Μια **συνοχή** σε μια G -κύρια νηματική δέσμη (P, π, M) ορίζεται ως ένας κανόνας που αντιστοιχίζει σε κάθε σημείο $p \in P$ έναν υπόχωρο του $T_p P$:

$$p \mapsto H_p \subset T_p P,$$

ο οποίος ονομάζεται **οριζόντιος χώρος**, και ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

1. $T_p P = V_p \oplus H_p$, όπου $V_p = \ker(\pi_*)$ είναι ο κατακόρυφος χώρος, δηλαδή ο εφαπτόμενος χώρος στο νήμα $\pi^{-1}(\pi(p))$.

2. Ο H_p είναι G -αναλλοίωτος, δηλαδή:

$$H_{pg} = (R_g)_*(H_p).$$

Η απεικόνιση προβολής π επάγει έναν ισομορφισμό:

$$\pi_*|_{H_p} : H_p \xrightarrow{\sim} T_{\pi(p)} M,$$

που σημαίνει ότι η H_p απεικονίζεται αμφιμονοσήμαντα στον εφαπτόμενο χώρο της βάσης $T_{\pi(p)} M$.

Η διάσπαση του $T_p P$ μέσω μιας συνοχής μας επιτρέπει να ορίσουμε μια 1-μορφή ω στον $T_p P$ με τιμές στην άλγεβρα Lie $\mathfrak{g}$ της G . Αν συμβολίσουμε $\Omega^1(P, \mathfrak{g})$ το σύνολο των 1-μορφών που παίρνει τιμές στην $\mathfrak{g}$

$$\omega : TP \rightarrow \mathfrak{g},$$

και τις ονομάζουμε $\mathfrak{g}$ -τιμη 1-μορφή, παίρνουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 6.3.5. Έστω μια διάσπαση

$$T_p P = V_p \oplus H_p,$$

μέσω μίας συνοχής, όπου V_p ο κάθετος χώρος και H_p ο οριζόντιος χώρος. Η **1-μορφή συνοχής** $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ ορίζεται ως εξής:

$$\omega(v) = \begin{cases} X, & \text{αν } v = \tilde{X}, X \in \mathfrak{g}, \\ 0, & \text{αν } v \in H_p \text{ είναι οριζόντιο.} \end{cases}$$

Πρόταση 6.3.6. Η 1-μορφή συνοχής ω ικανοποιεί τη σχέση:

$$R_g^* \omega = \text{ad}_{g^{-1}} \circ \omega.$$

Απόδειξη. Έστω $X \in \mathfrak{g}$. Για push-forward $(R_g)_* \sigma_p(X)$ ισχύει:

$$(R_g)_* \sigma_p(X) = \left. \frac{d}{dt} R_g(p \cdot \exp(tX)) \right|_{t=0}.$$

Αντικαθιστώντας τη δράση, έχουμε:

$$R_g(p \cdot \exp(tX)) = (p \cdot \exp(tX)) \cdot g = p \cdot g \cdot g^{-1} \cdot \exp(tX) \cdot g.$$

Παίρνοντας την παράγωγο:

$$\left. \frac{d}{dt} (p \cdot g \cdot \exp(t \operatorname{ad}_{g^{-1}} X)) \right|_{t=0} = \sigma_{pg}(\operatorname{ad}_{g^{-1}} X).$$

Για την 1-μορφή συνοχής ω , έχουμε:

$$\omega((R_g)_* \sigma_p(X)) = \omega(\sigma_{pg}(\operatorname{ad}_{g^{-1}} X)).$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ω , αποδεικνύουμε τελικά:

$$\omega(\sigma_{pg}(\operatorname{ad}_{g^{-1}} X)) = \operatorname{ad}_{g^{-1}} X.$$

□

Παρατήρηση 6.3.7. Μια συνοχή σε μια G -κύρια δέσμη (P, π, M) ορίζει μια μοναδική 1-μορφή συνοχής $\omega \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$, η οποία περιέχει όλες τις πληροφορίες της συνοχής. Συγκεκριμένα, η 1-μορφή συνοχής ω αντιστοιχίζει τον κάθετο χώρο V_p στην άλγεβρα $\operatorname{Lie} \mathfrak{g}$ και μηδενίζει τα οριζόντια διανύσματα στον H_p . Αντίστροφα, μια $\mathfrak{g}$ -τιμή 1-μορφή ω που ικανοποιεί τις συνθήκες κανονικοποίησης και ισοδυναμίας ορίζει μοναδικά μια συνοχή στον $T_p P$. Έτσι, υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των συνοχών σε μια κύρια δέσμη και των 1-μορφών συνοχής που ικανοποιούν τις κατάλληλες ιδιότητες. Αυτό σημαίνει ότι μια συνοχή μπορεί να περιγραφεί πλήρως μέσω της 1-μορφής συνοχής ω .

Έστω ω μια 1-μορφή συνοχής σε μια G -κύρια νηματική δέσμη (P, π, M) . Μπορούμε να ορίσουμε μια **συναλλοίωτη** σε κάθε συσχετισμένη διανυσματική δέσμη $E = P \times_\rho \Sigma$.

Ορισμός 6.3.8. Για κάθε τομή $\psi \in \Gamma(E)$, η οποία τοπικά γράφεται ως:

$$\psi = [s, \sigma],$$

όπου $s \in \Gamma(P|_U)$ μια τοπική τομή πάνω από το $U \subset M$ και $\sigma : U \rightarrow \Sigma$ μια λεία συνάρτηση, ορίζουμε τη **συναλλοίωτη παράγωγο** ως:

$$\nabla_X \psi := [s, X(\sigma) + \rho_*((\omega \circ s_*)(X))\sigma], \quad (6.1)$$

όπου:

1. $X \in \Gamma(TU)$: Είναι ένα διανυσματικό πεδίο στο M .
2. $X\sigma$: Η κατευθυνόμενη παράγωγος της σ κατά μήκος του X .
3. $s_* : TU \rightarrow TP$: Το push-forward της τομής s .
4. $\omega : TP \rightarrow \mathfrak{g}$: Η 1-μορφή συνοχής που επιστρέφει στοιχεία της άλγεβρας $\operatorname{Lie} \mathfrak{g}$.

5. $\rho_* : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\Sigma)$: Το *push-forward* της αναπαράστασης ρ , το οποίο δίνεται από:

$$\rho_*(Z) := \left. \frac{d}{dt} \rho(\exp(tZ)) \right|_{t=0}.$$

Το αποτέλεσμα $\nabla_X \psi$ είναι ένα νέο στοιχείο της $\Gamma(E)$, δηλαδή μια τομή στο συσχετισμένο διανυσματικό χώρο E .

Αντίστροφα, από μία συναλλοίωτη παράγωγο σε μία διανυσματική δέσμη, μπορούμε να πάρουμε μια συνοχή στην αντίστοιχη κύρια δέσμη.

Ορισμός 6.3.9. Έστω διανυσματική δέσμη (E, π, M) διάστασης n και μία συνοχή ∇ . Θεωρούμε n γραμμικά ανεξάρτητες τοπικές τομές του E ,

$$s = (\psi_1, \dots, \psi_N) : U \rightarrow GL(E), \quad U \subseteq M,$$

και ορίζουμε τις 1-μορφές $\omega_{\beta\alpha}$ από τη σχέση:

$$\nabla_X \psi_\alpha := \sum_{\beta=1}^N \omega_{\beta\alpha}(X) \psi_\beta,$$

για κάθε $X \in \Gamma(TU)$. Υπάρχει μοναδική 1-μορφή συνοχής ω στην $GL(\mathbb{K}^n)$ -κύρια νηματική δέσμη $GL(E)$, τέτοια ώστε για κάθε τοπική τομή $s \in \Gamma_U(GL(E))$ να ισχύει:

$$s^* \omega = (\omega_{\beta\alpha})_{1 \leq \alpha, \beta \leq n}, \quad \omega_{\beta\alpha} \in \text{End}(\mathbb{K}^n).$$

Για κάθε τοπικό εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο X , η 1-μορφή συνοχής ω ικανοποιεί:

$$\omega(s_* X + \tilde{z}) := (\omega_{\beta\alpha}(X)) + z,$$

όπου $\tilde{z}$ είναι κάθετο διανυσματικό πεδίο που αντιστοιχεί στην άλγεβρα Lie.

6.4 Καμπυλότητα σε Νηματικές Δέσμες

Ορίζουμε την έννοια της καμπυλότητας σε νηματικές δέσμες. Στο παρόν κεφάλαιο παρατίθενται βασικά στοιχεία της θεωρίας. Για πιο λεπτομερή ανάλυση ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [15].

Ορισμός 6.4.1. Έστω (P, π, M) μια G -κύρια νηματική δέσμη με 1-μορφή συνοχή ω . Ορίζουμε την την **2-μορφή καμπυλότητας**:

$$\Omega \in \Gamma(\Lambda^2(TP) \otimes \mathfrak{g}),$$

η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)],$$

όπου $X, Y \in \Gamma(TP)$. Με $d\omega(X, Y)$ συμβολίζουμε την εξωτερική παράγωγο, δηλαδή την 2-μορφή που προκύπτει από:

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).$$

Πρόταση 6.4.2. Για μια τοπική τομή $s = (\psi_1, \dots, \psi_n)$ της $\Gamma_U(SO(E))$, έχουμε:

$$R(\psi_\alpha) = \sum_{\beta=1}^N \Omega_{\beta\alpha} \otimes \psi_\beta,$$

όπου $\Omega_{\beta\alpha}$ είναι οι τοπικές συνιστώσες της καμπυλότητας.

Πρόταση 6.4.3. Ο ορισμός του τανυστή καμπυλότητας R συμπίπτει με τον συνήθη ορισμό:

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]},$$

για $X, Y \in \Gamma(TM)$.

Κεφάλαιο 7

Spin Γεωμετρία και τελεστές Dirac

Σε αυτό το κεφάλαιο θα συνθέσουμε ότι έχουμε δει έως τώρα. Θα ανηψύξουμε στην αρχή τις spin πολλαπλότητες μαζί με τις spin συνοχές. Στην συνέχεια θα ορίσουμε τον τελεστή Dirac πάνω σε αυτούς τους χώρους. Θα ολοκληρώσουμε το κεφάλαιο με τον τύπο Lichnerowicz.

7.1 Spin Πολλαπλότητες

Μια **δομή spin** σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M είναι επι της ουσίας μια ανύψωση της δέσμης ορθοκανονικών πλαισίων $F_{SO_n}(M) = SO(M)$ σε μια δέσμη $P_{Spin_n}(M) = Spin(M)$ με δομική ομάδα την $Spin_n$, όπου η $Spin_n$ είναι η διπλή κάλυψη της SO_n . Αυτή η ανύψωση αντιστοιχεί σε έναν ομομορφισμό δεσμών.

Ορισμός 7.1.1. Έστω (M, g) μια προσανατολισμένη Riemann πολλαπλότητα διάστασης n . Μια **δομή Spin** στο M είναι ένα ζεύγος $(Spin(M), \eta)$, όπου $Spin(M)$ είναι μια $Spin_n$ -κύρια νηματική δέσμη πάνω από το M και $\eta : Spin(M) \rightarrow SO(M)$ είναι μια απεικόνιση διπλής επικάλυψης, που είναι συμβατή με τις αντίστοιχες δράσεις των ομάδων $Spin_n$ και SO_n . Το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccc} Spin(M) \times Spin_n & \longrightarrow & Spin(M) & & \\ \eta \times Ad \downarrow & & \downarrow \eta & \searrow \pi_{Spin} & \\ SO(M) \times SO_n & \longrightarrow & SO(M) & \xrightarrow{\pi_{SO}} & M \end{array}$$

Η η διασφαλίζει τη συμβατότητα των δύο δομών μέσω του $\eta(p \cdot g) = \eta(p) \cdot Ad_g$, όπου $Ad : Spin_n \rightarrow SO_n$ είναι η γνωστή διπλή επικάλυψη.

Ορισμός 7.1.2. Μία προσανατολισμένη Riemann πολλαπλότητα που επιδέχεται δομή Spin ονομάζεται **Spin πολλαπλότητα**.

Παρόλο που ο ορισμός μιας δομής Spin αναφέρεται σε μία Riemann πολλαπλότητα, η ύπαρξή της και ο αριθμός των μη ισοδύναμων δομών Spin δεν εξαρτώνται από τη μετρική. Αυτό σημαίνει ότι, αν μια πολλαπλότητα M επιδέχεται δομή Spin για μια συγκεκριμένη Riemann μετρική g , τότε θα επιδέχεται δομή Spin και για κάθε άλλη μετρική, με τον αριθμό των μη ισοδύναμων δομών Spin να παραμένει ίδιος. Η ύπαρξη ή μη της Spin δομής αποτελεί τοπολογική ιδιότητα. Αναφέρουμε για λόγους πληρότητας, χωρίς περαιτέρω ανάλυση, ότι μια πολλαπλότητα επιδέχεται spin δομή αν και μόνο αν η δεύτερη κλάση Stiefel-Whitney της μηδενίζεται. Σε αυτήν την περίπτωση, έχει τόσες μη ισοδύναμες δομές Spin όσες είναι τα στοιχεία του $H^1(M; \mathbb{Z}_2)$ [19]. Δίνουμε μερικά παραδείγματα παρακάτω.

Παράδειγμα 7.1.3. 1. Όλες οι συμπαγείς και προσανατολισμένες λείες πολλαπλότητες με $n \leq 3$ επιδέχονται δομή spin.

2. Οι σφαίρες S^n είναι όλες spin.

3. Οι μιγαδικοί προβολικοί χώροι $\mathbb{CP}^{2n-1}$ επιδέχονται δομή spin.

4. Οι μιγαδικοί προβολικοί χώροι $\mathbb{CP}^{2n}$ επιδέχονται δομή spin.

Παραθέτουμε ένα τετριμμένο παράδειγμα για να αποσαφηνίσουμε λίγο τον παραπάνω ορισμό.

Παράδειγμα 7.1.4. Έστω $M = \mathbb{R}^n$. Ταυτίζοντας τον εφαπτόμενο χώρο $T_x \mathbb{R}^n$ με το $\mathbb{R}^n$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, μπορούμε να εφοδιάσουμε το $\mathbb{R}^n$ με τη Riemann μετρική g που ορίζεται από το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο:

$$g_x(v, w) := \langle v, w \rangle,$$

για όλα $x \in \mathbb{R}^n$ και $v, w \in T_x \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε προσανατολισμό θεωρώντας ότι η ορθοκανονική βάση $(e_1, \dots, e_n)$ του $T_x \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$ είναι θετικά προσανατολισμένη. Η δέσμη $SO(\mathbb{R}^n, g)$ των προσανατολισμένων ορθοκανονικών πλαισίων είναι τετριμμένη, δηλαδή:

$$SO(\mathbb{R}^n, g) \cong \mathbb{R}^n \times SO_n.$$

Μια δομή Spin για το $(\mathbb{R}^n, g)$ δίνεται από το ζεύγος (P, η) , όπου:

$$P = \mathbb{R}^n \times Spin_n,$$

και:

$$\eta : P = \mathbb{R}^n \times Spin_n \rightarrow \mathbb{R}^n \times SO_n = SO(\mathbb{R}^n, g),$$

$$\eta(x, g) = (x, Ad_g),$$

όπου $Ad : Spin_n \rightarrow SO_n$ είναι ο ομομορφισμός διπλής κάλυψης από την $Spin(n)$ στην SO_n . Με αυτόν τον τρόπο, κάθε σημείο $(x, g) \in P$ αντιστοιχεί σε ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ και σε έναν πίνακα $g \in Spin_n$, με το η να εξασφαλίζει τη συμβατότητα της δομής $Spin$ με τη δομή $SO(\mathbb{R}^n, g)$.

Ορισμός 7.1.5. Η δέσμη *spinor* μιας πολλαπλότητας M είναι η μιγαδική συσχετιζόμενη διανυσματική δέσμη της $Spin(M)$ μέσω της αναπαράστασης *spinor*:

$$\Sigma M = Spin(M) \times_p \Sigma_n.$$

Για n άρτιο, ισχύει ότι $\Sigma_n = \Sigma_n^+ \oplus \Sigma_n^-$ και $p = p^+ \oplus p^-$. Έτσι, οι θετικές και αρνητικές δέσμες *spinor* ορίζονται ως:

$$\Sigma M^\pm = Spin(M) \times_{p^\pm} \Sigma_n^\pm,$$

οπότε

$$\Sigma M = \Sigma M^+ \oplus \Sigma M^-.$$

Η δέσμη *spinor* είναι μια διανυσματική δέσμη με νήμα Σ_n , ή $\Sigma_n^\pm$ αντίστοιχα. Μια τομή $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ δίνεται τοπικά ως:

$$\psi|_U = [\tilde{s}, \sigma],$$

όπου $\tilde{s} \in \Gamma_U(Spin(M))$ είναι μια τοπική τομή της $Spin(M)$ πάνω από το $U \subset M$, και $\sigma : U \rightarrow \Sigma_n$ είναι μια λεία συνάρτηση που παίρνει τιμές στο νήμα Σ_n . Τα στοιχεία της ΣM ονομάζονται **spinors**, και οι τομές της ΣM , $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$, ονομάζονται **πεδία spinor** ή απλώς **spinors**.

Ο **πολλαπλασιασμός Clifford** μεταξύ ενός τανυστή και ενός *spinor* μπορεί να επεκταθεί στον **πολλαπλασιασμό Clifford** πάνω στη δέσμη *spinor* ΣM .

Ορισμός 7.1.6. Ο πολλαπλασιασμός Clifford είναι η σημειακή δράση:

$$m : TM \otimes \Sigma M \rightarrow \Sigma M,$$

η οποία για κάθε $\psi \in \Sigma M$ και $X \in TM$ ορίζεται ως:

$$X \otimes \psi = [\tilde{s}, \alpha] \otimes [\tilde{s}, \sigma] \mapsto [\tilde{s}, \alpha \cdot \sigma] = X \cdot \psi,$$

όπου $\alpha \cdot \sigma$ είναι ο πολλαπλασιασμός Clifford στη Σ_n και η TM θεωρείται ως η συσχετισμένη διανυσματική δέσμη:

$$TM \simeq Spin(M) \times_{Ad} \mathbb{R}^n.$$

Ορισμός 7.1.7. Το φυσικό ερμητιανό γινόμενο στη δέσμη *spinor* ΣM ορίζεται ως:

$$(\cdot, \cdot) : \Gamma(\Sigma M) \times \Gamma(\Sigma M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{C}),$$

με

$$(\psi, \varphi)(x) := (\psi_x, \varphi_x),$$

όπου (ψ_x, φ_x) είναι το φυσικό ερμητιανό γινόμενο στη Σ_n στο σημείο $x \in M$.

Πρόταση 7.1.8. Ο πολλαπλασιασμός Clifford και το ερμητιανό γινόμενο στη ΣM είναι συμβατά, δηλαδή :

$$(X \cdot \psi, \varphi) + (\psi, X \cdot \varphi) = 0,$$

για κάθε $X \in \Gamma(TM)$ και $\psi, \varphi \in \Gamma(\Sigma M)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη της συμβατότητας βασίζεται στον ορισμό του Clifford πολλαπλασιασμού και στη δομή του ερμητιανού γινομένου, όπως φαίνεται από το Πόρισμα 5.3.19. $\square$

7.2 Συνοχές σε Spinor Δέσμες

Αν M είναι μια πολλαπλότητα spin, τότε η συνοχή Levi-Civita στην επαπτόμενη δέσμη TM επάγει μια συνοχή στην κύρια νηματική δέσμη $SO(M)$ των θετικά προσανατολισμένων ορθοκανονικών πλαισίων. Αυτή η συνοχή ανυψώνεται στη δέσμη $Spin(M)$. Επίσης, για ένα απλά συνεκτικό ανοικτό υποσύνολο $U \subset M$, κάθε τομή $s \in \Gamma_U(SO(M))$ ανυψώνεται σε τομή $\tilde{s} \in \Gamma_U(Spin(M))$, δηλαδή το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccc} Spin(M) & \xrightarrow{\eta} & SO(M) \\ \uparrow \tilde{s} & \nearrow s & \\ U & & \end{array} \quad (7.1)$$

Η 1-μορφή συνοχής $\tilde{\omega}$ στη δέσμη $Spin(M)$ ορίζεται ως η μοναδική 1-μορφή συνοχής για την οποία το παρακάτω διάγραμμα είναι μεταθετικό:

$$\begin{array}{ccccc} TU \subset TM & \xrightarrow{\tilde{s}_*} & TSpin(M) & \xrightarrow{\tilde{\omega}_{SO}} & \mathfrak{spin}_n \\ & \searrow s_* & \downarrow \eta_* & & \downarrow Ad_* \\ & & TSO(M) & \xrightarrow{\omega_{SO}} & \mathfrak{so}(n) \end{array} \quad (7.2)$$

$H_{\omega_{SO}}$ είναι η 1-μορφή συνοχής που αντιστοιχεί στη Levi-Civita συνοχή του M .

Παρατήρηση 7.2.1. Η Levi-Civita συνοχή παρέχει έναν τρόπο με τον οποίο τα ορθοκανονικά πλαίσια $(e_1, \dots, e_n)$ του TM μεταβάλλονται κατά μήκος καμπυλών στην πολλαπλότητα. Υπάρχει λοιπόν ένας φυσικός τρόπος ορισμού της 1-μορφής συνοχής ω_{SO} στην κύρια δέσμη $SO(M)$, καθώς η $SO(M)$ είναι ακριβώς η δέσμη όλων των θετικά προσανατολισμένων ορθοκανονικών πλαισίων.

Πιο συγκεκριμένα, επιλέγουμε για αρχή ένα ορθοκανονικό πλαίσιο $s = (e_1, \dots, e_n) \in \Gamma_U(SO(M))$, όπου $U \subset M$

$$\omega := s^* \omega_{SO} = - \sum_{i < j} \omega_{ij} e_i \wedge e_j, \quad (7.3)$$

$$\Omega := s^* \Omega_{SO} = - \sum_{i < j} \Omega_{ij} e_i \wedge e_j, \quad (7.4)$$

όπου

$$e_i \wedge e_j := g(e_i, \cdot) e_j - g(e_j, \cdot) e_i$$

είναι μια βάση του $\mathfrak{so}_n$. Στη συνέχεια, προκύπτει ότι:

$$\omega_{ij}(X) = -g(\omega(X)e_i, e_j) = -g(\nabla_X e_i, e_j), \quad (7.5)$$

για κάθε $X \in \Gamma(TM)$.

Για να ορίσουμε την 1-μορφή συνοχής στην $SpinTM$ το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να "σηκώσουμε" την συνοχή ω_{SO} . Χρησιμοποιώντας το διάγραμμα (7.2) παίρνουμε ότι:

$$\tilde{\omega}(X) = Ad_*^{-1} \circ \omega_{SO} \circ s_*(X) \quad (7.6)$$

με $X \in \Gamma(TM)$.

Την τοπική περιγραφή την παίρνουμε από την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 7.2.2. 1. Η ανυψωμένη 1-μορφή συνοχής $\tilde{\omega}$ ικανοποιεί:

$$\tilde{\omega}(X) := \tilde{\omega}_{SO}(\tilde{s}_* X) = - \sum_{i < j} \omega_{ij}(X) e_i \cdot e_j. \quad (7.7)$$

2. Έστω $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ μια ορθοκανονική βάση του $\Sigma_n \cong \mathbb{C}^n$. Ορίζουμε τοπικές τομές $(\psi_\alpha)_{1 \leq \alpha \leq n} \in \Gamma_U(\Sigma M)$ ως:

$$\psi_\alpha := [\tilde{s}, \sigma_\alpha], \quad \text{όπου } \tilde{s} \in \Gamma_U(Spin(M)). \quad (7.8)$$

Τότε, η spinorial συναλλοίωτη παράγωγος δίνεται τοπικά από:

$$\nabla \psi_\alpha = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(\nabla e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha. \quad (7.9)$$

3. Αν R είναι ο τανυστής καμπυλότητας Riemann της TM , τότε για τον spinorial τανυστή καμπυλότητας ισχύει:

$$\mathcal{R}_{X,Y} \psi = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(R_{X,Y} e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \psi.$$

Απόδειξη. 1. Από την (7.6) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\omega}(X) &= (Ad_*^{-1} \circ \omega_{SO} \circ s_*)(X) \\
 &\stackrel{(7.3)}{=} Ad_*^{-1} \left(- \sum_{i < j} \omega_{ij}(X) e_i \wedge e_j \right) \\
 &= - \sum_{i < j} \omega_{ij}(X) Ad_*^{-1}(e_i \wedge e_j) \\
 &\stackrel{(5.2.6)}{=} - \frac{1}{2} \sum_{i < j} \omega_{ij}(X) e_i \cdot e_j.
 \end{aligned}$$

2. Ο υπολογισμός γίνεται χρησιμοποιώντας ότι αναπαράσταση $\rho = \rho_*$, αφού είναι γραμμική απεικόνιση από την άλγεβρα Clifford στον διανυσματικό χώρο $End(\Sigma_n)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \nabla \psi_\alpha &\stackrel{(6.1)}{=} [\tilde{s}, \rho_*(\tilde{\omega}_{SO}(\tilde{s}_* X)) \sigma_\alpha] \\
 &\stackrel{(7.7)}{=} [\tilde{s}, \rho_* \left(- \frac{1}{2} \sum_{i < j} \omega_{ij} e_i \cdot e_j \right) \sigma_\alpha] \\
 &= [\tilde{s}, \left(- \frac{1}{2} \sum_{i < j} \omega_{ij} e_i \cdot e_j \right) \cdot \sigma_\alpha] \\
 &\stackrel{(7.8)}{=} - \frac{1}{2} \sum_{i < j} \omega_{ij} e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha \\
 &\stackrel{(7.5)}{=} \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(\nabla e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha.
 \end{aligned}$$

Για X διανυσματικό πεδίο του M έχουμε:

$$\nabla_X \psi_\alpha = [\tilde{s}, X(\sigma_\alpha)] + \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(\nabla e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha. \quad (7.10)$$

3. Ξέρουμε ότι

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]},$$

για $X, Y \in \Gamma(TM)$. Η spinorial συναλλοίωτη παράγωγος δίνεται από:

$$\nabla_X \psi = \frac{1}{4} \sum_{k,l} g(\nabla_X e_k, e_l) e_k \cdot e_l \cdot \psi.$$

Υπολογίζουμε πρώτα το $[\nabla_X, \nabla_Y] \psi = \nabla_X(\nabla_Y \psi) - \nabla_Y(\nabla_X \psi)$.

$$\begin{aligned}\nabla_X(\nabla_Y\psi) &= \frac{1}{4} \sum_{k,l} \left[X(g(\nabla_Y e_k, e_l)) e_k \cdot e_l \cdot \psi \right. \\ &\quad \left. + g(\nabla_Y e_k, e_l) \nabla_X(e_k \cdot e_l \cdot \psi) \right]\end{aligned}$$

Ομοίως για $\nabla_Y(\nabla_X\psi)$.

Αν τα αφαιρέσουμε, ο δεύτερος προσθετέος εξαφανίζεται λόγω των ιδιοτήτων της Clifford Άλγεβρας και της συνοχής Levi-Civita.

Στην συχέχεια, υπολογίζουμε:

$$\nabla_{[X,Y]}\psi = \frac{1}{4} \sum_{i,j} g(\nabla_{[X,Y]} e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \psi.$$

και τα αντικαθιστούμε στον τύπο:

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]}$$

Οι όροι που περιέχουν το $\nabla\psi$ ακυρώνονται λόγω αντισυμμετρίας και τελικά προκύπτει:

$$\mathcal{R}_{X,Y}\psi = \frac{1}{4} \sum_{i,j} g(R(X, Y) e_k, e_l) e_k \cdot e_l \cdot \psi.$$

Για μια διαφορετική και πιο αναλυτική απόδειξη ο αναγνώστης παραπέμπεται στο [3] □

Πρόταση 7.2.3. Έστω ∇ η spinor συνοχή στη δέσμη ΣM που επάγεται από τη συνοχή Levi-Civita στο TM . Τότε ισχύουν οι σχέσεις:

1. Η ∇ είναι συμβατή με το ερμητιανό εσωτερικό γινόμενο:

$$X(\psi, \varphi) = (\nabla_X \psi, \varphi) + (\psi, \nabla_X \varphi), \quad (7.11)$$

για κάθε $X \in \Gamma(TM)$, $\psi, \varphi \in \Gamma(\Sigma M)$, όπου $X(\psi, \varphi)$ είναι η παράγωγος του ερμητιανού γινομένου (ψ, φ) κατά μήκος του πεδίου X .

2. Η ∇ είναι συμβατή με τον πολλαπλασιασμό Clifford:

$$\nabla_X(Y \cdot \psi) = (\nabla_X Y) \cdot \psi + Y \cdot \nabla_X \psi, \quad (7.12)$$

για κάθε $X, Y \in \Gamma(TM)$ και $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$.

Απόδειξη. Με τις προϋποθέσεις του (7.8).

1. Για $\psi = \psi_\alpha$ και $\varphi = \psi_\beta$, για κάθε διανυσματικό πεδίο X , έχουμε:

$$\begin{aligned}
 (\nabla_X \psi_\alpha, \psi_\beta) &\stackrel{(7.9)}{=} \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_X e_i, e_j) (e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha, \psi_\beta) \\
 &\stackrel{(7.1.7)}{=} \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_X e_i, e_j) (\psi_\alpha, e_j \cdot e_i \cdot \psi_\beta) \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_X e_j, e_i) (\psi_\alpha, e_i \cdot e_j \cdot \psi_\beta) \\
 &= -\frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^n g(\nabla_X e_i, e_j) (\psi_\alpha, e_i \cdot e_j \cdot \psi_\beta)
 \end{aligned}$$

Επιπλέον, $(\psi_\alpha, \psi_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ οπότε προκύπτει η σχέση (7.11). Για αυθαίρετες τομές, χρησιμοποιούμε τη διγραμμικότητα και τη σχέση:

$$\begin{aligned}
 X(f\psi, \varphi) &= (Xf)(\psi, \varphi) + fX(\psi, \varphi) \\
 &= (Xf)(\psi, \varphi) + f(\nabla_X \psi, \varphi) + f(\psi, \nabla_X \varphi) \\
 &= (\nabla_X(f\psi), \varphi) + (f\psi, \nabla_X \varphi),
 \end{aligned}$$

Οπότε ισχύει η (7.11) αν ισχύει η σχέση για ϕ και ψ

2. Παρατηρούμε πρώτα ότι:

$$\begin{aligned}
 e_i \cdot e_j \cdot e_k &= e_i \cdot (-e_k \cdot e_j - 2\delta_{jk}) \\
 &= e_k \cdot e_i \cdot e_j + 2\delta_{ik} e_j - 2\delta_{jk} e_i.
 \end{aligned}$$

Για $Y = e_i$ και $\psi = \psi_\alpha$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \nabla(e_k \cdot \psi) &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} g(\nabla e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot (e_k \cdot \psi_\alpha) \\
 &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} g(\nabla e_i, e_j) e_k \cdot e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha + \frac{1}{2} \sum_j g(\nabla e_k, e_j) e_j \cdot \psi_\alpha \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_i g(\nabla e_i, e_k) e_i \cdot \psi_\alpha.
 \end{aligned}$$

Αλλάζοντας το i με το j στον τελευταίο όρο, παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} g(\nabla e_i, e_j) e_k \cdot e_i \cdot e_j \cdot \psi_\alpha + \sum_j g(\nabla e_k, e_j) e_j \cdot \psi_\alpha \\
 &= e_k \cdot \nabla \psi_\alpha + (\nabla e_k) \cdot \psi_\alpha.
 \end{aligned}$$

Για αυθαίρετα Y και ψ , παίρνουμε τη σχέση (7.12).

□

7.3 Τελεστής Dirac

Ο τελεστής Dirac συνενώνει ουσιαστικά την αλγεβρική και γεωμετρική δομή μιας Spin πολλαπλότητας. Για να ορίσουμε τον τελεστή Dirac, πρέπει πρώτα να επεκτείνουμε τον πολλαπλασιασμό Clifford στη συνεφαπτόμενη δέσμη. Η δέσμη Spinor δίνεται ως:

$$\Sigma M = \text{Spin}(M) \times_p \Sigma_n,$$

με τον πολλαπλασιασμό Clifford

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} : TM \otimes \Sigma M &\longrightarrow \Sigma M \\ X \otimes \psi &\longmapsto X \cdot \psi, \end{aligned}$$

όπου ρ είναι η spinor αναπαράσταση. Αυτός ο πολλαπλασιασμός επεκτείνεται σε

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} : \Lambda^p(TM) \otimes \Sigma M &\longrightarrow \Sigma M \\ \alpha \otimes \psi &\longmapsto \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \dots e_{i_p} \cdot \psi, \end{aligned}$$

όπου τοπικά

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \alpha_{i_1, \dots, i_p} e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*,$$

και $e_i^* = g(e_i, -)$ είναι η δυική βάση του e_i .

Ορισμός 7.3.1. Ο τελεστής Dirac πάνω σε μια δέσμη spinor, είναι ένας διαφορικός τελεστής πρώτης τάξης

$$\mathcal{D} : \Gamma(\Sigma M) \rightarrow \Gamma(\Sigma M),$$

ο οποίος ορίζεται ως η σύνθεση του πολλαπλασιασμού Clifford με τη φυσική συνοχή στη δέσμη ΣM . Συγκεκριμένα:

$$\mathcal{D} := m \circ \nabla,$$

όπου:

$$\Gamma(\Sigma M) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(T^*M \otimes \Sigma M) \xrightarrow{m} \Gamma(\Sigma M).$$

Αναλυτικά, για κάθε $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$, ο $\mathcal{D}$ δίνεται από:

$$\mathcal{D}\psi = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i} \psi, \quad (7.13)$$

όπου $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ είναι μια τοπική ορθοκανονική βάση του TM .

Λήμμα 7.3.2. Έστω $n = 2m$. Ο τελεστής Dirac $\mathcal{D}$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathcal{D} : \Gamma(\Sigma M^+) \rightarrow \Gamma(\Sigma M^-), \quad \mathcal{D} : \Gamma(\Sigma M^-) \rightarrow \Gamma(\Sigma M^+),$$

δηλαδή, ο Dirac τελεστής στέλνει θετικά spinors σε αρνητικά και αντίστροφα.

Απόδειξη. Ξέρουμε από πρόταση 5.3.12 ότι $\Sigma^\pm = (1 \pm \omega_C)\Sigma$ με Σ^+ είναι ο υπόχωρος στον οποίο ο πολλαπλασιασμός με το ω_C είναι η ταυτότητα και Σ^- είναι ο υπόχωρος στον οποίο ο πολλαπλασιασμός με το ω_C είναι $-Id$.

Για κάθε $\psi^+ \in \Gamma(\Sigma M^+)$, έχουμε:

$$\begin{aligned}\omega_C \cdot \mathcal{D}\psi^+ &= \omega_C \cdot \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i} \psi^+ \\ &= - \sum_{i=1}^n e_i \cdot (\omega_C \cdot \nabla_{e_i} \psi^+) \\ &= - \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i} (\omega_C \cdot \psi^+).\end{aligned}$$

Επειδή $\omega_C \cdot \psi^+ = \psi^+$, έχουμε:

$$\omega_C \cdot \mathcal{D}\psi^+ = -\mathcal{D}\psi^+.$$

Αυτό δείχνει ότι $\mathcal{D}\psi^+ \in \Gamma(\Sigma M^-)$. Αντίστοιχα, για κάθε $\psi^- \in \Gamma(\Sigma M^-)$:

$$\omega_C \cdot \mathcal{D}\psi^- = -\mathcal{D}\psi^-,$$

συνεπώς $\mathcal{D}\psi^- \in \Gamma(\Sigma M^+)$. □

Παράδειγμα 7.3.3. Έστω $M = \mathbb{R}^n$, με $\Sigma M = \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$, μια τετριμμένη μιγαδική διανυσματική δέσμη. Κάθε πεδίο spinor $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια λεία απεικόνιση:

$$\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}.$$

Ο τελεστής Dirac $\mathcal{D}$ στη συγκεκριμένη περίπτωση απλοποιείται ως εξής:

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \frac{\partial}{\partial x^i},$$

Ταυτίζοντας $\partial_i = \nabla_{e_i}$, το τετράγωνο του Dirac τελεστή γίνεται:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^2 &= \left(\sum_{i=1}^n e_i \cdot \partial_i \right) \left(\sum_{j=1}^n e_j \cdot \partial_j \right) = \sum_{i,j=1}^n e_i \cdot e_j \cdot \partial_i \partial_j \\ &= - \sum_i \partial_i^2 + \sum_{i < j} e_i \cdot e_j \cdot \partial_i \partial_j + \sum_{i > j} e_i \cdot e_j \cdot \partial_i \partial_j \\ &= - \sum_i \partial_i^2 + \sum_{i < j} e_i \cdot e_j \cdot \partial_i \partial_j + \sum_{i < j} e_j \cdot e_i \cdot \partial_j \partial_i \\ &= - \sum_i \partial_i^2 + \sum_{i < j} e_i \cdot e_j \cdot (\partial_i \partial_j - \partial_j \partial_i) \\ &= - \sum_i \partial_i^2.\end{aligned}$$

Επομένως, το τετράγωνο του Dirac τελεστή δρα πάνω σε λείες απεικονίσεις από $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{C}^{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$, όπως η συνήθης Λαπλασιανή της $\mathbb{R}^n$, με αρνητικό πρόσημο.

Παράδειγμα 7.3.4. Έστω $M = \mathbb{R}^2$, έχουμε ότι $\mathbb{C}l_2 \cong \mathbb{C}(2)$. Το μιγαδικό στοιχείο όγκου δίνεται από:

$$\omega = ie_1 \cdot e_2,$$

και μπορούμε να ταυτίσουμε τη δέσμη spinor Σ_2 με:

$$\Sigma_2 \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C},$$

όπου:

$$\Sigma_2^+ = \text{span}_{\mathbb{C}}(e_1 + ie_2), \quad \Sigma_2^- = \text{span}_{\mathbb{C}}(1 - ie_1 \cdot e_2).$$

Κάθε spinor πεδίο $\psi \in \Gamma(\Sigma M)$ δίνεται μέσω δύο λείων μιγαδικών συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$, ως εξής:

$$\psi = f(e_1 + ie_2) + g(1 - ie_1 \cdot e_2).$$

Ο Dirac τελεστής που δρα στο ψ ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\psi &= (e_1 \cdot \partial_1 + e_2 \cdot \partial_2) [f(e_1 + ie_2) + g(1 - ie_1 \cdot e_2)] \\ &= (\partial_1 + i\partial_2)f(1 - ie_1 \cdot e_2) + (\partial_1 - i\partial_2)g(e_1 + ie_2) \\ &= 2(-\partial_{\bar{z}}f(1 - ie_1 \cdot e_2) + \partial_z g(e_1 + ie_2)). \end{aligned}$$

όπου:

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2), \quad \partial_z = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2).$$

Ως προς την βάση $\{e_1 + ie_2, 1 - ie_1 \cdot e_2\}$ της Σ_2 , ο Dirac τελεστής εκφράζεται ως:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & 2\partial_z \\ -2\partial_{\bar{z}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Έτσι, ο Dirac τελεστής $\mathcal{D}$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια γενίκευση του τελεστή Cauchy-Riemann.

7.4 Ο Τύπος Lichnerowicz

Ο τελεστής Dirac αναπτύχθηκε ιστορικά ως μια επέκταση της έννοιας του τελεστή Laplace. Ένα κεντρικό αποτέλεσμα είναι ότι το τετράγωνο του τελεστή Dirac ισούται με τον τελεστή Laplace, "διορθωμένο" από την καμπυλότητα της πολλαπλότητας. Αυτό αποκαλύπτει μια βαθιά σύνδεση ανάμεσα στη δομή Spin και στη γεωμετρική δομή της πολλαπλότητας, όπως περιγράφεται από την καμπυλότητα της. Πριν διατυπώσουμε το θεώρημα θα χρειαστούμε μια προεργασία.

Ορισμός 7.4.1. Έστω (M, g) μια Riemann πολλαπλότητα.

1. Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(M)$ τη Borel σ -άλγεβρα του M , δηλαδή τη μικρότερη σ -άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοικτά υποσύνολα του M . Ορίζουμε το **Riemann μέτρο** ή **όγκο** $\mu := \mu_g$ στο M ως το μέτρο που σε κάθε χάρτη (U, x) δίνεται από:

$$d\mu := \sqrt{\det(g_{ij})} d\lambda,$$

όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue στον χάρτη (U, x) .

2. Έστω E μια $\mathbb{K}$ -διανυσματική δέσμη πάνω στο M , και $\phi \in \Gamma(E)$. Το **support** της ϕ ορίζεται ως:

$$\text{supp}(\phi) := \{x \in M \mid \phi(x) \neq 0\}.$$

Λέμε ότι η ϕ έχει συμπαγές support αν το $\text{supp}(\phi)$ είναι συμπαγές, και συμβολίζουμε το χώρο όλων των αυτών των τομών με:

$$\Gamma_c(E) := \{\phi \in \Gamma(E) \mid \text{supp}(\phi) \text{ είναι συμπαγές}\}.$$

Στην περίπτωση που $E = TM$, θα γράφουμε:

$$\Gamma_c(TM).$$

3. Έστω ότι E είναι εφοδιασμένη με ένα γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ορίζουμε το L^2 -εσωτερικό γινόμενο $(\cdot, \cdot)_{L^2}$ στο $\Gamma_c(E)$ ως:

$$(\phi, \psi)_{L^2} := \int_M \langle \phi, \psi \rangle d\mu_g,$$

και τη αντίστοιχη L^2 -νόρμα $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{L^2}$ ως:

$$\|\phi\|_{L^2} := \sqrt{(\phi, \phi)_{L^2}}.$$

Παρατήρηση 7.4.2. Το $\Gamma_c(E)$ δεν είναι γενικά πλήρης χώρος ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_{L^2}$, δηλαδή το ζεύγος $(\Gamma_c(E), (\cdot, \cdot))$ αποτελεί μόνο **προ-Hilbert** χώρο.

Ορισμός 7.4.3. Έστω (M, g) μια Riemann πολλαπλότητα και $X \in \Gamma_c(TM)$ ένα διανυσματικό πεδίο. Η απόκλιση του X είναι η συνάρτηση $\text{div } X \in C^\infty(M)$ που ορίζεται τοπικά ως:

$$\text{div } X = \sum_{i=1}^n g(e_i, \nabla_{e_i} X) = \text{tr}_g(\nabla X)$$

όπου $(e_1, \dots, e_n)$ είναι μια ορθοκανονική βάση.

Μπορούμε να γενικεύσουμε το θεώρημα απόκλισης του διανυσματικού λογισμού στις πολλαπλότητες Riemann.

Θεώρημα 7.4.4. Έστω (M, g) μια συμπαγής Riemann πολλαπλότητα και $X \in \Gamma_c(TM)$ διανυσματικό πεδίο. Τότε ισχύει η σχέση:

$$\int_M \operatorname{div} X \, d\mu_g = 0.$$

Λήμμα 7.4.5. Έστω M μία συμπαγής πολλαπλότητα Riemann τότε ο τελεστής Dirac $\mathcal{D}$ είναι αυτοσυζυγής ως προς $(\cdot, \cdot)_{L^2} := \int_M \langle \cdot, \cdot \rangle \, d\mu_g$

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι $\mathcal{D}$ είναι αυτοσυζυγής, επιλέγουμε κανονικές συντεταγμένες στο $x \in M$, δηλαδή $(\nabla_{e_i} e_j)(x) = 0, 1 \leq i, j \leq n$, και χρησιμοποιώντας την (7.11) υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}\psi, \varphi) &= \left(\sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i} \psi, \varphi \right) \\ &= - \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \psi, e_i \cdot \varphi) \\ &= - \sum_{i=1}^n [e_i(\psi, e_i \cdot \varphi) - (\psi, \nabla_{e_i}(e_i \cdot \varphi))] \\ &= - \sum_{i=1}^n [e_i(\psi, e_i \cdot \varphi) - (\psi, (\nabla_{e_i} e_i) \cdot \varphi + e_i \cdot \nabla_{e_i} \varphi)] \\ &= |_x - \sum_{i=1}^n e_i(\psi, e_i \cdot \varphi) + (\psi, \mathcal{D}\varphi). \end{aligned}$$

Το άθροισμα στον τελευταίο όρο είναι η απόκλιση ενός μιγαδικού διανυσματικού πεδίου. Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε τα διανυσματικά πεδία $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$ που ορίζονται για κάθε $Y \in TM$ ως

$$g(X_1, Y) + ig(X_2, Y) = (\psi, Y \cdot \varphi).$$

Κάνοντας τις πράξεις:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} X_1 + i \operatorname{div} X_2 &= \sum_{k=1}^n g(\nabla_{e_k} X_1, e_k) + i \sum_{l=1}^n g(\nabla_{e_l} X_2, e_l) \\
 &= \sum_{k=1}^n (e_k g(X_1, e_k) - g(X_1, \nabla_{e_k} e_k)) \\
 &\quad + i \sum_{l=1}^n (e_l g(X_2, e_l) - g(X_2, \nabla_{e_l} e_l)) \\
 &= \sum_{k=1}^n e_k (g(X_1, e_k) + i g(X_2, e_k)) \\
 &= \sum_{k=1}^n e_k (\psi, e_k \cdot \varphi).
 \end{aligned}$$

Τελικά:

$$\mathcal{D}(\psi, \varphi) = -\operatorname{div} X_1 - i \operatorname{div} X_2 + (\psi, D\varphi).$$

Αυτή η εξίσωση δεν εξαρτάται πλέον από την επιλογή συντεταγμένων, οπότε μπορούμε να ολοκληρώσουμε πάνω στο M . Αφού $\partial M = \emptyset$ παίρνουμε:

$$\int_M (\mathcal{D}\psi, \varphi) \nu_g = \int_M (\varphi, \mathcal{D}\psi) \nu_g.$$

□

Ορισμός 7.4.6. Έστω ΣM η δέσμη spinor πάνω σε μια Riemann πολλαπλότητα (M, g) . Ορίζουμε: την επέκταση του φυσικού ερμητιανού γινομένου $(\cdot, \cdot)$ στις τομές του $T^*M \otimes \Sigma M$:

$$(\cdot, \cdot) : \Gamma(T^*M \otimes \Sigma M) \times \Gamma(T^*M \otimes \Sigma M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{C}),$$

με

$$(\alpha \otimes \psi, \beta \otimes \varphi) = g(\alpha, \beta)(\psi, \varphi),$$

όπου g είναι η μετρική που επεκτείνεται στους συνεφαπτόμενους χώρους T^*M μέσω του ισομορφισμού $T^*M \cong TM$ που επάγεται από τη g . Συνεπώς, για κάθε $\omega, \eta \in \Gamma(T^*M \otimes \Sigma M)$, έχουμε:

$$(\omega, \eta) = \sum_{i=1}^n (\omega(e_i), \eta(e_i)),$$

όπου $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι μια τοπική ορθοκανονική βάση του TM .

Ορισμός 7.4.7. Έστω E μία διανυσματική δέσμη πάνω σε μια συμπαγή, προσανατολισμένη, Riemann πολλαπλότητα (M, g) , εφοδιασμένη με μία συνοχή

$$\nabla : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(T^*M \otimes E).$$

Μπορούμε να ορίσουμε τον L^2 -συζυγή τελεστή ∇^* της ∇ ως:

$$\nabla^* : \Gamma(T^*M \otimes E) \rightarrow \Gamma(E),$$

έτσι ώστε:

$$(\nabla^* \varphi, \psi)_{L^2} = (\varphi, \nabla \psi)_{L^2}$$

για κάθε $\varphi \in \Gamma(T^*M \otimes E)$ και $\psi \in \Gamma(E)$.

Ορισμός 7.4.8. Ο διαφορικός τελεστής δεύτερης τάξης:

$$\Delta_B = \nabla^* \nabla,$$

ονομάζεται **Bochner-Laplace**.

Λήμμα 7.4.9. Σε τοπικές συντεταγμένες, ισχύει:

$$\Delta_B = \nabla^* \nabla \psi = - \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \psi. \quad (7.14)$$

Απόδειξη.

$$(\nabla^* \nabla \psi, \varphi)_{L^2} = (\nabla \psi, \nabla \varphi)_{L^2} = \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \psi, \nabla_{e_i} \varphi)_{L^2}.$$

Όπως και στην απόδειξη του 7.4.5., έχουμε:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \psi, \nabla_{e_i} \varphi) &= \sum_{i=1}^n e_i (\nabla_{e_i} \psi, \varphi) - (\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \psi, \varphi) \\ &= \operatorname{div} X_1 + i \operatorname{div} X_2 - \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \psi, \varphi). \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας, προκύπτει η (7.14). $\square$

Είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε τον τύπο Lichnerowicz. Συχνά αναφέρεται και ως τύπος Schrodinger-Lichnerowicz

Θεώρημα 7.4.10. Έστω M μια Riemann πολλαπλότητα spin με βαθμωτή καμπυλότητα S . Ο τελεστής Dirac ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathcal{D}^2 = \nabla^* \nabla + \frac{S}{4} Id_{\Sigma M}. \quad (7.15)$$

Απόδειξη. Σε ορθοκανονικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}^2 &= \left(\sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i} \right) \left(\sum_{j=1}^n e_j \cdot \nabla_{e_j} \right) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n e_i \cdot e_j \cdot \nabla_{e_i} \nabla_{e_j} \\
 &= - \sum_{i=1}^n \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} + \sum_{i < j} e_i \cdot e_j \cdot (\nabla_{e_i} \nabla_{e_j} - \nabla_{e_j} \nabla_{e_i}) \\
 &= \nabla^* \nabla + \frac{1}{2} \sum_{i < j} e_i \cdot e_j \cdot \mathcal{R}_{e_i, e_j}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_i \cdot e_j \cdot \mathcal{R}_{e_i, e_j} &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} e_i \cdot e_j \cdot \left(\frac{1}{4} \sum_{k,l} g(R_{e_i, e_j} e_k, e_l) e_k \cdot e_l \right) \\
 &= \frac{1}{8} \sum_l \left(\sum_{i,j,k} R_{ijkl} e_i \cdot e_j \cdot e_k \right) \cdot e_l \\
 &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{8} \sum_l \left(\frac{1}{3} \sum_{i \neq j \neq k} (R_{ijkl} + R_{jkil} + R_{kijl}) e_i \cdot e_j \cdot e_k \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{i,j} g(R_{e_i, e_j} e_i, e_l) e_i \cdot e_j \cdot e_i + \sum_{i,j} g(R_{e_i, e_j} e_j, e_l) e_i \cdot e_j \cdot e_j \right) \cdot e_l \\
 &\stackrel{(2,8,6)}{=} \frac{1}{8} \sum_{i,j,l} [g(R_{e_i, e_j} e_i, e_l) e_j - g(R_{e_i, e_j} e_j, e_l) e_i] \cdot e_l \\
 &= \frac{1}{8} \left(\sum_{j,l} -Ric(e_j, e_l) e_j \cdot e_l - \sum_{i,l} Ric(e_i, e_l) e_i \cdot e_l \right) \\
 &= -\frac{1}{4} \sum_{i,j} Ric(e_i, e_j) e_i \cdot e_j \\
 &= \frac{1}{4} S
 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ότι (1) : $e_i \cdot e_j \cdot e_k = e_j \cdot e_k \cdot e_i = e_k \cdot e_i \cdot e_j$ για $i \neq j \neq k$. Τελικά:

$$\mathcal{D}^2 = \nabla^* \nabla + \frac{S}{4} Id_{\Sigma M}.$$

□

Βιβλιογραφία

- [1] M. F. Atiyah, R. Bott, and A. Shapiro. "Clifford modules." *Topology*, Volume 3, Supplement 1, Pages 3–38, 1964.
- [2] M. F. Atiyah and I. M. Singer. "The Index of Elliptic Operators: I." *Annals of Mathematics*, 87(3): 484–530, 1968.
- [3] J. P. Bourguignon. "A Spinorial Approach to Riemannian and Conformal Geometry." *EMS Monographs in Mathematics*, 2015.
- [4] R. Brauer and H. Weyl. "Spinors in n Dimensions." *American Journal of Mathematics*, 57(2): 425–449, 1935.
- [5] E. Cartan. "Nombres complexes." In J. Molk (Ed.): *Encyclopédie des sciences mathématiques*, Tome I, vol. 1, Fasc. 4, art. 15, 1908, pp. 329–468.
- [6] E. Cartan. "Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane." *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 41: 53–96, 1913.
- [7] C. Chevalley. "Algebraic theory of spinors." *Columbia Univ. Press*, New York, 1962.
- [8] W. K. Clifford. "Applications of Grassmann's Extensive Algebra." *American Journal of Mathematics*, 1(4): 350–358, 1878.
- [9] W. K. Clifford. "On the Classification of Geometric Algebras." In *Mathematical Papers*, R. Tucker (Ed.), Macmillan, London, 1882, pp. 397–401.
- [10] P. A. M. Dirac. "The Quantum Theory of the Electron." *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 117(778): 610–624, 1928.
- [11] T. Frankel. "The Geometry of Physics: An Introduction." 3rd ed., Cambridge University Press, 2011.

- [12] J. Gallier. "The Cartan-Dieudonné Theorem." In **Geometric Methods and Applications: For Computer Science and Engineering**, pages 197–247, Springer, 2011.
- [13] N. Ginoux. "Dirac operators in Riemannian geometry." *Graduate Studies in Mathematics*, Vol. 25. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [14] A. Haefliger. "Sur l'extension du groupe structural d'un espace fibré." *C. R. Acad. Sci. Paris*. 243: 558–560, 1956.
- [15] O. Hijazi. "Spectral properties of the Dirac operator and geometrical structures." In: *"Geometric Methods for Quantum Field Theory."* Springer International Publishing, 1st ed., 2017, pp. 116–169.
- [16] S. Kobayashi and K. Nomizu. "Foundations of Differential Geometry. Vol. I." Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York, 1963.
- [17] S. Kobayashi and K. Nomizu. "Foundations of Differential Geometry. Vol. II." Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York, 1969.
- [18] S. Lang. "Algebra." Vol. 211 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2001.
- [19] H. B. Jr. Lawson and M.-L. Michelson. "Spin Geometry." *Princeton Mathematical Series*, Vol. 38. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
- [20] J. M. Lee. "Introduction to Riemannian Manifolds." *Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 176. 2nd ed., Springer, 2018.
- [21] J. M. Lee. "Introduction to Smooth Manifolds." *Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 218. 2nd ed., Springer, 2012.
- [22] A. Lichnerowicz. "Champs spinoriels et propagateurs en relativité générale." *Bull. Soc. Math. Fr.* 92: 11–100, 1964.
- [23] P. Lounesto. "Clifford Algebras and Spinors." *London Mathematical Society Lecture Note Series*, Book 286, 2nd ed., Cambridge University Press, 2001.
- [24] J. Milnor. "Spin structures on manifolds." *L'Enseignement Mathématique*. 9: 198–203, 1963.
- [25] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Bristol, UK: Hilger, 2003.

- [26] M. Riesz. "Sur certain notions fondamentales en theorie quantique relativiste." C. R. 10e Congres Math. Scandinaves, Copenhagen, 1946. Jul. Gjellerups Forlag, Copenhagen, 1947, pp. 123–148.
- [27] S. B. Sontz. "Principal Bundles: The Classical Case." Universitext, Springer, 2015.
- [28] J. Vaz Jr. and R. da Rocha Jr. "An Introduction to Clifford Algebras and Spinors." 2nd ed., Oxford University Press, 2016.
- [29] H. Whitney. "Sphere-Spaces." *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 21(7): 464–468, 1935.
- [30] E. Witten. "A Simple Proof of the Positive Energy Theorem". *Commun. Math. Phys.* 80, 1981, p. 381.
- [31] C. N. Yang and R. L. Mills. "Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance." *Physical Review*, 96(1): 191–195, 1954.